

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT
UNIVERSITETI**



“OLIIY MATEMATIKA” KAFEDRASI

**IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA
FANI BO'YICHA
MA'RUZA MATN**

Toshkent – 2016

1-MAVZU. CHIZIQLI ALGEBRA

1.1. Matrisalar

1.2. Matrisalar ustida amallar

1.3. Determinantlar

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, bahs-munozara, ma'ruza.

1.1.1. Matrisalar

Ta'rif. O'lchamlari $m \times n$ bo'lgan matritsa deb, satrlar soni m ga, ustunlar soni n ga teng bo'lgan va $m \cdot n$ ta sondan tashkil topgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi sonli jadvalga aytiladi.

Ta'rif. Agar diagonal matritsada barcha $i = \overline{1, n}$ lar uchun $a_{ii} = 1$ bo'lsa, bunday matritsa birlik matritsa deb ataladi va E bilan belgilanadi, ya'ni

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Matrisalar ustida amallar

Ta'rif. Bir xil $m \times n$ o'lchamli $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ matritsalar uchun ularning yig'indisi deb shunday $m \times n$ o'lchamli $C = (c_{ij})$ matritsaga aytiladiki, istalgan $i = \overline{1, n}$ va $j = \overline{1, m}$ lar uchun c_{ij} -element, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ tenglik orqali aniqlanadi va matritsalar yig'indisi $A+B$ shaklda belgilanadi, ya'ni $C=A+B$

Ta'rif. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ va $B = (b_{ij})_{n \times k}$ matritsalar ko'paytmasi deb, o'lchami $m \times k$ bo'lgan shunday $C = (c_{ij})_{m \times k}$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} -elementi,

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, k}$$

tenglik orqali aniqlanib, matritsalar ko'paytmasi $A \cdot B$ ko'rinishda ifodalanadi, ya'ni $C = A \cdot B$.

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-marta}} - A \text{ matritsaning « } k\text{-darajasi} \text{»}.$$

Ta'rif. Agar A matritsa elementlarining tartib raqamlarini o'zgartirmagan holda satrlarini ustun yoki ustunlarini satr qilib almashtirsak, hosil bo'lgan yangi matritsa A matritsaning transponirlangani deb nomlanib, A' (yoki A^T) shaklda belgilanadi.

Amallarning xossalari

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,
5. $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$;
6. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Shuni ta'kidlash kerakki $A \cdot B$ va $B \cdot A$ ko'paytmalar mavjud bo'lgan taqdirda ham $A \cdot B = B \cdot A$ tenglik o'rinli bo'lmayligi mumkin.

Masalan. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 10,5 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ matrisalar uchun ko'paytmani aniqlang.

Yechish.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 10,5 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 6 + 0 \cdot 10,5 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 6 + 0 \cdot 10,5 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 6 + 1 \cdot 10,5 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 6 & 3 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 6 + 2 \cdot 10,5 + 0 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 0 \cdot 6 & 0 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 14 & 12 \\ 28,5 & 12 & 21 \\ 21 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 10,5 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 12 \\ 28,5 & 12 & 21 \\ 21 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-marta}}$$

A matritsaning « k -darajasi» ni aniqlaymiz.

Shartli ravishda $A^0 = E$ va $A^1 = A$ deb qabul qilinadi.

Agar A matritsa elementlarining tartib raqamlarini o'zgartirmagan holda satrlarini ustun yoki ustunlarini satr qilib almashtirsak, hosil bo'lgan yangi matritsa A matritsaning transponirlangani deb nomlanib, A' (yoki A^T) shaklda belgilanadi. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ bo'ladi.}$$

A matritsani A' ga almashtirish matritsani transponirlash deb nomlanadi. Transponirlash quyidagi xossalarga ega:

$$1. (A')' = A$$

$$2. (\lambda A)' = \lambda \cdot A'$$

$$3. (A + B)' = A' + B'$$

$$4. (A \cdot B)' = B' \cdot A'$$

Matrisalarning iqtisodiyotdagi tadbirlari

Masalan.1. Agr 17,5 % QQS (Qo'shimcha qiymat solig'i) qo'yilganda avtomashina ijarasiga bo'lgan narxlar $p = [139 \quad 160 \quad 205 \quad 340 \quad 430]$.

v soliqlsiz narx vektori aniqlang.

Yechish. 17,5 % QQS da asosiy foiz stavkasi 117,5% bo'ladi. Suning uchu soliqlsiz narx vektori

$$v = \left(\frac{1}{1.175} \right) \cdot p = \left(\frac{1}{1.175} \right) \cdot [139 \quad 160 \quad 205 \quad 340 \quad 430] =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{1.175} \right) 139 \quad \left(\frac{1}{1.175} \right) 160 \quad \left(\frac{1}{1.175} \right) 205 \quad \left(\frac{1}{1.175} \right) 340 \quad \left(\frac{1}{1.175} \right) 430 \right] =$$

$$= [118.30 \quad 136.17 \quad 174.47 \quad 289.36 \quad 365.96]$$

Iqtisodiy modellarda, ayniqsa ekonometrik tahlilda koeffisientlarni baholashda bir o'zgaruvchini boshqa vektorga bog'liq holda tushuntiriladi. Bunga misol sifatida $q = \beta x$ vector funksiyani keltirish mumkin, bunda β x o'zgaruvchi berilgan vector uchun vector koeffisient hisoblanadi.

Maslan.2. T vaqtda neftga bo'lgan talab chiziqli bo'lsin

$$q^t = \beta_0 + \beta_1 x_1^t + \beta_2 x_2^t + \beta_3 x_3^t + \beta_4 x_4^t + \beta_5 x_5^t$$

bu yerda yuqorigi indekslardagi t vaqt davrini ifodalaydi(darajani emas)

x_1 = neft narxi, x_2 = o'rtacha daromad, x_3 = o'rinbosar yoqilg'i narxi, x_4 = komplemanin narxi (masalan, avtomobil), x_5 = aholi.

Neftga bo'lgan T vaqtdagi bu chiziqli talab vektor ko'rinishida quyidagicha ifodalanilishi mumkin

$$q^t = \beta x^t = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \\ x_4^t \\ x_5^t \end{bmatrix}$$

Masalan.3. Neftga bo'lan talab (million barrelda) ni $q = \beta x$ modelida tushuntirish mumkin va bunda

$$\beta = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \beta_5] = [4.2 \ -0.1 \ 0.4 \ 0.2 \ -0.1 \ 0.2]$$

bo'lsin, deb faraz qilaylik.

Tavsiflovchi o'zgaruvchilar vektori

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \\ x_4^t \\ x_5^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Constant} \\ \text{Price} \\ \text{Income} \\ \text{Price of substitute} \\ \text{Price of complement} \\ \text{Population (in m.)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 30 \\ 18.5 \\ 52 \\ 12.8 \\ 61 \end{bmatrix}$$

bo'lganda neftga bo'lgan talabni hisoblang.

Yechish. Neftga bo'lgan talabni quyidagicha hisoblanadi

$$q = \beta x = [4.2 \ -0.1 \ 0.4 \ 0.2 \ -0.1 \ 0.2] \begin{bmatrix} 1 \\ 30 \\ 18.5 \\ 52 \\ 12.8 \\ 61 \end{bmatrix} = [29.92]$$

Shunday qilib javob 29,92 million barrel.

Maslan.4. Telefon apparatlarini ta'mirlovchi usta 70% telefonlarni past darajada, 20% o'rta darajada va 10% to'liq ta'mirdan chiqardi. Statistik ma'lumotlarga ko'ra 70% past darajada ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 10% past darajada, 60% o'rta darajada, 30% ni to'liq ta'mirlashadi. O'rta darajada ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 20% past darajada, 50% o'rta, 30% ni to'liq ta'mirlashadi. To'liq ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 60% past darajada, 40% o'rta darajada ta'mirlashadi. Agar masala sharti shu tarzda davom etsa 1, 2, 3 – yillardan keyingi har bir darajada ta'mirlangan telefonlar ulushini aniqlashda matrisalar algebrasidan foydalanish qulay.

$$X_0 = (0,7 \ 0,2 \ 0,1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} X_1 &= X_0 \cdot A = (0,17 \quad 0,56 \quad 0,27) \\ X_2 &= X_1 \cdot A = (0,291 \quad 0,490 \quad 0,219) \\ X_3 &= X_2 \cdot A = (0,2585 \quad 0,5072 \quad 0,2343) \end{aligned}$$

1.3. Determinantlar

Ta'rif. n -tartibli kvadrat $A = (a_{ij})$ matritsaning determinanti deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:

Bu ta'rifdan foydalanib 2 va 3 tartibli determinantlarni hisoblash uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \sum_{k=1}^2 a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{k=1}^3 a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + \\ &+ a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{21} a_{12} a_{33} \end{aligned}$$

1-xossa. Agar A -matritsaning biron-bir satridagi (ustunidagi) barcha elementlari nolga teng bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng bo'ladi.

2-xossa. Agar A -matritsaning biron-bir satr (ustun) elementi λ soniga ko'paytirilsa, determinant qiymati ham λ soniga ko'payadi, ya'ni $\lambda \cdot |A|$ ga teng bo'ladi.

3-xossa. A -matritsa va uning transponirlangani A' matritsalarining determinantlari teng bo'ladi, ya'ni $|A| = |A'|$ tenglik o'rinaldir.

4-xossa. Agar A -matritsaning ikkita qo'shni satrlari o'rnini almashtirsak, hosil bo'lgan yangi A_1 matritsaning determinanti A -matritsa determinantining teskari ishora bilan olinganiga teng bo'ladi, ya'ni $|A_1| = -|A|$ tenglik o'rinali bo'ladi.

5-xossa. Agar A -matritsa bir xil ikki satrga (ustunga) ega bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng, ya'ni $|A| = 0$ bo'ladi.

6-xossa. Agar A -matritsada ikki satrning (ustun) mos elementlari proporsional bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng, ya'ni $|A| = 0$ bo'ladi.

7-xossa. Agar A matritsaning biron satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib yig'indi hosil qilsak, bunday yig'indi nolga teng bo'ladi, ya'ni $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0, \quad i \neq j.$

8-xossa. A matritsaning biron-bir satri (ustuni) elementlarini bir xil songa ko'paytirib, boshqasiga qo'shishdan hosil bo'lgan A_1 -matritsaning determinanti A matritsa determinantiga teng bo'ladi, ya'ni $|A_1| = |A|$.

9-xossa. $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlarni n -tartibli A matritsaning berilgan satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmasining yig'indisi, A matritsaning berilgan satr (ustun) elementlarining $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlari bilan almashtirilgan matritsa determinantiga teng bo'ladi.

10-xossa. n -tartibli kvadrat A va B matritsalar uchun $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni matritsalar ko'paytmasining determinanti, ularning determinantlari ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Masalan. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = ?$ **Yechish.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33.$

2-mashg'ulot

2.1. Yuqori tartibli determinantlar

2.2. Teskari matritsa

2.3. Matritsa rangi

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: Tushuntirish, tezkor-so'rov, ma'ruza.

2.1. Yuqori tartibli determinantlar

Ta'rif. n -tartibli kvadrat $A = (a_{ij})$ matritsa a_{ij} elementining M_{ij} -minori deb, A -matritsaning i -satri va j -ustunini o'chirishdan keyin hosil bo'lgan $(n-1)$ tartibli matritsa determinantiga aytiladi.

Ta'rif. n -tartibli $A = (a_{ij})$ matritsa a_{ij} -elementining algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} - deb quyidagi songa aytiladi

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Yig'indi $\sum_{s=1}^n a_{is} A_{is}$ - i -satr bo'yicha yoyilma, $\sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}$ yig'indi esa, j -ustun bo'yicha yoyilma deb ataladi.

Ta'rif. n -tartibli kvadrat $A = (a_{ij})$ matritsaning determinanti deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k}$$

Laplas teoremasi. Istalgan i va j lar uchun

$$\sum_{s=1}^n a_{is} A_{is} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} = |A| \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Masalan.1. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix} = ?$

Yechish. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = 91.$

Teorema (Laplas teoremasi). Istalgan i va j lar uchun

$$\sum_{s=1}^n a_{is} A_{is} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} = |A| \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Masalan.2.
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$
 determinant hisoblansin.

I usul. Dastlab, to'rtinchi satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz

$$|A| = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} = -a_{41}M_{41} + a_{42}M_{42} - a_{43}M_{43} + a_{44}M_{44}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 546.$$

II usul. Endi, determinantning xossalaridan foydalanib, uchinchi ustun elementlarini nolga aylantiramiz va shu ustun bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & -10 & 0 & 6 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ -19 & 17 & 0 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -19 & 17 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -10 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 17 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-40 + 12) + 7(68 + 18) = 546.$$

Bu usulni “determinantni tartibini pasaytirib hisoblash usuli” deb ham yuritiladi

2.2. Teskari matritsa

Ta'rif. A kvadrat matritsaga teskari matritsa deb, shunday A^{-1} matritsaga aytiladiki, uning uchun quyidagi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ tenglik o'rinli bo'lsin.

Ta'rif. Agar A matritsa uchun $|A| \neq 0$ bo'lsa, bunday matritsa xos bo'lmagan matritsa, aks holda, ya'ni $|A| = 0$ bo'lsa xos matritsa deyiladi.

Teorema. A kvadrat matritsaga teskari A^{-1} matritsa mavjud va yagona bo'lishi uchun, uning xos bo'lmagan matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

A-matritsa xos bo'lmagan matritsa bo'lsin, ya'ni $|A| \neq 0$ bo'lsin. U holda

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n2} \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{jk} & \dots & A_{nk} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Masalan. Berilgan matrisaga teskari matrisani toping. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$

Yechish. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33.$

$A_{11} = -16, A_{12} = 9, A_{13} = 31$
 $A_{21} = 9, A_{22} = -3, A_{23} = -3$
 $A_{31} = 11, A_{32} = 0, A_{33} = -11$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{33} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{11}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisaviy usulda yechish

n ta noma'lum va m ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasini deb quyidagi sistemaga aytiladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

bu yerda $a_{ij}, b_i (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ - berilgan sonlar bo'lib, a_{ij} - noma'lumlar oldidagi koeffitsientlar, b_i - ozod hadlar deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

bu yerda A koeffitsientlar (1) yoki sistema matritsasi, B - ozod hadlar matritsasi deyiladi. U holda berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yoza olamiz:
 $AX = B$

Tenglamalar sistemasida tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng, ya'ni $m = n$, bo'lsin. Bu holda sistema matritsasi A kvadrat matritsa bo'ladi. Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, ya'ni

A -xos bo'lmagan matritsa bo'lsa, u holda A^{-1} teskari matritsa mavjud bo'ladi, u holda $AX = B$ tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

bu munosabatdan:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{nj} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Masalan. Tenglamalar sistemasini yeching.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Yechish. Tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechamiz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad |A| = 24 + 27 + 16 - 24 - 24 - 1 = 1 \neq 0.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Demak, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

2.3. Matritsa rangi

Ta'rif. A matritsaning rangi deb uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga aytilib, $r(A)$ orqali belgilanadi.

Ta'rif. Matritsa ustidagi elementar almashtirishlar deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi:

1. Barcha elementlari noldan iborat satrni (ustunni) tashlab yuborish.
2. Satrning (ustunning) barcha elementlarini noldan farqli songa ko'paytirish.
3. Satr (ustun) o'rinlarini almashtirish.
4. Berilgan satr (ustun) elementlariga boshqa satr (ustun) elementlarini biron songa ko'paytirib qo'shish.
5. Matritsani transponirlash.

Teorema. Matritsa rangi uning ustida elementar almashtirishlarni bajarish natijasida o'zgarmaydi.

Matritsa rangi uchun quyidagi xossalr o'rinli

1. $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
2. $r(A+B) \geq |r(A) - r(B)|$
3. $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
4. $r(A'A) = r(A)$

Ta'rif. Agar $I_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $I_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $I_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ satrlar va $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sonlar uchun $\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \dots + \lambda_m I_m = 0$

tenglik faqat $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ shartdagina o'rinli bo'lsa, u holda $I_1, I_2, \dots, I_m$ satrlar chiziqli erkli satrlar, aks holda esa ular chiziqli bog'liq satrlar deyiladi.

Teorema. Matritsa uchun uning chiziqli erkli satrlarning maksimal soni chiziqli erkli ustunlarning maksimal soniga teng bo'ladi.

Teorema. Matritsa rangi undagi chiziqli erkli satrlarning (ustunlarning) maksimal soniga teng bo'ladi.

Matritsa rangini "rang ta'rifi" bo'yicha hisoblash doim ham oson ish bo'lavermaydi. Matritsa rangini topish uchun matritsa ustida elementar almashtirishlar bajarish natijasida bu matritsani uchburchak yoki trapetsiya ko'rinishiga olib kelish mumkin.

Masalan. Berilgan matrisalarning rangini toping. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Yechish.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \boxed{-1} & \boxed{-4} & \boxed{-1} \\ \leftarrow + & & + \end{matrix}} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ -19 & -6 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -19 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \boxed{-2} & \boxed{-1} \\ \leftarrow + & & \end{matrix}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -15 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Demak, } \text{rang}(A) = 3.$$

3-mashg'ulot

1.3.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.

1.3.2. Tenglamalar sistemani matrisaviy usulda yechish.

1.3.3. Tenglamalar sistemani Kramer qoidasida yechish.

1.3.4. Tenglamalar sistemani Gauss usulida yechish.

1.3.5. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: So'rov, ma'ruza, auksion.

1.3.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.

n ta noma'lum va m ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasi deb quyidagi sistemaga aytiladi.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1j} x_j + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2j} x_j + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ - \qquad - \qquad - \qquad - \qquad - \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{ij} x_j + \cdots + a_{in} x_n = b_i \\ - \qquad - \qquad - \qquad - \qquad - \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mj} x_j + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{array} \right.$$

bu yerda $a_{ij}, b_i (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ - berilgan sonlar bo'lib, a_{ij} - noma'lumlar oldidagi koefitsientlar, b_i - ozod hadlar deyiladi.

Ta'rif. Agarda tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lsa, u birgalikda deyiladi, aks holda birgalikda emas deyiladi.

Ta'rif. Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi yagona (cheksiz ko'p) yechimga ega bo'lsa, u aniq (noaniq) deyiladi.

Bizga tenglamalar sistemasidan tashqari, quyidagi

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + + a'_{mn}x_n = b'_m \end{array} \right.$$

tenglamalar sistemasi ham berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar tenglamalar sistemalarining yechimlar to'plami ustma-ust tushsa, u holda ular teng kuchli (ekvivalent) deyiladi.

1.3.2. Tenglamalar sistemani matrisaviy usulda yechish

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

bu yerda A koeffitsientlar sistema matritsasi, B - ozod hadlar matritsasi deyiladi. U holda berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yoza olamiz:

$$AX = B$$

Tenglamalar sistemasida tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng, ya'ni $m = n$, bo'lsin. Bu holda sistema matritsasi A kvadrat matritsa bo'ladi. Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, ya'ni

A -xos bo'lmagan matritsa bo'lsa, u holda A^{-1} teskari matritsa mavjud bo'ladi, u holda $AX = B$ tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \text{ bu munosabatdan:}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Oxirgi tenglikdan $x_j = \frac{1}{\Delta} (b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}) = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $\Delta_j = \overline{1, n}$ ekanligi kelib chiqadi.

Masalan.1.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$
 tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechaylik.

Sistemaga mos asosiy, ozod hadlar va noma'lumlar matrisalari mos ravishda

quyidagicha bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = 24 + 27 + 16 - 24 - 24 - 1 = 1 \neq 0 \text{ bo'lgani uchun } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ bo'ladi.}$$

U holda,

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Demak, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1.$

1.3.3. Tenglamalar sistemani Kramer qoidasida yechish.

Kramer teoremasi. Agar sistema determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lsa, u holda (1) sistema yagona yechimga ega bo'lib, bu yechim quyidagi formulalar orqali topiladi.

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}$$

$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}$ formulalar Kramer formulalari deb, tenglamalar sistemasini bu formulalar orqali yechilishi esa Kramer yoki determinantlar usuli deyiladi.

tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

Masalan. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Yechish. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -16$. Asosiy determinan $\Delta = -16 \neq 0$ bo'lgani uchun sistema

yagona yechimga ega va uni Kramer formulalaridan topamiz

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -32, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -16. \quad x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1.$$

1.3.4. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish

Yuqorida keltirilgan usullarni tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lgan holdagina qo'llash mumkin. Umumiy holda qo'llaniladigan usul - Gauss usulidir. Gauss usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli deb ham nomlanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi ustida bajariladigan elementar almashtirish deb quyidagilarga aytiladi:

- sistemadagi biron-bir tenglamani noldan farqli songa ko'paytirish,
- tenglamalar o'rnini almashtirish,

- biron-bir tenglamani songa ko'paytirib, boshqa bir tenglamaga qo'shish.

Mana shu almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan yangi tenglamalar sistemasi avvalgisiga ekvivalent, ya'ni yechimlar to'plami ikkala sistema uchun bir xil bo'ladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

sistema matritsasi va ozod hadlar ustuni yordamida kengaytirilgan matritsa hosil qilamiz,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

Kroneker-Kapelli teoremasi. Agar sistema matritsasi rangi kengaytirilgan matritsa rangiga teng bo'lsa, ya'ni $r(A) = r(\bar{A})$ bo'lsa, u holda sistema birgalikda bo'ladi, ya'ni yechimga ega bo'ladi.

Demak, biz quyidagi xulosalarni qilishimiz mumkin ekan.

1. Agar $r(A) = r(\bar{A})$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'ladi.
2. Agar $r(A) \neq r(\bar{A})$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi.
3. Agar $r(A) = r(\bar{A}) = n$ bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi.
4. Agar $r(A) = r(\bar{A}) < n$ bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Masalan. Sistemani Gauss usuli bilan yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$$

Yechish. Sistemani Gauss usuli bilan yechamiz.. Sistemaning kengaytirilgan matrisasini yozib : $a_{11}=1$ hisoblashlar uchun qulaydir. Shuning uchun birinchi va to'rtinchi satrlarning or'nini almashtiramiz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{-5} & \boxed{3} & \boxed{-} \\ \leftarrow + & \leftarrow + & \leftarrow + \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{4} & \boxed{3} \\ \leftarrow & \leftarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{pmatrix}$$

Kengaytirilgan matrisa zinapoya ko'rinishiga keltirildi. Unga mos keluvchi sistemaning ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 - 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13} \end{cases}$$

oxirgi tenglamadan $x_4 = 1$, uchinchi $x_3 = \frac{-7 + 7x_4}{26} = 0$, ikkinchi $x_2 = 11 + 11x_3 - 4x_4 = 7$ va birinchi $x_1 = -4 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5$ yechimlarni olamiz. Javob: (5; 7; 0; 1).

1.3.5. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

Agar chiziqli tenglamalar sistemasida ozod hadlar nolga teng bo'lsa, ya'ni $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ bo'lsa, hosil bo'lgan tenglamalar sistemasi bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi, ya'ni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Bu sistema kengaytirilgan matritsaning oxirgi ustuni elementlari nolga teng bo'lgani uchun sistema matritsasi va kengaytirilgan matritsalar rangi teng bo'ladi, ya'ni $r(A) = r(\bar{A})$ bo'ladi. Shuning uchun Kroneker-Kaspelli teoremasiga ko'ra bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda bo'ladi. Masalan, $(0,0,\dots, 0)=0$ sistemaning trivial yechimi (nol yechim) bo'ladi.

Tenglamalar sistemasining matritsa ko'rinishi quyidagidan iborat:

$$AX = 0.$$

Yuqorida keltirilgan 1-4 xulosalarga ko'ra, agar $r(A) = n$ bo'lsa sistema yagona, nol yechimga ega, agarda $r(A) < n$ bo'lsa, cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Demak

$m = n$ bo'lgan holda sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli bo'lar ekan.

Ta'rif. Agar sistemaning $X_1, X_2, \dots, X_k$ -chiziqli erkli yechimlar sistemasi berilgan bo'lib, bu sistemaning istalgan X yechimi ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, ya'ni shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sonlar mavjud bo'lsaki,

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k$$

bo'lsa, u holda bu sistema fundamental yechimlar sistemasi deyiladi

Teorema. Agar sistema uchun $r(A) < n$ bo'lsa, u holda istalgan fundamental yechimlar sistemasi $k = n - r(A)$ ta yechimdan iborat bo'ladi.

Masalan.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini topaylik.

Sistemaning oxirgi tenglamasini birinchi o'ringa yozamiz, so'ngra uni zinapoya shakliga keltiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & 8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrisa rangi $r(A) = 2$. x_1 va x_2 o'zgaruvchilarning bazis minori $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$,

x_1 va x_2 o'zgaruvchilarni asosiy o'zgaruvchilar sifatida tanlab olamiz va ularni asosiy bo'lmagan x_3, x_4, x_5 noma'lumlar orqali ifodalaymiz

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ 8x_2 - 7x_3 + 25x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Umumiy yechimlar sistemasini hosil qilish uchun asosiy bo'lmagan x_3, x_4, x_5 o'zgaruvchilarni E birlik matrisa satr elementlari bilan almashtiramiz. $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$ deb olinsa, sistemaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2 = 0 \\ 8x_2 - 7 = 0 \end{cases}$$

bundan $x_1 = \frac{19}{8}, x_2 = \frac{7}{8}$, ya'ni birinchi bazis yechimni hosil qilamiz:

$$X_1 = \left(\frac{19}{8}; \frac{7}{8}; 1, 0, 0 \right)$$

Shunga o'xshash yana ikkita bazis yechimni topamiz

$$x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0 \text{ bo'lganda } X_2 = \left(\frac{3}{8}; -\frac{25}{8}; 0, 1, 0 \right);$$

$$x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1 \text{ bo'lganda } X_3 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0, 0, 1 \right).$$

Topilgan X_1, X_2, X_3 yechimlar berilgan sistemaning fundamental yechimlar sistemasini tashkil qiladi. Qulaylik uchun X_1, X_2, X_3 yechimlarning komponentlarini mos ravishda 8, 8, 2 sonlarga ko'paytirib, butun komponentli fundamental yechimlar sistemasini hosil qilamiz:

$$\bar{X}_1 = (19; 7; 8; 0; 0), \bar{X}_2 = (3; -25; 0; 8; 0), X_3 = (-1; 1; 0; 0; 2).$$

Sistemaning umumiy yechimi esa

$$X = \lambda_1 (19; 7; 8; 0; 0) + \lambda_2 (3; -25; 0; 8; 0) + \lambda_3 (-1; 1; 0; 0; 2)$$

ko'rinishida bo'ladi.

Agar n ta noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasida sistema asosiy matritsasining rangi noma'lumlan sonidan bittaga kam bo'lsa, ya'ni $r(A) = n-1$, u holda chiziqli tenglamalar sistemasining yechim sifatida $n-1$ ta tenglamalar sistemi matritsasining birinchi, ikkinchi va h.k ustunlarini o'chirishdan hosil bo'lgan, ishoralari almashinuvchi minorlari sistemasini qabul qilish mumkin. Agar bu minorlar noldan farqli bo'lsa, u holda bu chiziqli tenglamalar sistemasining barcha yechimlari shu sonlarga karri bo'ladi.

$$\text{Masalan, } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \text{ bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining barcha}$$

yechimlarini topaylik.

Dastlad, sistemaga mos matrisa rangini hisoblaylik.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demak, tenglamalar sistemi matrisaning rangi $r(A) = 2$ ga teng va u noma'lumlar sonidan bittaga kam. Shuning uchun, tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemi $k=3-2=1$ ta bo'ladi. Sistema ixtiyoriy ikkita tenglamasini olamiz, masalan, birinchi va ikkinchi tenglamalarini

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasiga mos matritsasining birinchi, ikkinchi ba uchinchi ustunlarini o'chirishdan hosil bo'lgan, ishoralari almashinuvchi minorlari hisoblaymiz,

$$x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot k = 5k, \quad x_2 = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot k = -4k, \quad x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot k = -3k,$$

bunda k ixtiyoriy son.

Demak, sistemaning umumiy yechimi $\{5k; -4k; 3k\}$, bunda k ixtiyoriy son.

4- mashg'ulot

1.4.1. Kompleks sonlar

1.4.2. Muavr formulasi

1.4.3. Ko'p tarmoqli iqtisod uchun balans modeli

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, tezkor-so'rov, ma'ruza.

1.4.1. Kompleks sonlar

Ta'rif. Agar x va y haqiqiy sonlar hamda i begi uchun :

- 1) $x+0 \cdot i = x$, $0+i \cdot y = iy$, $1 \cdot i = i$, $-1 \cdot i = -i$,
- 2) faqat $x = x_1$, $y = y_1$ bo'lgandagina $x + yi = x_1 + y_1 i$ boladi,
- 3) $(x + yi) \pm (x_1 + y_1 i) = (x \pm x_1) + (y \pm y_1) i$,
- 4) $(x + yi) \cdot (x_1 + y_1 i) = (x \cdot x_1 - y \cdot y_1) + (x \cdot y_1 + x_1 \cdot y) i$
- 5) $\frac{x + yi}{a + bi} = \frac{ax + by}{a^2 + b^2} + \frac{ay - bx}{a^2 + b^2} i$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda $x + yi$ ifodaga **kompleks son** deyiladi.

1) va 4) shartlardan: $i^2 = i \cdot i = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ va h.k.

$i = \sqrt{-1}$ belgini odatda mavhum birlik deyiladi.

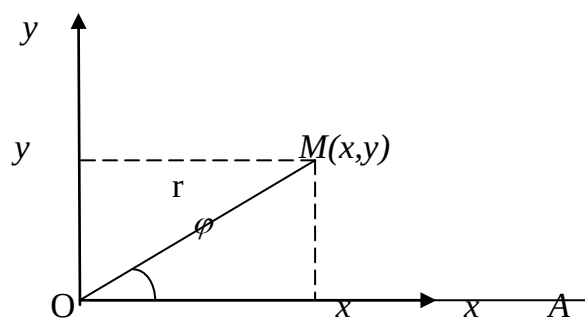
$x + yi$ kompleks sonda x – kompleks sonning haqiqiy qismi, yi – kompleks sonning mavhum qismi deyiladi.

$x + yi$ va $x - yi$ o'zaro qo'shma kompleks sonlar deyiladi.

Kompleks sonlarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va darajaga ko'tarish ko'phadlar ustidagi kabi bajariladi. Bo'lish va ildiz chiqarish amallari esa mos ravishda ko'paytirish va darajaga ko'tarish amallariga teskari amallar kabi aniqlanadi.

Kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi

$x + yi$ kompleks son $(x; y)$ haqiqiy sonlar jufti bilan aniqlanadi. Shuning uchun $x + yi$ kompleks son tekislikdagi $M(x; y)$ nuqta yoki uning $r = \overline{OM}$ radius - vektori bilan ifodalanadi.



Bu vektorning uzunligi $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – kompleks sonning moduli, bu vector bilan Ox o'q orasidagi φ - burchak kompleks sonning argumenti deyiladi.

$x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ bo'lgani uchun $x + y \cdot i = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ boladi va bu ifodaga **kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi** deyiladi.

Trigonometrik ko'rinishidagi kompleks sonlarni ko'paytirish va bo'lish.

$z_1 = x_1 + y_1 \cdot i = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$, $z_2 = x_2 + y_2 \cdot i = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$ berilgan bo'lsa, u holda

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i (\sin(\varphi_1 - \varphi_2))).$$

$$z_1 = x_1 + y_1 \cdot i = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1), z_2 = x_2 + y_2 \cdot i = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2), \dots, z_n = x_n + y_n \cdot i = r_n \cdot (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)) .$$

1.4.2. Muavr formulasi

Agar $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ bolsa, u holda $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$ munosabatni hosil qilamiz.

Bu formulaning $r = 1$ bo'lgandagi ko'rinishiga Muavr formulasi deyiladi:

$$(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi.$$

Xuddi shu kabi

$$\left(\frac{1}{r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)} \right)^n = r^{-n} (\cos n\varphi - i \cdot \sin n\varphi).$$

Kompleks son dan ildiz chiqarish

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ bu yerda } k=0,1,2,\dots,n-1.$$

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$ - Eyler formulasi deyiladi.

Masalan. $z = -2 + 2i$. a) $z^4 = ?$ b) $\sqrt[3]{z}$.

Yechish. a) $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \pi + \arctg \frac{2}{-2} = \frac{3\pi}{4}$.

$$z^4 = (2\sqrt{2})^4 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)^4 = 64 \left(\cos 4 \cdot \frac{3\pi}{4} + i \sin 4 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) = 64 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 64(-1 + 0) = -64.$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{-2 + 2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right), k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0 \text{ da } \sqrt[3]{z} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i.$$

$$k = 1 \text{ da } \sqrt[3]{z} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$k = 2 \text{ da } \sqrt[3]{z} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Algebraning asosiy teoremasi

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ - kompleks sonlar maydonidagi n -darajali ko'phad bo'lsin.

Ta'rif. Agar x ning α son qiymatida $f(x)$ ko'phad nolga aylansa, u holda α soni $f(x)$ ko'phadning ildizi deyiladi.

Demak, $x = \alpha$ son $f(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsa $f(\alpha) = 0$ bo'ladi.

Teorema(Bezu teoremasi). $f(x)$ ko'phadni $x-\alpha$ ga bo'lgandagi qoldig'i $f(\alpha)$ ga teng.

Teorema. $x=\alpha$ son $f(x)$ ko'phadning ildizi bo'lishi uchun u $x-\alpha$ ga qoldiqsiz bo'linishi zarur va yetarli.

Teorema (Algebraning asosiy teoremasi). Kompleks sonlar maydonida nolinchi darajadan yuqori darajali har bir $f(x)$ ko'phadning eng kamida bitta kompleks ildizi bor.

Teorema. Kompleks sonlar maydonida n - darajali $f(x)$ ko'phadning n ta ildizi bor.

$f(x)=a_0 \cdot (x-\alpha_1) \cdot (x-\alpha_2) \cdot \dots \cdot (x-\alpha_n)$ ifoda ko'phadning chiziqli ko'paytuvchilarga yoyilmasi deyiladi.

Haqiqiy sonlar maydonidagi $f(x)$ ko'phad uchun $x+yi$ kompleks son ildiz bo'lsa, u holda $x-yi$ qo'shma kompleks son ham ildiz bo'ladi ($y \neq 0$).

Haqiqiy sonlar maydonidagi $f(x)$ ko'phadning kompleks ildizlari soni faqat juft bo'lishi mumkin.

Haqiqiy sonlar maydonidagi juft darajali $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizlari soni faqat juft bo'la oladi.

Haqiqiy sonlar maydonida toq darajali $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizlari soni faqat toq bo'la oladi.

Haqiqiy sonlar maydonidagi har bir $f(x)$ ko'phadni shu maydondagi birinchi va ikkinchi darajali ko'phadlar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Masalan. Ko'paytuvchilarga ajrating. $f(x)=x^4+1$. $z=-2+2i$.

a) $z^4=?$ b) $\sqrt[3]{z}$.

Yechish. $f(x)=x^4+1$ ko'phadning ildizlarini topamiz.

$$x^4+1=0, x^4=-1, x=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos \pi+i \sin \pi}=\cos \frac{2k+1}{4}+i \sin \frac{2k+1}{4}, k=0,1,2,3.$$

$$k=0, \alpha_1=\cos \frac{\pi}{4}+i \sin \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i \frac{\sqrt{2}}{2}, k=1, \alpha_2=\cos \frac{3\pi}{4}+i \sin \frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k=3, \alpha_3=\cos \frac{5\pi}{4}+i \sin \frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i \frac{\sqrt{2}}{2}, k=4, \alpha_4=\cos \frac{7\pi}{4}+i \sin \frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f(x)=x^4+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4).$$

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)=x^2-\sqrt{2}x+1,$$

$$(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)=\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)=x^2+\sqrt{2}x+1.$$

$$\text{Demak, } f(x)=x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1) \cdot (x^2+\sqrt{2}x+1).$$

1.4.3. Ko'p tarmoqli iqtisod uchun balans modeli

Balans modelining asosiy masalasi: n ta tarmoqli xo'jalikning har bir ishlab chiqargan mahsulot miqdori qanday bo'lganda ehtiyoj to'la qondiriladi? Bu yerda shuni e'tiborga olish kerakki, n ta tarmoqning har biri ishlab chiqargan mahsulotning bir qismi shu tarmoq ehtiyoji uchun, bir qismi boshqa tarmoqlar ehtiyoji uchun va yana bir qismi ishlab chiqarish bilan bog'liq bo'lmagan ehtiyojlar uchun sarf etiladi.

Tarmoqlar orasidagi turli mahsulotlarni ishlab chiqarish va iste'mol qilish orqali bog'lanishni hisoblash masalasi ancha murakkab. Bu masalani birinchi bo'lib mashhur amerika iqtisodchisi V.V. Leontev 1936 yil matematik model ko'rinishida ifodalagan. U 1929-1932 yillarda amerika iqtisodiy inqirozini tahlil qilishga urungan bu model matrisalar algebrasiga asoslagan.

Ishlab chiqarishning ma'lum bir davridagi, aytaylik, bir yillik faoliyatini qaraylik. x_i deb i -tarmoqning shu davr davomida ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmining pul birligida ifodalangan qiymatini, bu yerda $i = 1, 2, \dots, n$. x_{ij} deb i -tarmoq mahsulotining j -tarmoq ehtiyoji uchun sarf etilgan hajmining pul miqdorini belgilaymiz. y_i deb i tarmoq mahsulotining noishlab chiqarish ehtiyoji hajmining pul miqdorini belgilaymiz. Tabiiyki, i tarmoq ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmi x_i , n ta tarmoq ehtiyojlari va noishlab chiqarish ehtiyojlari uchun sarf etilgan mahsulotlar hajmlarining pul miqdorlari yig'indisiga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
 - tenglamalar balans munosabatlari deb nomlanadi.

