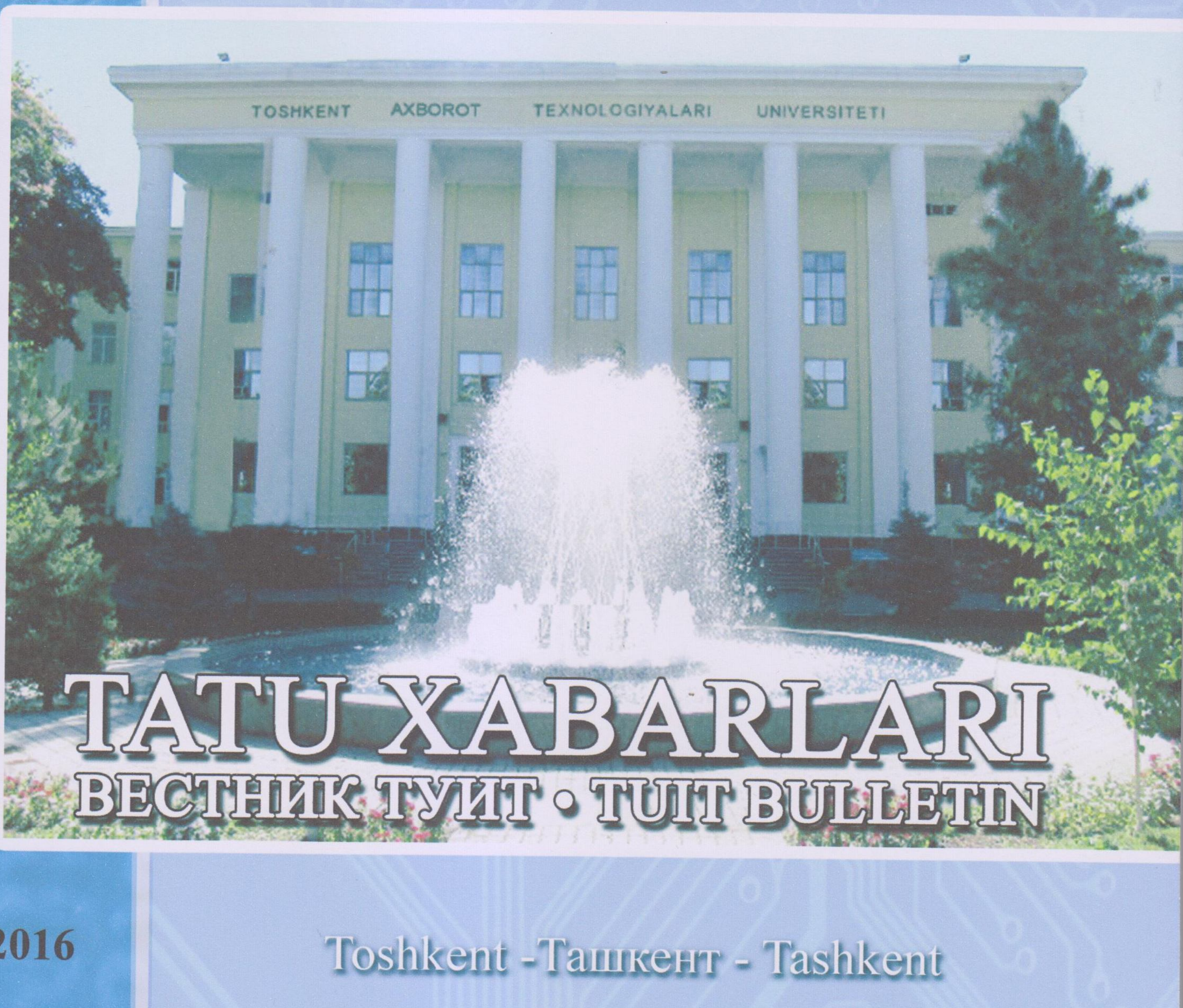
ISSN 2010-9857

O'zbekiston Respublikasi Axborot texnologiyalari va kommunikatsiyalarini rivojlantirish vazirligi
Toshkent axborot texnologiyalari universiteti

Министерство по развитию информационных технологий и коммуникаций Республики Узбекистан
Ташкентский университет информационных технологий

Ministry for development of information technologies and communications of the Republic of Uzbekistan
Tashkent University of Information Technologies



TATU XABARLARI

ВЕСТНИК ТУИТ • TUIT BULLETIN

2(38)/2016

Toshkent - Ташкент - Tashkent

УДК 004.056.53

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРНОСТЕЙ ФРАКТАЛОВ ПРИ ОБРАБОТКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ И СИГНАЛОВ

Туйчиев Б.О.

