

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT ARXITEKTURA – QURILISH INSTITUTI

«OLIV MATEMATIKA VA FIZIKA »

kafedra

REFERAT

**MAVZU: O'ZGARMAS KOEFFISIYENTLI IKKINCHI TARTIBLI BIR
JINSLI BO'LMAGAN CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.
O'ZGARMASLARNI VARIASIYALASH USULI**

Bajardi: Axatov G'.

Tekshirdi: Zikirayev Sh.

Samarqand 2017 y.

**MAVZU: O'ZGARMAS KOEFFISIYENTLI IKKINCHI TARTIBLI BIR
JINSLI BO'LMAGAN CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.
O'ZGARMASLARNI VARIASIYALASH USULI**

Mavzu rejasi:

1. O'zgarmas koefitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar.
2. Yuqori tartibli bir jinslimas chiziqli differensial tenglamalar.

**1.O'zgarmas koefitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan chiziqli
differensial tenglamalar**

Bizga bir jinsli bo'lmagan chiziqli $y'' + py' + qy = f(x)$ (1) tenglama berilgan bo'lsin. **O'zgarmas koefitsientli chiziqli tenglamani** yechishda xususiy yechimni, integrallashni tatbiq etmasdan topish mumkin bo'lgan imkoniyatlarni ko'rib chiqamiz.

Tenglamani o'ng tomoni quyidagi ko'rinishda bo'lsin $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$ (2). Bu yerda $P_m(x)$ - m darajali ko'phad, $e^{\alpha x}$ - ko'rsatkichli funksiya. Quyidagi xususiy hollar bo'lish mumkin.

a) α soni $k^2 + px + q = 0$ **xarakteristik tenglamani** ildizi bo'lmagan hol. Bu holda xususiy yechimni quyidagicha izlaymiz $y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x} = Q_n(x) e^{\alpha x}$ (3). y^* ni (1) tenglamaga qo'yib, barcha hadlarni $e^{\alpha x}$ ko'paytuvchiga qisqartirsak,
 $Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x)$ (4). Bu yerda $Q_n(x)$ - n darajali, $Q_n'(x)$ - $(n-1)$ darajali, $Q_n''(x)$ - $(n-1)$ darajali ko'phadlar.

Bir xil darajali x lar oldidagi koefitsiyentlarini bir-biriga tenglab, noma'lum $A_0, A_1, \dots, A_n$ koefitsiyentlarni topish uchun $(n+1)$ ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

b) α son xarakteristik tenglamaning bir karrali ildizi bo'lgan holda, y^* xususiy yechim quyidagicha topiladi $y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}$.

v) α son xarakteristik tenglamaning ikki **karrali ildizi** bo'lsa, y^* xususiy yechimni $y^* = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$ shakldi izlaymiz.

1-misol: $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$ tenglamani $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ boshlang'ich shartlardagi xususiy yechimini toping.

Yechish: $y'' - 2y' + 5y = 0$ bir jinsli tenglamani umumiy yechimi $y^* = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ bo'ladi. $f(x) = xe^{2x}$ bo'lgani uchun va $a = 2$ xarakteristik tenglamani yechimi bo'lmagani uchun, berilgan tenglamani xususiy yechimini $y^* = (Ax + B)e^{2x}$ ko'rinishda izlaymiz.

$y^* = (Ax + B)e^{2x} = Axe^{2x} + Be^{2x}$, $y^{*'} = (A + 2B + 2Ax)e^{2x}$, $y^{*''} = (4A + 4B + 4Ax)e^{2x}$, y^* , $y^{*'}$, $y^{*''}$ larni qiymatlarini berilgan tenglamaga qo'yib, noma'lum koefitsiyentlar A va B ni topamiz. $5Ax + 5B = x$ dan, $5A = 1$, $A = \frac{1}{5}$, $5B = 0$, $B = 0$. Bu holda $y^* = \frac{1}{5}xe^{2x}$ bo'lar ekan. Demak, bir jinsli bo'lmagan tenglamani umumiy yechimi $y = \bar{y} + y^* = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{5}xe^{2x}$ bo'ladi.