Agar $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) belgilash kiritsak, a_{ij} - j -tarmoqning mahsulot hajmi birligi uchun sarf etilgan i -tarmoq mahsulot hajmi qiymatini bildiradi. a_{ij} -bevosita xarajatlar koeffitsienti deb nomlanadi. a_{ij} -koeffitsientlarni qaralayotgan davrdagi ishlab chiqarish jarayonida qo'llanilayotgan texnologiya aniqlaydi. Qanchalik yangi, samarador texnologiya qo'llanilsa, a_{ij} -koeffitsientlar shunchalik kichik, sarf-xarajatlar shunchalik kam bo'lib, samaradorlik yuqori bo'ladi. Qaralayotgan davr ichida a_{ij} koeffitsientlarni o'zgarmas deb olib, ya'ni sarf-xarajatlarni yalpi xarajatlarga chiziqli bog'liq deb qaraymiz.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Shu munosabat bilan ko'rilgan ko'p tarmoqli iqtisodiyot modelini chiziqli balans modeli deb ham nomlanadi. Bu holda tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

bu yerda A -texnologik matritsa, X -yalpi mahsulot vektori, Y -yakuniy mahsulot vektori deb nomlanadi. Bu belgilashlarga asosan tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$X = AX + Y.$$

Ko'p tarmoqli balansning asosiy masalasi berilgan yakuniy mahsulot vektori va bevosita xarajatlar matritsasi A ga ko'ra X -yalpi mahsulot vektorini topishdan iborat bo'ladi, ya'ni oxirgi tenglamani noma'lum vektor X ga nisbatan yechish kerak. Buning uchun uni quyidagi ko'rinishga olib kelamiz $(E - A)X = Y$.

Agar $\det(E - A) \neq 0$ bo'lsa, u holda teskari $(E - A)^{-1}$ matritsa mavjud bo'lib, yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$X = (E - A)^{-1} Y$$

$S = (E - A)^{-1}$ -matritsa bevosita xarajatlar matritsasi deb nomlanadi. Bu matritsaning iqtisodiy ma'nosini tushunish uchun $Y_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ i -o'rnida 1, qolgan joylarda 0 bo'lgan yakuniy mahsulot birlik vektorlarini qaraymiz. Ularga mos keluvchi tenglama yechimlari quyidagiga teng bo'ladi.

$$X_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad X_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Demak, $S = (s_{ij})$ matritsaning s_{ij} -elementi i -tarmoqning j -tarmoq birlik yakuniy mahsuloti Y_j ni, ishlab chiqarish uchun sarf qilinishi zarur bo'lgan mahsulot miqdori qiymatini bildiradi.

Qaralayotgan masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, (11) tenglamada $y_i \geq 0$, $(i = \overline{1, n})$, $a_{ij} \geq 0$ $(i, j = \overline{1, n})$ bo'lib, tenglama yechimi uchun $x_i \geq 0$ $(i = \overline{1, n})$ bo'lishi kerak. Bu holatni biz $Y \geq 0$, $A \geq 0$ va $X \geq 0$ deb belgilaymiz.

Agar istalgan $Y \geq 0$ vektor uchun $X \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (11) ning yechimi mavjud bo'lsa, $A \geq 0$ matritsa samarali matritsa deyiladi. Bu holda Leontev modeli ham samarali model deyiladi.

Masalan.1. Quyidagi jadvalda tarmoqlarning reja davriga mo'ljallangan xarajat koeffitsientlari va chekli mahsuloti shartli pul birligida berilgan.

Tarmoq		Iste'mol		Chekli mahsulot
		Sanoat	Qishloq xo'jaligi	
Ishlab chiqarish	Sanoat	0,3	0,25	300
	Qishloq xo'jaligi	0,15	0,12	100

Quyidagilarni

a) Tarmoqlarning rejalashtirilgan yalpi mahsulot miqdorini, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, tarmoqlarning sof mahsulotini;

b) Agar qishloq xo'jaligining chekli mahsuloti 20% ga, sanoatniki 10% ga oshirilsa, har bir tarmoqning zarur yalpi ishlab chiqarish miqdorini topish kerak.

Yechish. a) To'g'ridan – to'g'ri xarajatlar koeffitsientini A matrisa va chekli mahsulot vektori Y ni yozib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 \\ 0,15 & 0,12 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

bundan $E - A = \begin{pmatrix} 1-0,3 & -0,25 \\ -0,15 & 1-0,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,25 \\ -0,15 & 0,88 \end{pmatrix}$ matrisani yozib olamiz.

U holda to'la xarajatlar matrisasi

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,5785} \begin{pmatrix} 0,88 & 0,15 \\ 0,25 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix}.$$

Yalpi mahsulot vektorini aniqlaymiz:

$$X = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 482 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Tarmoqlar mahsulot yetkazib berish miqdori x_{ij} ni $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$ formuladan topamiz.

Masalan $x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,3 \cdot 482 = 144,6$.

Tarmoqlarning yalpi mahsuloti, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, shuningdek tarmoqlarning sof mahsulotlarini hisoblab topib, quyidagi jadvalni tuzamiz.

Tarmoq		Iste'mol		Chekli mahsulot	Yalpi mahsulot
		Sanoat	Qishloq xo'jaligi		
Ichlab chiqarish	Sanoat	144,6	62,5	300	482
	Qishloq xo'jaligi	72,3	30	100	150
Sof mahsulot		265,1	157,5		
Yalpi mahsulot		482	250		

b) Shartga ko'ra chekli mahsulot vektori $Y = \begin{pmatrix} 300 \cdot 1,1 \\ 100 \cdot 1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix}$

U holda mahsulot vektori quyidagicha bo'ladi: $X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 532,8 \\ 287,1 \end{pmatrix}$.

Shunday qilib sanoatdagi ishlab chiqarishni 532,8 shartli pul birligigacha, qishloq xo'jaligida 287,1 shartli pul birligigacha oshirish kerak.

2-MAVZU. MATRISAVIY ANALIZ

1- mashg'ulot

2.1.1. Chiziqli fazo tushunchasi

2.1.2. Chiziqli bog'liqlik, o'lcham va bazis tushunchalari

2.1.3. Bir bazisdan boshqasiga o'tish

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, hikoya, so'rov.

2.1. 1. Chiziqli fazo tushunchasi

Ta'rif. Agar bo'sh bo'lmagan L -to'planning istalgan x, y, z elementlari va λ son uchun qo'shish- $x + y \in L$, songa ko'paytirish- $\lambda x \in L$ aniqlangan bo'lib, bu amallar uchun quyidagi xossalar o'rinli bo'lsa:

- $x + y = y + x$,
- $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- L da shunday 0 (nol) element mavjudki, istalgan $x \in L$ uchun $x + 0 = x$,
- Har bir $x \in L$ uchun, L da shunday $-x$ elementi mavjudki, uning uchun $x + (-x) = 0$,
- α va β sonlar va $x \in L$ uchun $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
- $1 \cdot x = x$,
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

u holda u chiziqli yoki vektor fazo deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifda songa ko'paytirish amali deganda ikki holatni farqlash kerak. Agar ta'rifdagi sonlar haqiqiy sonlar to'plami $R = (-\infty, +\infty)$ dan olingan deb qaralsa,

bunday chiziqli fazo haqiqiy chiziqli fazo deyiladi, agarda bu sonlar kompleks sonlar to'plami C dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo kompleks chiziqli fazo deyiladi.

Ta'rif. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar uchun $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda chiziqli fazo elementi x vektor $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.

2.1.2. Chiziqli bog'liqlik, o'lcham va bazis tushunchalari

Ta'rif. Agar hammasi ham nolga teng bo'lmagan shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar topilib, ular uchun

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi deyiladi, aks holda, ya'ni (1) tenglik o'rinli ekanligidan $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ bo'lsa, ular chiziqli erkli vektorlar sistemasi deyiladi.

Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlar orasida nol vektor bo'lsa, u holda ular chiziqli bog'liq bo'ladi. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlardan bir nechitasi chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda ularning o'zi ham chiziqli bog'liq bo'ladi.

Ta'rif. Agar L chiziqli fazoda n tasi chiziqli erkli va istalgan $n+1$ tasi bog'liq bo'lgan vektorlar mavjud bo'lsa, ya'ni chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni n ga teng bo'lsa, u holda L fazo n o'lchovli chiziqli fazo deyiladi.

Ta'rif. n o'lchovli chiziqli fazodagi istalgan n ta chiziqli erkli vektorlar sistemasi chiziqli fazoning bazisi deyiladi.

Teorema. Chiziqli fazoning har bir elementini yagona usul bilan bazisning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifoda qilish mumkin.

2.1.3. Bir bazisdan boshqasiga o'tish

$\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ vektorlar bazis bo'lib, x vektor ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsin, ya'ni $x = x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + \dots + x_n \ell_n$, u holda $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar x vektorning $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ bazis bo'yicha koordinatalari deb yuritiladi.

n o'lchovli L chiziqli fazoda ikkita $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ va $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_n^*$ bazislar berilgan bo'lsin, u holda $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_n^*$ lar uchun

$$\ell_1^* = a_{11} \ell_1 + a_{12} \ell_2 + \dots + a_{1n} \ell_n$$

$$\ell_2^* = a_{21} \ell_1 + a_{22} \ell_2 + \dots + a_{2n} \ell_n$$

$$-----$$

$$\ell_n^* = a_{n1} \ell_1 + a_{n2} \ell_2 + \dots + a_{nn} \ell_n$$

tengliklarni hosil qilamiz, bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ ----- \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ bazisdan $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_n^*$ bazisga o'tish matritsasi deyiladi. A matritsa xos bo'lmagan matritsa bo'ladi, shuning uchun unga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lib, bu matritsa $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_n^*$ bazisdan $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ bazisga o'tish matritsasi bo'ladi.

2-mashg'ulot

2.2.1. Chiziqli almashtirish matrisasi

2.2.2. Xarakteristik ko'phad

2.2.3. Xos son va xos ko'phad

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: tezkor so'rov, hikoya, ma'ruza.

2.2.1. Chiziqli almashtirish matrisasi

Ta'rif. Agar L_1 chiziqli fazoning har bir elementi $x \in L_1$ uchun biron qoida, qonunga asosan L_2 chiziqli fazoning aniq elementi mos qo'yilgan bo'lsa, L_1 ni L_2 ga akslantiruvchi operator berilgan deyiladi. Bu operatorni A deb belgilab, akslantirishni $A: L_1 \rightarrow L_2$ shaklda ifoda etiladi, bu akslantirishda x ning y ga mos kelishi $Ax = y$ kabi yoziladi.

Ta'rif. Agar istalgan $x \in L_1$, $y \in L_2$ va λ son uchun

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

$$A(\lambda x) = \lambda Ax$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $A: L_1 \rightarrow L_2$ operator chiziqli operator deyiladi.

Agar $A: L \rightarrow L$ va $B: L \rightarrow L$ chiziqli operatorlar bo'lsa, bunday operatorlar uchun $A+B$, $\lambda \cdot A$ va $A \cdot B$ chiziqli operatorlarni aniqlashimiz mumkin bo'ladi. L chiziqli fazoning o'zini-o'ziga akslantiruvchi barcha chiziqli operatorlar to'plamini $\mathfrak{L}(L)$ deb belgilaymiz, operatorlarni qo'shish va songa ko'paytirishga nisbatan $\mathfrak{L}(L)$ to'plam chiziqli fazoni tashkil etadi.

Ta'rif. Agar $A \in \mathfrak{L}(L)$ operator uchun shunday λ son mavjud bo'lib,

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x vector A operatorning xos vektori deyiladi.

$A: R^n \rightarrow R^m$ chiziqli operator bo'lsin. Biz A operatorning matritsa ko'rinishini hosil qilamiz. Buning uchun R^n da $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ va R^m da esa $\ell_1^*, \ell_2^*, \dots, \ell_m^*$ bazislarni olaylik. $x \in R^n$, $Ax = y \in R^m$, $A\ell_j \in R^m$ uchun ushbu tengliklarni yoza olamiz:

$$x = x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + \dots + x_n \ell_n$$

$$Ax = y = y_1 \ell_1^* + y_2 \ell_2^* + \dots + y_m \ell_m^*$$

$$A\ell_j = a_{1j} \ell_1^* + a_{2j} \ell_2^* + \dots + a_{mj} \ell_m^*, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Bu yerdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$Ax = \sum_{j=1}^n x_j A\ell_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \ell_i^* = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \ell_i^* \quad Ax = y = \sum_{i=1}^m y_i \ell_i^*$$

demak, $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, $i = 1, 2, \dots, m$ tengliklar hosil bo'ladi. Agar biz ushbu matritsalarini kiritsak,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

u holda yuqoridagi tengliklarni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$AX = Y$$

bu yerda A matritsa qaralayotgan A operatorning berilgan bazislardagi matritsasi deyiladi. $A \in \mathfrak{S}(R^n)$ bo'lsin, u holda bunday operatorga mos keladigan matritsa kvadratik matritsa bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2.2.2. Xarakteristik ko'phad. Xos son va xos ildiz

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ vektor A chiziqli operatorning λ xos soniga mos keluvchi xos vektor, ya'ni $Ax = \lambda x$ bo'lsin.

Agar $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektor matritsa bo'lsa, u holda ushbu tenglik hosil bo'ladi

$$AX = \lambda X.$$

Bu yerdan E birlik matritsa uchun, quyidagi $(A - \lambda E)X = 0$ tenglikni yoza olamiz. Bu bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim nol $x = 0$ yechimga ega. U noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun, ya'ni xos vektorning mavjud bo'lishi uchun $|A - \lambda E| = 0$ bo'lishi, ya'ni

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ekanligi zarur va yetarlidir. Bu determinant λ ga nisbatan n -tartibli ko'phaddan iborat bo'ladi, uni A operatorning yoki A matritsaning xarakteristik ko'phadi, (1) tenglama A operatorning (matritsaning) xarakteristik tenglamasi deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, xarakteristik ko'phad qaralayotgan bazisga bog'liq bo'lmaydi.

A operator n ta chiziqli erkli $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ xos vektorlarga ega bo'lib, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ xos sonlari bo'lsin, u holda A operatorning $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ bazisga mos keluvchi A matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ya'ni A matritsa diagonal matritsa bo'lar ekan.

Aksincha, biron-bir bazisda A operator matritsasi diagonal ko'rinishga ega bo'lsa, u holda bu bazis vektorlari A operatorning xos vektorlari bo'lib, matritsa diagonalidagi sonlar uning xos sonlaridan iborat bo'ladi.

Agar A operator n ta turli xos sonlarga ega bo'lsa, u holda ularga mos keluvchi xos vektorlar chiziqli erkli bo'lib, shu vektorlar hosil qilgan bazisda A operator matritsasi diagonal ko'rinishga ega bo'ladi.

Masalan 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ operatorning matritsasini biror bazisda diagonal ko'rinishga keltiraylik.

Matrisaning xarakteristik tenglamasi tuzib, xos sonlarni topamiz

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ bundan } \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5.$$

Xos vektorlarni topish uchun

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

ko'rinishdagi bir jinsli tenglamalar sistemasini yechamiz.

$$\lambda_1 = 2 \text{ xos songa mos keluvchi xos vektori } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \text{ sistemaning yechimi bo'lib,}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2b \\ b \end{pmatrix} \text{ bo'ladi.}$$

$$\lambda_2 = 5 \text{ xos songa mos keluvchi xos vektor esa } \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \text{ sistemaning yechimi}$$

bo'lib, erkli o'zgaruvchini $x_2 = c$ deb olsak. $x_1 = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$ bo'ladi. b va c ixtiyoriy sonlar

bo'lgani uchun bitta xos songa bir nechta har xil xos vektorlar mos kelishi mumkin. Xususan, $b = c = 1$ bo'lsa, bir jinsli sistemaning fundamental yechimlariga mos keluvchi xos vektorlar $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ va $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.

Bu xos vektorlardan tuzilgan $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisa $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ va $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bazisdagi

$B^{-1} \cdot A \cdot B$ almashtirishda berilgan A matrisani diagonal matritsa ko'rinishiga keltiradi.

$B^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ekanligini hisobga olib, $B^{-1} \cdot A \cdot B$ almashtirishni hisoblaylik

$$B^{-1} \cdot A \cdot B = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Demak, qaralayotgan bazisda A operatorning matritsasi diagonal ko'rinishga ega bo'lib, matritsa diagonalidagi sonlar A operatorning xos sonlaridan iborat bo'lar ekan.

Teorema. A^2 matritsaning xos sonlari, berilgan A matritsa xos sonlari kvadratiga teng, hamda ikkala matritsaning xos vektorlari bir xildir. $Aq = \lambda q$.

Teorema. A^n matritsaning xos sonlari, berilgan A matritsa xos sonlari n -darajaga oshirilganiga teng, ammo ikkala matritsaning xos vektorlari bir xildir.

Teorema. A^{-1} matritsaning xos sonlari berilgan A matritsaning xos sonlariga teskari bo'ladi, hamda matritsalarining xos vektorlari bir xil.

Teorema. Idempotent matritsaning har bir xos soni yoki nolga teng yoki birga.

3-mashg'ulot

2.3.1. Evklid fazosi

2.3.2. Kvadratik formalalar

2.3.3. Almashtirishning chiziqli modeli

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: yo'riqnoma berish, hikoya, so'rov.

2.3.1. Evklid fazosi

Ta'rif. Agar L chiziqli fazo berilgan bo'lib, $\forall x, y \in L$ elementlar uchun shunday $(x; y)$ son mos qo'yilgan bolsa va u quyidagi xossalarni qanoatlantirsa:

1. $(x, y) = (y, x), (x, y \in L),$
2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z), (x, y, z \in L);$
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y), (\alpha \in R, x, y \in L),$
4. $(x, x) \geq 0$ va faqat $x = 0 (x \in L)$ bo'lganda $(x; x) = 0,$

U holda bu chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan deyiladi.

Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo evklid fazosi deyiladi.

Skalyar ko'paytma yordamida vektorning normasi (uzunligi) tushunchasini kiritish mumkin. x vektorning uzunligi (normasi) $|x|$ deb, quyidagicha aniqlangan songa aytiladi. $|x| = \sqrt{(x, x)}$

Norma quyidagi xossalarga ega bo'ladi.

1. $|x| = 0$ faqat va faqat $x = 0$, bo'lsa.
2. Istalgan λ son uchun $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$
3. $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ -Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi.
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ uchburchak tengsizligi

Ikkita x va y vektorlar orasidagi burchak θ quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\cos \theta = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}, \text{ bu yerda } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ deb qaraladi.}$$

Teorema. Har qanday n o'lchovli L evklid fazosida ortonormal bazis mavjuddir.

R^n Evklid fazoda $\ell_1 = (1, 0, \dots, 0), \ell_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \ell_n = (0, 0, \dots, 1)$ vektorlar ortonormal bazisni tashkil etadi.

2.3.2. Kvadratik formalalar

Kvadratik formalalar maxsus matritsaviy funksiya bo'lib, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning maksimumi va minimumlarini topishda qo'llaniladi. Ekonometrikaning ko'pgina modellari parametrlarini baholashda ma'lum bir kvadratik formalarni minimallashtirish yechim ko'rinishini olish imkonini beradi.

Ta'rif. n ta o'zgaruvchining kvadratik formasi deb

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

tenglik orqali aniqlangan f funksiyaga aytiladi.

Bu yerda a_{ij} -lar kvadratik formaning koeffitsientlari deyiladi. Ular haqiqiy sonlar bo'lib, $a_{ij} = a_{ji}$ shartlarni qanoatlantiradi. Shu koeffitsientlar yordamida tuzilgan $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) matritsa kvadratik formaning matritsasi deyiladi, $a_{ij} = a_{ji}$ shart bajarilgani uchun bunday matritsalar simmetrik matritsalar ko'rinishida ifoda qilish mumkin:

$$f(X) = X'AX \quad (3)$$

bu yerda $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ - matritsa ustundan iboratdir.

$C = (c_{ij}) (i, j = 1, 2, \dots, n)$ n -tartibli xos bo'lmagan matritsa bo'lib, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ va $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ lar $X = CY$ tenglik orqali bog'langan bo'lsin. U holda (3) tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz,

$$f = X'AX = (CY)'A(CY) = (Y'C')A(CY) = Y'(C'AC)Y = Y'A^*Y$$

Demak, $X = CY$ xos bo'lmagan chiziqli almashtirishda f kvadratik formaga mos keluvchi matritsa quyidagicha bo'lar ekan

$$A^* = C'AC$$

Agarda barcha $i \neq j$ lar uchun $a_{ij} = 0$ bo'lsa, ya'n' $f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2$ ko'rinishda bo'lsa, demakki kvadratik formaning matritsasi diagonal ko'rinishda bo'lsa u holda $f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ forma kanonik kvadratik forma deyiladi.

Masalan.1. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiraymiz.

Kvadratik formaga mos matritsa $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.

Shu matrisaning xos son va xos vektorlarini topamiz.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0. \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6.$$

Xos vektorlarni topamiz.

$$\text{a) } \lambda_1 = -2 \text{ uchun } \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ yoki } \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Bu sistemani notriveal yechimlaridan biri $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\lambda_2 = 3$ uchun xuddi a) punktdagi kabi mulohazalarda $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\lambda_3 = 6$ uchun ham xuddi a) punktdagi kabi mulohazalarda $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ yechimlarni hosil qilamiz.

Normal vektorlar uchun $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ shart o'rinli ekanligini inobatga olib,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vektorni } \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ga ko'paytirib, } e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ normal vektorni hosil}$$

qilamiz. Xuddi shu kabi, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ qolgan normal vektorni hosil

qilamiz.

e_1, e_2, e_3 xos vektorlar o'zaro juft-juft orthogonal, yani $e_1^T \cdot e_2 = e_1^T \cdot e_3 = e_2^T \cdot e_3 = 0$ bo'lgani uchun C matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

O'zgaruvchilarning $X = CY$ orthogonal almashtirishida berilgan kvadratik forma quyidagi $F(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$ kanonik ko'rinishga keladi, bunda

$$y_1 = -\frac{x_1}{\sqrt{3}} + \frac{x_2}{\sqrt{3}} + \frac{x_3}{\sqrt{3}}, \quad y_2 = \frac{x_1}{\sqrt{6}} - \frac{x_2}{\sqrt{6}} + \frac{2x_3}{\sqrt{6}}, \quad y_3 = \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}$$

va aksincha

$$x_1 = -\frac{y_1}{\sqrt{3}} + \frac{y_2}{\sqrt{6}} + \frac{y_3}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{y_1}{\sqrt{3}} - \frac{y_2}{\sqrt{6}} + \frac{y_3}{\sqrt{2}}, \quad x_3 = \frac{y_1}{\sqrt{3}} + \frac{2y_2}{\sqrt{6}}.$$

Ta'rif. Agar barcha $x \neq 0$, uchun $q(x) = x^T A x > 0$ bo'lsa, $q(x)$ kvadratik forma va A matritsa **musbat aniqlangan** deyiladi.

Agar barcha $x \neq 0$, uchun $q(x) = x^T A x \geq 0$ bo'lsa, $q(x)$ kvadratik forma va A matritsa **yarim musbat aniqlangan** deyiladi.

Agar barcha $x \neq 0$, uchun $q(x) = x^T A x < 0$ bo'lsa, $q(x)$ kvadratik forma va A matritsa **manfiy aniqlangan** deyiladi.

Agar barcha $x \neq 0$, uchun $q(x) = x^T A x \leq 0$ bo'lsa, $q(x)$ kvadratik forma va A matritsa **yarim manfiy aniqlangan** deyiladi.

Agar ba'zi x lar uchun kvadratik forma musbat va boshqa x lar uchun manfiy aniqlangan bo'lsa, u holda A matritsa uchun **aniqmas(xosmas)** deyiladi.

Teorema. Agar matritsaning xos sonlari musbat aniqlangan bo'lishi uchun A haqiqiy simmetrik matritsa musbat aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar A haqiqiy simmetrik matritsa yarim musbat aniqlangan bo'lishi uchun matritsaning xos sonlari noldan katta yoki nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar matritsaning xos sonlari manfiy aniqlangan bo'lishi uchun A haqiqiy simmetrik matritsa manfiy aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar A haqiqiy simmetrik matritsa yarim manfiy aniqlangan bo'lishi uchun matritsaning xos sonlari noldan kichik yoki nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Teorema. Istalgan kvadratik formani xos bo'lmagan chiziqli almashtirish yordamida kanonik ko'rinishga olib kelish mumkin.

Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi koeffitsientlari ma'n'sida yagona bo'lmaydi. Lekin quyidagi teorema o'rinalidir:

Teorema. (Kvadratik forma uchun inertsia qonuni). Kvadratik formaning barcha kanonik ko'rinishlaridagi musbat va manfiy hadlari soni bir xil bo'ladi.

Teorema. $f = X'AX$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun A matritsaning barcha bosh minorlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lishi uchun esa $(-1)^i \Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Teorema. A matritsaning musbat aniqlangan bo'lishi uchun A matritsa bosh minorlari musbat aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir.

A matritsa bosh minorlari quyidagi matritsa determinantlaridan tuziladi:

$$A_1 = a_{11}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \dots$$

Misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa musbat yoki manfiy aniqlanganlikka tekshiring.

Yechish. Berigan matritsaning xos sonlari $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ va $\lambda_3 = 3$, uyqoridagi teoreмага ko'ra kvadratik forma musbat aniqlangan.

Quyidagicha yozish mumkin:

$$q(x) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2.$$

Ixtiyoriy x_1, x_2, x_3 qiymatlarni olganda ham $q(x)$ musbatdir. Hamda barcha asosiy minorlar ham musbat aniqlangan. Natijada berilgan matritsa ham musbat aniqlangan.

Misol. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matritsa musbat yoki manfiy aniqlanganlikka tekshiring.

Yechish. Berigan matritsaning xos soni $\lambda = -1$ ikki karralidir. Uyqoridagi teoreмага ko'ra kvadratik forma manfiy aniqlangan, hamda quyidagicha yoziladi:

$$q(x) = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 - x_2^2.$$

x o'zgaruvchi vektor oldidagi ishora manfiy.

2.3.3. Almashtirishning chiziqli modeli

$S_1, S_2, \dots, S_n$ n -ta mamlakat bo'lib, ularning milliy daromadlari mos ravishda $x_1, x_2, \dots, x_n$ larga teng bo'lsin. a_{ij} - S_j - mamlakatning S_i - mamlakatdan sotib olgan tovarlarga sarf qilgan milliy daromadning ulushi bo'lsin. Milliy daromad to'raligicha mamlakat ichida va boshqa mamlakatlardan tovar xaridi uchun sarf bo'ladi deb hisoblaymiz, ya'ni

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \text{ tenglik o'rinli bo'lishi kerak.}$$

Quyidagi matritsani qaraylik

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

bu matritsa savdo-sotiqning strukturaviy matritsasi deb nomlanadi. Istalgan $S_i (i = \overline{1, n})$ mamlakat uchun ichki va tashqi savdodan hosil bo'lgan tushumi $P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ tenglik orqali aniqlanadi. Mamlakat olib borayotgan savdo-sotiqning muvozanatda bo'l'shi uchun har bir mamlakat savdosi kamomadsiz bo'lishi kerak, ya'ni har bir mamlakat savdosidan hosil bo'lgan tushum uning milliy daromadidan kam bo'lmasligi kerak. Ya'ni

$$P_i \geq x_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Agar $P_i > x_i$ deb faraz qilsak, u holda quyidagini hosil qilamiz:

$$P_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k > x_i, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\text{bu yerdan } \sum_{i=1}^n P_i > \sum_{i=1}^n x_i, \text{ ya'ni } \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \right) x_k = \sum_{k=1}^n x_k > \sum_{k=1}^n x_i$$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa qarama-qarshilikdir. Demak, $P_i \geq x_i$ tengsizlik o'rniga $P_i = x_i$ tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Iqtisodiy nuqtai nazardan bu tushunarli holatdir, chunki mamlakatlarning barchasi bir paytda foyda ko'rolmaydi. Mamlakatlar

milliy daromadi uchun $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorni kiritsak u holda $P_i = x_i$, ya'ni

$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = x_i, \quad i = \overline{1, n}$ tengliklardan quyidagi tenglamani hosil qilamiz: $AX = X$, ya'ni, qaralayotgan masala A matritsaning $\lambda = 1$ xos soniga mos keladigan xos vektorini topish masalasiga kelar ekan.

Masala.1. To'rtta mamlakat savdosining strukturaviy matrisasi $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$

budjetlar yig'indisi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$ (shartli pul birligi) bo'lsa, har bir mamlakatning budjeti topilsin.

Dastlab, berilgan strukturaviy matrisaning $\lambda = 1$ xos songa mos keluvchi xos vektorni topish kerak, ya'ni $(A - E)\bar{x} = 0$ tenglamani yechish kerak.

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & -0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bu sistemaning rangi uchga teng bo'lgani uchun, noma'lumlardan bittasi erkli o'zgaruvchi va qolganlari shu erkli o'zgaruvchi orqali ifodalanadi. Sistemani Gauss usuli bilan yechib, x xos vektorning komponentlarini topamiz

$$x_1 = \frac{140}{121}c, \quad x_2 = \frac{146}{121}c, \quad x_3 = \frac{20}{11}c, \quad x_4 = c.$$

Topilgan qiymatni berilgan budjetlar yig'indisiga qo'yib c kattalikni topamiz: $c=1210$, bundan defitsitsiz savdoda mamlakatlar budjetining izlanayotgan kattaligini topamiz. $x_1=1400$, $x_2=1460$, $x_3=2200$, $x_4=1210$.

Masala.2. X_1 , X_2 , X_3 davlat byudjetiga ega uchta mamlakat savdosini qaraylik. Butun davlat byudjeti har bir mamlakat uchun yoki mamlakat ichida tovar olish uchun yoki boshqa mamlakatlardan import olish uchun sarflanadi deb hisoblaymiz. Aytaylik, birinchi mamlakat o'z byudjetining yarimini mamlakat ichidagi tovar ayirboshlashga, byudjetning $\frac{1}{4}$ qismini ikkinchi mamlakatdan va qolgan $\frac{1}{4}$ qismini uchinchi mamlakatdan mahsulot olishga sarflansin. Ikkinchi mamlakat ichki tovar uchun ham, birinchi va uchinchi mamlakatdan mahsulot olish uchun ham byudjetni teng miqdorda taqsimlasin. Uchinchi mamlakat byudjetning $\frac{1}{2}$ qismiga birinchi mamlakatdan, qolgan $\frac{1}{2}$ qismiga ikkinchi mamlakatdan tovar sotib olib, mamlakat ichida hech qanday mahsulot ayirboshlamasin. Shu xalqaro savdo modelining X xos vektori topaylik.

Bu xalqaro savdoning strukturaviy matritsasini kiritamiz.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} I & II & III \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Bunda, a_{ij} – j – mamlakatning i – mamlakatdan sotib olgan mahsulotining davlat byudjetidagi qismi. Bu matritsa har bir ustuni elementlarining yig'indisi birga teng.

i mamlakat bir yillik savdodan so'ng quyidagi tushumga ega bo'ladi:

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$$

Masalan, birinchi mamlakat uchun tushum quyidagicha bo'ladi:

$$P_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3$$

Savdoning muvozanatli bo'lishi uchun har bir mamlakat uchun savdoning tanqissizligini talab qilish zarur, ya'ni barcha $i=1, 2, 3$ uchun $P_i = X_i$ bo'lishi kerak.

Matritsaviy ko'rinishda bu tenglik $AX = X$ kabi ifodalanadi, bu erda $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Demak, qaralayotgan hol uchun X ni aniqlovchi tenglamalar sistemasi

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

ko'rinishiga ega.

Bu sistemaning umumiy yechimi $\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 \end{cases}$ korinishda bo'ladi.

Shuning uchun xos vektor deb $\bar{x} = x^T = (4; 3; 2)$ vektorni olish mumkin. Xususan, bu savdoda ishtirok etayotgan mamlakatlar savdolarini muvozanatlashlari uchun ularning

davlat byudjetlari $x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 3 : 2$ kabi nisbatda bo'lgandagina erishishlari mumkinligini anglatadi.

3-MAVZU. ANALITIK GEOMETRIYA

1-mashg'ulot

3.1.1. To'g'ri chiziq tenglamalari

3.1.2. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

3.1.3. Nuqtadan to'g'ri chiziqqa masofa

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, namoyish, so'rov.

3.1.1. To'g'ri chiziq tenglamalari

$ax + by + c = 0$ tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

1) agar $c = 0$ bo'lsa, $ax + by = 0$ -to'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tai.

2) agar $b = 0$ bo'lsa, $x = -\frac{c}{a} = \text{const}$ - to'g'ri chiziq OY o'qqa parallel bo'ladi.

3) agar $a = 0$ bo'lsa, $y = -\frac{c}{b} = \text{const}$ - to'g'ri chiziq OX o'qqa parallel bo'ladi.

4) agar $b = 0$ va $c = 0$ bo'lsa $x = 0$ - to'g'ri chiziq OY o'q bilan ustma-ust tushadi.

5) agar $b \neq 0$, $a = 0$ va $c = 0$ bo'lsa, $y = 0$ to'g'ri chiziq OX o'q bilan ustma-ust tushadi.

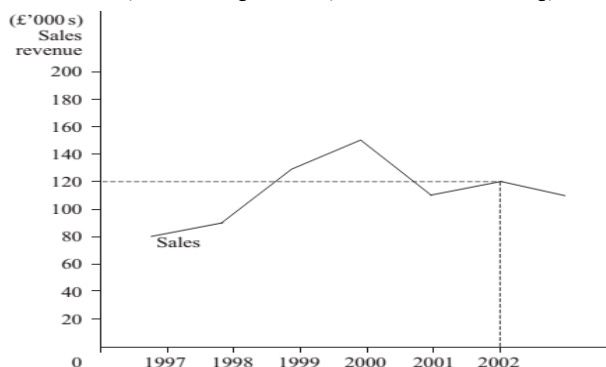
$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ - to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini.

$y = kx + d$ -to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ - $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

Misol. Talab funksiyasi $Q = 200 - 4P$, teskari talab funksiyani aniqlang.

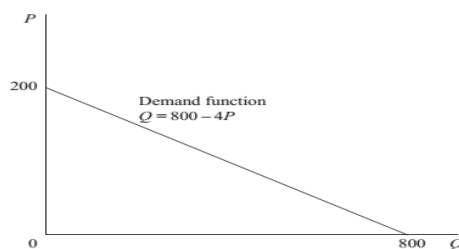
Yechish. $Q = 200 - 4P$, $4P + Q = 200$, $4P = 200 - Q$, $P = 50 - 0,25Q$.



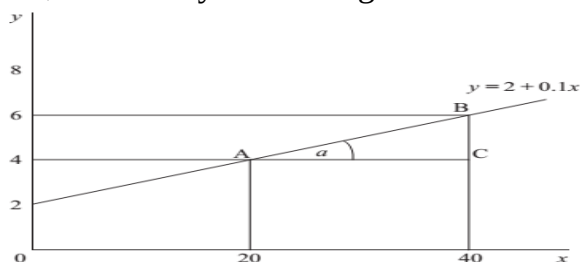
Yuqoridagi rasmda kompaniyaning yillik savdo ko'rsatkichlarini ko'rsatadi. 2002 yilda uning savdosi qandayligini topish uchun, avval, gorizont o'qi bo'yicha 2002 ni topish, " savdo " chizig'i va bu holatda £ 120,000 bo'lgan vertikal o'qi bo'ylab kesishgan nuqta olinadi.

Misol. $Q = 800 - 4P$ talab funksiyasi grafigini chizing.

Yechish. $Q = 0$ da $P = 200$ va $P = 0$ da esa $Q = 800$.



Britaniyada ba'zi yo'l belgilari xavfli yo'l(og'is, nishablik)larni ogohlantirish uchun xizmat qiladi. Agar uni tahrirlasak, '1 dan 10' ma'nosi yo'l vertikal bo'yicha 1 dan 10 futgacha gorizontaal yonalishda ko'tariladi. Nishab ko'rsatgichi tik tepaliklar ogohlantirish uchun ishlatiladi. Matematikada ham, og'sh tushunchasi ishlatiladi. Quyidagi rasmda $y = 2 + 0,1x$ funktsiya tasvirlangan.



Matematikada $og'ish(nishablik) = \frac{balandlik}{asosi}$.

$$og'ish = \frac{2}{20} = 0,1$$

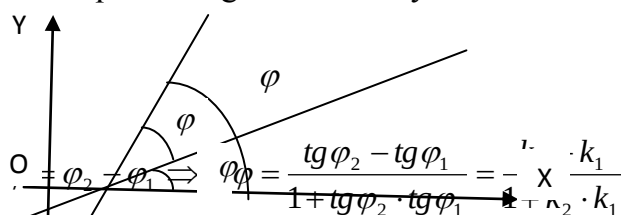
Bu misolda

Bu, x qiymti 1 birlikka o'zgarganda funksiya necha birlikka og'ishini anglatadi.

Bu burchak tangensini ham beradi.

3.1.2. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

$y = k_1x + d_1$ va $y = k_2x + d_2$ to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi atrofida, birinchi to'g'ri chiziqni soat strelkasiga teskari yo'nalishda aylantirish natijasida ikkinchi to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushguncha hosil bo'lgan burchak φ , ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deyiladi.



To'g'ri chiziqlarning paralellik va perpendikulyarlik shartlari

Agar to'g'ri chiziqlar burchak ko'efficientli tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ya'ni $y_1 = k_1x + b_1$, $y_2 = k_2x + b_2$, u hola

$k_2 = -\frac{1}{k_1}$ - bu to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti,

$k_2 = k_1$ - bu to'g'ri chiziqlarning paralellik sharti.

3.1.3. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa

$M(x_0, y_0)$ nuqtadan $ax + by + c = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

formulani yordamida hisoblanadi.

Masalan. Uchlari $A(-7; 2)$; $B(5; -3)$; $C(8; 1)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakni B uchidan chiqarilgan mediana, balandlik, bissektrisa tenglamalarini tuzing.

Yechish. $B(5; -3)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plamini tuzamiz: $y + 3 = k(x - 5)$

D nuqtaning koordinatalari $x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-7 + 8}{2} = \frac{1}{2}$, $y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$, $D(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

BD mediana burchak koeffitsienti $k_{BD} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{\frac{3}{2} + 3}{\frac{1}{2} - 5} = -1$ bo'ladi.

BD mediana tenglamasi: $y + 3 = -(x - 5)$ yoki $x + y - 2 = 0$.

BE balandlik tenglamasini tuzamiz, bunda AC va BE to'g'ri chiqqlarning perpendikulyarlik shartidan foydalanamiz. AC to'g'ri chiziq burchak koeffitsienti

$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1 - 2}{8 + 7} = -\frac{1}{15}.$$

AC va BE to'g'ri chiqqlar perpendikulyar bo'lganligi uchun $k_{BE} = -\frac{1}{k_{AC}} = 15$.

BE to'g'ri chiziq tenglamasi: $y + 3 = 15(x - 5)$ yoki $15x - y - 78 = 0$.