Фрактал ўлчамларини аниқлаш усулларини таҳлили кўриб чиқилган. Дисперсия, корреляция ва ўхшашлик ўлчамларини аниқлаш усуллари ҳамда ҳисоблаш алгиритмларида вужудга келадиган қийинчиликларини бартараф этиш йўллари кўрсатилган.

Таянч иборалар: фрактал, ўлчам, ишлов бериш, тасвир, сигнал, ўхшашлик, корреляция, дисперсия.

Проведен анализ методов определения фрактальных размерностей. Показаны методы определения размерностей подобия, корреляционной размерности и дисперсионной размерности. Указаны пути преодоления возникающих трудностей в вычислительных алгоритмах.

Ключевая слова: фрактал, размерность, обработка, изображения, сигнал, подобия, корреляция, дисперсия.

In the article is analyzed the methods of determining the fractal dimensions. Also is considered methods for determining the dimensions of similarity, correlation dimension and the dimension of the dispersion. And is shown ways to overcome the difficulties encountered in numerical algorithms.

Key words: fractal, dimension, treatment, images, signal, similarity, correlation, dispersion.

I. Введение

В истории науки нередко возникает ситуация, когда какое-то исследование мгновенно взывает огромный поток работ.

Так было, например, когда появились первые публикации Н. Хомского по формальным грамматикам. Весьма похожей была ситуация с бурным развитием теории автоматов. Примерно так же выглядел этап создания нечётких множеств американским учёным Л. Заде. Другому американскому учёному Б. Мандельброту мы обязаны возникновением ещё одной аналогичной ситуации.

Роль стимулятора сыграла появившаяся монография в 1982 г. Б. Мандельброта, которая называлась «The fractals geometry of nature».[1].

Идея фракталов быстро нашла отклик среди исследователей из разных стран мира. Успех применения фрактальной геометрии в различных областях естествознания обусловлен прежде всего тем, что фрактальные формы или фракталы присущи огромному числу процессов структур в природе. В настоящее время фракталы стремительно вторгаются в физику, радиоэлектронику, биологию, медицину, психологию, экономику, социологию.

II. Основная часть

В ИРЭ РАН начиная с 80-х гг. XX века под руководством А.А. Потапова ведутся работы по созданию прорывных информационных технологий в рамках междисциплинарного научного направления «Фрактальная радиофизика и фрактальная радиоэлектроника». Были развёрнуты теоритические и экспериментальные работы по применению теории фракталов при обработке, выделении и распознавании сверхслабых сигналов в оптическом и миллиметровом диапазонах длин волн. В этих работах с самого начала была заложена идея фрактальной цифровой обработки малоконтрастных изображения. Результаты этих исследований [2,3] дают достаточно формализованное математическое определение фрактала:

"Фрактал – это функциональное отображение или множество, получаемое конечным рекурсивним процессом и имеющее следующие свойства: 1) самоподобие или масштабную инвариантность, т.е. фракталы на малых масштабах выглядят в среднем так же, как и на больших; 2) их размерность (называемая размерностью Хаусдорфа) дробная и строго больше топологической размерности; 3) не дифференцируемость и оперирование «дробными производными и интегралами»".

Физическое определение фрактала: "Фракталы – это геометрические объекты (линии, поверхности, тела), имеющие сильно изрезанную структуру и обладающие свойством самоподобия в ограниченном масштабе".

Фрактальные методы обработки сигналов в щироком смысле основаны на той части информации, которая при классических методах обработки безвозвратно терялась. Иначе говаря, классические методы обработки сигналов выделяют только ту информацию, которая описывается целой мерой, а фрактальные методы могут функционировать на всех уровнях сигнала: амплитудном, частотном, фазовом и поляризационном.

Одним из важных вопросов при фрактальной обработке сигналов и изображений является определение размерности фрактала. Целью настоящей работы состоит в анализе методов их определения.

