

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT ARXITEKTURA – QURILISH INSTITUTI

«OLIV MATEMATIKA VA FIZIKA »

kafedra

REFERAT

**MAVZU: « O'ZGARMAS KOEFFISIYENTLI IKKINCHI TARTIBLI
BIR JINSLI VA BIR JINSLIMAS CHIZIQLI DIFFERENSIAL
TENGLAMALAR »**

Bajardi: Axatov G'.

Tekshirdi: Zikiryayev Sh.

Samarqand 2017 y.

MAVZU: O'ZGARMAS KOEFFISIYENTLI IKKINCHI TARTIBLI BIR JINSLI VA BIR JINSLIMAS CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

Mavzu rejasi:

1. O'zgarmas koeffisientli ikkinchi tartibli bir jinsli va bir jinslimas chiziqli differensial tenglamalar.
2. Bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.
3. Ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli.

Ikkinchi tartibli **bir jinsli chiziqli tenglama**

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

berilgan bo'lsin, bunda p, q - o'zgarmas haqiqiy sonlar. Tenglamani umumiy yechimi (integrali)ni topish uchun ikkita chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarini topish kerak. Xususiy yechimlarni $y = e^{kx}$ ($k = \text{const}$) (2) ko'rinishda izlaymiz, u holda $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ bo'lganligidan, ularni (1) tenglamaga qo'yib $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$ ni hosil qilamiz. Bundan, $k^2 + pk + q = 0$ (3) ekanligi ma'lum, chunki $e^{kx} \neq 0$. (3) tenglamaga (1) tenglamani xarakteristik tenglamasi deyiladi. Bu kvadrat tenglama bo'lib, u ikkita ildizga ega:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Bu yerda quyidagi xususiy xollar bo'lishi mumkin:

- 1) k_1, k_2 - haqiqiy va har xil sonlar;
- 2) k_1, k_2 - kompleks sonlar;
- 3) k_1, k_2 - haqiqiy va bir-biriga teng sonlar bo'lishi mumkin. Bularni alohida-alohida ko'rib chiqamiz.

1. Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil bo'lgan hol

Bu holda, $k_1 \neq k_2$, demak, yechimlar $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ ko'rinishga ega, ular chiziqli bog'liq emas, $\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const}$ bo'lgani uchun umumiy yechimi 5-xossaga asosan $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ bo'ladi.

1-misol: $y'' - 4y' + 3 = 0$ tenglamani yechimini toping.

Yechish: Xarakteristik tenglama tuzamiz $k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 3$.

Demak, umumiy yechim $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ bo'ladi.

2. Xarakteristik tenglamani ildizlari kompleks sonlar bo'lgan hol

Tenglamaning ildizlari $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ ga teng bo'lib, $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ ko'rinishga ega. U holda xususiy yechimlarni $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$, $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$ shaklda yozish mumkin. Agar **haqiqiy argumentning kompleks funksiyasi** $y = u(x) + iv(x)$ berilgan (1) tenglamani qanoatlantirsa, u holda $u(x)$, $v(x)$ funksiyalar ham shu tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham:

$$(u + iv)'' + p(u + iv)' + q(u + iv) = 0 \Rightarrow (u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0.$$

Kompleks funksiya nolga teng bo'ladi, agarda haqiqiy qismi ham, mavhum qismi ham nolga teng bo'lsa, ya'ni

$$u'' + pu' + qu = 0, \quad v'' + pv' + qv = 0,$$

bu esa $u(x)$, $v(x)$ lar yechim ekanligini isbotlaydi. U holda y_1 va y_2 larni yozamiz

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - ie^{\alpha x} \sin \beta x,$$

bulardan $\tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $\tilde{y}_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ larni olamiz, chunki ular o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlardir. Tenglamaning umumiy yechimi esa

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \text{ ko'rinishga ega bo'ladi.}$$

2-misol: $y'' - 4y' + 13y = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: Xarakteristik tenglamasi $k^2 - 4k + 13 = 0$, uni ildizlari $k_1 = 2 + 3i$, $k_2 = 2 - 3i$ ga teng, u holda uning umumiy yechimi $y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ bo'ladi.