BE bissektrisa tenglamasini tuzamiz: $\angle ABF = \angle FBC \Rightarrow \operatorname{tg} \angle ABF = \operatorname{tg} \angle FBC \Rightarrow$

$$\frac{k_{BF} - k_{BC}}{1 + k_{BF} \cdot k_{BC}} = \frac{k_{AB} - k_{BF}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BF}} \Rightarrow \frac{k_{BF} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}k_{BF}} = \frac{-\frac{5}{12} - k_{BF}}{1 - \frac{5}{12}k_{BF}} \Rightarrow 33k_{BF}^2 + 11k_{BF} - 33 = 0$$

$(k_{BF})_1 = -\frac{11}{3}$, $(k_{BF})_2 = \frac{3}{11}$. BF bissektrisa Ox o'q bilan o'tmas burchak tashkil qilganligi

uchun $(k_{BF})_1 = -\frac{11}{3}$ yechimni olamiz. Demak, BF bissektrisa tenglamasi

$y + 3 = -\frac{11}{3}(x - 5)$ yoki $11x + 3y - 46 = 0$ ko'rinishda bo'ladi.

2 - mashg'ulot

3.2.1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

3.2.2. Tekislikdagi harakatlar

3.2.3. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni kanonik ko'rinishga keltirish

3.2.1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Ta'rif. Tekislikda berilgan $M(x_0, y_0)$ nuqtadan bir xil R masofada yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o'rni aylana deyiladi. Berilgan $M(x_0, y_0)$ nuqta aylana markazi, R esa aylana radiusi deb ataladi.

Markazi $M(x_0, y_0)$ nuqtada, radiusi R ga teng aylananing kanonik tenglamasi

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Aylananing umumiy tenglamasini $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$.

Ta'rif. Ellips deb tekislikda berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar yig'indisi avvaldan berilgan o'zgarmas songa teng bo'lgan barcha nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Ellipsning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bu tenglama bilan berilgan ellips koordinata o'qlariga va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. a va b musbat sonlar bo'lib, ular ellipsning yarim o'qlari deyiladi. $a > b$ bo'lsa, uning fokuslari OX o'qida joylashgan bo'lib, fokuslar koordinata boshidan $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ masofada yotadi. $\frac{c}{a} = \varepsilon < 1$ nisbat ellipsning ekstsentrismetri deyiladi. Ellipsda yotgan $M(x, y)$ nuqtadan fokuslarga bo'lgan masofalar fokal radius-vektorlar deb nomlanib, ular quyidagi tenglik orqali topiladi: $r_1 = a - \varepsilon x$, $r_2 = a + \varepsilon x$.

Masalan. O'z harakati davomida $x = 9$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $A(1; 0)$ nuqtaga uch marta yaqinroq bo'lgan nuqtalar harakatining trayektoriyasini ifodalovchi chiziq tenglamasini tuzaylik.

$|AM| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, $|MM_1| = \sqrt{(9-x)^2}$. Bu yerda $M_1 - M$ nuqtadan $x = 9$ to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning asosi belgilangan.

U holda $3 \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(9-x)^2}$. Tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib,

$$8x^2 + 9y^2 = 72$$

yoki $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ ellips tenglamasini hosil qilamiz.

Ta'rif. Giperbola deb berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar ayirmasining moduli avvaldan berilgan o'zgarmas songa teng bo'lgan barcha nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

$0 < a < c$ bo'lgani uchun $c^2 - a^2 = b^2$, giperbolaning kanonik ko'rinishdagi tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Bu tenglama ko'rinishida berilgan giperbola koordinata o'qlari va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. a va b parametrlar musbat son bo'lib, a - haqiqiy yarim o'q, b - mavhum yarim o'q deb nomlanadi. Giperbola OX o'qni giperbola uchlari deb ataluvchi $A_1(-a, 0)$ va $A_2(a, 0)$, nuqtalarda kesib o'tadi. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ son fokuslardan koordinata boshigacha bo'lgan masofaga teng bo'ladi. $\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$ nisbat giperbola

ekstsentrismetri deb nomlanadi. $y = \frac{b}{a}x$ va $y = -\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlar giperbola asimptotalari deyiladi. Giperbolada yotuvchi $M(x, y)$ nuqtadan fokuslarga bo'lgan masofalar fokal radius-vektorlar deb atalib, quyidagicha topiladi: $r_1 = |\varepsilon x - a|$, $r_2 = |\varepsilon x + a|$.

Masalan. Tenglamasi $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$ bo'lgan ellips berilgan. Uchlari ellipsning fokuslaridan, fokuslari esa uning uchlari bo'lgan giperbola tenglamasini tuzaylik.

Masala shartiga ko'ra $a_g = c_e$, $c_g = a_e$, $a_e = \sqrt{8}$, $b_e = \sqrt{5}$ shuning uchun $a_g = c_e = \sqrt{8-5} = \sqrt{3}$, $b_g = \sqrt{c_g^2 - a_g^2} = \sqrt{5}$. Demak izlanayotgan giperbola tenglamasi $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ bo'ladi.

Ta'rif. Berilgan nuqta va berilgan to'g'ri chiziqdan teng masofada yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o'rni parabola deb aytiladi.

Ta'rifdagi nuqta parabola fokusi, to'g'ri chiziq uning direktrisasi deyiladi. Parabola fokusi $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ nuqta, direktrisa tenglamasi esa $x = -\frac{p}{2}$ bo'lsin ($p > 0$). Agar $M(x, y)$ nuqta

parabolada yotsa, u holda ta'rifga ko'ra $MF = \left|x + \frac{p}{2}\right|$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak, ya'ni

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \Rightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2 = 2px$$

Berilgan dekart koordinatalariga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan aniqlangan egri chiziq ikkinchi tartibli egri chiziq deyiladi.

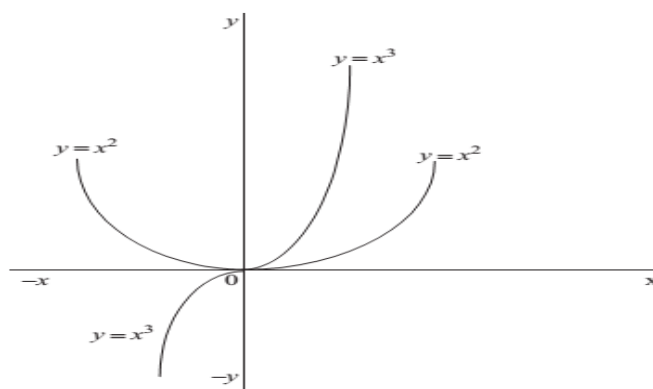
Masalan. Berilgan $F(2;0)$ nuqtadan va $y=2$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o'rning tenglamasini tuzaylik.

$M(x, y)$ izlanayotgan chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin, u holda $|MF| = |MA|$ yoki $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(y-2)^2}$, bu yerda $A(x;2) - M$ nuqtadan $y=2$ to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan perpendikulyarning kesishish nuqtasi. Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib $x^2 - 4x + 4 + y^2 = y^2 - 4y + 4$ yoki $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$ parabola tenglamasini hosil qilamiz.

Masalan. $y = x^2$, $y = x^3$ funktsiya grafiklarini chizing.

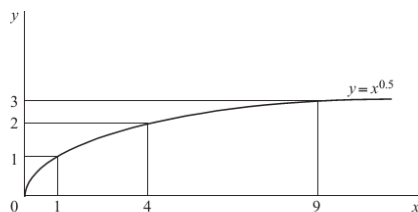
Yechish. Quyidagi jadval asosida funktsiya grafigini sxematik chizish mumkin:

x	0	1	2	3	4	5	6
$y = x^2$	0	1	4	9	16	25	36
$y = x^3$	0	1	8	27	64	125	216



Masalan, $y = x^{0.5}$ funktsiya grafigi

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y = x^{0.5}$	0	1	1.414	1.732	2	2.236	2.449	2.646	2.828	3



Misol. Korxona mol-mulk lizingi uchun £90,000 belgilangan yillik xarajatlarni to'lashi lozim. O'rta belgilangan yillik xarajat funksiyasini keltirib chiqaring. (AFC).

Yechish. $AFC = \frac{\text{umumiy tayinlangan xarajat}}{Q} = \frac{90,000}{Q} = 90,000Q^{-1}$

Q^{-1} ning xamma qiymatlari 90,000 ko'paygani bilan, bu funksiyaning umumiy o'zgarishiga ta'sir qilmidi va yuqoridagi rasmda berilgan $y = x^{-1}$ funksiya grafigiga o'xshaydi.

Misol. Korxona belgilangan narx funksiyasi bilan ish olib boradi.

$$AFC = 200x^{-1}$$

bu erda x – xom ashyo. O'rtacha o'zgaruvchan narx funksiyasi (AVC)

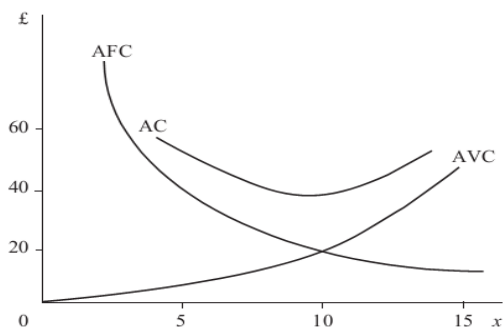
$AVC = 0,2x^2$ va o'rta umumiy narx funksiyasi qanday shaklda bo'ladi (AC)?

Yechish. Ta'rif boyicha $AC = AFC + AVC$.

Demak, o'rta umumiy narx

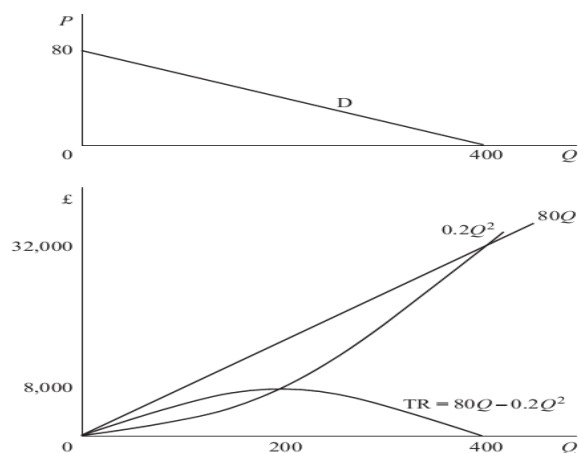
$$AC = 200x^{-1} + 0,2x^2.$$

x o'ssa, AFC qiymati nolga intiladi, bundan esa AC AVC ga intiladi. Bundan, AC funksiya quyida ko'rsatilgan U-tasvirdagi shaklni oladi



Misol. Agar talab funksiya grafigi $P = 80 - 0,2Q$ berilgan bo'lsa, umumiy yillik foyda qanday shaklni oladi?

Yechish. Umumiy foyda (TR) – bu maxsulot sotatilganda olingan umumiy pul miqdori. $TR = PQ$, $TR = (80 - 0,2Q)Q = 80Q - 0,2Q^2$.



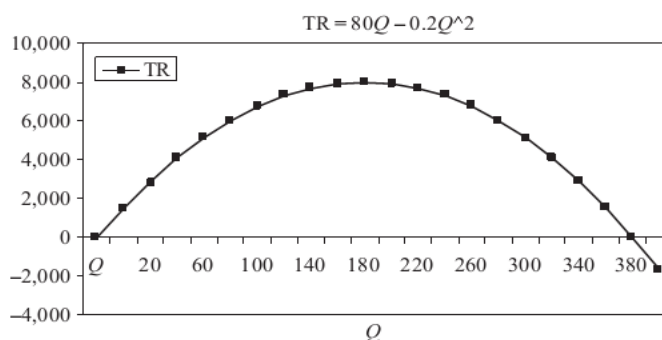
$80Q$ komponenta – to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tadi va o‘tuvchi.

$0,2Q^2$ komponenta - parabola, o‘tuvchi funksiya bo‘ladi. Q ning kichik qiymatlari uchun Q , $80Q > 0,2Q^2$. Ammo, Q ning o‘shishi bilan Q^2 , demak $0,2Q^2$ ham tez o‘sadi va $80Q$ oshadi.

Misol. $TR = 80Q - 0,2Q^2$ funksiyasi qiymatlarini hisoblash uchun Excel daeturidan foydalaning. Q va TR ning aniqlanish sohasi, yani musbat bo‘lishini inobatga oling. So‘ngra grafigini chizing.

Yechish.

	A	B	C	D	E
1	Ex 4.17	TR = 80 - 0.2Q^2			
2					
3	Q	TR			
4	0	0			
5	20	1520			
6	40	2880			
7	60	4080			
8	80	5120			
9	100	6000			
10	120	6720			
11	140	7280			
12	160	7680			
13	180	7920			
14	200	8000			
15	220	7920			
16	240	7680			
17	260	7280			
18	280	6720			
19	300	6000			
20	320	5120			
21	340	4080			
22	360	2880			
23	380	1520			
24	400	0			
25	420	-1680			

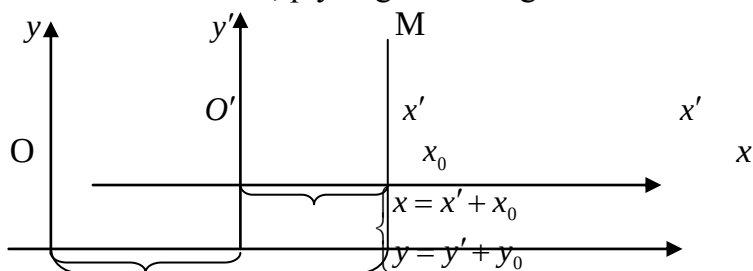


3.2.2. Tekislikdagi harakatlar

1.Koordinata o‘qlarini parallel ko‘chirish

Ikkita dekart koordinatalar sistemasida bir xil ismli o‘qlar parallel ,bir xil yo‘nalgan va o‘qlarning har birida bir xil masshtab birligi aniqlangan bo‘lsin. “Yangi” koordinatalar sistemi ‘eski’sini parallel ko‘chirishdan hosil qilingan

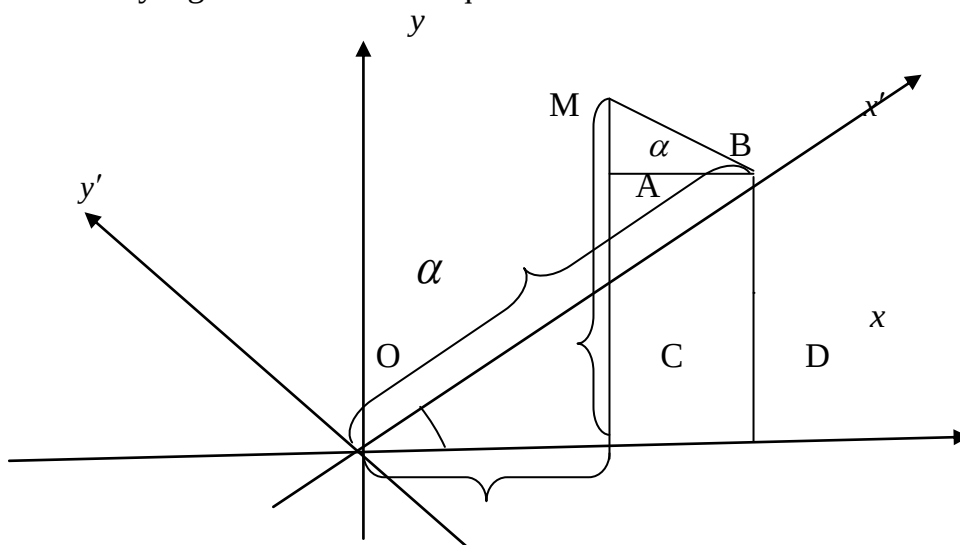
bo'lib, $(x_0; y_0)$ - yangi koordinatalar sistemasining eski sistemaga nisbatan koordinatalari bo'lsin. U holda, quyidagi chizmaga ko'ra



koordinatalarni almashtirishning o'qlarni parallel ko'chirish formulasi hosil bo'ladi.

2. Koordinata o'qlarini burish.

Tekislikda umumiy koordinata boshi O nuqta bo'lgan Oxy (eski) koordinatalar sistemasi va bu sistemani α burchakka burishdan hosil qilingan $Ox'y'$ (yangi) koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Tekislikdagi ixtiyoriy M nuqtaning eski koordinatalarini yangi koordinatalari orqali ifodalovchi formulani keltirib chiqaramiz.



Bu holda, yuqoridagi chizmaga ko'ra $OC = OD - AB$, $CM = BD + MA$ bo'lganidan

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

o'qlarni burish formulalarini hosil qilamiz.

3.2.3. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni kanonik ko'rinishga keltirish

Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Aylana, ellips, giperbola va paraboladan boshqa ikkinchi tartibli

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

tenglama bilan aniqlanadigan egri chiziqlar mavjudmi?

Koeffisientlarning qiymatiga bog'liq ikkinchi tartibli

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

tenglama umumiy holda aylanani, ellipsni, giperbolani, parabolani, kesishuvchi to'g'ri chiziqlar juftini, parallel to'g'ri chiziqlar juftini, ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlar juftini, nuqtani aniqlashi va hech qanday chiziqni aniqlamasligi mumkin.

$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ - koordinatalarni almashtirishning o'qlarni parallel ko'chirish formulalari.

$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$ - o'qlarni burish formulalarini hosil qilamiz.

$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$ va $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ - almashtirishdan umumiy tenglama quyidagich

ko'rinishda bo'ladi: $Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F_1 = 0$, $F_1 = Dx_0 + Ey_0 + F$.

Koordinata o'qlarini parallel ko'chirishda umumiy tenglama joriy koordinatalarning birinchi darajalari qatnashgan hadlaridan ozod bo'ladi.

Kanonik tenglamada koordinatalar ko'paytmasi qatnashmagani uchun, tenglamadagi bu hadni koordinata o'qlarini burish yordamida bartaraf etamiz.

$$\begin{cases} x' = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha \\ y' = \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha \end{cases}$$

α burchakka burish formulasini tenglamaga qo'yib: $A_1 \bar{x}^2 + 2B_1 \bar{x}\bar{y} + C_1 \bar{y}^2 + F_1 = 0$, bunda

$$A_1 = A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha,$$

$$B_1 = (C - A) \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha),$$

$$C_1 = A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha.$$

α burchakni shunday tanlaymizki, bunda B_1 koeffitsient nolga aylansin, ya'ni $(C - A) \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0$

yoki $B \tan^2 \alpha - (C - A) \tan \alpha - B = 0$ munosabat bajarilsin. Bu tenglamani yechib burish burchagi aniqlanadi.

Yangi koordinatalar sistemasida (9) tenglama

$$A_1 \bar{x}^2 + C_1 \bar{y}^2 + F_1 = 0$$

kanonik ko'rinishni oladi.

Masalan. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ tenglama bilan berilgan egri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring ba chizing.

Yechish: Tenglama koeffitsientlarini yoziz: $A=5, B=4, C=5, D=-9, E=-9, F=9$.

$\Delta = AC - B^2 = 25 - 16 = 9 > 0$, u holda chiziq ellipsni ifodalaydi.

Chiziq markazini aniqlaymiz:

$$\begin{cases} 5x_0 + 4y_0 - 9 = 0 \\ 4x_0 + 5y_0 - 9 = 0, \end{cases} \Delta = 9 > 0, \Delta_x = 9, \Delta_y = 9. x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1.$$

Koordinatalar boshini $O'(1;1)$ nuqtaga ko'chirqamiz: $\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 1 \end{cases}$. Bu holda egri

chiziq tenglamasi $5x'^2 + 8x'y' + 5y'^2 - 9 = 0$ ko'rinishni oladi.

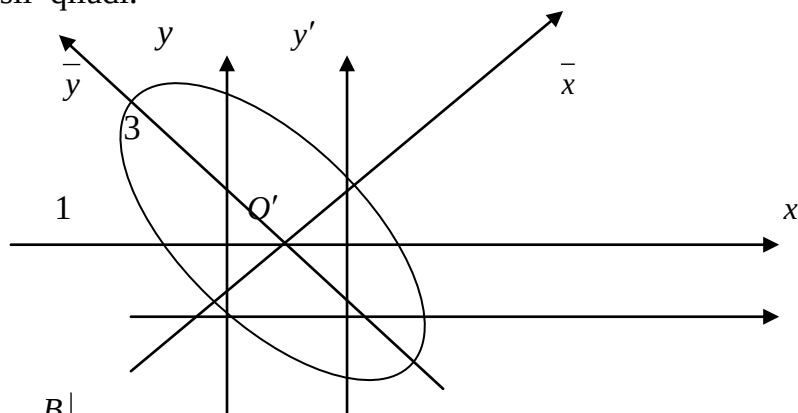
Koordinata o'qlarini α burchakka buramiz. Burish burchagi α ni (15) formula bo'yicha $4 \tan^2 \alpha - 4 = 0, \tan \alpha = \pm 1$ tenglamadan aniqlaymiz. Yechim uchun

$\tan \alpha = 1, \alpha = 45^\circ$ bo'lgan holni qaraylik. Bu holda (11) formulaga asosan koordinatalar

$\bar{x} = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \bar{y} = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$ munosabat bilan bog'lanib, tenglama $9\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 9$, yoki

$$\frac{\bar{x}^2}{1} + \frac{\bar{y}^2}{9} = 1 - \text{ellipsning kanonik}$$

tenglamasini hosil qiladi.



2. Agar $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 0$ bo'lsa, u holda quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin.

I. Sistema yechimga ega emas, egri chiziq markazga ega emas. Bu holda egri chiziq tenglamasini soddalashtirishni koordinata o'qlarini burishdan boshlash qulay bo'ladi va doim parabolaning kanonik tenglamasi hosil bo'ladi.

II. Sistema cheksiz ko'p yechimga ega. Bu holda egri chiziq parallel to'g'ri chiziqlar jufti yoki mavhum nuqtani ifodalaydi.

Masalan. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ tenglama bilan berilgan egri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiraylik.

$\Delta = AC - B^2 = 144 - 144 = 0$, demak bu chiziq parabolaning ifodalaydi va shuning uchun soddalashtirishni koordinatalar o'qini burishdan boshlash qulay bo'ladi. (12) formulalarni berilgan tenglamaga qo'yib va $x'y'$ had oldidagi koeffisientni nolga tenglab quyidagiga ega bo'lamiz:

$$12tg^2\alpha + 7tg\alpha - 12 = 0.$$

Bu tenglanani yechib

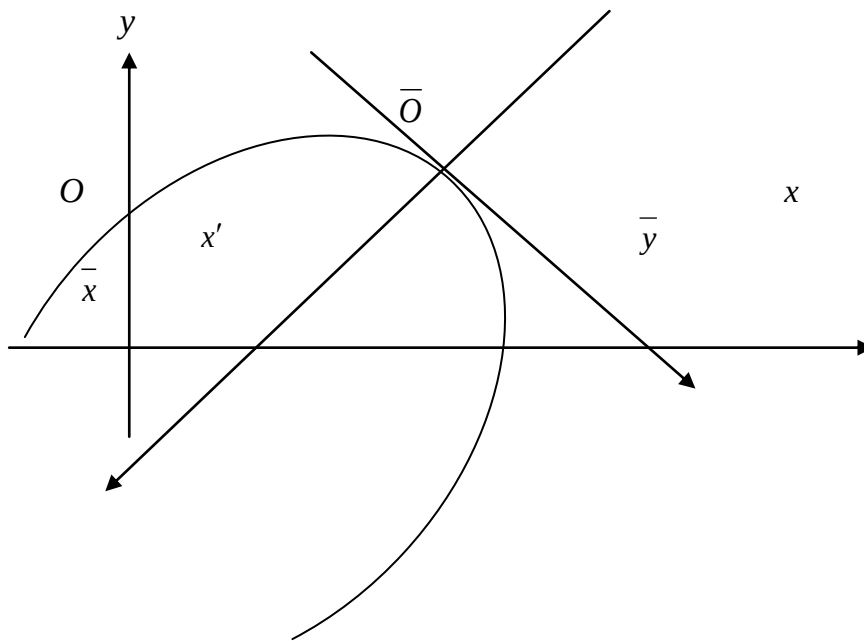
$$tg\alpha_1 = 0,75 (\sin\alpha_1 = 0,6; \cos\alpha_1 = 0,8); tg\alpha_2 = -\frac{4}{3} (\sin\alpha_2 = -0,8; \cos\alpha_2 = 0,6).$$

x'^2, y'^2, x', y' o'zgaruvchilar oldidagi koeffisientlarni hisoblansa, yangi sistemada berilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi

$$y'^2 - 4y' - 2x' - 2 = 0$$

yoki

$$(y' - 2)^2 - 2(x' + 3) = 0.$$



3 - mashg'ulot

3.3.1. Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko'paytmalari

3.3.2. Fazoda tekislikning tenglamalari

3.3.3. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari

3.3.4. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro joylashuvi

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: ma'ruza, ko'rsatish, tezkor so'rov.

3.3.1. Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko'paytmalari

Ta'rif. Boshi A nuqtada, oxiri B nuqtada bo'lgan yo'naltirilgan kesmaga **vektor** deb ataladi va $\overline{AB}$ yoki $\vec{a}$ kabi belgilanadi.

$\vec{a}$ vektorning uzunligi uning moduli deb ataladi va $|\vec{a}|$ kabi belgilanadi. Oxiri boshi bilan ustma – ust tushadigan vektor nol vektor deb ataladi va 0 bilan belgilanadi. Agar $|\vec{a}| = 1$ bo'lsa, u holda $\vec{a}$ birlik vektor deyiladi.

Bir to'g'ri chiziqda yoki paralell to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar *kolleniar* vektorlar deyiladi.

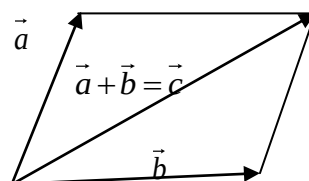
Agar ikki vektor o'zaro kolleniar, bir xil yo'nalgan va modullari teng bo'lsa, bu vektorlar teng vektorlar deyiladi.

Bir tekislikda yoki paralell tekisliklarda yotuvchi vektorlar *komplanar* vektorlar deyiladi.

$\vec{a}$ vektorning λ soniga ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ ga kolleniar, ($\lambda > 0$ da u bilan yo'nalishdosh,

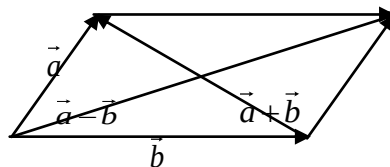
$\lambda < 0$ da esa yo'nalishi qarama – qarshi) hamda moduli $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ga teng bo'lgan $\lambda \vec{a}$ (yoki $\vec{a} \lambda$) vektorga aytiladi.

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb uchburchak yoki parallelogram qoidasi bo'yicha aniqlanadigan $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



vektorga aytiladi.

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ vektorga aytiladi



$\vec{a}$ vektorning (x, y, z) koordinatalari deb, boshlang'ich nuqtasi koordinata boshi bilan ustma - ust tushganda, oxirgi nuqtasining koordinatalariga aytiladi.

$\vec{a}(x, y, z)$ vektorni $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ko'rinishida ifodalanishi mumkin, bu yerda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - birlik vektorlar (ortlar), mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlarining musbat yo'nalishi bilan mos tushadi

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1. \quad (2)$$

$$|\vec{a}| \text{ vektorning uzunligi } |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3)$$

formula bilan aniqlanadi.

Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deb $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ sonlariga aytiladi, bunda mos ravishda α, β, γ - $\vec{a}$ vektorning Ox, Oy, Oz o'qlari bilan hosil qilgan burchaklari:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (4)$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \text{ bunda } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (5)$$

Ikkita $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ yig'indisining koordinatalari va $\vec{a}$ vektorning λ songa ko'paytmasi quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$\vec{a} + \vec{b}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad (6) \quad \lambda \vec{a}(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \quad (7)$$

$\vec{a}$ vektorning l o'qdagi proeksiyasi deb $pr_l \vec{a}$

$$pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi \quad (8)$$

songa aytiladi, bu yerda φ $\vec{a}$ vektor va l o'q orasidagi burchak.

Masalan. Berilgan $\vec{a} = (2; -1; -2)$ va $\vec{b} = (8; -4; 0)$ vektorlar bo'yicha quyidagilarni toping:

- $\vec{c} = 2\vec{a}$ va $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$;
- $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlarning uzunliklarini;
- $\vec{d}$ vektorning skalyar kvadratini;
- $(\vec{c}, \vec{d})$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini;
- $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlar orasidagi burchakni

Yechish. a) Ta'rifga asosan $\vec{c} = 2\vec{a} = (4; -2; -4)$; $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (6; -3; 2)$.

b) (3) formulaga asosan, $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlarning uzunliklarini

$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6; \quad |\vec{d}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$$

c) Vektorning skalyar kvadrati (4.11) formulaga asosan $(\vec{d}, \vec{d}) = \vec{d}^2 = |\vec{d}|^2 = 7^2 = 49$.

d) Vektorlarning skalyar ko'paytmasi formulasiga asosan:
 $(\vec{c}, \vec{d}) = 4 \cdot 6 + (-2)(-3) + (-4) \cdot 2 = 22$

e) Vektorlar orasidagi burchak: $\cos \varphi = \frac{(\vec{c}, \vec{d})}{|\vec{c}| |\vec{d}|} = \frac{22}{6 \cdot 7} \approx 0.52$ bundan $\varphi = \arccos 0.52 \approx 58^\circ$.

Skalyar ko'paytma

Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb bu vektorlarning uzunliklarini ular hosil qilgan burchak kosinusiga ko'paytirishdan hosil bo'lgan songa aytiladi va $(\vec{a}, \vec{b})$ yoki $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ko'rinishida belgilanadi.

Demak, $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$.

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ formula bilan aniqlanadi.

Vektorning skalyar kvadrati $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ yoki $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar orasidagi burchak

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

formula yordamida hisoblanadi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ortogonal deyiladi, agar ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, ya'ni $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, yoki $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$.

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar kolleniar bo'lsa, ya'ni $\vec{a} = k \vec{b}$, u holda

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = k \text{ - vektorlarning kolleniarlik sharti.}$$

Vektor ko'paytma

Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi deb, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ko'rinishda belgilanuvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{c}$ vektorga:

1. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning har biriga perpendikulyar;
2. $\vec{c}$ vektor uchidan qaralganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng qisqa burilishi soat mili yo'nalishiga teskari yo'nalishda kuzatiladi ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning bunday joylashuvini o'ng uchlik deyiladi);
3. $\vec{c}$ vektorning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramning S yuzasini ifodalovchi songa teng, ya'ni $|\vec{c}| = S = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$ (φ - $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak).

Vektor ko'paytmasining asosiy xossalari:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$;
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
4. Agar $\vec{a} = 0$, yoki $\vec{b} = 0$, yoki $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bo'lsa, u holda $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. Xususan $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Koordinata o'qlari ortlarining vektor ko'paytmasi:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = 0, \vec{j} \times \vec{j} = 0, \vec{k} \times \vec{k} = 0; \quad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}. \quad \text{agar} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \quad \text{bo'lsa, u holda} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kolleniar bo'lsa, u holda $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

Masalan. $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogram yuzasini hisoblaylik.

$\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorlar vektor ko'paytmani

$$\text{hisoblaymiz } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| \text{ bo'lgani uchun, } S = \sqrt{(-3)^2 + (-12)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 144 + 16} = \sqrt{169} = 13$$

Uch vektorning aralash ko'paytmasi

Ta'rif. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$ aralash ko'paytmasi deb, $(\vec{a} \times \vec{b})$ vektor ko'paytmaning $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytmasiga aytiladi.

Aralash ko'paytmaning xossalari:

$$1. (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \quad 2. \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b}. \quad 3. \vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{c} \vec{a}, \quad \vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a},$$

$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b}$,
4. agar vektorlardan aqalli bittasi nol vektor yoki $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$ bo'ladi.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \text{Agar } \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \quad \text{bo'lsa, u holda} \quad (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \\ \vec{c} &= c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{Agar } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda } \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Aralash ko'paytma ko'paytiriluvchi vektorlarda qurilgan parallelopiped hajmiga ishora aniqligida teng, ya'ni $V = \pm (\vec{a} \vec{b} \vec{c})$.

Masalan.a) $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$ va $\vec{b} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogram yuzasini hisoblang.

Yechish. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramning S yuzasi shu vektorlarning vektor ko'paytmasining moduliga teng: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Vektor ko'paytmani

$$\text{topamiz: } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 4\vec{j} - 9\vec{k}. \text{ Demak, } S = \sqrt{(-12)^2 + 4^2 + (-9)^2} = \sqrt{241} \quad \text{kv}$$

birlik.

Masalan. Uchlari $A(1, 2, 0)$; $B(-1, 2, 1)$; $C(0, -3, 2)$ va $D(1, 0, 1)$ nuqtalarda bo'lgan piramidaning hajmini hisoblang.

Yechish. Piramidaning A uchidan chiqqan qirralariga mos keluvchi vektorlarni topamiz: $\vec{AB} = \{-2; 0; 1\}$, $\vec{AC} = \{-1; -5; 2\}$, $\vec{AD} = \{0; -2; 1\}$.

Piramidaning hajmi shu vektorlarga qurilgan parallelopiped hajmining $\frac{1}{6}$ qismiga

$$\text{teng bo'lganligi sababli } V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3} \text{ kub birlik.}$$

3.3.2. Fazoda tekislikning tenglamalari

Dekart koordinatalar sistemasida biror tekislik berilgan bo'lsin. Shu tekislikdagi biror $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtani va shu tekislikka perpendikulyar $\vec{n}(A, B, C)$ - vektorni olaylik. $\vec{n}(A, B, C)$ - vector tekislikning normal vektori deyiladi. $M(x, y, z)$ - ixtiyoriy nuqta berilgan tekislikda yotishi uchun $\vec{n}(A, B, C)$ va $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lsa.

$$\text{U holda } \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \text{ yoki } A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Qavslarni ochib va $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ belgilashdan so'ng $Ax + By + Cz + D = 0$ - tekislikning umumiy ko'rinishdagi tenglamasini hosil qilamiz. Bu yerda $\vec{n}(A, B, C)$ vektor tekislikning normal vektori deyiladi.

Agar $D = 0$ bo'lsa, u holda $Ax + By + Cz = 0$ tekislik koordinata boshidan o'tadi.

Agar $A = 0$ bo'lsa, $By + Cz + D = 0$ tekislik OX o'qqa parallel bo'ladi.

Agar $A = 0, D = 0$ bo'lsa, $By + Cz = 0$ tekislik OX o'qdan o'tadi.

Agar $A = 0, B = 0$ bo'lsa, $Cx + D = 0$ tekislik OXY tekislikka parallel bo'ladi.

Agar $A = 0, B = 0, D = 0$ bo'lsa, $Cz = 0$ (yoki $z = 0$) tekislik OXY tekislik bilan ustma-ust tushadi.

Umumiy tenglamani ozod hadga nisbatan yechib : $Ax + By + Cz = D$ va tenglikning har ikkala qismini D koeffisientga bo'lib

$$\frac{x}{\frac{D}{A}} + \frac{y}{\frac{D}{B}} + \frac{z}{\frac{D}{C}} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{D}{A} = a, \frac{D}{B} = b, \frac{D}{C} = c \text{ deb belgilab}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ -tekislikning kesmalardagi tenglamasini hosil qilamiz.}$$

Umumiy tenglamaning barcha koeffisientlarini $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ - birkik vektorning uzunligiga bo'lib

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \text{munosabatga ega bo'lamiz.}$$

$$\text{Odatda } \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \cos \alpha, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \cos \beta, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \cos \gamma \text{ lar}$$

tekislikning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi va ular tekislik normal vektorining koordinata o'qlari bilan hosil qilgan burchak cosinislardir.

$$\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = p \text{ deb,}$$

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma + p = 0 \text{ - tekislikning normal tenglamasini hosil qilamiz.}$$

Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Maslan. $M_1(3; -1; 2), M_2(4; -1; -1), M_3(2; 0; 2)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzaylik.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & 0-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0 \text{ yoki } \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ikki tekislik orasidagi burchak

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ ikki tekislik orasidagi φ burchak ularga perpendikulyar bo'lgan

$\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ va $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ vektorlar orasidagi burchakka teng bo'ladi. Shuning uchun φ burchak quyidagi tenglikdan topiladi

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ - tekisliklarning paralellik sharti va

$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$ - tekisliklarning perpendikulyarlik sharti.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani hisoblaymiz. Buning uchun $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikka tushirilga perpendikulyarning asosini N deb belgilaylik. $\overrightarrow{HM_0}$ vector $\vec{n}(A, B, C)$ tekislikning normal vektoriga kolleniar bo'ladi. $\overrightarrow{HM_0}$ va $\vec{n}(A, B, C)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini hisoblaylik: $\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{HM_0}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n}) = d(M_0; \vec{n}) |\vec{n}| (\pm 1).$

Bundan $d = \frac{|\overrightarrow{HM_0}| \cdot |\vec{n}|}{|\vec{n}|}$. $H(x_1, y_1, z_1)$ tekislikdagi nuqta bo'lsin, u holda

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \text{ yoki } -(Ax_1 + By_1 + Cz_1) = D.$$

Demak,

$$\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

va $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. U holda

Masalan. $M_0(2; -3; 1)$ nuqtadan $x - 2y + 2z + 2 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani topaylik.

$$d = \frac{|1 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{12}{3} = 3.$$

3.3.3. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari

$M(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{k}$$

$M(x_1, y_1, z_1)$ va $K(x_2, y_2, z_2)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{k}$ - $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tib, $\vec{p}(m, n, k)$ vektorga parallel bo'lgan fazodagi to'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamasi.

$$x = mt + x_0,$$

To'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi: $y = nt + y_0,$

$$z = kt + z_0.$$

Agar tekisliklar parallel bo'lmasa, ular to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi, bu to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi tenglamalar sistemasi orqali topiladi va to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Masalan. $M_1(2; -1; -1)$ va $M_2(3; 3; -1)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{3+1} = \frac{z+1}{-1+1} \text{ yoki } \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{0}$$

Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Ikkita to'g'ri chiziqning o'zlarining kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{k_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{k_2}$$

Bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari $S_1(m_1, n_1, p_1)$ va $S_2(m_2, n_2, p_2)$ bo'ladi.

Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb bu to'g'ri chiziqlar yo'naltiruvchi vektorlari hosil qilgan burchak tushiniladi.