Размерность подобия. Бесспорным преимуществом размерности Хаусдорфа является возможность её экспериментального определения. Как известно, эта размерность определяется из следующего выражения:

$$D = -log_{l2/l1}\frac{N_2}{N_1} \ ,(1)$$

где, l_1,l_2-образцы с определёнными длинами, N_1,N_2-количество образцов покрывающих множество. Например, прямоугольник площадью 64 единицы, может быть, покрыть 16-ю площадками l_2 площадью 4 единицы (сторона 2) или 64 площадками l_1 площадью в 1 единицу (сторона 1). Тогда, размерность прямоугольника будет D=-$\log_{2/1}\frac{16}{64} = 2$. Вообще, для гладких объектов размерностью больше 2 будем получать целые значения D=3,4,… .

Размерности подобия удобно применять в случае объектов, имеющих явное масштабное подобие. Такими объектами являются самоподобие фракталы – кривая Коха, множество Мандельброта, Жюлиа [2,3]. В случаях, когда подобие трудно установить, удобно применять приближённое вычисление размерности Хаусдорфа.

Для приближённого измерения размерности Хаусдорфа на исходном множестве (выборки) x(t) устанавливается некоторая "мера"- например, длина графика выборки. Далее выборку измеряют с помощью образца фиксированной длины – δ.

Далее выборку измеряют образцом длины в 2δ. В итоге получаем две оценки длины А на масштабе "δ - в виде A_1 и на масштабе 2δ – в виде A_2". Размерность вычисляется по формуле:

$$D_{x(t)} = log_2 \frac{A_1}{A_2} \quad (2)$$

Если длина измеряется целым числом образцов, то размерность может быть вычислена по формуле (1).

Реализация описанного метода наталкивается на трудности, связанные с большим объемом вычислений.

Можно уменьшить число шагов алгоритма следующим образом - взять из упорядоченной выборки точки с координатами, отстоящими на δ, 2δ и т.д.

Кроме размерности подобие D существуют и другие определения размерности Хаусдорфа. Большинство этих размерностей тоже очень хорошо оценивается экспериментально.

Корреляционная размерность. Эта размерность часто применяется для объектов больших размерностей, особенно в тех случаях, когда наблюдается не весь объект, а только его сечение гиперплоскостью меньшей размерности. Кроме этого, выборка не обязана быть упорядоченной. Примером может служить анализ временных рядов, когда для наблюдения доступно только одна переменная система (напряжения, ток, скорость).

Вместо понятия "длина" используется корреляционный интеграл C(r). Он дает вероятность того, что временный ряд содержит пару точек, расстояние между которыми не превышает r. Вычисление корреляционного интеграла C(r) начинается с малых r значений по формуле:

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1;i\neq j} \eta(r - [x_i - x_j]), \quad (3)$$

где η(z) – функция Хевисайда; N – число наблюдений; r- расстояние; x_i x_j-

элементы выборки.

Для многих фракталов корреляционный интеграл зависит от r при r → 0 по стенному закону, т.е.

$$-D_c = \frac{\log(C(r)) - const}{\log r} \quad (5)$$

Это значение D_c (5) называется корреляционной размерностью. Пусть наблюдается скалярная функция времени f(t). Найдем последовательно произведение по времени: f'(t), f'(t)..., $f^{(n)}(t)$. Далее последовательно строим фазовые пространства от $\{f(t), f'(t)\}$ до $\{f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)\}$ и вычислим в каждом из них корреляционные интегралы C(r) (3). После некоторой интеграции значения C(r) перестанет меняться, что свидетельствует о достижении размерности вложения и об установлении числа независимых переменных систем. Этот метод нахождения корреляционной размерности называется методом последовательного дифференцирования. Этот метод позволяет точно восстановить фазовые траектории системы, но только теоритически, и поэтому не применяется в основном в теоритических расчетах и некоторых задачах, связанных с визуализаций фазовых траекторий исследуемой системы.