$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ **boshlang'aich shartlarni** qanoatlantiruvchi yechim $y = \frac{1}{5}e^x \sin 2x + \frac{1}{5}xe^{2x}$.

Agar tenglamani o'ng tomoni $f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$ (5). ko'rinishda bo'lsa, ($P(x)$ va $Q(x)$ lar ko'phadlar), u holda xususiy yechimni quyidagicha aniqlaymiz.

a) agar $\alpha + \beta i$ son xarakteristik tenglamani ildizi bo'lmasa, (1) tenglamani xususiy yechimi

$$y^* = u(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + v(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (6)$$

ko'rinishda izlanadi, bunda $u(x)$ va $v(x)$ darajasi $P(x)$ va $Q(x)$ ko'phadlarning eng yuqori darajasiga teng bo'lgan ko'phadlar.

b) $\alpha + \beta i$ soni xarakteristik tenglamani ildizi bo'lsa, (1) tenglamani xususiy yechimi

$$y^* = x[u(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + v(x)e^{\alpha x} \sin \beta x] \quad (7)$$

shaklda izlaymiz. **Xususiy yechimlarni** ko'rinishi (1) tenglamaning o'ng tomonidagi $P(x)$ va $Q(x)$ ko'phadlardan birortasi aynan nolga teng bo'lgan holda ham o'rinaldir.

v) (1) tenglamani o'ng tomoni $f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x$ (8). ko'rinishda bo'lsa, M, N -lar o'zgarmas sonlar.

1) Agar $\beta \cdot i$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasin, bu holda xususiy yechim

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x \quad (9)$$

2) Agar βi xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lsa, xususiy yechimni

$$y^* = x(A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (10)$$

shaklda izlaymiz.

3) Agar $M = 0$ yoki $N = 0$ bo'lsa ham xususiy yechimni (9) yoki (10) ko'rinishda topamiz.

2-misol: $y'' - 4y' + 13y = \sin 2x$ bir jinsli bo'lmagan tenglamani **umumiy integral**ini toping.

Yechish: $k^2 - 4k + 13 = 0 \Rightarrow k_1 = 2 + 3i, k_2 = 2 - 3i$ kompleks ildizlarga ega. Unga mos bir jinsli tenglamani umumiy integrali $\bar{y} = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ bo'ladi. Bir jinsli bo'lmagan tenglamaning **xususiy yechimini** $y^* = A \cos 2x + B \sin 2x$ shaklda izlaymiz, bunda A va B larni topish uchun y^* ni, $y^{*'} va y^{*''}$ larni berilgan tenglamaga qo'ysak

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 8A \sin 2x - 8B \cos 2x + 13A \cos 2x + 13B \sin 2x = \sin 2x.$$

$$\text{Bundan } \begin{cases} -4A + 8B + 13A = 0, \\ -4B + 8A + 13A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{8}{145}, B = \frac{9}{145}.$$

Demak, umumiy yechim $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{8}{145} \cos 2x + \frac{9}{145} \sin 2x$ bo'ladi.

2.Yuqori tartibli bir jinslimas chiziqli differensial tenglamalar

Yuqori tartibli bir jinslimas chiziqli tenglamalar quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (1)$$

Bu tenglamaga mos bir jinsli tenglama

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (2)$$

ko'rinishga ega bo'ladi va uning umumiy yechimi

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (3)$$

bo'ladi. Bu yerda, ikkinchi tartibli bir jinslimas tenglama uchun keltirilgan teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema: Bir jinslimas (1) tenglamaning umumiy yechimi, (2) tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y}$ bilan, (1) tenglamaning y^* xususiy yechimi yig'indisidan iborat bo'ladi.

Isbot: (3) yechimdagi $C_1, C_2, \dots, C_n$ larni x ning funksiyalari deb hisoblab, ixtiyoriy o'zgarmlarni variatsiyalash usuli (metodi) bilan (1) tenglamani xususiy yechimini topamiz.