Demak,
$$\cos \varphi = \frac{S_1 \cdot S_2}{|S_1| \cdot |S_2|} = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Ikkita to'g'ri chiziqning parallellik sharti:
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

Ikkita to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti:
$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

3.3.4. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro joylashuvi

$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{k}$ to'g'ri chiziq va $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik orasidagi φ burchak quyidagi formuladan topiladi:

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Ck|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}.$$

To'g'ri chiziqlik va tekislikning parallelizm sharti : $Am + Bn + Ck = 0$.

To'g'ri chiziqlik va tekislikning perpendikulyarlik sharti: $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{k}$.

To'g'ri chiziqlik bilan tekislikning kesishgan nuqtasini topish uchun, to'g'ri chiziqlikning parametrik tenglamasi va tekislikning umumiy tenglamasi orqali hosil bo'lgan sistemani yechish lozim, ya'ni

$$\begin{cases} x = mt + a \\ y = nt + b \\ z = kt + c \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish kerak.

Masalan. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ to'g'ri chiziqlik va $M(2; 0; 1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Tekislik M nuqtadan o'tganligi uchun $A(x - 2) + B(y) + C(z - 1) = 0$. $\vec{p}(1; 2; -1)$ to'g'ri chiziqlikning yo'naltiruvchi vektori $\vec{n}(A; B; C)$ tekislikning normal vektoriga perpendikulyar bo'lgani uchun $\vec{p} * \vec{n} = 0$ yoki $A + 2B - C = 0$ bo'ladi.

Ikkinchi tomondan $A(1; -1; -1)$ nuqta to'g'ri chiziqlikda yotadi, demak u tekislikka ham tegishli : $A(1 - 2) + B(-1) + C(-1-1) = 0$, $-A - B - 2C = 0$.

$$\begin{cases} A + 2B - C = 0 \\ A + B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 3C \\ A = -5C \end{cases}$$

Demak, $(-5(x - 2) + 3y + (z - 1)) C = 0$ ($C \neq 0$) va izlanayotgan $5x - 3y - z - 9 = 0$ tekislik tenglamasi hosil bo'ladi.

4-MAVZU. MATEMATIK ANALIZGA KIRISH

1- mashg'ulot

4.1.1. Sonli ketma-ketlik

4.1.2. Ketma – ketlik limiti

4.1.3. Funksiya limiti

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, ma'ruza, namoyish.

4.1.1. Sonli ketma-ketlik

Har bir natural son uchun $s(n)$ natural argumentli funksiya bilan ishlashimizga to'g'ri keladi. Odatda bunday funksiya **cheksiz (sonli) ketma-ketlik** yoki oddiy **ketma-ketlik** deyiladi. Uning $s(1), s(2), s(3), \dots, s(n), \dots$ hadlari odatda $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ kabi belgilanadi. Biz ketma-ketlikni ifodalash uchun $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ belgidan yoki oddiy $\{s_n\}$ kabi belgilashdan foydalanamiz.

Masalan, $s_n = \frac{1}{n}$, $n=1,2,3,\dots$ bo'lsa, u holda ketma-ketlik hadlari: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

Agar biz n ni yetarlicha katta qilsak, u holda bu ketma-ketlik hadlari yetarlicha kichik bo'ladi. bunday holda ketma-ketlik 0 ga yaqinlashadi deymiz.

Ta'rif. Natural sonlar to'plamida aniqlangan funksiya sonlar ketma-ketligi deyiladi, ya'ni,

$$f: N \rightarrow R.$$

Agar $x_n = f(n)$, $n \in N$, deb belgilash kiritsak, sonlar ketma-ketligini, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yoki $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ko'rinishda ifoda etish ham qabul qilingan. Bu yerda x_n -ketma-ketlikning n -hadi deyiladi.

Masalan, $f(n) = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikni $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ yoki $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ ko'rinishlarda ifoda etish mumkin. Bu ketma-ketlik monoton kamayuvchi, chegaralangan ketma-ketlikdir. Chunki $n \in N, m \in N$ uchun $n < m$ bo'lsa $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ bo'lib, istalgan $n \in N$ uchun $\frac{1}{n} \leq 1$ tengsizlik o'rinni bo'ladi.

Ta'rif. $\varepsilon > 0$ va a son uchun $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ interval a ning ε -atrofi deyiladi. Agar $a=0$ bo'lsa, $(-\varepsilon, \varepsilon)$ interval qisqacha ε -atrof deyiladi.

Ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun, ε -atrofdan tashqarida $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo'lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.

Ta'rif. Agar istalgan $M > 0$ son uchun $(-M; M)$ atrof ichida $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi.

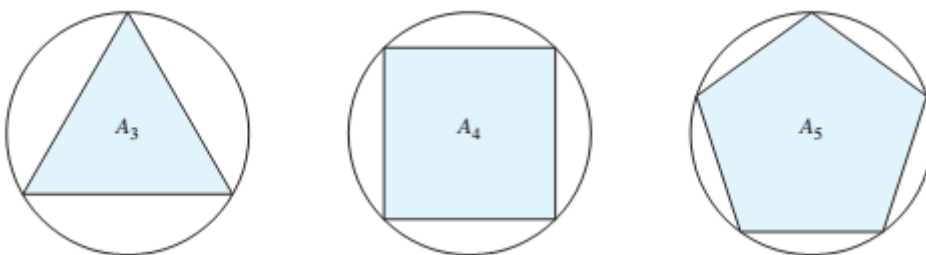
4.1.2. Ketma – ketlik limiti

Agar n ning yetarli katta qiymatlarida $\{s_n\}$ ketma-ketlik s ga yetarlicha yaqin bo'lsa, u holda $\{s_n\}$ ketma-ketlik s limitga ega deyiladi va quyidagicha yoziladi $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ yoki $n \rightarrow \infty$ da $s_n \rightarrow s$

Biror bir haqiqiy songa intilmaydigan ketma-ketlik uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan, $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ va $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklar uzoqlashuvchidir.

Misol. $n \geq 3$ lar uchun A_n radiusi 1 bo'lgan aylanaga ichki chizilgan muntazam ko'pburchak yusi (ya'ni teng tomonli va teng burchakli n burchak).
 $n = 3$ da A_3 muntazam uchburchak yusi, $n = 4$ da A_4 muntazam to'rtburchak yusi, $n = 5$ da A_5 muntazam beshburchak yusi va h.k. (1 rasm)



1 rasm

n ning ortishi bilan ko'pburchak yuzi ortib bormoqda, lekin radiusi 1 doira yuzi π dan katta bo'la olmaydi.

Intuitive tarzda, n yetarli katta bo'lganda A_n and π orasidagi ayirmani yetarlicha kichik qilish mumkin, u holda $n \rightarrow \infty$ da $A_n \rightarrow \pi$.

Bu misolda A_1 va A_2 ma'noga ega emas, demak ketma – ketlik hadlari A_3 dan boshlanadi.

Ta'rif. Agar $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik limiti a songa teng (yoki a songa yaqinlashadi) deyiladi, Bu hol $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ shaklda ifoda etiladi.

Demak, agar $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ deyiladi. Bunday ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

1. Istalgan α va β sonlar uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$,
2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n x_n = a \cdot b$.
4. $y_n \neq 0, n \in N$ va $b \neq 0$ bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ tenglik o'rinli bo'ladi.
5. Biror nomerdan boshlab $x_n \leq y_n$ bo'lsa, u holda $a \leq b$.

Teorema. Agar $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik bo'lib, yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_n \{x_n\} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_n \{x_n\} \right)$ bo'ladi.

Teorema. Agar barcha natural n lar uchun $x_n \leq z_n \leq y_n$ bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

Teorema. (Ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi haqidagi teorema). Agar har bir natural n uchun $[a_n, b_n]$ ($a_n < b_n$) segment berilgan bo'lib, barcha n larda $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ munosabat o'rinli va $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ limitlar mavjud bo'lib $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$, va istalgan natural n uchun $a_n \leq c \leq b_n$ tengsizlik o'rinlidir.

Misol.1. $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$, $e = 2.718...$. Agar $h = \frac{1}{n}$ deb belgilasak, $n \rightarrow \infty$ da

$h \rightarrow 0$ bo'lgani uchun quyidagi muhim limitga ega bo'lamiz: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\begin{aligned} \text{Misol.2. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 4}{4n^2 + n - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(3 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2})}{n^2(4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2})} = \\ \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + 2/n + 4/n^2)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (4 + 1/n - 3/n^2)} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} (2/n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (4/n^2)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (3/n^2)} = \frac{3 + 0 + 0}{4 + 0 - 0} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

4.1.3. Funksiya limiti

Misol.3. $F(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ formula bilan berilgan funktsiyani tekshiring.

Agar $x=0$ bo'lsa, $e^0 = 1$ bo'lgani uchun, bu funksiya $x=0$ nuqtada "0/0" tipidagi aniqmaslikni ifodalaydi. $x=0$ nuqtada $F(x)$ funksiya aniqlanmagani uchun bu funktsiyaning x argument 0 ga yaqinlashgandagi holatini bilish muhim hisoblanadi.

Hisoblash yordamida ($x=0$ holdan boshqa holler uchun) bu funksiya uchun quyidagi jadvaldagi keltirilgan qiymatlarni hosil qilamiz.

x	-1	-0.1	-0.001	-0.0001	0.0	0.0001	0.001	0.1	1
$F(x)$	0.632	0.956	0.999	1.000	*	1.000	1.001	1.052	1.718

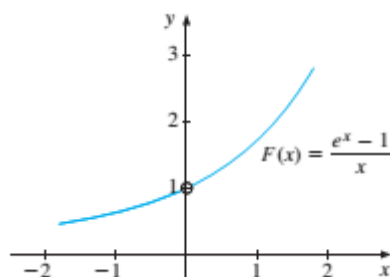
* aniqlanmagan

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, x 0 ga qancha yaqinlashsa, $F(x)$ funksiya qiymatlari 1 ga shuncha yaqinlashmoqda. Shuning uchun x miqdor 0 ga intilganda $F(x)$ funksiya 1 ga intiladi deyishga haqlimiz. Bu mulohazani quyidagicha yozamiz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ yoki } x \rightarrow 0 \text{ da } \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$$

$F(x)$ funsiya $x=0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda aniqlangan va $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1$.

(Chizmada kichik aylana yordamida $(0,1)$ nuqtaning mos kichik atrofi tasvirlangan.)



Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib (x_0 nuqtada aniqlangan bo'lishi shart emas) istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $0 < |x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar (ya'ni istalgan $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$) uchun $|f(x) - a| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x argument x_0 ga intilganda $f(x)$ funksiyaning limiti a ga teng deyiladi, (bu hol $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ shaklda ifoda etiladi.)

Misol.4. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h}$ limitni hisoblash yordamida hisoblang.

Yechish. h ning 0 ga yaqin qiymatlarida quyidagi jadvalga ega bo'lamiz:

h	-0.5	-0.2	-0.1	-0.01	0.0	0.01	0.1	0.2	0.5
$F(h)$	0.586	0.528	0.513	0.501	*	0.499	0.488	0.477	0.449

Bundan ko'rinib turibdiki, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} = 0.5$.

Ta'rif. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ bo'lgan istalgan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x argument x_0 ga intilganda $f(x)$ funksiyaning limiti a ga teng deyiladi.

Ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) bo'lsa, u holda $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) da $f(x)$ funksiya cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) bo'lsa, u holda $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) da $f(x)$ funksiya cheksiz katta miqdor deyiladi.

Limit hisoblash qoidalari

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ va $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ bo'lsin, u holda

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B \quad (b) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0) \quad (d) \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^r = A^r \quad (r \text{ ixtiyoriy haqiqiy son va } A^r \text{ aniqlanganda})$$

(e) Agar $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = a$ va $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ bo'lsa, u holda $f(g(x))$ murakkab funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = a$

Misol.5. Quyidagi limitlarni hisoblang: (a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+1}-1}{h}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8}$.

Yechish. (a) Ko'rinib turibdiki, kasrning surat va maxraji $h \rightarrow 0$ ga intilganda 0 ga intiladi. Kasrning surat va maxrajini $\sqrt{h+1}+1$ ifodaga ko'paytirib, irratsionallikdan qutqaramiz va o'xshash hadlarni ixchamlaymiz

$$\frac{\sqrt{h+1}-1}{h} = \frac{(\sqrt{h+1}-1) \cdot (\sqrt{h+1}+1)}{h \cdot (\sqrt{h+1}+1)} = \frac{h+1-1}{h \cdot (\sqrt{h+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{h+1}+1}$$

Barcha $h \neq 0$ (va $h \geq -1$) berilgan funksiya $\frac{1}{\sqrt{h+1}+1}$ ifodaga teng bo'lib, u $h \rightarrow 0$ ga

intilganda $\frac{1}{2}$ ga intiladi.

(b) $x=4$ bo'lganda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik hosil bo'lgani uchun kasrning suratini kopaytuvchilarga ajrataylik.

$$\frac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8} = \frac{(x+4)(x-4)}{4(\sqrt{x}-2)} = \frac{(x+4)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{4(\sqrt{x}-2)} \quad (*)$$

Barcha $x \geq 0$ uchun $(x-4) = (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)$ ko'paytma o'rinli.

(*) qoidani yana qo'llab $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(\sqrt{x}+2)}{4} = \frac{(4+4)(\sqrt{4}+2)}{4} = 8$

Aniqmaslikning turlari

$y = x^2$ va $g = x^3$ funksiyalar $x \rightarrow 0$ da nolga intiluvchi funksiyalardir. Bu funksiyalardan tuzilgan $y \pm g = x^2 \pm x^3$, $y \cdot g = x^2 \cdot x^3$ funksiyalar ham $x \rightarrow 0$ da nolga intiluvchi funksiyalardir. Suning uchun bu ifodalarning $x \rightarrow 0$ da aniq ifodalardir.

$\frac{y}{g}$ va $\frac{g}{y}$ $x \rightarrow 0$ da $\frac{0}{0}$ ko'rinishida bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{g} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Demak, bu limit nolga intilish holatiga bog'liq bo'lib, uning qiymati chekli ham cheksiz ham bo'lishi mumkin ekan. Odatda bunday ifodalarning natijasini oldindan aytib bo'lmaydi. Natijasini oldindan aytib bo'lmaydigan bunday ifodalar *aniqmasliklar* deyiladi.

Ketma-ketlik va funksiyalar limitlarini hisoblayotganda quyidagi ko'rinishdagi aniqmasliklar yuzaga kelishi mumkin: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

Bu aniqmasliklarning ayrimlarini boshqasi orqali ifodalash mumkin. Limitning xossasiga ko'ra $\frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty$ simvollarni kiritishimiz mumkin. Shunga ko'ra

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{\infty}}}{\frac{1}{\frac{1}{\infty}}} = \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}, \quad 1^\infty = e^{\infty \ln 1} = e^{\infty \cdot 0}, \quad 0^0 = e^{0 \ln 0} = e^{\infty \cdot 0}, \quad \infty^0 = e^{0 \ln \infty} = e^{0 \cdot \infty}$$

aniqmasliklar tengligini yoza olamiz, shuni ta'kidlash kerakki, bu tengliklar sonlar tengligi ma'nosiga ega bo'lmay, balki bir ko'rinishdagi aniqmaslikni ikkinchi xil ko'rinishdagi aniqmaslikka olib kelish mumkinligini anglatadi. Shu holatni e'tiborga olib $\frac{0}{0}$ va $\infty - \infty$ ko'rinishidagi aniqmasliklarga misollar keltiramiz:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot x}{x} = a \lim_{x \rightarrow 0} 1 = a$,
4. $\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x - \text{ratsional son bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x - \text{irrational son bo'lsa} \end{cases}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \chi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \chi(x)$ - limit mavjud emas.

2-mashg'ulot

4.2.1. Ajoyib limitlar

4.2.2. Funksiya uzluksizligi

4.2.3. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari

4.2.1. Ajoyib limitlar

Ushbu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ - limit birinchi ajoyib limit,

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha = e$ - esa ikkinchi ajoyib limit deb nomlanadi.

Bundan tashqari quyidagi umumiy holdagi formulalarni keltirib o'tamiz:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e, \text{ bunda } x \rightarrow a \text{ bo'lganda } f(x) \rightarrow \infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} (1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e, \text{ bunda } x \rightarrow a \text{ bo'lganda } \varphi(x) \rightarrow 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{km}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[m]{1+kx} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+kx)^{\frac{1}{m}} = e^{km}$$

Misollar.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 4x + \sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2 \cdot \sin \frac{11x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{11x}{2}}{\sin \frac{11x}{2}} \cdot \frac{5 \cdot \frac{1}{11}}{\cos \frac{3x}{2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{11x}{2}}{\sin \frac{11x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{11 \cos \frac{3x}{2}} = \frac{5}{11}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx+l} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}} \right]^{\frac{k}{x} \cdot (mx+l)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}} \right]^{\frac{k}{x} \cdot mx} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^l = e^{km} \cdot 1 = e^{km}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[ax]{1+bx} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+bx)^{\frac{1}{ax}} = \lim_{x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+bx)^{\frac{1}{bx}} \right]^{\frac{bx}{ax}} = e^{\frac{b}{a}}.$$

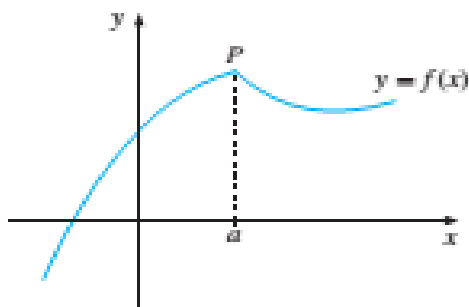
$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^{4x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+1}{2x-3} - 1 \right)^{4x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{4x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{\frac{2x-3}{4}} \right)^{\frac{4(4x-1)}{2x-3}} =$$

$$= \left(\left(1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{\frac{2x-3}{4}} \right)^{\frac{4(4-\frac{1}{x})}{2-\frac{3}{x}}} = e^8.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \left. \begin{array}{l} t = x - e \\ x = t + e \\ x \rightarrow e \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+e) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \ln \frac{e+t}{e} = \lim_{t \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{t}{e} \right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\ln \left(1 + \frac{t}{e} \right)^{\frac{e}{t}} \right]^{\frac{1}{e}} = \ln e^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e}.$$

4.2.2. Funksiya uzluksizligi

Taxminan aytganda, x erkli o'zgaruvchining yetarli kichik o'zgarishiga y o'zgaruvchining ham kichik o'zgarishi mos kelsa, u holda $y = f(x)$ uzluksiz deyiladi. Geometrik nuqtai nazardan, fuksiya grafigi barcha nuqtalarda birikkan bo'lsa, ya'ni qaralayotgan oraliqda uzilmasa. Quyidagi rasmda bu hol ko'rsatilgan.



1 rasm. Uzluksiz funksiya

Odatda, matematikaning tabiat fanlari va iqtisodiyotdagi tadbiqlarida funksiya bu vaqt o'tishi bilan ifodalovchi bog'lanishni ifodalaydi. Funksiya uzluksizligi esa kuzatilayotgan jarayonning sakrashsiz, birdan o'zgarmasdan, ketma-ket ro'y berishini ifodalaydi. Misol uchun, inson tanasining harorati vaqtning funksiyasi sifatida vaqt o'tishi bilan turli qiymatlarni qabul qiladi.

Ikkinchi tomondan, Brent markali neftning bozor narxi qisqa vaqt uchun uzilishga ega funksiyani ifodalaydi. Bunga sabablardan biri narxning(dollar yoki boshqa

valyuta o'rchovida) doim ratsional sonlarda ifodalanishidir. Ikkinchi, qiziqroq holat, narxning tasodifiy sakrashiga sabablardan biri bu talab yoki ga kuchli ta'sir ko'rsatuvchi birdan yangiliklarning yoki mish-mishlarning paydo bo'lishi – masalan, neft etqazib beruvchi asosiy davlatning soliq tizimiga tegishli o'zgarishlar kiritishi.

Uzluksizlik tushunchasi, bizlar shu vaqtgacha muhokama qilgan uzluksizlik tushunchasiga nisbatan matematik nuqtai nazardan qat'iy aniqlangan bo'lishi kerak.

Ta'rif. x_0 nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$, $\left(\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0) \right)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Teorema. Agar $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, quyidagi funksiyalar ham uzluksiz bo'ladi

$$\alpha f(x) \pm \beta g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$$

bu yerda α va β istalgan sonlar bo'lib, $g(x_0) \neq 0$ deb faraz qilinadi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x = b$ nuqtada uzluksiz, $g(x)$ funksiya esa $x = x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lib, $g(x_0) = b$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda murakkab $f(g(x))$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya biron A - to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, bu funksiya A -to'plamda uzluksiz deyiladi.

4.2.3. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari

Boltsano-Koshining birinchi teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, oraliq chegaralarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni $f(a) \cdot f(b) < 0$ bo'lsa, u holda (a, b) oraliqda shunday c nuqta mavjudki, bu nuqtada funksiya nolga teng, ya'ni $f(c) = 0$.

Boltsano-Koshining ikkinchi teoremasi. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib, oraliq chegarasida turli qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni $f(a) = A$, $f(b) = B$ bo'lib, $A \neq B$ bo'lsa, u holda A va B sonlari orasida yotuvchi istalgan C son uchun (a, b) intervalda shunday c nuqta mavjudki, bu nuqta uchun $f(c) = C$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Veyershtassning birinchi teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya bu oraliqda chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday m va M sonlari mavjud bo'ladiki, istalgan $x \in [a, b]$ uchun $m \leq f(x) \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Veyershtassning ikkinchi teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu oraliqda $f(x)$ funksiya o'zining yuqori aniq $\sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ va quyi aniq $\inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ chegaralariga erishadi, ya'ni $[a, b]$ oraliqda shunday x_0 va x_1 nuqtalar mavjudki, $f(x_0) = \sup\{f(x)\}$ va $f(x_1) = \inf\{f(x)\}$.

3-mashg'ulot

4.3.1. Funksiyaning uzilish

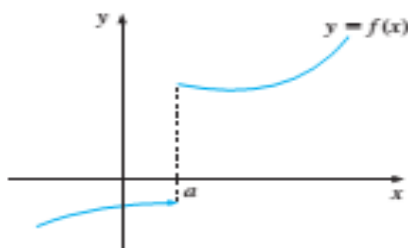
4.3.2. Uzilish turlari

4.3.3. Funksiya asimptotalari

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, video metod, bahs-munozara.

4.3.1. Funksiyaning uzilish

Odatda, ko'pincha funksiya grafigini qalamni ko'tarmasdan chizish mumkin bo'lsa, bu funktsiyani uzluksiz deyishadi. Agar funktsiyani chizganda u bir yoki bir nechta sakrashlarga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya uzilishga ega deyiladi. Grafigi quyidagi rasmda tasvirlangan funksiya $x=a$ nuqtada uzilishga ega, lekin barcha boshqa nuqtalarda uzluksiz.



Uzluksiz va uzilishga ega funksiyalarni farqini bilish nima uchun muhim hisoblanadi? Asosiy sabablardan biri, sonly yaqinlashishlar bilan ishlashimizga to'g'ri keladi. Masalan, funksiya formula ko'rinishida berilgan bo'lib va biz $f(\sqrt{2})$ qiymatini hisoblashimiz zarur bo'lsa, biz odatda $f(1,4142)$ qiymat eng maqbuli va biz hisoblay oladigan hamda $f(\sqrt{2})$ qiymatga eng yaqini deb qabul qilishga odatlanganmiz. Haqiqatda esa mana shu faraz, qabul qilish funksiyaning uzluksizligini taminlayotgan edi. U holda, 1.4142 son $\sqrt{2}$ qancha yaqin bo'lsa, $f(1,4142)$ qiymat ham $f(\sqrt{2})$ qiymatga shuncha yaqin bo'lishi kerak.

4.3.2. Uzilish turlari

$f(x)$ funksiya uchun uzluksizlik shartlaridan aqalli bittasi bajarilmasa, bu funksiya x nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya berilgan x_0 nuqtada uzluksiz bo'lmasa, u holda $f(x)$ funksiya berilgan x_0 nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Uzilish quyidagi turlari mavjud:

I – tur uzilish: funksiyaning chap va o'ng chekli limitlari mavjud, lekin ular teng emas.

II – tur uzilish: bir tomonlama chap va o'ng limitlardan biri cheksiz yoki mavjud emas.

I – tur uzilishga bartaraf qilinadigan uzilish deyiladi, bunda $x \rightarrow x_0$ da funksiyaning limiti mavjud, lekin funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng emas.

I – tur uzilishni $x \rightarrow x_0$ da funksiyaning o'ng va chap limitlari teng, lekin funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng bo'lmagan holda, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$

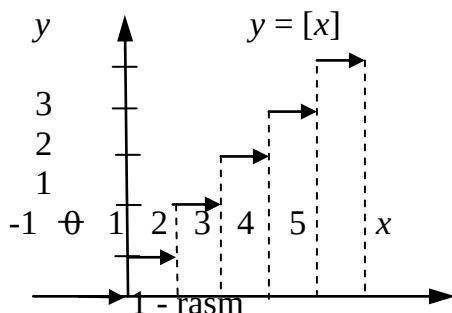
bo'lganda bartaraf etish mumkin. Bunday holda I – tur uzilishni bartaraf qilinadigan uzilish deyiladi.

$f(x)=[x]$ funksiya (o'qilishi “ant’e iks”), bu yerda $[x]$ – x dan katta bo'lmagan eng katta butun sonni ifodalaydi. Masalan, $[2.6] = 2$, $[-2.6] = -3$.

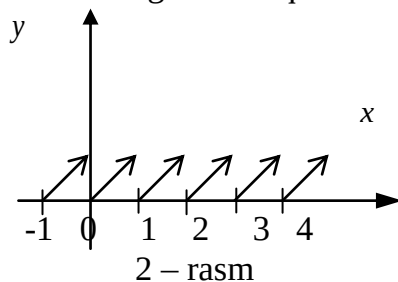
$x = \frac{3}{2}$ nuqtada $f(x) = [x]$, funksiya uzluksiz, yani $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, $x = 1$ nuqtada

esa funksiya aniqlangan $f(1) = 1$, lekin I - tur uzilishga ega, chunki chap va o'ng chekli limitlar mavjud, lekin ular teng emas: $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0$ va $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$.

1. $f(x) = [x]$ barcha haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangani bilan uzluksiz funksiya emas. (1 – rasm).



2. $y = \{x\} = x - [x]$ - x sonining butun qismini ifodalovchi funksiya. (2 – rasm).

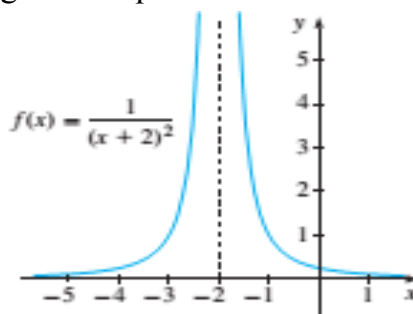


4.3.3. Funksiya asimptotalari

Funksiya **grafigini** chizishda grafik asimptotasi deb nomlanuvchi to'g'ri chiziqlarning yordami kattadir.

Ta'rif. Agar funksiya grafigining $M = (x, f(x))$ nuqtasidan berilgan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan $d(M)$ masofa uchun $\lim_{|M| \rightarrow +\infty} d(M) = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda shu to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi deyiladi, bu yerda $|M| = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$ - M nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofa.

Ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} |M| = +\infty$ bo'lsa u holda asimptota vertikal asimptota deyiladi. Vertikal asimptota $x = x_0$ to'g'ri chiziq bilan ifodalanadi.



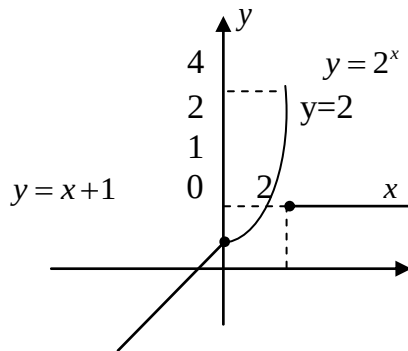
Masalan. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{agar } x < 2 \\ 2^x, & \text{agar } 0 \leq x < 2 \\ 2, & \text{agar } x \geq 2 \end{cases}$ funksiyaniing uzilish nuqtalarini topamiz va

grafigini chizaylik.

Bu funksiya $x=0$ va $x=2$ nuqtalarda uzilishga ega bo'lishi mumkin. Shuning uchun shu nuqtalardagi bir tomonli limitlarni hisoblaymiz.

$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (x+1) = 1$, $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} 2^x = 1$. Demak, $x=0$ nuqtada funksiya uzluksiz.

$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} 2^x = 4$, $f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} 2 = 2$. Demak, $x=2$ nuqtada funksiya I tur uzilishga ega.



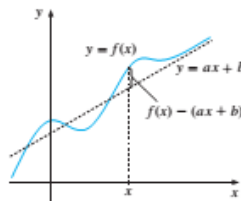
Ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow +\infty} |M| = +\infty$ yoki $\lim_{x \rightarrow -\infty} |M| = +\infty$ bo'lsa, asimptota og'ma asimptota deyiladi.

Og'ma asimptota $y = kx + b$ ko'rinishda bo'ladi.

$y = kx + b$ og'ma asimptotani topish uchun ushbu tenglikdan

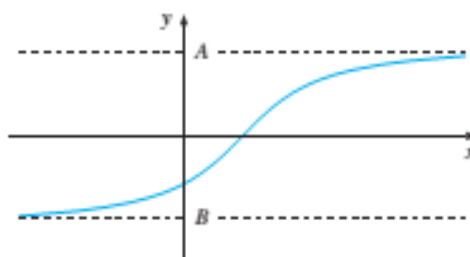
$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$

foydalanish mumkin, bu yerdan $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$, ya'ni $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ekanligi kelib chiqadi. U holda $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$.



Ta'rif. Agar og'ma asimptota uchun $k=0$ bo'lsa, ya'ni asimptota $y=b$ ko'rinishda bo'lsa, bunday asimptota gorizontala asimptota deyiladi.

$x = x_0$ vertikal asimptota, $y = f(x)$ funksiyani cheksizlikka aylantiruvchi x_0 nuqta bilan ifodalangani uchun, x_0 nuqtani $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty$ yoki $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty$ tengliklarni qanoatlantiruvchi nuqta deb qarash kerak.



Limitlar nazariyasi va uzluksizlikning iqtisodiyotdagi ba'zi tadbirlari Uzluksiz foizlar formulasi

Yilning boshida A_0 sh.p.b. miqdorda jamg'arma mavjud bo'lsin. Qanday qilib yilning oxirigacha shu miqdordagi jamg'armadan maksimal foyda olish masalasi qiziqarlidir. Mavjud bo'lgan usullardan biri – biror bank xizmatidan foydalanishdir. Faraz qilaylik, bank 100% yillik ustama bersin. Bu bir yilda jamg'arma 100% ga ortishini, boshqa qisqa muddatlarda esa jamg'arma shu muddatga mos proporsional (masalan, bir oyda jamg'arma $\frac{100}{12}$ %ga) o'sishni anglatadi.

Demak, bir yildan so'ng jamg'arma $A_0 + A_0 = 2A_0$ miqdorga, ya'ni ikki marta ko'payadi. Bundan ham yuqoriroq samaraga erishish uchun 0.5 yildan so'ng jamg'arma hisobini yopib va shu ondayoq qolgan yarim yil uchun uni yana qayta ochirilsa, bu holda yilning birinchi yarim oxirida jamg'arma miqdori $A_0 + \frac{1}{2}A_0 = A_0\left(1 + \frac{1}{2}\right)$, yilning oxirida

esa $A_0\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25 A_0$ miqdorda bo'ladi. Agar hisob raqami yopish va ochish amalini

yil davomida qancha marotaba ko'p bajarilsa, u holda shuncha marta ko'p samara olish mumkin. Masalan, bu amalni har oyning oxirida bajarilsa, yilning oxirida jamg'arma

$A_0\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2.613 A_0$, agar hisob har kuni yopib – ochilsa, yilning oxirida jamg'arma

$A_0\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2.715 A_0$ bo'ladi.

Agar ochish – yopish amali uzluksiz bajarilsa (albatta, natija nazariy hisoblanadi) u holda yilning oxirida jamg'arma miqdorda quyidagiga teng bo'ladi

$$A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = A_0 \cdot e \approx 2.7182818284... \cdot A_0.$$

Shunday qilib, 100% nominal miqdorda samarali miqdor 171 % ni tashkil etishi mumkin.

Xuddi shu mulohazalarni bankning nominal foiz miqdori $p\%$ bo'lganda ham aynan takrorlash mumkin. Bunda (nazariy) jamg'armaning mumkin bo'lgan miqdori quyidagiga teng bo'ladi.

$$A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^n = A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}} \right]^{\frac{p}{100}} = A_0 e^{\frac{p}{100}}$$

Umumiyroq holda A_0 jamg'arma bankka $p\%$ yillik stavkada bir yil emas, biror t yil uchun saqlansin. Vaqtning $[0, t]$ oralig'ini n ta bo'laklarga bo'lib va n ni cheksizlikka intiltirib, mumkin bo'lgan nazariy summani olamiz:

$$A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{100n} t\right)^n = A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{pt}}\right]^{\frac{pt}{100}} = A_0 e^{\frac{pt}{100}}$$

$A = A_0 e^{\frac{pt}{100}}$ - uzluksiz foizlar formulasi deyiladi.

Masalan, $p = 100\%$ yillik stavkada ikkinchi yilning ($t = 2$) oxirida $A_0 e^2 \approx 7.414 \cdot A_0$, ya'ni boshlang'ich jamg'arma etti martadan ko'proq ortadi.

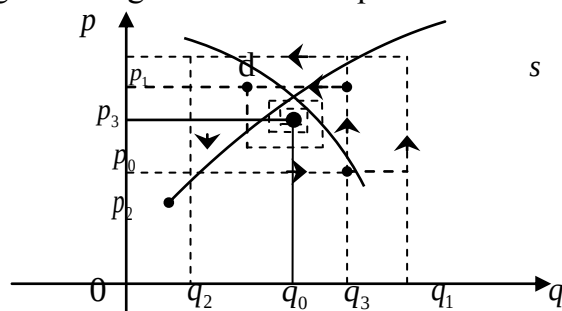
Bozorning to'r (o'rgimchak ini) modeli

Funksiya uzluksizligining xossaligidan biri (ildiz haqidagi teorema) bozorning matematik modelida o'zining ajoyib tadbig'iga egadir. Ma'lumki, talab va taklif – bu bozorning asosiy munosabatlari kategoriyasidir. Ular juda ko'p faktorlarga bog'liq bo'lib, mahsulot narxi – bu faktorlarning asosiysidir. p orqali mahsulotning narxini, d orqali talab hajmini, s orqali taklif miqdorini belgilaymilik (bu harflar so'zlarining birinchi harflaridir: *price* – narx, *demand* – talab, *supply* – taklif). Yetarli kichik p narxlarda $d(p) - s(p) > 0$ (talab taklifdan ustun), katta p narxlarda esa teskarisi, ya'ni $d(p) - s(p) < 0$ bo'ladi. $d(p)$ va $s(p)$ miqdorlarni narxning funksiyalari deb hisoblab, ular uchun shunday p_0 narx mavjudki, bunda $d(p_0) = s(p_0)$ bo'ladi, ya'ni talab taklifga teng degan holatga duch kelamiz. Bunday p_0 narx muvozanat narx, shu narxdagi talab va taklif bozorning muvozanat nuqtasi deyiladi.

Bozorning asosiy masalalaridan biri – bu muvozanat narxni o'rnatishdir. Muvozanat narxni topish uchun o'rgimchak ini modeli deb ataluvchi sodda modelni qaraymiz. U ma'lum mahsulot uchun sotuv hajmi va narxining regulyar takrorlashuvchi siklik o'zgarishi fenomenini tushuntirib beradi.

Faraz qilaylik, mahsulot ishlab chiqarish hajmi haqidagi qaror oldingi davrdagi mahsulot narxiga bog'liq holda qabul qilinsin.

Quyidagi rasmdagi holatni tahlil qilamiz:

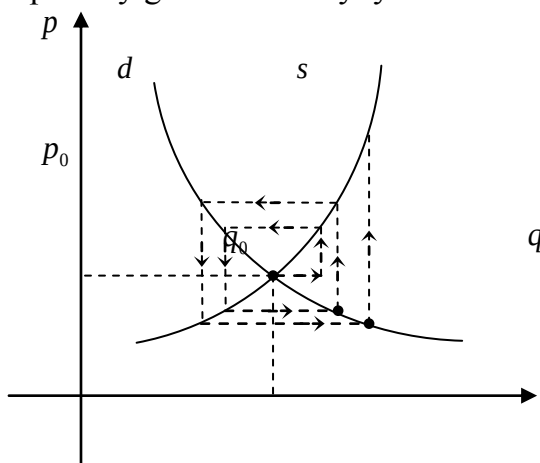


Dastlabki nuqtada mahsulotning taklif hajmi q_1 bo'lib, u mahsulotning oldingi davrdagi p_1 narxiga bog'liq holda tanlangan. Bu narx muvozanat narxdan yuqoriligi sababli d talab chizig'i bo'yicha unga bo'lgan xarid hajmi q_2 boladi.

Bozor holati haqidagi ma'lumotdan foydalanib ishlab chiqaruvchi mahsulot narxini p_2 miqdorgacha tushurishga majbur bo'ladi. p_2 muvozanat narxdan past bo'lgani uchun mahsulotga bo'lgan talab q_3 miqdorgacha ortadi. s taklif chizig'i

bo'yicha bu miqdorga p_3 taklif narxi mos keladi va h.k. Bu holda spiral (q_0, p_0) bozorning muvozanat nuqtasiga yaqinlashadi.

Ba'zi hollarda bu spiral "yig'ilmasdan" "yoyilishi" ham mumkin.



5-MAVZU. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING DIFFERENSIAL HISOBI

1- mashg'ulot

5.1.1. Funksiya hosilasi

5.1.2. Hosilaning geometrik,iqtisodiy va mexanik ma'nolari

5.1.3. Hosila hisoblash qoidalari. Hosilalar jadvali

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: ma'ruza, pinbord, bahs-munozara.

5.1.1. Funksiya hosilasi

$x - x_0 = \Delta x$ - argument orttirmasi deyiladi. $x \rightarrow x_0$ da y $\Delta x \rightarrow 0$. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ - funksiya orttirmasi deyilib, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ tenglikni hosil bo'ladi. Demak, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, argument orttirmasi Δx nolga intilganda, ya'ni Δx cheksiz kichik miqdor bo'lganda, unga mos keluvchi funksiya orttirmasi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ham cheksiz kichik miqdor bo'lishi kelib chiqadi. Shuni e'tiborga olsak, x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgan $y = f(x)$ funksiya uchun,ushbu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limit $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqlik bo'lishligi kelib chiqadi.