3. Xarakteristik tenglamani ildizlari haqiqiy va bir biriga teng bo'lgan hol

$k_1 = k_2 = k$ bo'lsin, u holda $y = e^{k_1 x}$, $y = e^{k_2 x}$ bo'lib, ular o'zaro chiziqli bog'liq bo'lib qoladi va tenglamaning umumiy yechimini yoza olmaymiz. Bu tenglik uchun tenglamaning ikkinchi yechimi $y = u(x)e^{k_1 x}$ ko'rinishda bo'ladi. Buni (1) tenglamaga qo'yish uchun birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni olamiz. $y' = u'e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x}$, $y'' = u''e^{k_1 x} + 2k_1 u'e^{k_1 x} + k_1^2 u e^{k_1 x}$, u holda differensial tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$e^{k_1 x} [u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0. \quad (4)$$

Bu yerda $k_1^2 + pk_1 + q = 0$, chunki k_1 xarakteristik tenglamani ildizi, $2k_1 + p = 0$, chunki $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$. U holda, (4) tenglikdan hisobga olib, $u'' = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu tenglikni integrallab $u = Ax + B$ ni hosil qilamiz. $A = 1$, $B = 0$, deb olsak, $u = x$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, ikkinchi xususiy yechimni $y = xe^{k_1 x}$ ko'rinishda olish mumkinligini ko'rsatdik. Demak, differensial tenglamani umumiy yechimi $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$ shaklda bo'lar ekan.

3-misol: $y'' - 4y' + 4y = 0$ tenglamani yechimini toping.

Yechish: Xarakteristik tenglamasi $k^2 - 4k + 4 = 0$, ildizlari $k_1 = k_2 = 2$ ga teng, **karrali**, u holda umumiy yechim $y = e^{2x} (C_1 + C_2 x)$ bo'ladi.

Endi n -tartibli

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (5)$$

bir jinsli chiziqli differensial tenglamalarni qaraymiz. Quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

Ta'rif: Agar $[a, b]$ kesmada aniqlangan $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar uchun $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n = 0$

tenglik faqat va faqat $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, u holda $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan yoki **erkli funksiyalar** deyiladi. Aks holda, ya'ni shunday $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) mavjud bo'lmasa, funksiyalar chiziqli bog'liq deyiladi.

Teorema: Agar $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar (5) tenglamaning erkli yechimlari bo'lsa, u holda

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0 \quad (6)$$

uning umumiy yechimi bo'ladi, bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Tenglamani xususiy yechimini $y = e^{kx}$ ko'rinishda izlaymiz. U holda, $y' = k e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, ..., $y^{(n)} = k^n e^{kx}$. Xarakteristik tenglamasi $k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Xarakteristik tenglamaning ildizlarini topamiz, $k_1, k_2, \dots, k_n$ ildizlarning xarakteriga qarab, xususiy yechimlarni aniqlaymiz.

- 1) har bir oddiy ildiz uchun e^{kx} xususiy yechim;
- 2) har bir juft $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ va $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ qo'shma kompleks ildiz uchun $e^{\alpha x} \cos \beta x$ va $e^{\alpha x} \sin \beta x$ xususiy yechimlar;
- 3) har bir r karrali haqiqiy ildiz uchun e^{kx} , $x e^{kx}$, $x^2 e^{kx}$, ..., $x^{r-1} e^{kx}$ erkli xususiy yechimlar;
- 4) har bir μ karrali juft $k^{(1)} = \alpha + \beta i$, $k^{(2)} = \alpha - \beta i$ qo'shma kompleks ildizlarga 2μ ta, $e^{kx} \cos \beta x$, $x e^{kx} \cos \beta x$, $x^2 e^{kx} \cos \beta x$, ..., $x^{\mu-1} e^{kx} \cos \beta x$, $e^{kx} \sin \beta x$, $x e^{kx} \sin \beta x$, $x^2 e^{kx} \sin \beta x$, ..., $x^{\mu-1} e^{kx} \sin \beta x$ yechimlar to'g'ri keladi. n ta chiziqli erkli $y_1, y_2, \dots, y_n$ xususiy yechimlarni topgandan keyin berilgan chiziqli tenglamaning umumiy yechimini topamiz $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$, bunda $C_1, C_2, \dots, C_n$ -ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Agar $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$, ..., $y^{(n)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$ boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsa, bularga asosan $C_1, C_2, \dots, C_n$ o'zgarmaslar aniqlanib, differensial tenglamani xususiy yechimi topiladi.