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \quad (4)$$

(4) tenglamalar sistemasi yechimga ega. Sistemani $C_1, C_2, \dots, C_n$ ga nisbatan yechish mumkin. Ularni integrallab, $C_1 = \int C'_1 dx + \bar{C}_1$, $C_2 = \int C'_2 dx + \bar{C}_2$, ..., $C_n = \int C'_n dx + \bar{C}_n$ larni topamiz, bu yerda $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_n$ -lar **integrallash o'zgarmaslari**. Endi, $y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ (5) ni (1) tenglamaning umuiy yechimi ekanligini ko'rsatamiz. (4) tenglamaning e'tiborga olib, (5) ifodani n -marta differensiallaymiz

$$y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

$$y^* = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n',$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$y^{*(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} + f(x).$$

Bu tenglamaning birinchisini a_n ga, ikkinchisini a_{n-1} ga va oxirgisini 1 ga ko'paytirib, qo'shsak, $y^{*(n)} + a_1 y^{*(n-1)} + \dots + a_n y^* = f(x)$ hosil qilamiz. O'ng tomondagi vertikal ustunlar bo'yicha qo'shilgan hadlar yig'indisi nolga teng, chunki $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar bir jinsli (2) tenglamani yechimi, $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_n$ -ixtiyoriy o'zgarmaslardir. Shuning uchun, u (1) tenglamani umumiy yechimidir. Teorema isbot bo'ldi.

3-misol: $y^{IV} - 16y = 64(x+3)e^{2x}$ tenglamani umumiy yechimini toping.

Yechish: $k^4 - 16 = 0 \Rightarrow k^2 + 4 = 0, k^2 - 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = -2, k_3 = 2i, k_4 = -2i$. U holda $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$ xususiy yechimni, $y^* = (Ax + B)xe^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$ shaklda izlaymiz. $y^{*'} = (2Ax^2 + (2A + 2B)x + B)e^{2x}$, $y^{*''} = (4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B)e^{2x}$, $y^{*'''} = (8Ax^2 + (24A + 8B)x + (12A + 12B))e^{2x}$, $y^{*IV} = (16Ax^2 + (64A + 16B)x + 48A + 32B)e^{2x}$. $(16Ax^2 + (64A + 16B)x + 48A + 32B - 16Ax^2 - 16Bx)e^{2x} = 64(x+3)e^{2x}$, $64A = 64, 16A - 16A = 0, \Rightarrow A = 1, 48A + 32B = 192, \Rightarrow 32B = 192 - 48, \Rightarrow 32B = 44, \Rightarrow B = \frac{9}{2}$.

Demak, xusuiy yechim $y^* = \left(x + \frac{9}{2}\right)xe^{2x}$, u holda umumiy yechim $y = \bar{y} + y^*$ va

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x) + \left(x + \frac{9}{2}\right)xe^{2x} \text{ bo'ladi.}$$

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Пискунов Н.С. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. 1-қисм. –Тошкент: Ўқитувчи, 1985.
2. Пискунов Н.С. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. 2-қисм. –Тошкент: Ўқитувчи, 1986.
3. Соатов Ё.У. Олий математика. 1-жилд. – Т.: Ўқитувчи, 1994.
4. Соатов Ё.У. Олий математика. 2-жилд. – Т.: Ўқитувчи, 1995.
5. Соатов Ё.У. Олий математика. 3 -жилд. – Т.: Ўқитувчи, 1996.
6. Соатов Ё.У. Олий математика. 4 -жилд. – Т.: Ўқитувчи, 1998
7. Соатов Ё.У. Олий математика. 5 -жилд. – Т.: Ўқитувчи, 2000.
8. Danko P.E., Popov A.G., Kojevnikova T.E. Oliy matematika mashqlar va masasalarda. 1-qism.– Toshkent, “O’qituvchi”, 2009 y.
9. Danko P.E., Popov A.G., Kojevnikova T.E. Oliy matematika mashqlar va masasalarda. 2-qism.– Toshkent, “O’qituvchi”, 2009 y.
10. Минорский В.П. Олий математикадан масалалар тўплами. – Т.: Ўқитувчи, 1982.