Ta'rif. Agar ushbu limit qiymati $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ chekli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega deyiladi.

Limit qiymati $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi hosilasi deyiladi, va quyidagicha belgilanishi mumkin. $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\frac{dy(x_0)}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $y'_x(x_0)$

$$\text{Demak, } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Hosila ta'rifidan, agar $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqar ekan. Teskari tasdiq doim ham o'rinli

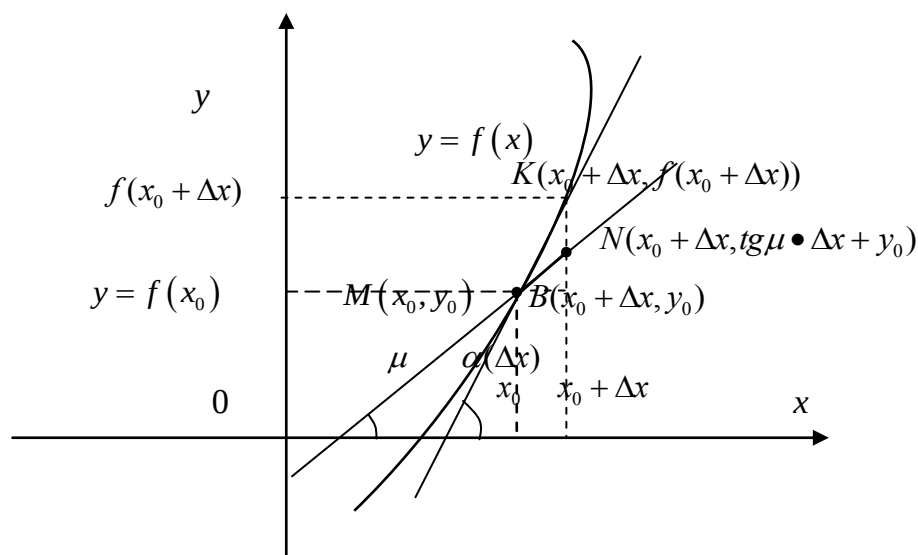
emas. Uzluksiz $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud emas. Haqiqatan ham,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} 1 = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} -1 = -1$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ -limitning mavjud emasligini ko'rsatadi, ya'ni $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo $f(x)=|x|$ uzluksiz funksiya.

5.1.2. Hosilaning geometrik, iqtisodiy va mexanik ma'nolari

1. Hosilaning geometrik ma'nosi. Tekislikda berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$, (bu yerda $y_0=f(x_0)$) nuqtasiga o'tkazilgan urinmani qaraymiz. Bu urinmani hosil qilish uchun quyidagi chizmada, avval MK kesuvchi to'g'ri chiziq o'tkazamiz. So'ngra Δx -orttirmani nolga intiltirsak, grafikdagi K -nuqta, M -nuqtaga yaqinlasha borib,



MK to'g'ri chiziq MN -urinma holatini egallaydi. U $\Delta x \rightarrow 0$ da MK to'g'ri chiziq OX -o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan $\alpha(\Delta x)$ burchagi, MN -urinma hosil qilgan φ burchakka intiladi. Bu yerda MN to'g'ri chiziq tenglamasi $y - y_0 = \operatorname{tg} \varphi \cdot (x - x_0)$ ko'rinishda bo'lib, $x - x_0 = \Delta x$ va $\operatorname{tg} \varphi = k$ - MN to'g'ri chiziq OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsienti ekanligini e'tiborga olsak, MN to'g'ri chiziq tenglamasi $y = k \cdot \Delta x + y_0$ ko'rinishda bo'ladi. 1- chizmada MKB uchburchak uchun $MB = \Delta x$, $KB = \Delta y$ va $\operatorname{tg} \alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Demak, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha(\Delta x) = \operatorname{tg} \varphi = k$ ya'ni $f'(x_0) = k$ tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi shu funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan MN urinmaning burchak koeffitsientiga teng bo'lar ekan. MN -urinmaning $y = k \cdot \Delta x + y_0$ tenglamasida $\Delta x = x - x_0$, $y_0 = f(x_0)$ va $k = f'(x_0)$. U holda $y = f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan. $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

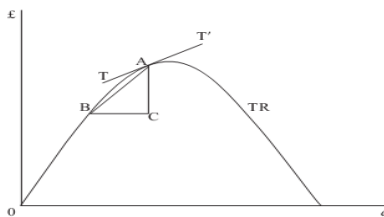
2. Hosilaning mexanik ma'nosi. $S = s(t)$ funksiya harakat qilayotgan jismning t -vaqt davomida bosib o'tgan yo'lini bildirsa, shu jismning $t = t_0$ vaqtdagi oniy tezligi $\mathcal{Q}(t_0)$ ni topish masalasini qaraymiz. Buning uchun t -vaqtga Δt orttirma beraylik, u holda mana shu vaqt davomida jism ma'lum bir masofa $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ ni bosib o'tadi, u holda jismning Δt vaqt davomidagi o'rtacha tezligini $\mathcal{Q}_{o'r} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ tenglik orqali topish mumkin. Tabiiyki o'rtacha tezlik, $t = t_0$ vaqtdagi oniy tezlik $\mathcal{Q}(t_0)$ ga qandaydir xatolik bilan teng bo'ladi. Biz $|\Delta t|$ vaqt kattalikni qanchalik kichik qilib olsak, $\mathcal{Q}_{o'rta}$ - o'rtacha tezlik $\mathcal{Q}(t_0)$ oniy tezlikka shunchalik yaqin bo'lib, xatolik kam bo'ladi. Shuning uchun, $\mathcal{Q}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{Q}_{o'rta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = S'(t_0)$ tenglik o'rinli deya olamiz. Natijada jismning $S = s(t)$ harakat tenglamasida, yo'ldan t -vaqt bo'yicha olingan hosila, shu jismning ayni t -vaqtdagi tezligiga teng bo'lar ekan, ya'ni $S'(t) = \mathcal{Q}(t)$.

3. Hosilaning iqtisodiy ma'nosi. Shuni ta'kidlash lozimki, hosilaning iqtisodiy ma'nosi ko'p qirrali bo'lib, muayyan ob'ektga yo'naltirilgan maqsaddan kelib chiqadi. Biz shu masalalardan birini keltiramiz. $U = U(t)$ funksiya t -vaqt davomida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi o'zgarishini bildirsin. Ishlab chiqarishning $t = t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligini topish masalasini ko'raylik. Buning uchun t -vaqtga Δt - orttirma beramiz, u holda mana shu vaqt davomida ma'lum miqdordagi $\Delta U = U(t_0 + \Delta t) - U(t_0)$ mahsulot ishlab chiqariladi, o'rtacha mehnat unumdorlik $Z_{o'rta} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$ tenglik orqali topiladi. Yuqoridagi mulohazalarga o'xshash $t = t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligi uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz: $Z(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} Z_{o'rta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t_0)$

Demak, mahsulot hajmini vaqt bilan bog'lovchi $U(t)$ funksiyaning vaqt bo'yicha $U'(t)$ hosilasi, ishlab chiqarishning $Z(t)$ unumdorligini berar ekan, ya'ni $U'(t) = Z(t)$.

Marginal daromad va umumiy daromad

Odatda, ba'zan iqtisodiyotda MR (MR- marginal revenue) chegaraviy daromad savdodagi sotuv hajmining 1 birlikka ortgandagi TR (TR - total revenue) umumiy daromadning qancha miqdorga ortishini ifodalaydi. Bu chegaraviy daromadning taxminiy qiymatini ifodalab va u o'lchov birligi o'zgarganda o'zgaradi. Chegaraviy daromadni yanada aniqroq ta'riflash uchun ishlab chiqarish hajmining umumiy daromadga nisbatan o'zgarish tezligi deb hisoblanash aniqlaydi.



$\frac{\Delta TR}{\Delta Q} = \frac{AC}{BC} = AB$ chiziqning og'ishini anglatib, shu oraliqdagi chegaraviy daromadning taqribiy qiymatini ifodalaydi.

B nuqta TR chiziq bo'ylab A tomonga yaqinlashsa, og'ish burchagi A nuqtada o'tkazilgan TT' urinmaning burchak koeffitsientiga yaqinlashadi. Ishlab chiqarish hajmining kichik o'zgarishida, MR A nuqtadagi TR ning og'ish burchagiga teng bo'ladi. Agar o'zgarish yetarli kichik bo'lsa, u holda MR deyarli TR ning A nuqtadagi og'ishiga teng bo'ladi. Demak, har qanday berilgan vaqtdagi ishlab chiqarishda MR TR funksiyaning shu vaqtdagi og'ishiga teng bo'ladi. Ma'lumki, funksiya og'ishini differensiallash yordamida topish mumkin va u

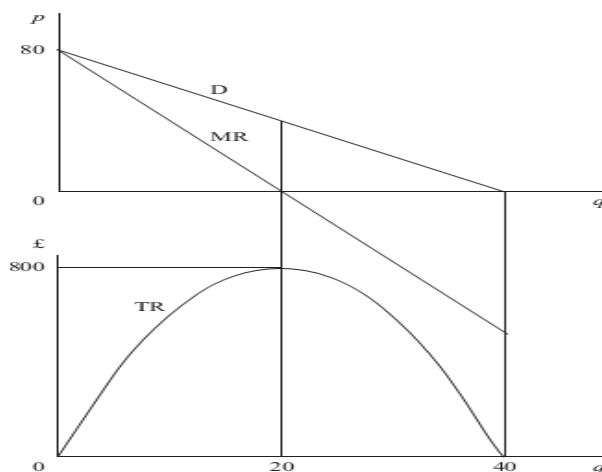
$$MR = \frac{dTR}{dq}$$

munosabat orqali ifodalanadi.

Masalan. $TR = 80q - 2q^2$ funksiya berilgan bo'lsa, MR uchun funksiyaning aniqlang.

Ychish. $MR = \frac{dTR}{dq} = 80 - 4q$. Bu natija TR va MR o'rtasidagi ba'zi munosabatlar xususiyatlari tushuntirishga yordam beradi.

Talabning $p = 80 - 2q$ chiziqli D grafigi quyidagi rasmda ko'rsanilgan



Ma'lumki, $TR = pq$. Demak, $TR = (80 - 2q)q = 80q - 2q^2$. Bu TR funksiya rasmning quyidagi qismida joylashgan va MR funksiya esa shu rasmning yuqori qismida tasvirlangan.

Chizmadan ko'rinib turibdiki, TR o'sganda kutilganidek MR musbat va TR kamaysa MR manfiy. TR o'zining maksimumiga erishsa, MR nolga teng bo'ladi.

MR funksiya yordamida TR funksining maksimum qiymatini topish oson. TR maksimal nuqtasida gorizontaal va og'ish burchagi nolga teng, shuning uchun MR ham nolga teng bo'ladi. Demak, TR maksimumiga erishganda

$$MR = 80 - 4q = 0, \quad 80 = 4q, \quad 20 = q$$

Rasmda MR funksiyaning vertical o'qda talab funksiyasi bilan bir nuqtada kesishishini va ikki marta katta og'ish burchagiga egaligini ko'rish mumkin. Bu natijani har qanday chiziqli funksiya uchun ham o'rinishini ko'rsatish mumkin.

Marginal(chegaraviy) xarajat va umumiy xarajat

Xuddi MR funksiya TR funksiyaning o'zgarishi tezligini aniqlaganidek ko'rsatish mumkinki, marginal xarajat (MC- the marginal cost) umumiy xarajat (TC- the total cost)

funktsiyasining o'zgarish tezligini aniqlaydi. Aslida, yetarli kichik o'zgarishda, marginal funksiya berilgan funksiyaning o'zgarish tezligini ifodalaydi.

Masalan. $TC = 6 + 4q^2$ funksiya ko'ra MC funksiyani toping.

Ychish. $MC = \frac{dTC}{dq} = 8q$

5.1.3. Hosila hisoblash qoidalari.

1. $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x), \quad a = \text{const}$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
5. $y = f(u), \quad u = g(x), \quad (f(u))'_x = f'_u(u) \cdot u'_x$
6. $y = f(x)$ va $x = g(y)$ o'zaro teskari funksiyalar uchun, $x'_y = \frac{1}{y'_x}$
7. $y = f(kx+b)$ funksiya uchun $y' = kf'(kx+b)$

Hosilalar jadvali

- | | |
|---|---|
| 1. $c' = 0$ | 10. $(\sin x)' = \cos x$ |
| 2. $x' = 1$ | 11. $(\cos x)' = -\sin x$ |
| 3. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ | 12. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| 4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ | 13. $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$ |
| 5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | 14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 6. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ | 15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 7. $(e^x)' = e^x$ | 16. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ |
| 8. $(\log_a^x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ | 17. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |
| 9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | |

2- mashg'ulot

5.2.1. Yuqori tartibli hosilalar

5.2.2. Differensial

5.2.3. Differensiallash jadvali va hisoblash qoidalari

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: suhbat, muammoli masala, bahs-munozara.

5.2.1. Yuqori tartibli hosilalar

Agar $y = f(x)$ funksiya uchun (a,b) oraliqning har bir nuqtasida hosila mavjud bo'lsa, u holda (a,b) oraliqda yangi $f'(x)$ funksiyani hosil qilamiz. Bu $f'(x)$ funksiya

$x = x_0 \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $x = x_0$ nuqtada $y = f(x)$ funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega deyilib, bu xosila

$$y''(x_0), f''(x_0), \frac{d^2 y(x_0)}{dx^2}, \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}, y''_{x^2}(x_0)$$

shaklda belgilanadi. Demak, ikkinchi tartibli hosila quyidagi tenglik orqali topilar ekan:

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$$

Xuddi shuningdek, $y = f(x)$ funksiya uchun uchinchi, to'rtinchi va n - tartibli hosilani aniqlash mumkin. Umumiy holda, agar $y = f(x)$ funksiya uchun (a, b) oraliqning har bir nuqtasida $(n-1)$ -tartibli hosilaga ega bo'lib, mana shu hosil bo'lgan funktsiyani $f^{(n-1)}(x)$ deb belgilasak, o'z navbatida $f^{(n-1)}(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu hosila $y = f(x)$ funktsiyaning $x = x_0$ nuqtadagi n -tartibli hosilasi deyiladi. n -tartibli hosilani quyidagi ko'rinishlarda ifoda etish mumkin.

$$y^{(n)}(x_0), f^{(n)}(x_0), \frac{d^n y(x_0)}{dx^n}, \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}, y^{(n)}_{x^n}(x_0)$$

Demak, ta'rifga ko'ra n -tartibli hosila

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

tenglik orqali aniqlanar ekan. Bu tenglikni umumiy holda quyidagicha yozishimiz mumkin

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', n = 1, 2, 3, \dots$$

bu yerda $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Yuqori tartibli hosila uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi.

$$1. (cf(x))^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x) \quad c = \text{const}$$

$$2. (f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$

$$3. (f(ax + b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b)$$

$$4. (f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

Bu tengliklarning barchasini matematik induksiya usuli bilan isbot qilish mumkin. 4-tenglik Leybnits formulasi deb nomlanadi.

Endi ayrim elementar funktsiyalarning yuqori tartibli hosilalarini keltiramiz. Bu formulalar ham matematik induksiya usuli bilan isbot qilinadi.

1. $(x^m)^{(n)} = m \cdot (m-1)(m-2) \dots (m-n+1)x^{m-n}$, m -istalgan haqiqiy son. Agar m natural son bo'lsa, $n > m$ uchun $(x^m)^{(n)} = 0$ va $n = m$ uchun $(x^m)^{(m)} = m!$.

$$2. (a^x)^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n, \text{ xususan } (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$3. (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$4. (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

5.2.2. Differensial

Ta'rif: Agar $\Delta x \rightarrow 0$ da, funksiya orttirmasi Δy ni quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$$

bu yerda A — o'zgarmas son, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, u holda $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi va funksiyaning x_0 nuqtadagi differentsiali $A \cdot \Delta x$ ga teng deb ataladi. Bu differentsial $A \cdot \Delta x = df(x_0)$ shaklda belgilanadi.

Teorema. x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan $f(x)$ funksiya shu nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning $df(x_0)$ differentsiali mavjud bo'lib, bu differentsial uchun $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$ tenglik o'rinli.

Taqribiy hisoblashlarni funksiya orttirmasini uning differentsiali bilan almashtirish orqali bajarish mumkin, ya'ni $\Delta y \approx df(x_0)$

Agar $f(x)$ funksiya (a, b) intervalning har bir nuqtasida differentsiallanuvchi bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda differentsiallanuvchi deyiladi.

$f(x) = x$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ da differentsiallanuvchi bo'lib,

$$dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$$

o'rinli bo'ladi, ya'ni erkli o'zgaruvchi uchun, uning differentsiali va orttirmasi teng bo'lar ekan.

Bu tenglikdan funksiya differentsiali uchun

$$df(x) = f'(x) \cdot dx \text{ yoki } dy = y' dx$$

tenglikni yoza olamiz. Demak, $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, $y' = \frac{dy}{dx}$.

5.2.3. Differensiallash jadvali va hisoblash qoidalari

Differensiallash jadvali

$$1. d(c) = 0 \quad c = \text{const}$$

$$2. d(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} dx$$

$$3. d(a^x) = a^x \ln a dx, d(e^x) = e^x dx$$

$$4. d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx, d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$5. d(\sin x) = \cos x dx$$

$$6. d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$7. d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$8. d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$9. d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$10. d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$11. d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$12. d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

Differentsiallash qoidalari

$$1. d(cf(x)) = c \cdot df(x), \quad c = \text{const}$$

$$2. d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$$

$$3. d[f(x) \cdot g(x)] = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$$

$$4. d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$$

3- mashg'ulot

5.3.1. Differentsial hisobning asosiy teoremlari

5.3.2. Teylor va Makloren formulalari

5.3.3. Lopital qoidasi

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, muammoli masala, amaliy metod.

5.3.1. Differentsial hisobning asosiy teoremlari

Ferma teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) (\delta > 0)$ atrofida berilgan bo'lib, x_0 nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishib, $f'(x_0)$ - hosilasi mavjud bo'lsa, u holda bu hosila nolga teng, ya'ni $f'(x_0) = 0$.

Roll teoremasi. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz va (a, b) intervalda hosilaga ega bo'lib, oraliq chegaralarida bir xil qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni $f(a) = f(b)$ bo'lsa, u holda intervalda shunday c nuqta topiladiki, uning uchun $f'(c) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Lagranj teoremasi. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz va (a, b) intervalda hosilaga ega bo'lsin, u holda (a, b) intervalda shunday c nuqta mavjudki, uning uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Koshi teoremasi. Agar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limit $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi noaniqlik bo'lib, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud bo'lsa, (cheksiz bo'lishi ham mumkin), u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

5.3.2. Teylor va Makloren formulalari

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan va bu atrofda uning $(n-1)$ tartibli hosilasi mavjud va x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning n -tartibli hosilasi mavjud bo'lsin. Bu shartlarda x_0 ning qaralayotgan atrofida quyidagi $p(x)$ -ko'phadni aniqlay olamiz:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \tau_n(x),$$

bu yerda $\tau_n(x)$ formulaning qoldiq hadi deyiladi.

$\tau_n(x) = O((x - x_0)^{(n)})$, ya'ni x o'zgaruvchi x_0 dan yettarlicha kam farq qilsa, $\tau_n(x)$ ifoda 0 dan shunchalik kam farq qiladi. Demak, hisoblashlarda ushbu

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

taqribiy formuladan foydalanishimiz mumkin ekan.

$x - x_0 = \Delta x$ deb belgilasak, Teylor formulasining quyidagi ko'rinishlarini hosil qilamiz:

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n + \theta(\Delta x^n)$$

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + \theta(\Delta x^n)$$

Agar, Teylor formulasida $x = 0$ deb olinsa, Makloren formulasi deb nomlanuvchi ushbu formulani hosil bo'ladi:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \theta(x^n)$$

Ayrim elementar funksiyalarning Makloren qatoriga yoyilmalari:

$$1) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \theta(x^n).$$

$$2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \theta(x^{2k}).$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \theta(x^{2k+1}).$$

Hosil qilingan yoyilmalar e^x , $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar qiymatini topish x ga nisbatan ko'phad bo'lgan qiymatini topishga olib kelishini ko'rsatadi.

5.3.3. Lopital qoidasi

Limitlarni hisoblashda uchraydigan $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi noaniqliklarni ochishda, quyidagi Lopital qoidasi deb nomlanadigan qoidani asoslab beruvchi, teoremani keltiramiz.

Teorema. Agar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limit $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi noaniqlik bo'lib,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud bo'lsa, (cheksiz bo'lishi ham mumkin), u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Masalan. $\lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$.

Misol

CES ("constant elasticity of substitution") (doimiy o'rnini elastiklik) funksiyasini

$$\text{qaraylik} \quad F(K, L) = A(aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}} \quad (*)$$

bu yerda $A > 0$, $K > 0$, $L > 0$, $a \in (0, 1)$ va $\rho \neq 0$. A , K , L va a larni fiksirlangan deb,

$\rho \rightarrow 0$ da $z = \ln \left[\frac{F(K, L)}{A} \right]$ funksiyaga Lopital qoidasini qo'llab, $F(K, L)$

funksiyaning Kobba-Duglas funksiyasiga yaqinlashishini ko'rsating.

Yechish.

$$\rho \rightarrow 0 \text{ da } z = \ln(aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}} = -\frac{\ln(aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho})}{\rho} \rightarrow \frac{0}{0}.$$

$$\text{Chunki, } \frac{d}{d\rho}(K^{-\rho}) = -K^{-\rho} \ln K \quad \text{va} \quad \frac{d}{d\rho}(L^{-\rho}) = -L^{-\rho} \ln L$$

Loital qoidasini qo'llab

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} z = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{aK^{-\rho} \ln K + (1-a)L^{-\rho} \ln L}{aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}} \right)}{1} = a \ln K + (1-a) \ln L = \ln K^a L^{1-a}$$

Demak, $e^z = K^a L^{1-a}$ bu esa so'ralayotgan tasdiqdir.

4- mashg'ulot

5.4.1. Funksiyani tekshirish

5.4.2. Funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlari

5.4.3. Funksiya ekstremumlari

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: yo'riqnoma berish, namoyish, amaliy metod.

5.4.1. Funksiyanni tekshirish

Teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'zgarmas bo'lishi uchun, uning hosilasi shu intervalda nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun (a,b) intervalda $f'(x) = g'(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, shu intervalda

$$f(x) = g(x) + c, \quad c = \text{const}$$

tenglik o'rinlidir.

5.4.2. Funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlari

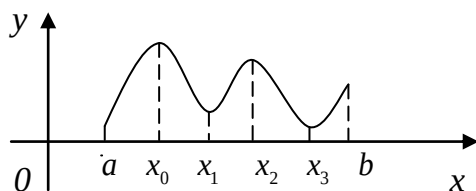
Teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda hosilaga ega bo'lib, barcha $x \in (a,b)$ uchun $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Izoh. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, shu intervalda $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, hosila uchun $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) tengsizlik o'rinli bo'ladi, deyish mumkin, ya'ni o'suvchi (kamayuvchi) funksiyaning ayrim nuqtalaridagi hosilasi nolga teng bo'lishi mumkin. Masalan $y = x^3$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda o'suvchi bo'lib, uning hosilasi $y' = 3x^2$, $x = 0$ da $y'(0) = 0$ bo'ladi.

5.4.3. Funksiya ekstremumlari

Funksiya grafigini chizishda uning maksimum va minimum nuqtalari muhim o'rin egallaydi.

Ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday atorfi $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) mavjud bo'lsaki, shu oraliqdan olingan istalgan $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uchun $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga (lokal minimumga) erishadi deyiladi. Funksiyaning lokal maksimum va lokal minimum nuqtalari funksiyaning lokal ekstremumlari yoki shunchaki funksiya ekstremumlari deb yuritiladi.



Funksiya berilgan $[a, b]$ oraliqda bir necha lokal ekstremumlarga ega bo'lishi mumkin. Masalan, rasmda x_0, x_1, x_2, x_3 nuqtalarda funksiya lokal ekstremumlarga erishadi. $[a, b]$ oraliqdagi funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari funksiyaning global ekstremumlari deyiladi. Funksiya global ekstremumga oraliq chegaralarida erishishi mumkin. Masalan, rasmdagi funksiya uchun $f(x_0) = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$ ekanligini ko'rish mumkin.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal ekstremumga erishib, bu nuqtada $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lsa, Ferma teoremasiga ko'ra $f'(x_0) = 0$. Lekin, $f'(x_0) = 0$ ekanligidan, x_0 nuqtada funksiya ekstremumga erishadi deya olmaymiz. Masalan, $y = x^3$ funksiya, $(-\infty, +\infty)$ da o'suvchi bo'lgani uchun uning ekstremum nuqtalari mavjud emas, lekin $y' = 3x^2$ hosila $x = 0$ da nolga teng bo'ladi. Shu bilan birga $y = \sqrt[3]{x^2}$ funksiya $x = 0$ nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lib, bu nuqtada funksiya lokal minimumga erishgani bilan, $x = 0$ nuqtada funksiya hosilasi mavjud emas.

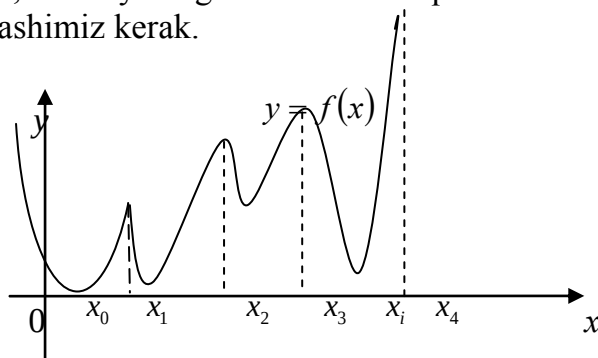
Funksiya hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtalar funksiyaning statsionar nuqtalari deyiladi.

Funksiya hosilasi mavjud bo'lmagan yoki cheksiz bo'lgan nuqtalar funksiyaning kritik nuqtalari deyiladi.

Demak, lokal ekstremumning zaruriy shartini quyidagi ifodalash mumkin.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishishi uchun, bu nuqta funksiya uchu yoki statsionar nuqta yoki kritik nuqta bo'lishi zarur.

Demak, funksiyaning ekstremum nuqtalarini uning statsionar yoki kritik nuqtalari orasidan izlashimiz kerak.



Chizmadagi $y = f(x)$ funksiya uchun x_1, x_4 nuqtalar kritik nuqtalar bo'lib, $(f'(x_1)$ mavjud emas, $f(x_4) = \infty$), x_0, x_2, x_3 va x_i nuqtalar ekstremum nuqtalar bo'ladi.

Funksiya ekstremumining birinchi yetarli sharti

Teorema. Agar x_0 kritik nuqta atrofida x nuqta chapdan o'ngga qarab o'zgarganda, $f(x)$ funksiya hosilasi o'z ishorasini musbatdan manfiyga (manfiydan musbatga) o'zgartirsa, bu x_0 nuqta lokal maksimum (lokal minimum) nuqta bo'ladi.

$y = f(x)$ funksiyaning ekstremumga tekshirishni quyidagi algoritm bo'yicha bajarish mumkin:

1. $y' = f'(x)$ hosilani topish.
2. $f'(x) = 0$ tenglama yechimlarini topish va $f'(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, ya'ni barcha kritik nuqtalarni topish.
3. $f'(x) > 0$ va $f'(x) < 0$ tengsizliklarni yechib, $f'(x)$ hosilaning kritik nuqta atrofidagi ishoralarini aniqlash lozim.

Agar statsionar nuqtadan chapda va o'ngda hosila turli ishoralarga ega bo'lsa, funksiya shu nuqtada ekstremumga erishadi, aks holda bu statsionar nuqta ekstremum nuqta bo'lmaydi. Statsionar nuqta atrofida funksiya hosilasi ishorasi chapda + va o'ngda – bo'lsa, bu nuqta lokal maksimum, chapda – va o'ngda + bo'lsa, bu nuqta lokal minimum nuqta bo'ladi.

4. Funksiyaning ekstremum qiymatlarini topish.

Funksiya ekstremumining ikkinchi yetarli sharti

Teorema. Agar x_0 nuqta atrofida $f(x)$ funksiya hosilaga ega va $f'(x_0) = 0$, hamda x_0 nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib, $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$) bo'lsa, u holda x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya lokal minimumga (lokal maksimumga) erishadi.

Izoh. Agar kritik nuqtada $f''(x_0) = 0$ bo'lsa, u holda bu nuqtada funksiya ekstremumga erishishi ham erishmasligi ham mumkin.

n - natural son uchun

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ va } f^{(n)}(x_0) \neq 0 \text{ bo'lsin.}$$

Bu holda:

- a) agar n – juft son bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo'lsa maksimumga va $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo'lsa minimumga erishadi.
- b) agar n – toq son bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Masalan.

1. $f(x) = -x^2 + 2x - 2\cos(x-1)$ funksiyaning ekstremumga tekshirayli.

$$f'(x) = -2x + 2 + 2\sin(x-1), \quad f'(1) = 0, \quad f''(x) = -2 + 2\cos(x-1), \quad f''(1) = 0,$$

$$f'''(x) = 2\sin(x-1), \quad f'''(1) = 0, \quad f^{(4)}(x) = 2\cos(x-1), \quad f^{(4)}(1) = 2.$$

Demak, $f(x) = -x^2 + 2x - 2\cos(x-1)$ funksiya $x_0 = 1$ nuqtada maksimumga erishadi.

2. $f(x) = x^2 + 4x - 2e^{x+1}$ funksiyaning ekstremumga tekshirayli.

$$f'(x) = 2x + 4 - 2e^{x+1}, \quad f'(-1) = 0, \quad f''(x) = 2 - 2e^{x+1}, \quad f''(-1) = 0,$$

$$f'''(x) = -2e^{x+1}, \quad f'''(-1) = -2.$$

Demak, $f(x) = x^2 + 4x - 2e^{x+1}$ funksiya $x_0 = -1$ nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu oraliqda $f(x)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga, ya'ni global ekstremumiga erishadi. Global ekstremumga $f(x)$ funksiya oraliqning chegaraviy nuqtalarida erishish mumkinligini e'tiborga olib, ularni topish uchun quyidagi algoritmni keltiramiz:

1. $f'(x)$ hosilani topish.
2. $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topish
3. $f(a), f(b)$ qiymatlarni aniqlash va barcha kritik nuqtalarda $f(x)$ funksiya qiymatlarini topib, bu qiymatlar orasidan eng kattasi va eng kichigini topish.

Foydani maksimizatsiyalash

Foydani maksimallashtirish uchun $MC = MR$ qoidani foydalanamiz.

Masalan . $p = 460 - 2q$ talab funksiyasi va $TC = 20 + 0.5q^2$ xarajat funksiyasi berilgan bo'lsin. Foydani maksimallashtirish uchun qancha miqdorda mahsulot sotish kerak? (Xarajatlarni va narxlar £ o'lchovida.)

Yechish. Muvozanat nuqta uchun $MC = MR$ bo'lgani uchun MC va MR funksiyalarni aniqlash zarur. Berilgan $TC = 20 + 0.5q^2$ uchun

$$MC = \frac{dTC}{dq} = q \quad (1)$$

$$TR = pq = (460 - 2q)q = 460q - 2q^2 \quad (2)$$

bo'lgani uchun $MR = \frac{dTR}{dq} = 460 - 4q$.

Foydani maksimallashtirish uchun $MR = MC$ bo'lishi kerak. Shuning uchun, (1) va (2) munosabatlarni tenglab

$$460 - 4q = q, \quad 460 = 5q, \quad 92 = q.$$

Maksimal foyda 92 qiymatda bo'ladi

$$\begin{aligned} TR - TC &= (460q - 2q^2) - (20 + 0.5q^2) = 460q - 2q^2 - 20 - 0.5q^2 = \\ &= 460q - 2.5q^2 - 20 = 460(92) - 2.5(8.464) - 20 = \\ &= 42.320 - 21.160 - 20 = 21.140 \end{aligned}$$

Misol. $p = 194,4 - 0,2q^2$ chiziqsiz talab funksiyasi uchun $q = 18$ qiymat TR funksiyasi uchun maksimum ekanligini ko'rsating.

Yechish. $TR = pq = (194,4 - 0,2q^2)q = 194,4q - 0,2q^3$
Statsionar nuqtada bu kub funsiya hosilasi nolga teng bo'lishi kera, ya'ni

$$\frac{dTR}{dq} = 194,4 - 0,6q^2 = 0$$

$$194,4 = 0,6q^2$$

$$324 = q^2$$

$$18 = q$$

$q = 18$ qiymatda ikkinchi tartibli hosila

$$\frac{d^2TR}{dq^2} = -1,2q = -1,2(18) = -21,6 < 0$$

Shunday qilib, maksimum uchun $q=18$ nuqtada ikkinchi tartibli shart bajarilmoqda va TR bu nuqtada maksimumga erishadi. (Bu misolda ikkinchi tartibli hosila $-1,2q < 0$ q qiymatning musbatlarida o'rinlidir.)

Misol. $TC=18q$ umumiy xarajat funksiyasiga va $TR=240+14q$ umumiy foyda funksiyasiga ega firma uchun foydani maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmi mavjud emasligini ko'rsating.

Yechish. Foyda funksiyasi quyidagicha aniqlahnadi

$$\begin{aligned}\pi &= TR - TC \\ &= 240 + 14q - 18q = \\ &= 240 - 4q \\ \frac{d\pi}{dq} &= -4\end{aligned}$$

Uning q ga nisbatan o'zgarishi esa
Korinib turibdiki, bu yerda birinchi shart bajarilmayapti va demak statsionar nuqta mavjud emas. Shuning uchun foydani maksimallaovchi ishlab chiqarish hajmini aniqlab bo'lmaydi.

5- mashg'ulot

5.5.1. Funksiya qavariqligi va botiqligi

5.5.2. Funksiyaning egilish nuqtalari

5.5.3. Ekstremum topish qoidalari

5.5.4. Bir o'zgaruvchili funksiya differensial hisobning iqtisodiyotdagi tadbiqlari

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: ko'rsatish, suhbat, muammoli masala va vaziyatlar.

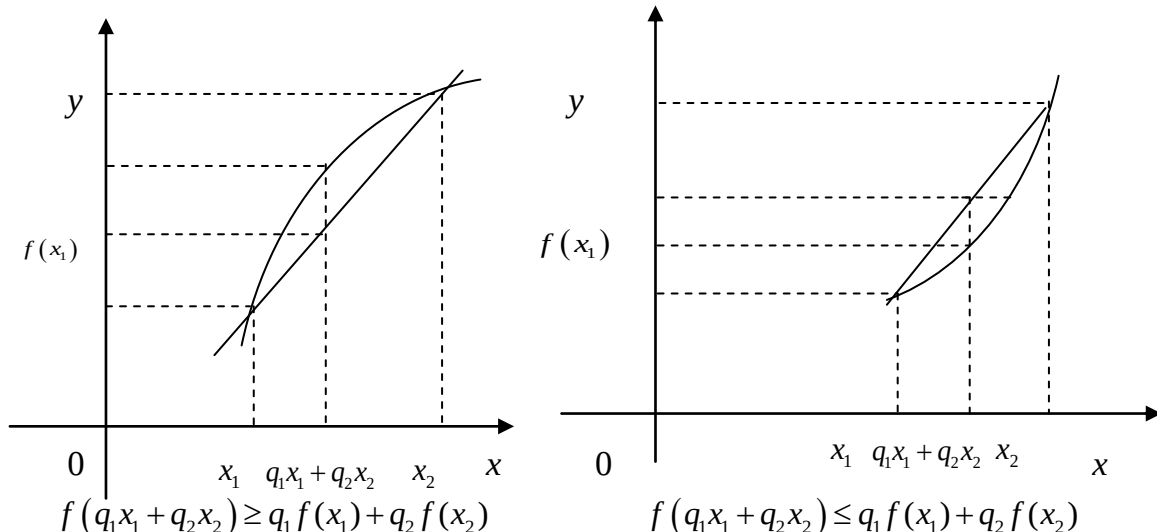
5.5.1. Funksiya qavariqligi va botiqligi

Ta'rif. Agar (a,b) intervaldan olingan istalgan x_1 va x_2 lar va $q_1 + q_2 = 1$ munosabatni qanoatlantiruvchi istalgan $q_1 \geq 0$ va $q_2 \geq 0$ sonlar uchun

$$\begin{aligned}f(q_1x_1 + q_2x_2) &\geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) \\ (f(q_1x_1 + q_2x_2) &\leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2))\end{aligned}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq (botiq) deyiladi.

Bu ta'rifning geometrik ma'nosi shundan iboratki, agar funksiya (a,b) oraliqda qavariq (botiq) bo'lsa, (a,b) oraliqdan olingan istalgan x_1 va x_2 lar uchun grafikning $(x_1; f(x_1))$ va $(x_2; f(x_2))$ nuqtalarini tutashtiruvchi kesma funksiya grafigidan ordinatalar o'qining yo'nalishiga nisbatan quyida (yuqorida) yotadi.



Teorema. (a,b) intervalda hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya, bu oraliqda qavariq (botiq) bo'lishi uchun, uning $f'(x)$ hosilasi (a,b) intervalda kamayuvchi (o'suvchi) bo'lishi zarur va yetarlidir.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervalda ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib, bu intervalda $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq (botiq) bo'ladi.

5.5.2. Funksiyaning egilish nuqtalari

Ta'rif. Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning botiqlik va qavariqlik intervallarini ajratib turuvchi chegaraviy nuqta bo'lsa, u holda x_0 nuqta atrofida berilgan $f(x)$ funksiya uchun bu nuqta egilish nuqtasi deyiladi.

Teorema. (Egilish nuqtasining zaruriy sharti). Ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun x_0 nuqta egilish nuqtasi bo'lsa, u holda $f''(x_0) = 0$.

Teorema. (Egilish nuqtasining yetarli sharti). Agar ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun $f''(x)$ hosila x_0 nuqta atrofida o'z ishorasini o'zgartirsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning egilish nuqtasi bo'ladi.