Другой метод восстановления фазового пространства системы был предложен Такенсом. По Такенсу можно вычислить корреляционный интеграл (3) и фрактальную размерность по измерению временной последовательности лишь одной составляющей. Следуя Таксису, необходимо сконструировать пространство вложения с m' – мерным вектором по значениям одной физической переменной:

$$\vec{x_i} = \vec{x}(t_i) = \{x(t_i), x(t_i - T), \ldots, x(t_i + (m-1)T\} \quad (6)$$

Взятым со сдвигом T. Считается, что зависимость (4) сохраняется для любого m$\geq int\,[D]$, где $[D]$ - операция выделения целой части D, а D - истинная размерность объекта.

Оказывается, что фазовая пространство, восстанавливаемое таким образом, имеет ту же размерность и тот же спектр показателей Ляпунова, что исходное пространство. Величина

$$N \geq int\,[D]+1, \quad (7)$$

определяет число дифференциальных уравнений первого порядка, необходимых для описания физического поведения исследуемого объекта.

Дисперсионная размерность. Данный вид размерности удобно использовать в стохастических структур. Для нашего случая это стохастические фрактальные сцены или одномерный фрактальный сигнал. В качестве обоснования данного метода используют тот факт, что спектр мощности S(ω) фрактальных сигналов имеет следующий вид [1,3]:

$$S(\omega)\approx \omega^{-\beta}\ ,(8)$$

Если процесс фрактальный и вложен в евклидово пространство с размерностью D_0, то он будет иметь размерность $D = D_0 + \frac{3-\beta}{2}$, откуда β=3+2($D_0 - D$). Заметив, что β зависит только от D, можно для удобства переписать (8) как S(ω)≈ ω^{-D}, где D' – оценка фрактальной размерности.

Рассмотрим случайный процесс X(t) со спектром мощности S(ω) при $0 \leq \omega \leq \Omega, \Omega < \infty$. По теореме Винера- Хопфа

$$\int_0^{\infty} S(\omega)d\omega = \int_0^{\Omega} S(\omega)d\omega = R(0) = \sigma_1^2.$$

Пусть, согласно (8), считаем S(ω)≈ $\omega^{-D'}$.
Тогда

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{-D'+1}\ \omega^{(-D'+1)}\Big|_0^{\Omega}.$$

Если произвести фильтрацию процесса X так, чтобы его полоса составила $\frac{\Omega}{2}$, получим:

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{-D'+1}\ \omega^{(-D'+1)}\Big|_0^{\frac{\Omega}{2}}.$$

При D'> 1, найдем отношение

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 2^{(-D'+1)},$$

откуда,D'=1-$log_2\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, или, если спектр обрезается с масштаба m до масштаба n, то

$$D' = 1 - \frac{log\sigma_1^2 - log\sigma_2^2}{logm - logn}.\ (9)$$

Логарифм в (9) может быть взят по любому основанию. Критерием является только удобство вычисления. Теперь можно определить дисперсионную фрактальную размерность:

$$D_\sigma = D_0 + \frac{3+D'}{2}\ .(10)$$

Для оценки фрактальной размерности нами было сгенерирована выборка некоторого процесса с независимыми приращениями с заданной мощностью.

Представленный спектр аппроксимировали степенной зависимости с некоторым дробным показателем. Измерения, проведенные с помощью масштабирования и измерения «длины» последовательности, дали значениия $D_l = 1{,}44$. Измерения с помощью оценки дисперсии дали $D_\sigma = 1{,}489$,а с помощью измерения корреляционного интеграла $D_c = 1{,}62$.

III. Заключение

Проведенный анализ методов определения фрактальных размерностей показывает, что существуют определенное количество фрактальных размерностей и каждая из них используются исходя из удобства применения ,т.е. зависит от природы объекта исследования. В результате анализа установлено, что размерность подобия целесообразно использовать для объектов, имеющих явное масштабное подобие. В случае, когда подобие трудно установить, размерность вычисляется приближенно. Для объектов имеющих больших размерностей удобнее использования корреляционной размерности. Для объектов имеющих стохастическую структуру наиболее подходящей размерностью является дисперсионная размерность. Оценка фрактальной размерности произвольной сгенерированной выборки показало, что фрактальные размерности рассмотренных методов почти не отличаются.

Литература

1. Mandelbrot B.B. The Fractals Geometry of Nature – N.Y: Freeman, 1982- 468c.
2. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и в радиолокации. – М:Логос, 2002.- 664с.
3. Потапов А.А. Фракталы и хаос основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах. М:- Техносфера, 2006.