4-misol: $y^{IV} + 2y'' - 3y = 0$ tenglamani umumiy yechimini toping.

Yechish: Xarakteristik tenglamasi $k^4 + 2k^2 - 3 = 0$. Ildizini topsak, $k^2 = t$, $t^2 + 2t^2 - 3 = 0$, $t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$, $t_1 = 1$, $t_2 = -3$, $k^2 = 1$, $k_{1,2} = \pm 1$, $k^2 = -3$, $k_{3,4} = \pm \sqrt{3}i$. Demak, umumiy yechim $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 \sin \sqrt{3}x$ ko'rinishda bo'ladi.

2. O'zgaras koeffitsiyentli bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Bizga **bir jinsli bo'lmagan** ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama berilgan bo'lsin

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) . \quad (1)$$

(1) tenglamaga mos keluvchi, bir jinsli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (2)$$

bo'ladi. (1) va (2) dagi a_1 va a_2 lar o'zgaras sonlar.

Teorema: Bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamaning umumiy yechimi, (2) tenglamaning $\bar{y}$ umumiy yechimi bilan (1) tenglamaning y^* xususiy yechimi yig'indisiga teng.

Isbot: $y = \bar{y} + y^*$ (3), (1) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi. Avvalo, (3) funksiya (1) tenglamaning yechimi ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun (3)ni (1) ga qo'yib,

$$(\bar{y} + y^*)'' + a_1(\bar{y} + y^*)' + a_2(\bar{y} + y^*) = f(x)$$

yoki

$$(\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y}) + (y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^*) = f(x) \quad (4)$$

ni topamiz. $\bar{y}$ (2) tenglamani yechimi bo'lgani uchun, birinchi qavs ichida turgan ifoda aynan nolga teng, y^* (1) tenglamaning yechimi bo'lgani uchun, ikkinchi qavs ichidagi $f(x)$ ga teng bo'ladi. Demak (4) tenglik ayniyatdan iborat. Shunday qilib, teoremani birinchi qismi isbot bo'ldi. Endi (3) ifoda (1) tenglamaning umumiy yechimi bo'lishini isbot qilamiz, ya'ni unga kirgan ixtiyoriy o'zgaras miqdorlar

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0 \quad (5)$$

boshlang'ich shartlarni x_0, y_0 va y'_0 har qanday bo'lganda ham qanoatlantiradigan qilib tanlab olish mumkinligini isbot qilamiz. Bizga ma'lumki,

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

u holda

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^* \quad (5')$$

shartni e'tiborga olsak,

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + y_0^* = y_0 \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + y_0^* = y'_0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi kelib chiqadi. Bundan C_1 va C_2 larni topish mumkin.

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0 - y_0^* \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = y'_0 - y_0^* \end{cases} \quad (6)$$

ni determinanti $x = x_0$ nuqtada, y_1 va y_2 funksiyalar uchun **Voronskiy determinanti** bo'ladi. Bu funksiyalar shartga ko'ra chiziqli erkli, demak Voronskiy determinanti nolga teng bo'lmaydi. U holda (6) sistema C_1 va C_2 yechimga ega, ya'ni (3) formula (1) tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini aniqlaydi. Shunday qilib, teorema isbot qilindi. Demak, bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamani integrallashda asosiy masala, biror y^* xususiy yechimni topishdan iborat. Endi bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamaning xususiy yechimini topishning umumiy usulini ko'rib chiqamiz.

3. Ixtiyoriy o'zgarmaslarni variatsiyalash usuli

Bizga ma'lumki bir jinsli $y'' + py' + qy = 0$ tenglamani umumiy yechimi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (7)$$

C_1 va C_2 larni x ning hozircha noma'lum funksiyasi deb qarab, (1) ko'rinishdagi bir jinslimas tenglamani xususiy yechimini (7) ko'rinishda izlaymiz. (7) ni differensiallab

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C'_1 y_1 + C'_2 y_2$$

C_1 va C_2 funksiyalarni $C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0$ tenglik bajariladigan qilib tanlab olamiz. Birinchi tartibli y' hosila $y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2$ ko'rinishda bo'ladi. Bu ifodani differensiallab y'' ni topamiz