5.5.3. Ekstremum topish qoidalari

Berilgan $f(x)$ funksiyaning qavariqligi, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini topish algoritmi:

1. $f''(x)$ hosilani topish;
2. $f''(x) = 0$ tenglamani yechish va $f''(x)$ hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni topish.
3. $f'(x)$ ning kritik nuqtalari atrofida $f''(x)$ hosilaning ishoralarini aniqlash. $f''(x) > 0$ va $f''(x) < 0$ tengsizliklarni yechish lozim.
4. Egilish nuqtalarida funksiya qiymatini hisoblash.

Funksiyaning tekshirish quyidagi algoritmi bo'yicha amalga oshirsa bo'ladi.

1. $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini, imkon bo'lsa o'zgarish sohasini ham topish.
2. Funksiyaning juftlik, toqlik va davriylikka tekshirish.
3. $f(x) = 0$ tenglama, $f(x) > 0$ va $f(x) < 0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiya nollarini, musbatlik va manfiylik intervallarini topish.
4. Funksiyaning uzluksizlikka tekshirish.

5. Funksiyaning vertikal va og'ma asimptotalarini topish.
6. $f'(x)$ hosilani topish, hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, $f'(x) = 0$ tenglama va $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiyaning kritik nuqtalarini, o'sish va kamayish oraliqlarini topish. Funksiya ekstremumlarini topish.
7. $f''(x)$ hosilani topib, $f''(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, $f''(x) = 0$ tenglama va $f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiyaning qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalarini topish.
8. Funksiya grafigiga aniqliklar kirituvchi ayrim nuqtalarni topish.

5.5.4. Bir o'zgaruvchili funksiya differensial hisobning iqtisodiyotdagi tadbirlari Ekstremumga doir masala

1. To'g'ri to'rtburchak shaklidagi $2,4 \times 1,5 m^2$ kartondan qopqoqsiz quti yasash talab qilinadi. Kartonning to'rttala burchagidan tomoni qanday bo'lgan kvadrat kesib olinganda, yasalgan qutining hajmi maksimal bo'ladi.

Yechish. tomoni x m bo'lgan kvadrat qirqib olinsin. U holda kvadratning tomonlari uzunliklari $2,4-2x$ va $1,5-2x$ m dan bo'lib qoladi. Hosil qilingan to'g'ri burchakli paralelopiped uchun $h = x$, asosining tomonlari $2,4-2x$ va $1,5-2x$ m bo'ladi. Demak hosil qilingan qutining hajmi $V(x) = x(2,4-2x)(1,5-2x)$ bo'lib bu funksiyaning maksimum qiymatini topamiz.

$V(x) = x(2,4-2x)(1,5-2x) = 4x^3 - 7,8x^2 + 3,6x$. $V'(x) = 12x^2 - 15,6x + 3,6$, $V(x)$ maksimumini $V'(x) = 0$ tenglamani yechib, $V(x_0)$ qiymatlarning eng kattasi olinadi.

$12x^2 - 15,6x + 3,6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 0,3$. $x_1 = 1$ bo'lganda $V(x)$ funksiyaning qiymati manfiy bo'ladi, (hajm manfiy son bo'lmaydi) demak qirqib olingan kvadrat tomoni $x = 0,3$ m.

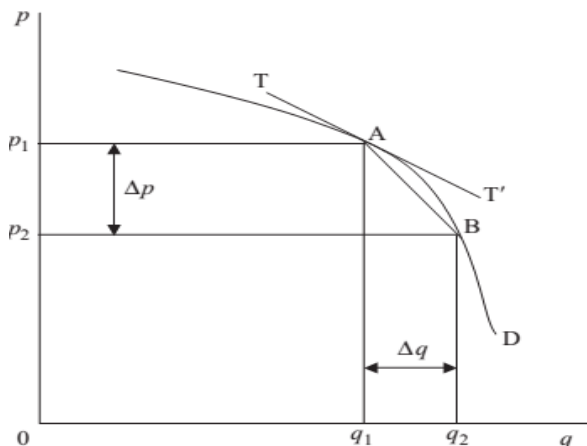
2. Agar erta pishar kartoshka terimini avgustning boshida boshlansa, u holda har bir sotihdan 200 kg dan hosil olish mumkin va har bir kilogrami 12 p/b. dan sotiladi. Terimni bir haftaga kechiktirish har sotihdan 50 kg dan hosildorlikni oshiradi, lekin narx har hafta 2 p/b. ga arzonlashadi. Agar terim muddati 5 hafta bo'lsa, kartoshkani sotishdan olinadigan foyda eng ko'p bo'lishi uchun hosilni qaysi haftada yig'ib olish kerak.

Yechish. Hosilni t – haftada yig'ib olganda foyda eng ko'p bo'lsin ($1 \leq t \leq 5$). U holda shu haftada kartoshkani bir kilogramining narxi $12 - 2(t-1) = 14 - 2t$ p/b. bo'ladi. Hosildorlik esa har gektaridan $200 + 50(t-1) = 150 + 50t$ kg dan bo'ladi. Bir gektar hosilni umumiy foyda tenglamasini tuzib olamiz:
 $\pi(t) = (200 + 50(t-1))(12 - 2(t-1)) = 100(3+t)(7-t) = 100(21 + 4t - t^2)$. Demak umumiy foyda eng ko'p bo'lishi uchun $\pi(t) = 100(21 + 4t - t^2)$ funksiya maksimum qiymatini topish kerak. Buning uchun esa $\pi'(t) = 0$ tenglamani yechib, aniqlangan t sonini umumiy foyda tenglamsiga qo'ysak har bir gektar yerdan olinadigan max daromad kelib chiqadi. $\pi'(t) = 0 \Rightarrow 4 - 2t = 0$, $t_0 = 2$. Demak $\pi(2) = 100(21 + 8 - 4) = 2500$ mavsum davomida bir gektar yerdan olinishi mumkin bo'lgan eng ko'p daromad. Shunday qilib hosilni ikkinchi haftada yig'ib olish kerak ekan.

Talabning nuqtaviy elastikligi (egiluvchanligi)

Talabning narxga nisbatan elastikligi quyidagicha aniqlanadi:

$$e = (-1) \frac{\text{miqdorning foiz o'zgarishi}}{\text{narxning foiz o'zgarishi}}$$



Chizmadan ko'rinib turibdiki, D grafik bo'yicha A va B nuqtalar orasidagi narx va miqdor o'zgarishida qaralsa, sizda tabiiy "foiz hisobidagi miqdor o'zgarishi nimaga teng?" savol tug'iladi. Albatta, Δq miqdorning bir oz ko'proq foizda o'zgarishi q_1 miqdorning q_2 ga nisbatan ko'proq o'zgarishini anglatadi. Elastiklik yoyi "o'rtacha" taqribiy elastiklik o'lchovini aniqlashiga qaramqasdan, aniq elastiklik o'lchovining qiymati talab grafigi bo'yicha olingan nuqtadagi qiymati orqali aniqlanadi. Chiziqli grafik bo'lgan holda nuqtaviy elastiklik sodda hisoblanadi. Chiziqsiz bo'lgan holdagi nuqtaviy elastiklikni o'rganamiz.

D chiziq bo'yicha B dan A gacha harakat juda kichik bo'lsa (masofa yetarlicha kichik bo'lsa), u holda $p_1 = p_2 = p$ va $q_1 = q_2 = q$ deb taxmin qila olamiz va shuning uchun

$$e = (-1) \frac{\Delta q / q}{\Delta p / p} = (-1) \frac{p}{q} \frac{1}{\Delta p / \Delta q}$$

bo'ladi, deyish mumkin.

B A ga qancha yaqin bo'lsa, AB og'ish to'g'ri chizig'iga ega $\frac{\Delta p}{\Delta q}$ miqdor A nuqtadagi TT' urinma og'ish burchagiga yetarlicha yaqin bo'ladi. (Bu misoldagi narxning kamayishida, Δp manfiy, manfiy og'ish qiymatlar mos kelishiga e'tibor berig.)

Demak, A ga yetarli yaqin qiymatlarda D chiziq bo'yicha A nuqtadagi $\frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{dp}{dq}$ og'sh

Shunday qilib, bu natijani yuqoridagi (1) ga qoyib, talabning nuqtaviy elastikligi formulasini hosil qilamioz

$$e = (-1) \frac{p}{q} \frac{1}{dp/dq}$$

Masalan. Narx talab funksiyasi uchun 12 bo'lsa, elastiklik nuqta nimaga teng?
 $p = 60 - 3q$.

Yechish. $\frac{dp}{dq} = -3$. $p = 60 - 3q$ berilga, u holda $3q = 60 - p$, $q = \frac{60 - p}{3}$.

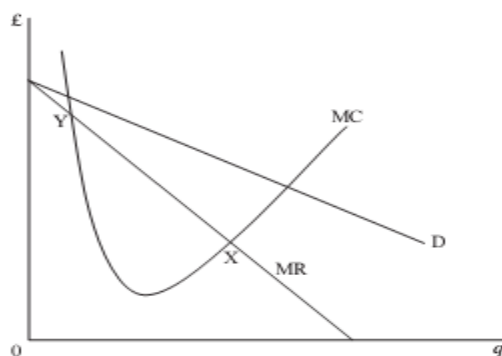
$$\text{Agar } p = 12, \text{ u holda } q = \frac{60-12}{3} = \frac{48}{3} = 16$$

$$\text{Shuning uchun, } e = (-1) \frac{p}{q} \frac{1}{dp/dq} = (-1) \frac{12}{16} \times \frac{1}{-3} = 0.25.$$

Foydani maksimallashtirish

Foyda funksiyasini maksimallashtirish iqtisodiy masalalarning keng tarqalgan optimizatsiya masalalaridan bo'lib, bu bo'limda biz ikkinchi shart asosida foyda funksiyasini maksimallashtirishni mukammal o'rganamiz va u MC va MR funksiyalarining kesishish nuqtalariga bog'liqligini ko'ramiz.

Foydaning maksimumga erishishining birinchi qoidasi bu $MC = MR$. Lekin, $MC = MR$ bo'ladigan ikki X va Y nuqta mavjud. Faqat X nuqta foyda maksimizatsiyasi uchun ikkinchi shartni qanoatlantiradi, chunki bu yerda MC MR ni quyidan kesmoqda.



Misol. $TC = 4 + 97q - 8,5q^2 + 1/3q^3$ umumiy xarajat funksiyasi va $TR = 58q - 0,5q^2$ to'la foyda funksiyasi bo'yicha foyda maksimumga erishadigan ishlab chiqarish hajmini toping.

Yechish. Dastlab, MC va MR funksiyalarini

$$MC = \frac{dTC}{dq} = 97 - 17q + q^2 \quad (1)$$

$$MR = \frac{dTR}{dq} = 58 - q \quad (2)$$

va ular kesishadigan nuqtani aniqlaymiz. $MC = MR$ da ular kesishadi.

$$97 - 17q + q^2 = 58 - q, \quad 39 - 16q + q^2 = 0 \quad (3)$$

$$(3 - q)(13 - q) = 0$$

Demak, $q = 3$ yoki $q = 13$.

Bu ikki ishlab chiqarishda, MC va MR grafiklar kesishgan nuqtada, maksimizatsiyaning ikkinchi sharti bajariladimi? Bu savolga javob berish uchun, daromad funksiyasini aniqlaymiz va uni maksimumini topamiz. Demak, daromad

$$\begin{aligned} \pi &= TR - TC = 58q - 0,5q^2 - (4 + 97q - 8,5q^2 + 1/3q^3) = \\ &= 58q - 0,5q^2 - 4 - 97q + 8,5q^2 - 1/3q^3 = \\ &= -39q + 8q^2 - 4 - 1/3q^3 \end{aligned}$$

Differensiallab va nolga tenglab

$$\frac{d\pi}{dq} = -39 + 16q - q^2 = 0 \quad (4)$$

$$0 = 39 - 16q + q^2 \quad (5)$$

(5) va (3) tenglamalar yechishga ega emas, demak, ikkita $q = 3$ yoki $q = 13$ yechishlar bor. Shunga qaramasdan, ikkinchi shart yordamida tekshiramiz.

$$(4) \text{ dan ikkinchi hosila hisoblab } \frac{d^2\pi}{dq^2} = 16 - 2q$$

$q = 3$ bo'lsa, $d^2\pi/dq^2 = 16 - 6 = 10$ va π minimumga erishadi.

$q = 13$ bo'lsa, $d^2\pi/dq^2 = 16 - 26 = -10$ va π maximumga erishadi.

Shuning uchun MR va MC chiziqlarining faqat bitta kesishish nuqtasi maksimumga erishishning ikkinchi shartini qanoatlantiradi. Bu MC MR ni quyidan kesgan nuqtadir. Bu tasdiqni quyidagicha isbotlaylik:

$$(1) \text{ ni differensiallab } \text{og'ish } MC = \frac{dMC}{dq} = -17 + 2q$$

$$(2) \text{ ni differensiallab } \text{og'ish } MR = \frac{dMR}{dq} = -1$$

$q = 3$ da MC og'ishi $-17 + 2(3) = -17 + 6 = -11 < -1$ (ya'ni, MR manfiy qiya og'adi)

$q = 13$ da MC og'ishi $-17 + 2(13) = 9$ (ya'ni, MR musbat og'adi)

Shuning uchun $q = 3$ da MC MR ga nisbatan mafigi qiya og'ishga ega bolib, uni yuqoridan kesadi. $q = 13$ da MC musbat og'ishga ega bolib, MR ni quyidan kesadi.

Zahiralarni boshqarish

Tadbiqlarda funksiya maksimumi yoki minimumini topishda og'ishi nol bo'lgan nuqtada ikkikchi shartlar albatta qo'llanilishi kerakligini tushuntiramiz. Tahlilning bu tadbiqlari firma uchun buyurma hajmi optimallashtirish va saqlash xarajatlarini minimallashtirish uchun zarur hisoblanadi.

Ishlab chiqarish kompaniyasi komponentalar narxidan tashqari xarajatlarni ham hisobga olishi kerak. Bu xarajatlarga

(a) Qaytma xarajatlar: har bir buyurma o'zida ishga xarajatni, yetqazib berish xarajatini, tushurish va h.k kabi xarajatlarni mujassamlashtiradi

(b) saqlashga xarajatlar: qancha ko'p mahsulot bo'lsa shuncha ko'p joy kerak. Shuningdek firma kapitalining alternative qiymati ham mavjud.

Agar firma bi nechta katta buyurtma bersa, saqlash xarajatlari katta bo'ladi, ikkinchi tomondan agar ko'p mayda buyurtma bersa buyurtma xarajatlari katta bo'ladi. u holda optimal hajmdagi buyurtma miqdorini qanday aniqlash mumkin?

Yil davomida (Q) komponentaga bo'lgan talab teng taqsimlangan bo'lsin. Har bir yangi buyurma miqdori bir xil q bo'lib, zahiradagi mahsulotlar keying partiya buyurma kelgunicha to'la tarqatilsin. Har bir buyurmaga xarajatlar doimiy F va bir birlik mahsulot saqlash xarajatlari S bo'lsin. Agar q hajmdagi buyurtma bir xil tezlikda kamaysa, u holda o'rtacha buyurtma miqdor $q/2$ bo'ladi. (bu hol 9.5 rasmda ko'rsatilgan bo'lib, T buyurtmalar orasidagi interval.) Shunday qilib, butun yil davomidagi umumiy saqlash uchun xarajatlar $(q/2)S$ bo'ladi.

Yil davomidagi buyurtmalar soni Q/q bo'ladi. demak, yil davomidagi umumiy xarajatlar $(Q/q)F$ bo'ladi.

Firma umumiy xarajatlari hajmi plyus saqlash xarajatlari minimum bo'ladigan TC buyurtma mahsulot hajmini aniqlashidan manfaatdordir. Matematik nuqtai nazardan, bu q ning shunday miqdorini aniqlash zarurki, bunda

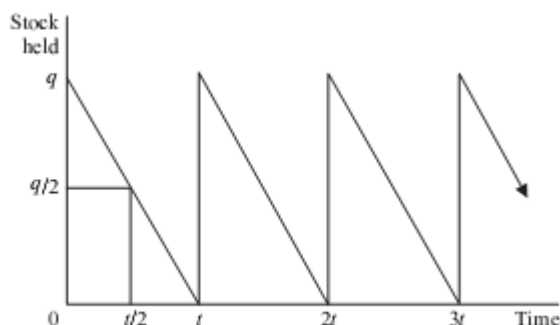
$$TC = \left(\frac{Q}{q}\right)F + \left(\frac{q}{2}\right)S$$

funksiya minimumga erishishini anglatadi, bu yerda Q , F va S berilgan sonlar. Bu ifodani q bo'yicha differensiallab quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{dTC}{dq} = \frac{-QF}{q^2} + \frac{S}{2} \quad (1)$$

Statsionar nuqtani topish uchun

$$0 = -\frac{QF}{q^2} + \frac{S}{2}, \quad \frac{QF}{q^2} = \frac{S}{2}, \quad \frac{2QF}{S} = q^2$$



Shuning uchun buyurtmaning optimal miqdori quyidagicha bo'ladi:

$$q = \sqrt{\frac{2QF}{S}} \quad (2)$$

Demak, q miqdor Q umumiy yillik talab va F va S berilganlarning kvadrat ildiziga teng ekan.

Ikkinchi tartibli shartlar asosida bu buyurtma miqdori minimal ekanligini tekshirish zarur. Agar (1) ni quyidagicha yozsak,

$$\frac{dTC}{dq} = -QFq^{-2} + \frac{S}{2}$$

u holda

$$\frac{d^2TC}{dq^2} = 2QFq^{-3} > 0$$

Bu yerda Q , F va q musbat sonlar.

Shuning uchun, birinchi shartni bajaruvchi har qanday (2) ko'rinishdagi q musbat son uchun minimum uchun ikkinchi shart ham bajarilishi zarur.

Misol. Firma yil davomida bit xil talab bilan 200 000 birlik mahsulotdan foydalanmoqda. Har bir birlik qo'shimcha mahsulot uchun narxga £80 miqdor qo'shiladi. Bir birlik mahsulotning bir yil davomida saqlanishi uchun £8 miqdorda sarf talab qilinadi. Buyurtmaning optimal qiymati qanday?

Yechish. Optimal miqdor qiymati q bo'lganda o'rtacha zahira miqdor $q/2$ bo'ladi. Bunda buyurtmalar soni

$$\frac{Q}{q} = \frac{200.000}{q}$$

Har bir buyurtma £80 narxda amalga oshirilgani va har bir birlik mahsulotni saqlashga £8 xarajat qilinayotgani uchun

$TC = \text{buyurtma} + \text{zahira-saqlash narxlari} =$

$$= \frac{200,000(80)}{q} + \frac{8q}{2} = 16,000,000q^{-1} + 4q$$

Statsionar nuqtada

$$\frac{dTC}{dq} = -16.000.000q^{-2} + 4 = 0, \quad 4 = \frac{16.000.000}{4} = 4.000.000$$

$$q^2 = \frac{16.000.000}{4} = 4.000.000, \quad q = \sqrt{(4.000.000)} = 2.000$$

Bu statsionar nuqtada minimumning ikkinchi shartlari bajariladi, ya'ni barcha $q > 0$ uchun

$$\frac{d^2}{dq^2} 32,000,000q^{-3} > 0.$$

Shuning uchun buyurtmaning optimal miqdori 2000 birlikni tashkil etadi. Bu qiymatni oldin topilgan (2) formula bilan ham topishimiz mumkin.

$$q = \sqrt{\frac{2QF}{8}} = \sqrt{\frac{2 \times 200.000 \times 80}{8}} = 2.000.$$

Keyns multiplikatori

Eng oddiy Keynes makroiqtisodiy modeli, davlat sektori ishtirok etmaganda va tashqi savdo o'rnatilmagan holda,

$$Y = C + I \quad (1)$$

$$C = a + bY \quad (2)$$

deb qabul qilinadi, bu yerda Y milliy daromad, C iste'mol va I investitsiya, shartli belgilangan, a va b parametrlar.

Milliy daromad o'sishi bilan iste'molga bo'lgan tezlikning o'zgarishi iste'molga bo'lgan chegaraviy moyillik MPC (MPC - The marginal propensity to consume) bo'lib, uning qiymati $\frac{dC}{dY} = b$ ga teng. Investitsiyaga bo'lgan chegaraviy moyillik esa $\frac{dY}{dI}$ orqali aniqlanadi.

(2) ni (1) ga qo'yib

$$Y = a + bY + I, \quad Y(1-b) = a + I, \quad Y = \frac{a+I}{1-b} = \frac{a}{1-b} + \frac{I}{1-b}$$

Shu sababli multiplikator uchun formula quyidagicha bo'ladi

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1-b}$$

Bu ko'paytuvchidan berilgan darajadagi milliy daromadga erishish uchun zarur investitsiya miqdorini qanchaga oshirish kerakligini hisoblashda foydalanish mumkin.

Masalan. Asosiy Keynes makroiqtisodiy modelida $Y = C + I$ deb faraz qilib, bu yerda $I = 250$ va $C = 0.75Y$. Y uchun muvozanat darajasi nimaga teng? Y ni 1200 ga oshirish uchun I miqdorni qancha miqdorga oshirish zarur?

$$\textbf{Ychish.} \quad Y = C + I = 0.75Y + 250, \quad 0.25Y = 250, \quad Y = 1000.$$

Y uchun muvozanat darajasi $Y=1000$.

I ning har qanday o'zgarishiga mos Y o'zgarishi

$$\Delta Y = K \Delta I \quad (1)$$

formula orqali hisoblanadi, bu yerda K multiplikator. Ma'lumki, $K = \frac{1}{1-MPC}$

Bu masalada $MPC = dC / dY = 0.75$. Shuning uchun

$$K = \frac{1}{1 - 0.75} = \frac{1}{0.25} = 4 \quad (2)$$

$$Y \text{ talab o'zgarishi esa } \Delta Y = 1.200 - 1.000 = 200 \quad (3)$$

$$\text{Shuning uchun, (2) va (3) ni (1) ga qo'yib } 200 = 4\Delta I, \quad \Delta I = 50$$

Bu esa izlanayotgan I investitsiyani oshirish zarur bo'lgan miqdordir.

6-MAVZU. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR DIFFERENSIAL HISOBI

1-mashg'ulot

6.1.1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar. Karrali va takroriy limitlar

6.1.2. Xususiy hosilalar

6.1.3. To'la differensial

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, suhbat, muammoli masala va vaziyatlar.

6.1.1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar. Karrali va takroriy limitlar

$X = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$, $A_i \subset R, i = \overline{1, n}$ va $Y \subset R$ to'plamlar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar biror f - qoida va qonunga ko'ra X to'plamning har bir $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ elementiga Y to'plamning aniq bir y qiymati mos qo'yilsa, ko'p o'zgaruvchili (n -o'zgaruvchili) $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya berilgan deyiladi.

Masalan, $f(x, y) = x^2 + y^2$ - ikki o'zgaruvchili, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ esa n o'zgaruvchili funksiya misol bo'ladi.

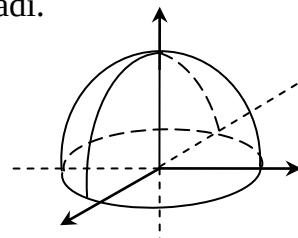
X to'plam f funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(f)$ kabi, Y to'plam esa qiymatlari yoki o'zgarish sohasi deyiladi va $E(f)$ kabi belgilanadi.

1 misol. $Z = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi

$$D(z) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\} \text{ to'plamdan iborat.}$$

Bu to'plam markazi koordinata boshida, radiusi R ($R > 0$) bo'lgan doiradir.



Iqtisodda uchraydigan asosiy tushunchalardan biri, bu foydalilik funksiyasidir. Ko'p o'zgaruvchili foydalilik funksiyasiga misol tariqasida quyidagini funksiyaning keltirish

mumkin: $Z = \sum_{i=1}^n a_i \ln(x_i - c_i)$, bu yerda $a_i > 0$ va $x_i > c_i \geq 0$. Funksiyaning aniqlanish

sohasi $D(Z) = \{x : x_i > c_i, i = \overline{1, n}\}$ to'plamdan iborat. Bu funksiya o'zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

$Z = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}$. Bu funksiya Kobba-Duglas funksiyasi deyiladi. Bu yerda x_1 - mehnat xarajatlari, x_2 - ishlab chiqarish fondlari hajmini bildiruvchi o'zgaruvchilardir. b_0, b_1 esa b_2 ishlab chiqarish texnologiyasi orqali aniqlanadigan parametrlardir.

$Z = a_0 (a_1 x_1^{-\beta} + a_2 x_2^{-\beta})^{-\frac{1}{\beta}}$. Bu funksiya almashtirishning o'zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ bo'lsin. Bu nuqtalar orasidagi masofa $d(x, y)$ deb quyidagi tenglik orqali aniqlangan songa aytilishini eslatib o'tamiz.

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Ta'rif. Markazi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtada, radiusi $R > 0$ ga teng ochiq shar $S(x, R)$ deb, quyidagi to'plamga aytiladi.

$$S(x, R) = \{y : d(x, y) < R\}$$

Izoh. $\varepsilon > 0$ son uchun $S(x, \varepsilon)$ - x nuqtaning, « ε -atrofi» ham deyiladi. $\bar{S}(x, R) = \{y : d(x, y) \leq R\}$ to'plam esa yopiq shar deyiladi.

Ta'rif. Agar $\lim_{d(x, x_0) \rightarrow 0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda a son $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaning, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqta $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ga intilgandagi limiti deyiladi. Bu hol quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

$$1 \text{ misol. } \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} - 1} = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} \frac{(x_1^2 + x_2^2)(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + 1)}{x_1^2 + x_2^2 + 1 - 1} = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0}} (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + 1) = 2.$$

$$2 \text{ misol. } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ limitlarni hisoblashda } x \text{ va } y \text{ nuqtalar orasidagi masofani}$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ deb belgilaylik. $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ bo'lganda $\rho \rightarrow 0$ ekanligi kelib chiqadi.

$$\text{Demak, } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \rho^2)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\ln(1 - \rho^2))'}{\rho'} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 - \rho^2} \cdot (-2\rho)}{1} = 0$$

6.1.2. Xususiy hosilalar

$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning barcha x_i argumentlariga Δx_i orttirma beramiz, u holda funksiya quyidagi Δz orttirmani

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

hosil qiladi. Bu orttirma funksiyaning to'liq orttirmasi deyiladi. Agar $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ funksiyaning faqat i -argumenti bo'lgan x_i o'zgaruvchiga Δx_i orttirma berib, qolgan o'zgaruvchilarni o'zgarimas deb qarasa, u holda funksiya hosil qilgan orttirma $\Delta_{x_i} z$ quyidagicha aniqlanib,

$$\Delta_{x_i} z = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

bu orttirma funksiyaning xususiy orttirmasi deyiladi.

Masalan, $z = xy$ funksiyaning to'liq va xususiy orttirmalarini topaylik:

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$

$$\Delta_x z = (x + \Delta x) \cdot y - xy = y \cdot \Delta x,$$

$$\Delta_y z = x \cdot (y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y$$

Ta'rif. $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning x_i o'zgaruvchisi bo'yicha xususiy hosilasi deb, x_i o'zgaruvchidan boshqa o'zgaruvchilarni o'zgarimas deb qaraganda hosil bo'lgan bir o'zgaruvchili, ya'ni x_i -o'zgaruvchili funksiyaning, x_i -

o'zgaruvchi bo'yicha olingan hosilaga aytilib, $\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i}$ yoki f'_{x_i} shaklda belgilanadi, ya'ni xususiy hosila quyidagi limit orqali topiladi:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}$$

Masalan. $z = x \cdot y$ funksiya uchun uning xususiy hosilalari xossalari quyidagicha bo'ladi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

$z = \arctg \frac{x}{y}$ funksiya uchun esa,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2}.$$

$z = x^y$ funksiya uchun esa

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x.$$

$\frac{\partial z}{\partial x_i}$ xususiy hosila, o'z navbatida, yana ko'p o'zgaruvchili funksiya bo'lgani uchun, uning yana xususiy hosilalarini topish mumkin. Bu xususiy hosilalar ikkinchi tartibli xususiy hosilalar deyiladi. Xuddi shunga o'xshash uchinchi va h.k. tartibli xususiy hosilalarni kiritish mumkin.

Bu hosilalar quyidagicha belgilanadi.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right) - \text{ikkinchi tartibli xususiy hosila};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_i^2 \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} \right) - \text{uchinchi tartibli xususiy hosila};$$

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_{i_1}^{k_1} \partial x_{i_2}^{k_2} \dots \partial x_{i_m}^{k_m}}, \quad n - \text{tartibli xususiy hosila}.$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

Umuman, aralash hosilalarda tartibning ahamiyati yo'q, ya'ni masalan, quyidagi tenglik o'rinlidir,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i},$$

bu aralash hosilalarni uzluksiz deb qarash kerak.

6.1.3. To'la differensial

Ta'rif. $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differentsiali deb, dZ - shaklda belgilanib quyidagicha aniqlangan ifodaga aytiladi:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial Z}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial Z}{\partial x_n} \Delta x_n$$

Bu yerda $dx_i = \Delta x_i$ - tenglikni e'tiborga olsak, dZ - differentsial uchun quyidagi tenglikni yoza olamiz.

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial Z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial Z}{\partial x_n} dx_n$$

Ta'rif. Agarda x - nuqtaning yetarli kichik atrofida, uning to'liq orttirmasi ΔZ ni quyidagicha ifodalash mumkin bo'lsa,

$$\Delta Z = dZ + o\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}\right),$$

u holda $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiya $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun uning berilgan nuqtada barcha birinchi tartibli xususiy hosilalarining mavjudligidan, shu nuqtada funksiyaning differentsiallanuvchi ekanligi kelib chiqmaydi. Quyidagi teorema ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differentsiallanuvchi bo'lishligining yetarli shartini ifoda etadi.

Teorema. Agar $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtaning biron-bir atrofida barcha birinchi tartibli $\frac{\partial z}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n$,

xususiy hosilalari mavjud bo'lib, bu xususiy hosilalar x nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya shu nuqtada differentsiallanuvchi bo'ladi.

Biz bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz. Shuni ta'kidlash lozimki, xuddi bir o'zgaruvchili funksiylardagi kabi, ko'p o'zgaruvchili funksiylar uchun ham yuqori tartibli differentsial tushunchasini kiritish mumkin.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

2- mashg'ulot

6.2.1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumlari

6.2.2. Ekstremumning zaruriy sharti

6.2.3. Ekstremumning yetarli sharti

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, ma'ruza, muammoli masala va vaziyatlar.

6.2.1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumlari

Ta'rif. Agar $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib, shu atrofdan olingan istalgan x uchun $f(x) \leq f(x_0)$, ($f(x) \geq f(x_0)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x_0 nuqta Z funksiya uchun lokal maksimum (lokal minimum) nuqta deyiladi.

Xuddi bir o'zgaruvchili funksiya kabi, ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun ham ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari haqidagi teoremlarni isbot qilish mumkin.

6.2.2. Ekstremumning zaruriy sharti

Teorema. (Ekstremumning zaruriy sharti). Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun ekstremum nuqtasi bo'lib, shu nuqtada funksiya differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ya'ni x_0 nuqtada funksiya gradienti nol vektorga teng bo'ladi: $\nabla f(x_0) = (0, 0, \dots, 0)$

Bu teoremadan, agar x_0 nuqta differentsiallanuvchi funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa, x_0 nuqtadagi istalgan yo'nalish bo'yicha funksiyaning hosilasi nolga tengligi kelib chiqadi, chunki

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \nabla f \cdot \vec{a} = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \cos \alpha_i = 0.$$

Ta'rif. Agar $z = f(x)$ funksiya uchun $\nabla f(x_0) = 0$ bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar yoki kritik nuqtasi deyiladi.

6.2.3. Ekstremumning yetarli sharti

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $x_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ nuqtaning biron-bir atrofida barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud va uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda istalgan $1 \leq i, j \leq n$ uchun

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Agar

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}(x)$$

belgilashni kiritsak, ushbu kvadratik matritsa,

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = a_{ji}$ bo'lgani uchun simmetrik matritsa bo'ladi. Avval ko'rganimizdek har bir simmetrik kvadratik matritsa kvadratik forma hosil qiladi. $A(x)$ matritsaga mos keluvchi kvadratik formani $L(x)$ bilan belgilaymiz.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya uchun $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ statsionar nuqtaning biron-bir atrofida ikkinchi tartibli hosilalari mavjud va uzluksiz bo'lib, shu x_0 nuqtada $L(x_0)$ kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan bo'lsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning lokal minimum (lokal maksimum) nuqtasi bo'ladi.

Xususan, agar biz $z = f(x, y)$ ikki o'zgaruvchili funksiya uchun shu teoremani qo'llasak quyidagini hosil qilamiz.

(x_0, y_0) nuqta $z = f(x, y)$ funksiyaning statsionar nuqtasi, ya'ni

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

bo'lib, nuqtaning biron-bir atrofida

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a_{11}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a_{12}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a_{22}$$

ikkinchi tartibli hosilalar mavjud bo'lsin. U holda,

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11}(x, y) & a_{12}(x, y) \\ a_{21}(x, y) & a_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

simmetrik kvadratik matritsaga mos keluvchi $L(x, y)$ kvadratik formaning (x_0, y_0) nuqtada musbat aniqlangan bo'lishi uchun

$$a_{11}(x_0, y_0) > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}(x_0, y_0) & a_{12}(x_0, y_0) \\ a_{21}(x_0, y_0) & a_{22}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

bo'lishi lozim. Demak, statsionar (x_0, y_0) nuqta $z = f(x, y)$ funksiya uchun lokal minimum nuqta bo'lishi uchun

$$a_{11}(x_0, y_0) > 0, \quad a_{11}(x_0, y_0) \cdot a_{22}(x_0, y_0) - a_{12}^2(x_0, y_0) > 0$$

shartlarning bajarilishi yetarli bo'lar ekan. (x_0, y_0) nuqta lokal minimum nuqta bo'lishligi uchun esa

$$a_{11}(x_0, y_0) < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}(x_0, y_0) & a_{12}(x_0, y_0) \\ a_{21}(x_0, y_0) & a_{22}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

ya'ni

$$a_{11}(x_0, y_0) < 0, \quad a_{11}(x_0, y_0) \cdot a_{22}(x_0, y_0) - a_{12}^2(x_0, y_0) > 0$$

shartlarning bajarilishi yetarli.

$z = f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) statsionar nuqtasi uchun

$$a_{11}(x_0, y_0) \cdot a_{22}(x_0, y_0) - a_{12}^2(x_0, y_0) < 0$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, (x_0, y_0) nuqta ekstremum nuqta emasligi kelib chiqadi.

Masalan. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ funksiyaning ekstremumga tekshiraylik. Buning uchun dastavval uning xususiy hosilalarini, keyin statsionar nuqtalarini, so'ngra ikkinchi tartibli hosilalar yordamida ekstremum nuqtalarni aniqlaymiz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \Rightarrow (0, 0) \text{ va } (1, 1)$$

nuqtalar statsionar nuqtalar ekan.

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x, y) & a_{12}(x, y) \\ a_{21}(x, y) & a_{22}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$$

bo'lgani uchun $(0, 0)$ ekstremum nuqta bo'lmaydi, chunki

$$\begin{vmatrix} a_{11}(0,0) & a_{12}(0,0) \\ a_{21}(0,0) & a_{22}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$$

Lekin (1, 1) nuqta funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi, chunki

$$a_{11}(1,1) = 6 > 0 \text{ va } \begin{vmatrix} a_{11}(1,1) & a_{12}(1,1) \\ a_{21}(1,1) & a_{22}(1,1) \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0.$$

$$\min z(x,y) = z(1,1) = -1.$$

3- mashg'ulot

6.3.1. Shartli ekstremumlar

6.3.2. Yopiq sohadagi ekstremumlar

6.3.3. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar diffrensial hisobining iqtisodiyotga tatbiqlari

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: ko'rsatish, ma'ruza, muammoli masala va vaziyatlar.

6.3.1. Shartli ekstremumlar

Ko'p hollarda berilgan ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlarini, uning argumentlari ma'lum shartlarni qanoatlantirishi asosida topish masalasi qo'yiladi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun shartli ekstremumlar deb nomlanuvchi tushuncha umumiy holda quyidagicha bayon etiladi.

$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ $n+m$ o'zgaruvchili funksiyaning ushbu, bog'lovchi tenglamalar deb nomlanuvchi,

$$\begin{aligned} \phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, m, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) \end{aligned}$$

tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalar ichidan topilgan ekstremumlari uning shartli ekstremumlari deyiladi.

Ta'rif. Agar $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$ ko'p o'zgaruvchili funksiya $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n+m}^{(0)})$ nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib, bog'lovchi tenglamalarni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar uchun $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x_0 nuqtada shartli maksimumga (minimumga) erishadi deyiladi.

Berilgan $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$ funksiyaning bog'lovchi tenglamalarni qanoatlantiruvchi shartli ekstremumini topish uchun Lagranjning noma'lum koeffitsientlar usulini keltiramiz. Buning uchun quyidagi yordamchi funksiyaning kiritamiz

$$F(x) = f(x) + \lambda_1 \phi_1(x) + \dots + \lambda_m \phi_m(x),$$

bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ noma'lum ko'paytuvchilar deb nomlanuvchi sonlardan iborat.

Kiritilgan $F(x)$ funksiyaning shartsiz ekstremumi (ya'ni avval kiritilgan ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi ma'nosida), biz qarayotgan $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaning shartli ekstremumi bo'ladi. Biz qidirayotgan $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n+m}^{(0)})$ nuqtani

$$\text{va } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \text{ sonlarni topish uchun } \begin{cases} \phi_i(x) = 0, & i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, n+m \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish yetarli bo'ladi, chunki noma'lumlarning umumiy soni va sistemadagi tenglamalar soni $n + 2m$ ga teng.

Masalan, $z = xy$ funksiyaning $x^2 + y^2 = 2$ tenglikni qanoatlantiruvchi shartli ekstremumini topish uchun yordamchi $F(x, y) = xy + \lambda \cdot (x^2 + y^2)$ Lagranj funksiyanini kiritib, bu funksiyaning shartsiz ekstremumini topamiz. λ noma'lum ko'paytuvchi va ekstremum nuqtasi uchun quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \frac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x - y)(1 - 2\lambda) = 0 \\ (x + y)(1 + 2\lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \lambda = \frac{1}{2}, x = -y \\ x = y, \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}, (1, -1), (-1, 1) \\ (1, 1), (-1, -1), \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Demak, $\lambda = \frac{1}{2}$ bo'lganda $F(x, y) = xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

$(1, -1)$ va $(-1, 1)$ statsionar nuqtalarda funksiyanini tekshiramiz.

$(1, -1)$ nuqtada $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 1$ va $d^2 F = (dx + dy)^2 \geq 0$ bo'lgani uchun, $F(x, y)$ funksiya $(1, -1)$ va $(-1, 1)$ nuqtalarda minimumga erishadi. U holda $z = xy$ funksiya esa shu nuqtalarda shartli minimumga erishadi va $z_{\min} = -1$.

Agar $\lambda = -\frac{1}{2}$ bo'lsa, $F(x, y) = xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ va $F(x, y)$ funksiya $(1, 1)$ va $(-1, -1)$ statsionar nuqtalarda maksimumga erishadi, u holda $z = xy$ funksiya esa bu nuqtalarda shartli maksimumga erishadi va $z_{\max} = 1$.

6.3.2. Yopiq sohadagi ekstremumlar

Teorema. (Veyershtass teoremasi). Agar $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiya chegaralangan yopiq B to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya B to'plamda chegaralangan bo'lib, shu to'plamda o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga (global ekstremumlarga) erishadi, ya'ni shunday $K > 0$ musbat son, $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in B$ va $y_0 = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \in B$ nuqtalar mavjudki, ular uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi: $|f(x)| \leq K \quad \forall x \in B$ va

$$f(x_0) = \sup_{x \in B} \{f(x)\}, \quad f(y_0) = \inf_{x \in B} \{f(x)\}$$

Shuni ta'kidlash lozimki, funksiya global ekstremum qiymatlarga B to'plamning chegaraviy nuqtalarida ham erishishi mumkin.

1 misol. $z = e^{-x^2 - y^2} \cdot (2x^2 + 3y^2)$ funksiyaning $x^2 + y^2 \leq 4$ tengsizlik bilan berilgan $\bar{S}(0, 2)$ yopiq shardagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topaylik.

Dastavval $S(0, 2)$ ochiq sohadagi statsionar nuqtalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-x^2-y^2} [-2x(2x^2 + 3y^2) + 4x] = 2x \cdot e^{-x^2-y^2} [2 - (2x^2 + 3y^2)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-x^2-y^2} [-2y(2x^2 + 3y^2) + 6y] = 2y \cdot e^{-x^2-y^2} [3 - (2x^2 + 3y^2)]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y \cdot (1 - y^2) = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x \cdot (1 - x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Demak, $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$ va $(\pm 1, 0)$ nuqtalar qaralayotgan funksiyaning statsionar nuqtalari bo'ladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni keltiramiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-(x^2+y^2)} (8x^4 + 12x^2y^2 - 20x^2 - 6y^2 + 4) = a_{11}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-(x^2+y^2)} (8x^3y + 12xy^3 - 20xy) = a_{12}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)} (12y^4 + 8x^2y^2 - 30y^2 - 4x^2 + 6) = a_{22}(x, y)$$

Bundan $(0, 0)$ nuqtada $a_{11}(0, 0) = 4$, $a_{12}(0, 0) = 0$, $a_{22}(0, 0) = 6$ bo'lib $a_{11} > 0$ va $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 24 > 0$ bo'lgani uchun $(0, 0)$ nuqta lokal minimum nuqtasi bo'ladi va $z(0, 0) = 0$.

$(0, \pm 1)$ nuqtada $a_{11}(0, \pm 1) = -2e^{-1}$, $a_{12}(0, \pm 1) = 0$, $a_{22}(0, \pm 1) = -10 \cdot e^{-1}$ bo'lib, $a_{11} < 0$ va $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 20 \cdot e^{-2} > 0$ bo'lgani uchun, $(0, \pm 1)$ nuqta lokal maksimum nuqtasi bo'ladi va $z(0, \pm 1) = 3 \cdot e^{-1}$.

$(\pm 1, 0)$ nuqtada $a_{11}(\pm 1, 0) = -8e^{-1}$, $a_{12}(\pm 1, 0) = 0$, $a_{22}(\pm 1, 0) = 2e^{-1}$ bo'lib, $a_{11} < 0$ va $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = -16e^{-2} < 0$ bo'lgani uchun, $(\pm 1, 0)$ nuqta ekstremum nuqta emas.

Endi berilgan funksiyaning $\bar{S}(0, 2)$ sharning chegaraviy nuqtalarida, ya'ni $x^2 + y^2 = 4$ tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalarda tekshiramiz. $x^2 + y^2 = 4$ bo'lsin, u holda

$$Z = e^{-(x^2+y^2)} (2x^2 + 3y^2) = e^{-4} [2(x^2 + y^2) + y^2] = e^{-4} (8 + y^2).$$

Bundan $x^2 + y^2 = 4$ bo'lganda quyidagi tengsizlik kelib chiqadi

$$8 \cdot e^{-4} \leq z = e^{-4} (8 + y^2) \leq e^{-4} \cdot 12,$$

ya'ni $z(\pm 2, 0) = \frac{8}{e^4}$ va $z(0, \pm 2) = \frac{12}{e^4}$ sonlar funksiyaning $\bar{S}(0, 2)$ shar chegarasidagi eng kichik va eng katta qiymatlarini beradi.

Berilgan funksiyaning $\bar{S}(0, 2)$ yopiq shardagi global ekstremumlari, ya'ni uning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun funksiyaning $S(0, 2)$ ochiq shardagi va chegaradagi maksimumlari ichidan eng kattasini olsak va shuningdek $S(0, 2)$ ochiq shardagi va chegaradagi minimumlar ichidan eng kichigini olsak, mos ravishda global maksimum va global minimumlarni hosil qilamiz. Qaralayotgan holda funksiya $(0, \pm 1)$ nuqtada $z(0, \pm 1) = \frac{3}{e}$ lokal maksimumga erishadi. Chegaradagi maksimum qiymat esa

$z(0, \pm 2) = \frac{12}{e^4}$ ga teng. $\frac{12}{e^4} < \frac{3}{e}$ bo'lgani uchun, funksiya $\bar{S}(0, 2)$ sharda eng katta qiymatga $(0, \pm 1)$ nuqtada erishdi va $Z_{\max} = \frac{3}{e}$.

$S(0, 2)$ ochiq sharda funksiya $(0, 0)$ nuqtada minimumga erishadi va $z(0, 0) = 0$. Chegaraviy nuqtalardagi minimum $z(\pm 2, 0) = \frac{8}{e^4} > 0$ bo'lgani uchun, funksiya $\bar{S}(0, 2)$ sharda eng kichik qiymatga $(0, 0)$ nuqtada erishadi va $Z_{\min} = 0$.

2 misol. $z = 2x^2 + y^2 + 4x - 2$ funksiyaning $x^2 + y^2 \leq 9$ doiradagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topamiz.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 4x + 4 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y = 0. \end{cases}$$

sistemani yechib, funksiyaning statsionar nuqtalarni aniqlaymiz: $M(-1; 0)$ -yagona statsionar nuqta qaralayotgan sohaga tegishli. Funksiyaning shu nuqtagi qiymatini hisoblaymiz: $z(-1; 0) = -4$.

Endi funksiyaning $x^2 + y^2 = 9$ aylanadagi qiymatlarini o'rganamiz. $y^2 = 9 - x^2$ ifodani berilgan funksiya qo'yib $z = x^2 + 4x + 7$ bir o'zgaruvchili funksiyaning hosil qilamiz. Shu bir o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumga tekshiramiz. $z' = 2x + 4 = 0$, $x = -2$. Funksiyaning statsionar nuqtadagi va sohaning chetlaridagi $(-3 \leq x \leq 3)$ qiymatlarini hisoblaymiz: $z(-3) = 4$, $z(-2) = 3$, $z(3) = 28$.

Demak, $z = 2x^2 + y^2 + 4x - 2$ funksiyaning $x^2 + y^2 \leq 9$ doiradagi eng kichik qiymatiga sohaning $(-1; 0)$ ichki nuqtasida erishadi: $z_{\min} = z(-1; 0) = -4$, eng katta qiymatiga esa $(3; 0)$ -sohaning cherasida erishadi: $z_{\max} = z(3; 0) = 28$.

3.3. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar diffensial hisobining iqtisodiyotga tatbiqlari

Tovarning har xil turlarini ishlab chiqarishdan daromad olish.

Faraz qilaylik $x_1, x_2, \dots, x_m$ - ishlab chiqarilayotgan m turdagi turli xil tovarning miqdori, ularning birlik miqdordagi narxi mos ravishda $P_1, P_2, \dots, P_m$ bo'lsin. Bu tovarlarni ishlab chiqarishga ketadigan xarajat funksiyasi berilgan bo'lsin: $C = C(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

U holda qo'shimcha qiymat funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\Pi = P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_mx_m - C(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (1)$$

Tabiiyki, qo'shimcha qiymat maksimumini izlash, (1)-ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $x_i \geq 0$ da (boshqa cheklanishlar qo'yilmaganda) lokal ekstremumini izlash kabidir:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Bu shart x_i o'zgaruvchilarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$P_i - \frac{\partial C}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

(2) tenglamalar sistemasi iqtisodiyotning ma'lum qoidasini amalga oshiradi: tovarning oxirgi qiymati (narxi) bu tovarni ishlab chiqarishga sarflangan xarajatlarga teng.

Shuni ta'kidlash kerakki, (2) tenglamalar sistemasini yechish jarayoni xarajat funksiyasining ko'rinishiga bog'liq va ancha murakkab bo'lishi mumkin.

Masalan, korxona narxi $p_1 = 8$ pul birligida bo'lgan mahsulotdan x miqdorda, narxi $p_2 = 10$ pul birligida bo'lgan mahsulotdan y miqdorda ishlab chiqarayotgan bo'lsin. C-xarajat funksiyasi $C = x^2 + xy + y^2$ ko'rinishda bo'lsin.

U holda, (1) formulaga asosan, qo'shimcha qiymat funksiyasi ikki o'zgaruvchining funksiyasidan bo'ladi:

$$\Pi(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Ekstremumning zaruriy sharti chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 10 \end{cases}.$$

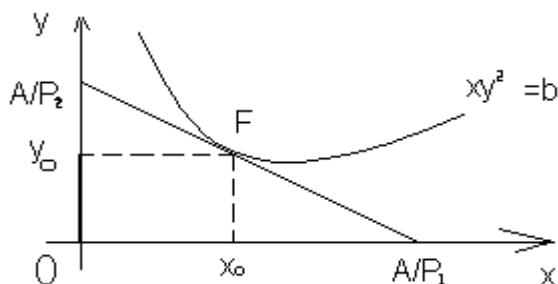
Sistemaning yechimi $(2; 4)$ nuqtada $a_{11} = \frac{\partial^2 \Pi(2; 4)}{\partial x^2} = -2 < 0$ va $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 > 0$ bo'lgani uchun, bu nuqta qo'shimcha qiymat funksiyasining lokal maksimumini aniqlaydi va $\Pi_{\max} = \Pi(2; 4) = 28$.

Resurslarni eng yaxshi natija beradigan qilib taqsimlash. Faraz qilaylik X va Y resurslarning xarajat funksiyasi $u = p_1x + p_2y$ ko'rinishga ega bo'lsin, bu yerda p_1 va p_2 - mos ravishda bu faktorlarning bahosi. Ishlab chiqarish funksiyasi $u = a_0xy^2$ bo'lganda resurslarni optimal taqsimlash masalasini qaraylik, a_0 -?

Resurslarni optimal taqsimlashni aniqlaydigan $F(x_0, y_0)$ nuqtada xarajat va chiqarish funksiyalari urinadi.

Bu chiziqlar mos ravishda $a_0xy^2 = c$, $p_1x + p_2y = A$ yoki $y = (b/x)^{1/2}$, $y = -(p_1/p_2)x + A/p_2$ tenglamalar bilan aniqlanadi, bu yerda $C > 0$ va $A > 0$ - o'zgarmas sonlar, $b = c/a_0$. Bu chiziqlarning urinish sharti quyidagi tenglama bilan beriladi:

$$\left[\left(\frac{b}{x} \right)^{1/2} \right]' \Big|_{x_0} = -p_1/p_2$$



Bu tenglamadan $x_0 = b^{1/3}(p_2/2p_1)^{1/3}$ qiymat topiladi. U holda chiqarish funksiyasidagi $y_0 = \left(\frac{b}{x_0}\right)^{1/2} = b^{1/3}\left(2p_1/p_2\right)^{1/6}$ qiymat topiladi. Demak, resurslarnig optimal taqsimlanishi $x_0/y_0, p_1:2p_2$ munosabat orqali aniqlanar ekan.

Mahsulot ishlab chiqarishning qo'shimcha qiymatini maksimallashtirish

Qo'shimcha qiymat funksiyasi odatda quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$\Pi(K, L) = pF(K, L) - WL - kK, \quad (3)$$

bu yerda $F(K, L)$ - ishlab chiqarish funksiyasi, p - mahsulot bahosi. W va k -mos ravishda mehnatga va kapital xarajatlarga faktor narxlar, L va K mos ravishda mehnat resurslari va kapitalning xarajatlari.

Qo'shimcha qiymat maksimumini aniqlashga doir misollar qaraymiz.

1. Agar (K_0, L_0) nuqtada qo'shimcha qiymat funksiyasi (3) maksimal qiymatni qabul qilsa, (K_0, L_0) nuqta optimal reja deyiladi. Optimal reja F da ishlab chiqarish funksiyasi F ni o'rniga qo'yib oxirgi normasini toping.

Lokal ekstremum nuqtasida qo'shimcha qiymat funksiyasi $\Pi(K, L)$ ning birinchi hosilalari nolga teng, ya'n'

$$pF'_K(K_0, L_0) - k = 0,$$

$$pF'_L(K_0, L_0) - W = 0.$$

Ma'l'mki, almashtirishning oxirgi normasi $\mu = -\frac{F'_L}{F'_K}$ formula bo'yicha hisoblanadi,

bundan optimal reja uchun $\mu = -\frac{W}{k}$ kelib chiqadi.

2. Agar $F(K, L) = 2(KL)^{1/3}$ bo'lsa, qo'shimcha qiymat funksiyasi (3) ning maksimumi va optimal rejani toping.

Qo'shimcha qiymat funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\Pi(K, L) = 2p(KL)^{1/3} - WL - RK.$$

Lokal ekstremum shartlari optimal rejaning K_0 va L_0 koordinatalariga nisbatan, ikkita chiziqli tenglamalar sistemasiga olib keladi.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}pL_0^{1/3}K_0^{-2/3} = k \\ \frac{2}{3}pK_0^{1/3}L_0^{-2/3} = W \end{cases}$$

Bundan optimal rejaning koordinatalarini topamiz:

$$K_0 = \left(\frac{2p}{3}\right)^3 \frac{1}{(R^2/W)}, \quad L_0 = \left(\frac{2p}{3}\right)^3 \frac{1}{(RW^2)}$$

Bu qiymatlarni qo'shimcha qiymat funksiyasiga qo'ysak Π funksiya maksimumini hosil qilamiz:

$$\Pi_{\max} = \left(\frac{2p}{3}\right)^3 \frac{1}{(RW)}$$

Eng kichik kvadratlar usuli

Eng kichik kvadratlar usuli approksimatsiya yoki funktsiyani ayrim nuqtalarda ma'lum qiymatlari bo'yicha taxminan tiklash masalasiga tegishlidir. Tajribada ko'pincha formulalarni eng yaxshi yo'l bilan empirik tanlash masalasi kelib chiqadi. Masala quyidagicha ifodalanadi: y noma'lum kattalikning n ta nuqtalarda kuzatishlari berilgan:

$$M_1, M_2, \dots, M_n \quad (4)$$

va mos qiymatlar olingan

$$U_1, U_2, \dots, U_n \quad (5)$$

Shunday $U = f(M)$ funktsiyani tanlab olish kerakki, u o'lchanadigan kattalik Y ning o'lchash nuqtalari $\{M_i\}$ va natijalari $\{U_i\}$ orasidagi bog'liqlikni imkoni boricha aniq ifoda etsin.

Shunday qilib, empirik formulalarni topish masalasi ikki bosqichdan iborat:

1) $f(M)$ bog'lanishning umumiy ko'rinishini topish yoki f funktsiyaning o'zgarma parametrlari (koeffitsientlari) aniqlik darajasini ko'rsatish;

2) noma'lum koeffitsientlar (4) kuzatish nuqtalarida shunday tanlab olinadiki, $f(M)$ funktsiya berilgan (5) qiymatlarga iloji boricha aniq javob bersin.

Faraz qilaylik 1-bosqichda empirik formula o'z ichiga ma'lum baza funktsiyalar majmuini hosil qilsin.

$$y_1(M), y_2(M), \dots, y_m(M) \quad (6)$$

ya'ni empirik formula quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f(M) = a_1 y_1(M) + a_2 y_2(M) + \dots + a_m y_m(M) \quad (7)$$

bu yerda,

$$a_1, a_2, \dots, a_m \quad (8)$$

empirik funktsiyaning noma'lum parametrlari.

2-bosqich noma'lum parametrlar (8) ni aniqlashdan iborat. Ularni shunday tanlab olish kerakki, (7) funktsiyaning qiymatlari (4) nuqtalarda (5) o'lchangan qiymatlardan iloji boricha kam farq qilsin.

Eng kichik kvadratlar usuli $\delta_i = U_i - f(M)$ xatoliklarning kvadratlari yig'indisini minimallashtirishdan iborat. Demak, (7) funktsiya uchun, ushbu

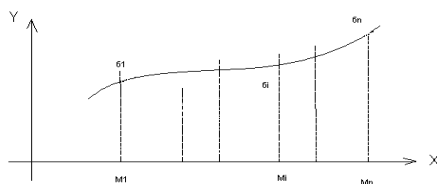
$$S(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (U_i - f(M_i))^2 = \sum_{i=1}^n \left(U_i - \sum_{k=1}^m a_k y_k(M_i) \right) \quad (9)$$

funktsiya barcha m argumenti bo'yicha xususiy hosilalarni topish kerak va ularni 0 ga tenglash lozim. Bundan m ta noma'lum $a_1, a_2, \dots, a_m$ parametrlarga nisbatan m ta chiziqli algebratik tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$A_{j1}a_1 + A_{j2}a_2 + \dots + A_{jm}a_m = B_j, \quad j=1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Bu tenglamaning koeffitsientlari va ozod hadlari quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$A_{jk} = A_{kj} = \sum_{i=1}^n y_j(M_i) y_k(M_i), \quad B_j = \sum_{i=1}^n U_i y_j(M_i), \quad j, k = 1, 2, \dots, m$$



$S(a_1, \dots, a_n)$ (9) funksiya musbat, pastga qavariq, va chegaralangan bo'lgani uchun, (10) tenglamalar sistemasining yechimi, S-funksiyaning lokal maksimumi nuqtasining koordinatalaridan iborat bo'ladi.

Iqtisodiy statistikada ma'lumotlarni qayta tekshirishda empirik formulaga yaqinlashish masalasini hal etishda $U = f(M)$ funksiyani bir o'zgaruvchining chiziqli funksiyasi ko'rinishida izlash keng tarqalgan. Bu holda (4) o'lchash nuqtalarining majmui $x_1, \dots, x_n$ qiymatlaridan iborat bo'lib, (6) funksiyalar majmui esa, ikkita funksiya, $y_1(x) = x$ va $y_2(x) = x$ dan iborat.

Empirik formula (7) ning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$y = ax + b.$$

No'malum parametrlar a va b uchun ushbu chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} A_{11} a + A_{12} b = B_1 \\ A_{21} a + A_{22} b = B_2 \end{cases};$$

bu yerda koeffitsient va ozod hadlar quyidagi tengliklar bilan topiladi.

$$A_{11} = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^n x_i, \quad A_{22} = n$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^n U_i x_i, \quad B_2 = \sum_{i=1}^n U_i.$$

Masala,

x_i	50	70	90	110	130
y_i	0,2	0,5	0,8	1,1	1,3

avtomobil poygasi haqida yuqoridagi ma'lumotlar saosida(bunda x - masofa(ming km.) va y – yonilg'i sarfi (l /ming km.)), x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishni chiziqli ekanligini bilgan holda, $y = ax + b$ empirik formulani eng kichik kvadratlar usulida tuzaylik.

$$\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n x_i^2, \sum_{i=1}^n x_i y_i - \text{yigindilarni hisoblaymiz.}$$

Hisoblashlar quyidagi jadvalda ko'rsatilgan.

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	50	0,2	10	2500
2	70	0,5	35	4900
3	90	0,8	72	8100
4	110	1,1	121	12100
5	130	1,3	169	16900
Σ	450	3,9	407	44500

Normal tenglamalar sistemasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} 44500a + 450b = 407 \\ 450a + 5b = 3,9 \end{cases}$$

Sistemening yechimi $a = 0,014$, $b = -0,48$.

Demak, chiziqli bog'lanish $y = 0,014x - 0,48$ ko'rinishda bo'ladi.

Ko'p o'zgaruvchili funksiya xususiy hosilalarini iqtisodiyotda qo'llanishi

Umumiy holda X tovarga bo'lgan talab ko'p o'zgaruvchi funksiya bo'ladi, ya'ni sotib olinayotgan tovarning miqdori Q_x uning narxi P_x , ikkilamchi xom-ashyo narxi $-P_y$, iste'molchining o'rtacha daromad darajasi Y , yil fasllari t va hokazolarga bog'liq.

$\frac{\partial Q_x}{\partial P_x}$ xususiy hosila Q_x talabning faqat P_x tovar narxi o'zgarganda o'zgarish tezligining o'lchov birligi bo'lib xizmat qiladi, bu holda qolgan barcha o'zgaruvchilar o'zgarmas deb faraz qilinadi. Xuddi shunga o'xshash xususiy hosila $\frac{\partial Q_y}{\partial Q_y}$ xom-ashyoning

narxi P_y o'zgarganda X tovarga bo'lgan talab qanday tezlikda o'zgarishini ko'rsatadi. Xususiy hosilalarning ishorasidan foydalanib X va Y tovarlarning xarakterini topish mumkin, aynan:

agar, $\frac{\partial Q_x}{\partial P_y} > 0$ va $\frac{\partial Q_y}{\partial P_x} > 0$ bo'lsa, X va Y tovarlar o'rin bosuvchi.

agar, $\frac{\partial Q_x}{\partial P_y} < 0$ va $\frac{\partial Q_y}{\partial P_x} < 0$ bo'lsa, X va Y tovarlar o'rin to'ldiruvchi

tovarlar hisoblanadi.

Masalan. Avtomobillarga ehtiyot qismlari ishlab chiqaradigan firma o'z mahsulotini ichki va tashqi bozorga chiqarish imkoniyatiga ega.

Bu yerda, $P_1 + 8Q_1 = 421$ tashqi bozordagi talab, $P_2 + 2,5Q_2 = 80$ esa ichki bozordagi talab, Q_1 va Q_2 mos ravishda tashqi va ichki bozordagi mahsulot miqdorlari hajmi, P_1 va P_2 mos ravishda tashqi va ichki bozordagi narxlar.

Firmaning umumiy harajatlari $TC = 250 + 5Q$, bu erda $Q = Q_1 + Q_2$.

Agar firma narxlarning o'zgartirish siyosatini o'tkazish imkoniyatiga ega bo'lsa, maksimal foydaga ega bo'lish uchun har qaysi bozorda firmaning mahsulotiga qanday narx o'rnatishi kerakligini va firmaning foydasini aniqlaylik.

Firmaning umumiy daromadi tashqi va ichki bozordagi daromadlar yig'indisiga teng, ya'ni

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 = P_1Q_1 + P_2Q_2 = (421 - 8Q_1)Q_1 + (80 - 2,5Q_2)Q_2 = \\ &= 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2,5Q_2^2. \end{aligned}$$

Firmaning umumiy xarajati: $TC = 250 + 5(Q_1 + Q_2)$.

Demak, foyda funktsiyasi

$$\Pi = R - TC = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2,5Q_2^2 - 250 - 5Q_1 - 5Q_2.$$

Endi firmaning foydasi maksimum bo'lganda Q_1 va Q_2 miqdorlarning qiymatini aniqlash masalasini qaraymiz. Buning uchun ekstremumning zaruriy shartidan foydalanamiz.

$$\begin{cases} \partial\pi/\partial Q_1 = 421 - 16Q_1 - 5, & \begin{cases} 416 - 16Q_1 = 0 \\ 75 - 5Q_2 = 0 \end{cases} \\ \partial\pi/\partial Q_2 = 80 - 5Q_2 - 5; \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib $Q_1 = 26$, $Q_2 = 15$ qiymatlarni topamiz. Ekstremumning yetarli shartni shu nuqtada tekshiramiz:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^2} = -16 < 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2^2} = -5, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} \right)^2 = (-16) \cdot (-5) - 0 = 80 > 0$$

Demak, foyda funksiyaning maksimumga erishish sharti bajariladi. Shunday qilib, firma maksimum foydaga ega bo'lishi uchun tashqi bozorga 26 hajmda, ichki bozorga esa 15 hajmdagi mahsulot chiqarishi kerak. Q_1 va Q_2 miqdorlarning bu qiymatlarini talab funksiyaga qo'yib P_1 va P_2 narxlarini topamiz

$$P_1 = 421 - 8Q_1 = 421 - 8 \cdot 26 = 213, \quad P_2 = 80 - 2,5Q_2 = 80 - 2,5 \cdot 15 = 42,5.$$

Demak, tovarning tashqi bozordagi narxi 213 pul birligi, ichki bozordagi narxi esa 42,5 pul birligi bo'lib, bu holda firmaning foydasi

$$\begin{aligned} \Pi = R - TC &= 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2,5Q_2^2 - 250 - 5Q_1 - 5Q_2 = \\ &= 421 \cdot 26 - 8 \cdot 26^2 + 80 \cdot 15 - 2,5 \cdot 1,5^2 - 250 - 5 \cdot 26 - 5 \cdot 15 = 5720,5 \end{aligned}$$

pul birligini tashkil etadi.

Ishlab chiqarishning x va y faktoriga bog'liq $z = f(x, y)$ ishlab chiqarish funksiyasi berilgan bo'lsin.

Ishlab chiqarishning chegaraviy unumdorlik faktorlari quyidagicha aniqlanadi

$$\omega_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \omega_y = \frac{\partial z}{\partial y},$$

bunda ω_x – x faktorining chegaraviy unumdorligi,

ω_y – y faktorining chegaraviy unumdorligi.

Ishlab chiqarish ikki faktorining chegaraviy aralashish me'yori esa quyidagicha aniqlanadi

$$\begin{aligned} \eta_{xy} &= -\frac{\omega_y}{\omega_x} = -\frac{\partial z}{\partial y} : \frac{\partial z}{\partial x} \\ \eta_{yx} &= -\frac{\omega_x}{\omega_y} = -\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

bunda η_{xy} – ishlab chiqarish x faktorining ishlab chiqarish y faktoriga chegaraviy aralashish me'yori.

η_{yx} – ishlab chiqarish y faktorining x faktoriga chegaraviy aralashish me'yori.

Mahsulot ishlab chiqarishning ma'lum faktori bo'yicha elastikligining xususiy qiymatlari quyidagicha aniqlanadi

$$\varepsilon_x = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{z}{x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x}{z} \quad \text{va} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial z}{\partial y} : \frac{z}{y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{y}{z}$$

bunda ε_x – ishlab chiqarish hajmining x faktor bo'yicha elastikligi,

ε_y – ishlab chiqarish hajmining y faktor bo'yicha elastikligi.

Elastiklik koeffisienti ishlab chiqarishning bir faktori 1% ga o'zgarganda va ikkinchi faktor o'zgaras bo'lganda ishlab chiqarish hajmi qancha foizga o'zgarishini anglatadi.

Misollar.

1 misol. $z = 4x^3 - xy^2 - 5y$ ishlab chiqarish funksiyasi bo'lib, bunda x – mehnat kuchlariga xarajatlar, y – investisiya xarajatlari. $x=1$ va $y=2$ bo'lganda funksiya xususiy elastikligini hisoblaylik.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (4x^3 - xy^2 + 5y)'_x = 12x^2 - y^2, \frac{\partial z}{\partial y} = (4x^3 - xy^2 + 5y)'_y = -2xy + 5.$$

$$E_x = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{4x^3 - xy^2 + 5y} \cdot (12x^2 - y^2), E_y = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{4x^3 - xy^2 + 5y} \cdot (-2xy + 5).$$

$$E_x(1;2) = \frac{1}{4-4+10} (12-4) = \frac{8}{10} = 0.8, E_y(1;2) = \frac{2}{4-4+10} (5-4) = \frac{2}{10} = 0.2.$$

Demak, mehnat kuchlariga xarajatlar 1%ga ortsa, ishlab chiqarish hajmi 0.8%ga, investisiya xarajatlar 1% ga ortsa, ishlab chiqarish hajmi 0.2% ga ortadi.

2 misol. $Y = F(K; L) = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$ Kobba – Duglas ishlab chiqarish funksiyasining asosiy parametr va xarakteristikalarini aniqlaylik, bunda – Y – ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmi, L – mehnat xarajatlari, K – ishlab chiqarish fondlari hajmi, A, α, β – ishlab chiqarish funksiyasi ko'rsatkichlarini ifodalovchi o'zgaras sonlar, bunda $A > 0, 0 \leq \alpha + \beta \leq 1$.

Birinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$\omega_L = Y'_L = A \cdot \beta \cdot K^\alpha \cdot L^{\beta-1} - \text{chegaraviy mehnat unumdorligi};$$

$$\omega_K = Y'_K = A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^\beta - \text{chegaraviy mehnat investisiya unumdorligi iqtisodda } \omega_K \text{ chegaraviy jamg'arma unumdorligi deyiladi.}$$

Kobba – Duglas funksiyasining elastiklikni hisoblaylik

$$E_K(F) = \frac{K}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{K}{A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta} \cdot A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^\beta = \alpha,$$

$$E_L(F) = \frac{L}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{L}{A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta} \cdot A \cdot \beta \cdot K^\alpha \cdot L^{\beta-1} = \beta$$

Demak, α – jamg'armalar (investitsiyalar) bo'yicha mahsulot ishlab chiqarish elastikligi, β – mahsulot ishlab chiqarishning mehnat xarajatlari bo'yicha elastikligi.

K ishlab chiqarish fondlarining nisbiy 1% ga o'zgarishi mahsulot ishlab chiqarishning nisbiy miqdorini taxminan $\alpha\%$ ga o'zgarishini keltirib chiqaradi.

Agar L mehnat xarajatlarning 1%ga o'zgarishi mahsulot ishlab chiqarish miqdorini taxminan $\beta\%$ ga o'zgartiradi.

Ikki faktorning aralash me'yorini aniqlaymiz.

$$\eta_{KL} = -\frac{\omega_L}{\omega_K} = -\frac{A \beta K^\alpha L^{\beta-1}}{A \alpha K^{\alpha-1} L^\beta} = -\frac{\beta K}{\alpha L} - \text{asosiy jamg'armalarning mehnat bilan chegaraviy}$$

aralashish normasi.

$$\eta_{LK} = -\frac{\omega_K}{\omega_L} = -\frac{\alpha L}{\beta K} - \text{mehnatning asosiy jamg'armalar bilan aralashish chegaraviy me'yor.}$$

Keynes multiplikatori

Davlat sektori va xalqaro savdo o'rganilganda, asosiy Keynes makroiqtisodiy modeli o'ziga xos hisob hisoblanadi.

$$Y = C + I + G + X - M \quad (1)$$

Iste'mol funksiyaning funksional munosabatlari

$$C = cY_d \quad (2)$$

bu yerda c istemol uchun marjinal moillik va

$$M = mY_d \quad (3)$$

bu yerda M import miqdori va m import uchun marjinal moillik va

$$Y_d = (1-t)Y \quad (4)$$

bu yerda Y birlamchi daromad va t – to'lovor miqdori, I investitsiya, G hukumat xarajatlari va X eksport - qat'iy belgilangan va C, m, t – berilgan parametrlar.

(2),(3) va (4) ni (1) ga qo'yib quyidagini olamiz

$$\begin{aligned} Y &= c(1-t)Y + I + G + X - m(1-t)Y \\ Y[1 - c(1-t) + m(1-t)] &= I + G + X \\ Y &= \frac{I + G + X}{1 - c(1-t) + m(1-t)} = \frac{I + G + X}{1 - (c-m)(1-t)} \quad (5) \end{aligned}$$

G va X mavjud bo'lmagan holda, Keynesning asosiy modeli investitsiya moyillik darajasini dY/dI bo'ladi. Ammo, investitsiya darajasini keltirib chiqarish uchun ko'rilgan modelda G va X o'zgaras deb tasavur qilaylik. Shunda investitsiya darajasini (1) bo'yicha xususiy hosila olish orqali topiladi. Demak,

$$\frac{\partial Y}{\partial I} = \frac{1}{1 - (c-m)(1-t)}$$

Bundan tashqari davlat xarajatlari va eksport xajmi quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\partial Y}{\partial I} = \frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1}{1 - (c-m)(1-t)}$$

Misol.

$$Y = C + I + G + X - M$$

$$C = 0.8Y_d \quad M = 0.2Y_d \quad Y_d = (1-t)Y$$

$$t = 0.2 \quad G = 400 \quad I = 300 \quad X = 288$$

Keynesning makroiqtisodiy tizimga ko'ra Y ning ko'rinishi qanday bo'ladi? Y qiymatini 2500 gacha oshirish uchun G ni qanchaga oshirish kerak? Xarajatlar oshganda davlat budjeti qay tarafda o'zgaradi (profitsit yoki difitsit)? To'lovlar balansichi?

Yechish. C va Y orasida bogliqlikni aniqlaylik.

$$C = 0.8Y_d = 0.8(1-t)Y = 0.8(1-0.2)Y \quad (1)$$

Keyin Y topish uchun biz (1) dagi va boshqa funksional bogliqliklardan

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G + X - M \\ &= 0.8(1-0.2)Y + 300 + 400 + 288 - 0.2(1-0.2)Y \\ &= 0.64Y + 988 - 0.16Y \\ (1-0.48)Y &= 988 \end{aligned}$$

$$Y = \frac{988}{0.52} = 1.900$$

Soliqning umumiy darajasi quyidagicha $tY = 0.2(1.900) = 380$

Ko'tarilgan soliqning hajmidan oshib borayotgan davlat xarajatining ortiqligi ya'ni budget difitsiti : $G - tY = 400 - 380 = 20$

Importga sarflangan hajm: $M = 0.2Y_d = 0.2(0.8Y) = 0.16 \times 1.900 = 304$

va to'lovlar balansi: $X - M = 288 - 304 = -16$ - defitsit 16 ga teng.

Davlat xarajatlari miqdori

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial G} &= \frac{1}{1 - (c - m)(1 - t)} = \frac{1}{1 - (0.8 - 0.2)(1 - 0.2)} \\ &= \frac{1}{1 - (0.6)(0.8)} = \frac{1}{1 - 0.48} = \frac{1}{0.52}\end{aligned}\quad (2)$$

Y 1900 bo'lganda, talab qilingan 2500 miqdorga yetish uchun Y ning osishi:

$$\Delta Y = 2.500 - 1.900 = 600 \quad (3)$$

Bundan, Y darajasiga ta'sir doim

$$\Delta G \frac{\partial Y}{\partial G} = \Delta Y \quad (4)$$

ΔG davlat xarajatlaridagi o'zgarish bo'lganda, (2) va (3) ni (4) ga qo'yib:

$$\Delta G \frac{1}{0.52} = 600 \quad \Delta G = 600(0.52) = 312$$

Bu Y 2500 ga ko'tarishdag talab qilingan G ning o'sishini anglatadi. Milliy daromadning yangi bosqichida ko'payuvchi soliq miqdori esa:

$$tY = 0.2(2.500) = 500$$

Yangi davlat xarajatlari darajasi 312 ni o'z ichiga olib quyidagicha bo'ladi: $400 + 312 = 712$

Shunday qilib, budget difitsiti quyidagicha bo'ladi: $Q - tY = 712 - 500 = 212$

Importning yangi darajasi $M = 0.2(0.8)2.500 = 400$

va to'lovlarning yangi balansi $X - M = 288 - 400 = -112$.

Chunki difitsit 96 miqdorga o'sadi.

7-MAVZU. BIR VA KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING INTEGRAL HISOBI

1-mashg'ulot

7.1.1. Aniqmas integral

7.1.2. Aniqmas integralni integrallash usullari

7.1.3. Aniqmas integrallar jadvali

7.1.4. Bo'laklab integrallash

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: bahs-munozara, ma'ruza, muammoli masala va vaziyatlar.

7.1.1. Aniqmas integral

Ta'rif. Agar barcha $x \in (a, b)$ lar uchun $F'(x) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a, b) intervalda $f(x)$ funksiyaga boshlang'ich funksiya deyiladi.

Masalan. $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda $f(x) = x$ funksiya uchun

boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$ tenglik barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ lar uchun o'rinlidir.

Ta'rif. $f(x)$ funksiyaning (a, b) intervaldagi barcha boshlang'ich funksiyalari $\int f(x)dx$ ko'rinishda belgilanib, bu ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deb ataladi. Bu yerda $f(x)$ integral osti funksiyasi, $f(x)dx$ - integral ostidagi ifoda deb ataladi. Bu tenglik $\int f(x)dx = F(x) + C$ kabi ifoda etiladi.

7.1.2. Aniqmas integralni integrallash usullari

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C$
4. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$
5. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Masalan. Integralni hisoblang: $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$.

Yechish. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right) dx = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

7.1.3. Aniqmas integrallar jadvali

1. $\int 0 dx = C$	7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad \int e^x dx = e^x + c$
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + c$	8. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$	9. $\int \cos x dx = \sin x + c$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + c$	10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$
5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$	11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + c$	

Ko'p uchraydigan integrallar

$$1). \int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + \tilde{n}, \quad (x-a=t);$$

$$2). \int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + c = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + c,$$

$m \neq 1$;

$$3). \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + \tilde{N}, \quad a > 0, \quad \left(\frac{x}{a} = t\right)$$

$$4). \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left(\frac{x}{a} = t\right) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \tilde{n}$$

$$5). \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0$$

$$6). \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + \tilde{N}$$

$$7). \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + \tilde{N}$$

$$8. \Im_m = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^m}, \Im_{m+1} = \frac{x}{2a^2 m (x^2 + a^2)^m} + \frac{2m-1}{2a^2 m} \Im_m$$

7.1.4. Bo'laklab integrallash

Quyidagi, bo'laklab integrallash formulasi deb nomlanuvchi formula o'rinli bo'ladi:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Masalan. Integralni hisoblang: $\int x \cdot e^{-5x} dx$.