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' \quad (8)$$

y , y' va y'' larni (1) tenglamaga qo'ysak,

$$C_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Birinchi ikkita qavs ichida turgan ifodalar nolga aylanadi, chunki y_1 va y_2 bir jinsli tenglamaning yechimlari. U holda

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \quad (9)$$

bo'ladi. C_1 va C_2 lar (8) va (9) sistemani qanoatlantirsa, ya'ni $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$

bo'lsa, (7) funksiya (1) tenglamani yechimi bo'ladi. Ammo, bu sistemaning determinanti chiziqli erkli y_1 va y_2 funksiyalarning Voronskiy determinanti bo'lgani uchun nolga teng bo'lmaydi, u holda sistemani yechib C_1' va C_2' ni x ning noma'lum funksiyalari sifatida aniqlaymiz.

$C_1' = \varphi_1(x)$, $C_2' = \varphi_2(x)$ larni integrallab

$$C_1 = \int \varphi_1(x) dx + \bar{C}_1, \quad C_2 = \int \varphi_2(x) dx + \bar{C}_2$$

larni topamiz, bu yerda $\bar{C}_1$ va $\bar{C}_2$ o'zgarmas sonlar. Topilgan C_1 va C_2 ni (7) ga qo'ysak, $\bar{C}_1$ va $\bar{C}_2$ miqdorlarga bog'liq, (1) tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

5-misol: $y'' \operatorname{ctgx} + y' = \sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: $y'' \operatorname{ctgx} + y' = 0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

Bizga ma'lumki $\frac{y''}{y'} = \operatorname{ctgx}$. Buni integrallasak $\ln y' = \ln \sin x + \ln C_1$, bu yerdan

$$y' = C_1 \cdot \sin x, \quad y = -C_1 \cdot \cos x + C_2$$

Oxirgi ifoda berilgan tenglamaning yechimi bo'lishi uchun C_1 va C_2 ni x ning

funksiyasi sifatida aniqlaymiz. $\begin{cases} C_1' \sin x + C_2' \cdot 0 = \sin x \\ -C_1' \cos x + C_2' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = 1 \\ C_2' = \cos x \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} C_1 = x + \bar{C}_1 \\ C_2 = \sin x + \bar{C}_2 \end{cases}$$

Topilganlarni $y = -C_1 \cos x + C_2$ ga qo'yib, bir jinsli bo'lmagan tenglamani umumiy yechimini topamiz $y = \bar{C}_1 \cos x + \bar{C}_2 + \sin x - x \cdot \cos x$. Agar bir jinsli tenglamani o'ng tomoni ikkita funksiyaning yig'indisidan iborat bo'lsa

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x) \quad (10)$$

Bu tenglamani $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x)$ va $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x)$ ko'rinishda yozib olib, ularni xususiy yechimlarini y_1^* va y_2^* lar desak, (10) tenglamaning xususiy yechimi $y^* = y_1^* + y_2^*$ bo'ladi. Demak (10) ning umumiy yechimi $y = \bar{y} + y_1^* + y_2^*$ ko'rinishda bo'ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Пискунов Н.С. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. 1-қисм. –Тошкент: Ўқитувчи, 1985.
2. Пискунов Н.С. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. 2-қисм. –Тошкент: Ўқитувчи, 1986.
3. Соатов Ё.У. Олий математика. 1-жилд. – Т.: Ўқитувчи, 1994.
4. Соатов Ё.У. Олий математика. 2-жилд. – Т.: Ўқитувчи, 1995.
5. Соатов Ё.У. Олий математика. 3 -жилд. – Т.: Ўқитувчи, 1996.
6. Соатов Ё.У. Олий математика. 4 -жилд. – Т.: Ўқитувчи, 1998
7. Соатов Ё.У. Олий математика. 5 -жилд. – Т.: Ўқитувчи, 2000.
8. Danko P.E., Popov A.G., Kojevnikova T.E. Oliy matematika mashqlar va masalalarda. 1-qism.– Toshkent, “O'qituvchi”, 2009 y.
9. Danko P.E., Popov A.G., Kojevnikova T.E. Oliy matematika mashqlar va masalalarda. 2-qism.– Toshkent, “O'qituvchi”, 2009 y.
10. Минорский В.П. Олий математикадан масалалар тўплами. – Т.: Ўқитувчи, 1982.