Yechish. $u = x$ va $dv = e^{-5x} dx$ deb olamiz, u holda

$$\int x e^{-5x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^{-5x} dx, \quad v = \int e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} e^{-5x} \end{array} \right\} = -\frac{x}{5} e^{-5x} - \frac{1}{25} e^{-5x} + C.$$

2-mashg'ulot

7.2.1. Kasr-ratsional funksiyarni integrallash

7.2.2. Trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash

7.2.3. Ba'zi algebraik irratsionalliklarni integrallash

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: namoyish, ma'ruza, pinbord.

7.2.1. Kasr-ratsional funksiyarni integrallash

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - qisqarmaydigan to'g'ri kasrning aniqmas integrali uchun ushbu tenglikni yoza olamiz:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \frac{1}{a} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{k_i} \int \frac{A_{it}}{(x-a_i)^t} dx + \sum_{j=1}^s \sum_{\ell=1}^{m_j} \int \frac{B_{j\ell} x + C_{j\ell}}{(x^2 + p_j x + q_j)^\ell} dx \right)$$

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ uchun (3) tenglikdagi A_{it} , $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ larning qiymatlarini topish uchun noma'lum koeffitsientlar usulidan foydalanamiz. (3)- tenglikning o'ng ta'rafidagi kasrlarni umumiy maxrajga keltirsak, bu maxraj $Q_m(x)$ ga teng bo'lib, uning suratida A_{it} , $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ koeffitsientlar qatnashgan, darajasi $Q_m(x)$ ning darajasidan oshmaydigan $\tilde{P}_n(x)$ polinomni hosil qilamiz. Agar biz (3)- tenglikni ayniyat deb qarasak tenglikning ikki tarafidagi maxrajlar bir xil, ya'ni $Q_m(x)$ bo'lgani sababli, $P_n \equiv \tilde{P}_n(x)$ ayniyatni hosil qilamiz. Bu ayniyatda x larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirish natijasida A_{it} , $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ noma'lum koeffitsientlar uchun chiziqli tenglamalar

sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib, (3) ayniyatdagi A_{it} , $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ larning qiymatlarini topamiz.

Masalan. Integralni hisoblang $\int \frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} dx$

Yechish. Noma'lum koeffitsientlar usuliga ko'ra, quyidagi ayniyatni yoza olamiz

$$\frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Bu tenglikning o'ng tarafini umumiy maxrajga keltirib, so'ngra maxrajini tashlab yuborish natijasida, quyidagi ayniyatni hosil qilamiz:

$$3x^2 + x + 3 = A_1 \cdot (x-1)^2(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + A_3(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)^3.$$

Demak,

$$3x^2 + x + 3 = (A_1 + B)x^4 + (-2A_1 + A_2 - 3B + C)x^3 + (2A_1 - A_2 + A_3 + 3B - 3C)x^2 + (-2A_1 - B + 3C)x + (A_1 - A_2 + A_3 - C).$$

Bu ayniyatdagi x larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A_1 + B = 0 \\ -2A_1 + A_2 - 3B + C = 0 \\ 2A_1 - A_2 + A_3 + 3B - 3C = 3 \\ -2A_1 - B + 3C = 1 \\ A_1 - A_2 + A_3 - C = 3 \end{cases}$$

Bu sistemani Gauss yechib $A_1 = -\frac{1}{4}$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{7}{2}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4}$ ekanligini

hosil qilamiz, ya'ni $\frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} = -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{7}{2(x-1)^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{x^2+1}.$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{1}{4} \int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(-2)(x-1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{8} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{4} \arctg x + C = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{7}{4(x-1)^2} + \frac{1}{8} \ln(x^2+1) + \frac{1}{4} \arctg x + C = \\ &= \frac{1}{8} \ln \frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \arctg x + C \end{aligned}$$

7.2.2. Trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash

$R(u, v)$ -ifoda u va v o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi bo'lsin. $\int R(\sin x, \cos x) dx$

integralni hisoblaylik. Bunday integralda $t = \tg \frac{x}{2}$ universal almashtirishni bajarib

$R(\sin x, \cos x) dx$ ifodani t -o'zgaruvchining ratsional ifodasiga olib kelish mumkin.

Haqiqatan

ham

$$\sin x = \frac{2t \frac{\tilde{o}}{2}}{1 + tg^2 \frac{\tilde{o}}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{\tilde{o}}{2}}{1 + tg^2 \frac{\tilde{o}}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad \tilde{o} = 2 \arctg t, \quad dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt$$

bo'lgani uchun

bu yerda $R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{1}{1+t^2}$ ifoda $-t$ ning ratsional funksiyasi bo'lgani uchun, ushbu

integralni hisoblab, t ning o'rniga $tg \frac{x}{2}$ ni qo'yib, dastlabki integralni topamiz.

Masalan. Integralni hisoblang $\int \frac{\sqrt{\tilde{o}}}{(1+\sqrt[3]{\tilde{o}})^2} dx = \int \tilde{o}^{\frac{1}{2}} \left(1 + \tilde{o}^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} dx \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$

Yechish. $t = tg \frac{x}{2}$ almashtirishdan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} &= \int \frac{2}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2} = \\ &= \int \frac{2dt}{6t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \int \frac{dt}{3\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d\left(t + \frac{1}{3}\right)}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \arctg \frac{t + \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{3tg \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C \end{aligned}$$

Xususiylar

Agar $R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, integralda $\cos x = t$, agar $R(\sin x - \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, $\sin x = t$ almashtirishni bajarish mumkin.

Agar $R(-\sin x - \cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, $tg x = t$ almashtirishni bajarish orqali integralni ratsional funksiyani integrallashga olib kelsa bo'ladi.

7.2.3. Ba'zi algebraik irratsionalliklarni integrallash

Irratsional ifodalarda o'zgaruvchi qandaydir darajadagi ildiz ostida qatnashishini eslatib o'tamiz.

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

Ikki o'zgaruvchili $R(u, v)$ ratsional funksiya uchun ushbu

aniqmas integralni, a, b, c va d lar haqiqiy sonlar bo'lib, $ad - bc \neq 0$ va m - natural son bo'lgan holda qanday hisoblash mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{yangi o'zgaruvchi kiritsak,} \quad x = \varphi(t) = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} \quad \text{va}$$

$$dx = \varphi'(t)dt = \frac{(ad-bc) \cdot m \cdot t^{m-1}}{(a-ct^m)^2} dt$$

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R(\varphi(t), t) \varphi'(t) dt$$

Bundan

tenglikni hosil qilamiz.

Masalan. Integralni hisoblang

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})} = \int \frac{dx}{x\left[\left(\sqrt[10]{x}\right)^5 + \left(\sqrt[10]{x}\right)^4\right]}$$

Yechish. Bu yerda $\sqrt[10]{x} = t$ deb, yangi o'zgaruvchi kiritamiz. Demak, $x = t^{10}$ va $dx = 10t^9 dt$

$$\int \frac{dx}{x\left[\left(\sqrt[10]{x}\right)^5 + \left(\sqrt[10]{x}\right)^4\right]} = \int \frac{10 \cdot t^9 dt}{t^{10}(t^5 + t^4)} = 10 \int \frac{dt}{t^5(t+1)}$$

bo'lgani uchun,

$$\frac{1}{t^5(t+1)} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \frac{A_3}{t^3} + \frac{A_4}{t^4} + \frac{A_5}{t^5} + \frac{A_6}{t+1}$$

Noma'lum koeffitsientlar usuliga ko'ra

$$1 = A_1 t^4(t+1) + A_2 t^3(t+1) + A_3 t^2(t+1) + A_4 t \cdot (t+1) + A_5(t+1) + A_6 \cdot t^5 =$$

$$(A_1 + A_6)t^5 + (A_1 + A_2)t^4 + (A_2 + A_3)t^3 + (A_3 + A_4)t^2 + (A_4 + A_5)t + A_5$$

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 va A_6 koeffitsientlar uchun quyidagi tenglamalar sistemasi kelib chiqadi

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_1 + \dot{A}_6 &= 0 \\ \dot{A}_1 + \dot{A}_2 &= 0 \\ \dot{A}_2 + \dot{A}_3 &= 0 \\ \dot{A}_3 + \dot{A}_4 &= 0 \\ \dot{A}_4 + \dot{A}_5 &= 0 \\ \dot{A}_5 &= 1 \end{aligned} \right\}, \text{ ya'ni } \dot{A}_5 = 1, \dot{A}_4 = -1, \dot{A}_3 = 1, \dot{A}_2 = -1, \dot{A}_1 = 1, \dot{A}_6 = -1$$

Demak,

$$10 \int \frac{dt}{t^5(t+1)} = 10 \left(\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^5} - \int \frac{dt}{t+1} \right) =$$

$$= 10 \left[\ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{4t^4} \right] + C$$

u holda, $t = \sqrt[10]{x}$ ekanligini e'tiborga olsak

$$\int \frac{dx}{\tilde{o}(\sqrt{\tilde{o}} + \sqrt[5]{x^2})} = \ln \frac{|\tilde{o}|}{(1 + \sqrt[10]{\tilde{o}})^{10}} + \frac{10}{\sqrt[10]{\tilde{o}}} - \frac{5}{\sqrt[5]{\tilde{o}}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{\tilde{o}^3}} - \frac{5}{2\sqrt[5]{\tilde{o}^2}} + \tilde{N}$$

Eyler almashtirishlari

$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda Eyler almashtirishlari deb nomlanuvchi almashtirishlar qo'llaniladi. Bular quyidagilardan iborat:

1-hol. Agar $a > 0$ bo'lsa, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a} \cdot x$.

2-hol. Agar $c > 0$ bo'lsa, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$.

3-hol. Agar $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}$ bo'lsa, $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t \cdot (x-x_1)$.

Masalan. Integralni hisoblang

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Yechish. 1-holga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x \Rightarrow x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1},$$

$$dx = \frac{2t(2t+1) - 2 \cdot (t^2 - 1)}{(2t+1)^2} dt = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(2t+1)^2} dt$$

Bundan,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \int \frac{2(t^2 + t + 1)}{t \cdot (2t + 1)^2} dt = \frac{3}{2(2t + 1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{|2t + 1|} + C = \\ &= \frac{3}{2(2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x + \sqrt{x^2 + x + 1})^4}{|2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 1|} + C \end{aligned}$$

3-mashg'ulot

7.3.1. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

7.3.2. Aniq integral

7.3.3. N'yuton-Leybnits formulasi

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: tushuntirish, ko'rsatish, so'rov.

7.3.1. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

Yuqoridan manfiy bo'lmagan $y = f(x)$ funksiya bilan, quyidan OX o'q, yon tomonlardan $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblash masalasini qaraymiz. Buning uchun $[a, b]$ oraliqni $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ nuqtalar bilan, $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, kichik oraliqlarga bo'lamiz. Har bir oraliqdan biron-bir $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ nuqta olib, $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, belgilash kiritib, quyidagi yig'indini tuzib olamiz.

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Bu yig'indida $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ qo'shiluvchini biz qaralayotgan figuraning $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos keluvchi bo'lagining yuzasini, balandligi $f(\xi_i)$ va asosi Δx_i ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yuzasiga taqriban teng deb qarash, u holda yuqoridagi yig'indini biz egri chiziqli trapetsiya yuzasining taqribiy qiymati deb qarashimiz mumkin:

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Agar taqribiy tenglikdagi xatolikni kamaytirmoqchi bo'lsak, $[x_i, x_{i+1}]$ kesmalar uzunliklarini, ya'ni Δx_i larni yetarlicha kichik qilib olishimiz kerak. Buning uchun

oraliqni bo'luvchi nuqtalar soni n ni shunday oshira borishimiz kerakki, $n \rightarrow \infty$ da $\max_{0 \leq i \leq n-1} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ bo'lsin.

Demak, $\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ limitda qidirilayotgan egri chiziqli trapetsiya yuzini hosil

qilamizi
$$S = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$
.

7.3.2. Aniq integral

Ta'rif. $[a, b]$ oraliqda berilgan $y = f(x)$ uchun, shu oraliqni kichik bo'lakchalarga bo'luvchi $a = x_0 < x_1, \dots, x_n = b$ va $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ nuqtalar uchun $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ yig'indi integral yig'indi deb ataladi.

Ta'rif. $[a, b]$ oraliqda berilgan $y = f(x)$ funksiya uchun $\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ da $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ integral yig'indining chekli limiti mavjud bo'lib, bu limit bo'linish nuqtalari $x_0, x_1, \dots, x_n$ va oraliqlardan olinayotgan $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ nuqtalarga bog'liq bo'lmasa, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi va limitning qiymati uning aniq integrali deyilib, bu limit quyidagicha belgilanadi:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ - integral ostidagi ifoda, a - integralning quyi chegarasi, b - integralning yuqori chegarasi deyiladi.

$\int_a^b f(x) dx$ integral qiymatini topish $f(x)$ funksiyani $[a, b]$ oraliqda integrallash deb ataladi.

Masalan. Integralni ta'rif yordamida hisoblang $\int_0^1 x^2 dx$.

Yechish. $[0; 1]$ kesmani n ta teng qismlarga bo'lamiz, u holda har bir oraliq uzunligi $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ va har bir oraliqdan $\xi_k = x_k$ nuqtalarni tanlaymiz. Bu holda quyidagiga ega

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, x_3 = \frac{3}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1,$$

bo'lamiz:

$$f(\xi_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2, f(\xi_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, f(\xi_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2; f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

Demak,

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} = \frac{1}{3}.$$

Aniq integralning xossalari

$$1. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$2. \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$3. \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$4. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

5. Agar $a < b$ bo'lib, $[a, b]$ oraliqda $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Xususan, $[a, b]$ oraliqda $m \leq f(x) \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Teorema. (Aniq integral mavjudligining yetarli sharti). Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu funksiya shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu oraliqda chegaralangan bo'ladi.

Teorema. (O'rta qiymat haqidagi teorema). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ ($a < b$) oraliqda integrallanuvchi bo'lib, bu oraliqda $m \leq f(x) \leq M$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda shunday μ son mavjudki, uning uchun $m \leq \mu \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lib,

$$\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b-a)$$

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin, u holda istalgan $x \in [a, b]$ uchun, $f(x)$ funksiya $[a, x]$ oraliqda ham integrallanuvchi bo'ladi. Shuning uchun $[a, b]$ oraliqda

$$\hat{O}(x) = \int_a^x f(t) dt$$

berilgan quyidagi funksiyaning aniq qiyamati:

Teorema. $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun $\Phi(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'ladi.

7.3.3. Nyuton-Leybnits formulasi

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda $\Phi(x)$ funksiya (a, b) intervalda $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, ya'ni (a, b) intervalda $\Phi'(x) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Teorema. (Nyuton-Leybnits formulasi) $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib, $F(x)$ uning istalgan boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, u holda

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Masalan. Integralni hisoblang $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$, ($ab \neq 0$).

Yechish. $\int_a^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_a^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{b-a}{ab}$, ($ab \neq 0$).

4-mashg'ulot

7.4.1. Aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash

7.4.2. Yassi shakl yuzalarini hisoblash

7.4.3. Aylanish jismlarining hajmlarini hisoblash

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, ko'rsatish, so'rov.

7.4.1. Aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash

Teorema. (Yangi o'zgaruvchi kiritib integrallash). Agar $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ oraliqda uzluksiz hosilaga ega bo'lib, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ bo'lsa, $[a, b]$ oraliqda uzluksiz

bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$
 tenglik o'rinlidir.

Teorema. (Bo'laklab integrallash usuli). $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Masalan. Integralni hisoblang $\int_0^1 x e^{-x} dx$.

Yechish. Integralni hisoblash uchun bo'laklab integrallash usulidan

foydalanamiz, bunda
$$\left. \begin{aligned} u &= x \\ dv &= e^{-x} dx \\ du &= dx \\ v &= -e^{-x} \end{aligned} \right\} . U$$
 holda

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

7.4.2. Yassi shakl yuzalarini hisoblash

$[a, b]$ oraliqda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz bo'lib, $g(x) \leq f(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar hamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiya grafiklari bilan chegaralangan S -yuzani hisoblash uchun, quyidagi formula o'rinlidir:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Agar egri chiziqli trapetsiya Oy o'qqa yopishgan bo'lib, u o'ngdan $x = x(y) > 0$, quyidan $y = y_1$ va yuqoridan $y = y_2$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, u holda bu egri chiziqli trapetsiya yuzi quyidagi formula yordamida hisoblanadi:
$$S = \int_{y_1}^{y_2} x(y) dy.$$

Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziqli sektor yuzi quyidagi formula yordamida hisoblanadi:
$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Egri chiziqli yoy uzunligini hisoblash

1. $y = f(x)$ egri chiziq AB yoyining uzunligi quyidagi formula yordamida

hisoblanadi:
$$l = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

2. $x = f(t), y = \varphi(t)$ egri chiziq AB yoyining uzunligi quyidagi formula yordamida

hisoblanadi:
$$l = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

3. $r = r(\varphi)$ egri chiziq AB yoyining uzunligi quyidagi formula yordamida

hisoblanadi:
$$l = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

7.4.3. Aylanish jismlarining hajmlarini hisoblash

$[a, b]$ oraliqda $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lib, $f(x) \geq 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Biz $y = f(x)$ funksiya grafigini OX o'q atrofida aylanitirishdan, hamda $OXYZ$ fazodagi $x=a$ va $x=b$ tekisliklar bilan chegaralangan aylanma jismning V hajmi quyidagi

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

formulayordamida hisoblanadi:

Oy o'qqa yopishgan egri chiziqli trapetsiyaning Oy o'q atrofida aylanishidan hosil bop'lgan jismning hajmi quyidagi formulayordamida hisoblanadi:

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2(y) dy.$$

5-mashg'ulot

7.5.1. Xosmas integrallar

7.5.2. Taqqoslash usuli

7.5.3. Ikki va uch karrali integrallar

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, ko'rsatish, bahs-munozara.

7.5.1. Xosmas integrallar

Ta'rif. $f(x)$ funksiyaning $[a, +\infty)$ oraliqdagi xos bo'lmagan $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integrali

deb ushbu $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t)$ limitga aytiladi, ya'ni:
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Agar bu limit mavjud va chekli bo'lsa, xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

$(-\infty, +\infty)$ cheksiz oraliqdagi xos bo'lmagan integral esa quyidagicha aniqlanadi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

$y = f(x)$ funksiya $[a, b)$ yarim ochiq oraliqda uzluksiz bo'lib, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$ bo'lsin.

Ta'rif. $\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$ limit qiymati $y = f(x)$ funksiyaning $[a, b)$ yarim ochiq

oraliqdagi xos bo'lmagan integrali deyiladi. Agar bu limit mavjud va chekli bo'lsa, xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyilad:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$$

Masalan. Integralni hisoblang: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Yechish.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \arctg x \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b - \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg a = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

7.5.2. Taqqoslash usuli

Xosmas integrallarning yaqinlashishi ko'pincha taqqoslash usuli yordamida soda hisoblanadi.

Agar $x > a$ bo'lganda $|f(x)| \leq |\varphi(x)|$ o'rinli bo'lsa va $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $x > a$ bo'lganda $|f(x)| \leq |\varphi(x)|$ o'rinli bo'lsa va $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ xosmas integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

7.5.3. Ikki va uch karrali integrallar

Ikki karrali integrallar

Oxy tekislikda L chiziq bilan chegaralangan D sohada uzluksiz $z = f(x, y)$ funksiya berilgan bo'lsin.

D sohani ixtiyoriy chiziqlar bilan n ta bo'laklarga bo'lamiz va bo'lakchalarning yuzalarini $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ orqali belgilaymiz. Har bir Δs_i yuzalardan p_i nuqtalarni tanlaymiz.

$z = f(x, y)$ funksiyaning shu p_i nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$f(p_1), f(p_2), \dots, f(p_n)$.

$$V_n = f(p_1)\Delta s_1 + f(p_2)\Delta s_2 + \dots + f(p_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta s_i \quad (1)$$

yug'indiga $z = f(x, y)$ funksiyaning D sohadagi integral yig'indisi deyiladi.

Agar D sohada $f(x, y) \geq 0$ bo'lsa, u holda har bir $f(p_i)\Delta s_i$ qo'shiluvchini, geometrik jihatdan asosi Δs_i va balandligi $f(p_i)$ bo'lgan silindrning hajmi deb qarash mumkin.

Berilgan D soha uchun $f(x, y)$ fuksiya yordamida tuzilgan integral yig'indining D sohani Δs_i bo'laklarga turli usullarda bo'lishdan hosil bo'lgan ixtiyoriy $V_{n_1}, V_{n_2}, \dots, V_{n_k}, \dots$ (2) ketma-ketlikni qaraymiz.

Teorema. Agar $f(x, y)$ fuksiya yopiq D sohada uzluksiz va $n \rightarrow \infty$ da Δs_i yuzalarning maksimal diametri nolga intilsa, (1) itegral yig'indidan hosil bo'lgan (2) ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lib, u sohaning bo'linish usuli va p_i nuqtalarni tanlanishiga bog'liq emas.

Bu limit $f(x, y)$ fuksiyaning D soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integrali deyiladi va $\iint_D f(P)ds$ yoki $\iint_D f(x, y)dxdy$ kabi belgilanadi.

$$\text{Demak, } \iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta s_i.$$

D - integrallash sohasi deyiladi.

1. $\iint_D [f(x, y) \pm \varphi(x, y)]dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy \pm \iint_D \varphi(x, y)dxdy.$
2. $D = D_1 \cup D_2, \iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy.$
3. $\iint_D kf(x, y)dxdy = k \iint_D f(x, y)dxdy.$

D sohaning ichki nuqtasidan koordinata o'qlariga parallel o'tuvchi to'g'ri chiziq uni ikki nuqtada kessa, u holda D soha qavariq deyiladi.

$$D = \{a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Ta'rif. $I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx$ - $f(x, y)$ fuksiyaning D soha bo'yicha olingan

ikki karrali integrali deyiladi. Bu integralni hisoblash uchun x ni o'zgarmas deb, qavs ichini y bo'yicha integrallaymiz. Natijada x ning funksiyasini hosil

qilamiz: $R(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$. Bu funksiyani x bo'yicha a dan b gacha integrallab

$$I_D = \int_a^b R(x)dx \text{ ikki karrali integralning son qiymatini hosil qilamiz.}$$

Masalan. Ikki karrali integralni hisoblang. $I_D = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2)dy \right) dx.$

Yechish. $R(x) = \int_0^{x^2} (x^2 + y^2)dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{x^2} = x^4 + \frac{x^6}{3}. I_D = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}.$

Teorema. Uzluksiz $f(x, y)$ fuksiyaning D qavariq soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli itegrali shu soha bo'yicha bu funksiyaning ikki karrali integraliga

$$\text{teng: } \iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

$$D = \{\psi_1(x) \leq x \leq \psi_2(x), c \leq y \leq d\} \text{ bo'lsa, u holda}$$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)dx \right) dy.$$

Ikki karrali integralning tadbiqlari

1. $z = f(x, y)$ sirt, $z=0$ tekislik va yasovchisi Oz o'qiga parallel bo'lgan jism halmi

$$V = \iint_D f(P) ds.$$

2. Tekis sohaning uyzi. $f(x, y) = 1$ deb, $S = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx.$

Uch karrali integrallar

Fazoda S yopiq sirt bilan chegaralangan V soha berilgan bo'lib, uning chegarasida $f(x, y, z)$ uzluksiz funksiya aniqlangan bo'lsin. V sohani ixtiyoriy $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$ sohalarga bo'lamiz va bo'lakchalarning har biridan P_i nuqtalarni tanlaymiz hamda

$f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$ larni hisoblaymiz.

$$V_n = f(P_1)\Delta v_1 + f(P_2)\Delta v_2 + \dots + f(P_n)\Delta v_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta v_i \quad (1)$$

integral yig'indi deyiladi.

Ta'rif. Agar (1) ketma-ketlikning $\max \Delta v_i \rightarrow 0$ dagi limiti mavjud bo'lib, u V sohaning bo'lish usuli va P_i nuqtaning tanlanishiga bog'liq bo'lmasa, u holda shu limitga

$f(x, y, z)$ funksiyaning V soha bo'yicha uch o'lchovli integrali deyiladi va

$\iiint_V f(P) dv$ kabi belgilanadi.

$$\text{Demak, } \iiint_V f(P) dv = \lim_{\max \Delta v_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta v_i \text{ yoki } \iiint_V f(P) dv = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

V sohaning Oxy tekislikdagi proeksiyasi D bo'lib,

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \text{ bo'lsin.}$$

$f(x, y, z)$ uzluksiz funksiyaning V soha bo'yicha ikki karrali integrali deb quyidagi integralga aytiladi:

$$I_V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right) dx.$$

Z bo'yicha integrallash va katta qavs ichidagi ifodalarning chegaralarini qo'yib, x va y ning funksiyalari hosil bo'ladi. So'ngra hosil bo'lgan ikki o'lchovli integral D soha bo'yicha hisoblanadi.

Masalan. $V : x=0, y=0, x+y+z=1$ - tekisliklar bilan chegaralangan soha.

$$\iiint_V xyz dx dy dz = ?$$

Yechish. V - qavariq soha bo'lib, u yuqoridan $z=0$, quyidan $z=1-x-y$ tekisliklar bilan chegaralangan. Uning Oxy tekislikdagi proeksiyasi $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}.$

Demak,

$$I_V = \iiint_D \left(\int_0^{1-x-y} xyz dz \right) dv = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} xyz dz \right] dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{xyz^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{xy}{2} [1-x-y]^2 dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{24} (1-x)^4 dx = \frac{1}{720}.$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right) dx$$

bu yerda $\psi_1(x, y)$ va $\psi_2(x, y)$ - V sohani ostidan va ustidan chegaralovchi sirtlar, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ chiziqlar esa V sohaning Oxy tekislikdagi proeksiyasi bo'lgan D sohani chegaralovchi chiziqlardir.

Uch karrali integral yordamida jism hajmini hisoblash.

Agar $f(x, y, z) = 1$ bo'lsa, u holda V soha bo'yicha olingan uch karrali integral V sohaning hajmini ifodalaydi: $V = \iiint_V dx dy dz$.

6- mashg'ulot

7.6.1. Integral hisobning iqtisodiyotdagi tadbirlari

7.6.2. Daromadning notekis taqsimoti koeffisienti

7.6.3. Zahiralarini boshqarishda Vilson modeli

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: ma'ruza, hikoya, namoyish.

7.6.1. Integral hisobning iqtisodiyotdagi tadbirlari

Aniq integralning bu tushunchasi iqtisodiyotda bir necha qo'llanishga ega. Ushbu mahsulot qiymati TVC funksiyani baholash uchun, har biri TVC funksiyasiga almashtiriladi. Bu nol va ushbu miqdor orasidagi aniq integralni baholashga mos keladi.

Masalan, TVC qiymatni topish kerak deb taxmin qilaylik. $q = 8$ bo'lib, $MC = 7.5 + 0.3q^2$ funksiya berilgan bo'lsa, bu qiymat quyidagiga teng bo'ladi:

$$\int_0^8 (7.5 + 0.3q^2) dq = \left[7.5q + 0.1q^3 \right]_0^8 = 60 + 51.2 = 111.2$$

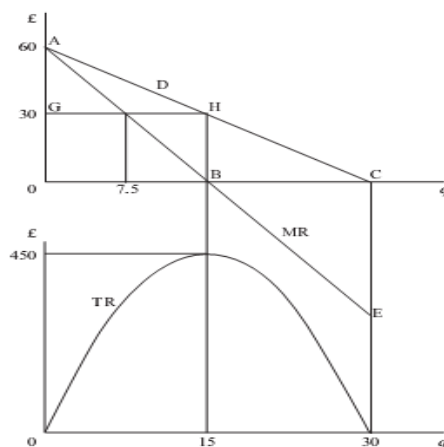
Shuning uchun TVC nol va ushbu miqdor o'rtasidagi MC grafikka mos holda sohaga teng.

Ikki miqdor o'rtasida TVCning oshishi ushbu miqdorlar orasidagi tegishli MC grafikka ko'ra sohaga teng ekanini ko'rish mumkin.

Yakuniy daromad funksiyalarining aniq integrallari

Chiziqli talab grafigi $= 60 - 2q$ va chiziqli yakuniy daromad $MR = 60 - 4q$ bo'lsin.

Umumiy daromadning tegishli grafigi $TR = 60q - 2q^2$ diagrammaning quyiroq qismida ko'rsatilgan. $MR = 60 - 4q = 0$, $q = 15$ bo'lganda uning maksimumidagi umumiy daromadni tashkil etadi.



Shunig uchun

$$p = 60 - 2(15) = 30$$

Shunday qilib, maksimal qiymat $TR - pq = 450$. Chiziqli talab va oxirgi daromad grafiklarini hisobga olgan holda TR 0 dan 450 gacha oshadi, bunda q 0 dan 15 gacha bo'lganda, so'ngra 0 ga qaytganda q 15 dan 30 gacha oshadi. Bu o'zgarishlar TR da bu miqdor doirasi bo'yicha muayyan integrallar qimmatiga mos kelib, MR grafigi va miqdor o'qi orasidagi soha orqali tasvirlangan. q 15ga teng bo'lganda TR 0AB sohasiga teng bo'lib, u quyidagicha ifodalangan:

$$\int_0^{15} MR dq = \int_0^{15} (60 - 4q) dq = \left[60q - 2q^2 \right]_0^{15} = 900 - 450 = 450$$

q 15dan 30 gacha jshganda TR dagi o'zgarish BCE sohasi bilan "manfiy" bo'lib, u MR grafigidan yuqori va miqdor o'qidan pastda joylashadi. Bu quyidagiga teng bo'ladi

$$\int_{15}^{30} MR dq = \int_{15}^{30} (60 - 4q) dq = \left[60q - 2q^2 \right]_{15}^{30} = (1,800 - 1,800) - (900 - 450) = -450$$

Bu dastlabki baholash bilan tekshiriladi. Umumiy daromadni 450ga oshirish va bir xil miqdorda tomonidan tushadi. Nihoyat, 0-30 mahsulot doirasi bo'yicha MR funksiyasining aniq integralida nima sodir bo'lishini ko'rib chiqaylik:

$$\int_0^{30} MR dq = \int_0^{30} (60 - 4q) dq = \left[60q - 2q^2 \right]_0^{30} = 1,800 - 1,800 = 0$$

Agar q 30ga teng bo'lsa, manfiy soha BCE nolli TR ni bergan holda musbat soha 0ABga aniq muvozanatlidir.

Diskontlash

p foizli stavka bilan ma'lum t vaqtdan so'ng olingan summa oxirgi qiymati bo'yicha dastlabki qo'yilgan jamg'armani aniqlash diskontlash deyiladi.

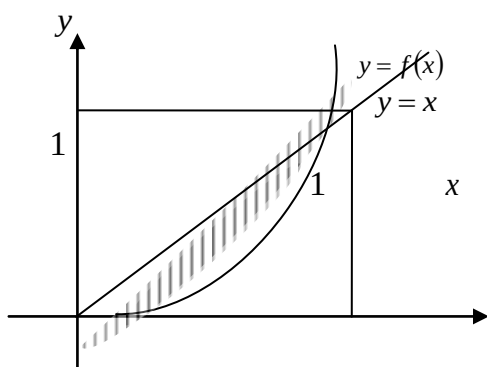
$f(t)$ t vaqt bo'yicha o'zgaruvchi foydani aniqlovchi funksiya bo'lib, nisbiy foiz normasi $i = \frac{p}{100}$ va foizlar uzluksiz qo'shib hisoblansin. Bu holda T vaqt davomidagi

diskontlash K foyda quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:
$$K = \int_0^T f(t) e^{-it} dt$$

7.6.2. Daromadning notekis taqsimoti koeffisienti

$y = f(x)$ funksiyasini qaraymiz, bunda y – bu umumiy daromadning X kam ta'minlangan aholi oladigan ulushi. Masalan, $y(0.8) = 06$ tenglik umumiy daromadning

60 %ini, 80% kam ta'minlangan aholi oladi. Tabiiyki, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $y \leq x$. $y(0)=0$ ya'ni nol daromadli aholi yo'q va $y(1)=1$ ya'ni butun daromad butun aholidan undiriladi.



Rasmda $y = f(x)$ funksiya grafigi keltirilgan. U Lorenus egri chizig'i deyiladi. Agar daromad taqsimoti mukammal bo'lsa, u holda umumiy daromadning 10%ini 10% aholi olgan 20%i 20% aholi va h.k. bo'lardi.

Bu holda daromad taqsimoti $y = x$ egri chiziq bo'lardi.

Haqiqiy daromad taqsimotining ideal taqsimotdan og'ishi $y = x$ va $y = f(x)$ Lorens chizig'i bilan chegaralan-

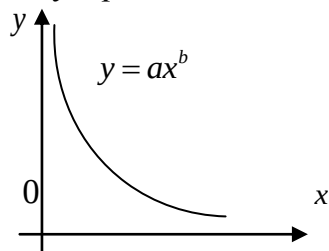
gan soha yuzi L ning $y = x$, $x = 0$ va $x = 1$ chiziqlar bilan chegaralangan soha yuziga nisbati bilan o'lchanadi va L odatda daromadning notekis taqsimoti koeffisienti deyiladi.

$0 \leq L \leq 1$ ekanligi ravshan. $L = 0$ qiymat daromad taqsimoti mukamalligini bildiradi.

Hisob chizig'i

Ko'pincha qo'shimcha miqdorda mahsulot ishlab chiqarish uchun qancha vaqt kerakligini bilish muhim hisoblanadi. Shu kabi hisoblarda hisob chizig'i deb ataluvchi chiziqdan foydalaniladi.

$T = F(x)$ —birinchi X birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan vaqt, odam soat o'lchovida bo'lsin. U holda $f(x) = F'(x)$, $(x+1)$ dagi mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun zarur vaqtni anglatadi. Odatda ko'pincha $f(x) = ax^b$ ko'rinishidagi funksiya qo'llaniladi, bunda $a > 0$, $-1 \leq b < 0$.



$y = ax^b$ — oddiy hisob chizig'i.

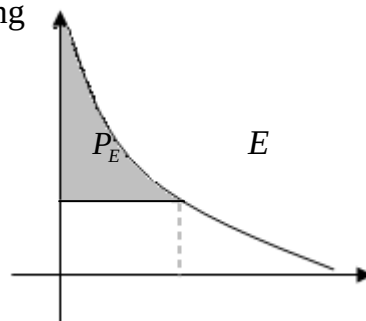
$y = f(x)$ kamayuvchi funksiyadir, chunki biror amalni bajarish uchun zarur vaqt takrorlashlar soni ortish bilan kamayadi.

$(n_1 + 1)$ dan n_2 ta birlik mahsulot ishlab chiqish uchun zarur ΔT vaqt $\Delta T \int_{n_1}^{n_2} f(x) dx$ formula yordamida hisoblanadi.

Ishlab chiqaruvchi va iste'molchi yutug'i.

Talab va taklifning funksiyalarining kesishgan nuqtasi muvozanat nuqta deyiladi. Tovarni o'z narxidan ko'ra ancha arzon bo'lgan muvozanat narxida sotib olgan iste'molchi yutuqqa erishadi. Barcha iste'molchilar tomonidan tejalgan pullarning yig'indisi iste'mol yutug'i deyiladi.

Talab egri chizig'i $P = f(Q)$ va $P = P_E$ - tovarning muvozanat narxi bo'lsin. Iste'mol yutug'i yuqoridan talab egri chizig'i, quyidan $P = P_E$ to'g'ri chiziq bilan chegaralan - gan egri chiziqli trapesiyaning yuzini beradi. (rasmdagi



shtrixlangan yuza)

Iste'mol (xarid) yutug'ini hisoblash formulasi

$$I.Y. = \int_0^{Q_E} [f(Q) - P_E] dQ. \text{Xuddi shuningdek}$$

ishlab chiqaruvchining tovarni mo'ljallaganidan yuqori muvozanat narxda sotishdan olgan qo'shimcha summasi ishlab chiqaruvchi (sotuv)

$$\text{yutug'i deyiladi va } S.Y. = \int_0^{Q_E} [P_E - g(Q)] dQ$$

formula bilan hisoblanadi.

Masalan. Tovarga bo'lgan talab va taklif funksiyalari berilgan:

$P_D = -q^2 - 5q + 249$, $P_S = q^2 + 4q + 6$, $0 < q < 13$. Bu yerda q – tovar miqdori, P – esa tovarning so'mdagi narxi. Topish kerak:

a) Tovarning muvozanat narx va miqdori; b) Xarid yutug'i; c) Sotuv yutug'i.

Yechish. a) Muvozanat narx va miqdor talab va taklif teng bo'lgan nuqtadir, ya'ni:

$$P_D = P_S$$

$$\begin{cases} P_D = -q^2 - 5q + 249 \\ P_S = q^2 + 4q + 6 \end{cases} \Rightarrow 2q^2 + 9q - 243 = 0 \text{ kvadrat tenglamaning ildizlari } q_1 = -135; q_2 = 9.$$

$q = 9$ ni tenglamalar sistemasiga qo'yib, tovarning muvozanat narxini hosil qilamiz $P = 123$. Demak muvozanat nuqta $P(9; 123)$.

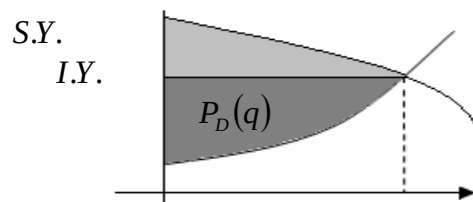
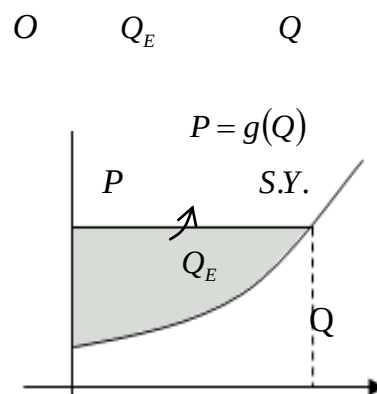
$$b) \text{Iste'mol yutug'i } I.Y. = \int_0^9 (-q^2 - 5q + 249 - 123) dq = \left[-\frac{q^3}{3} - \frac{5q^2}{2} + 126q \right] \Big|_0^9 = 688,5.$$

c) Ishlab chiqaruvchining yutug'i

$$S.Y. = \int_0^{Q_E} [P_E - g(Q)] dQ$$

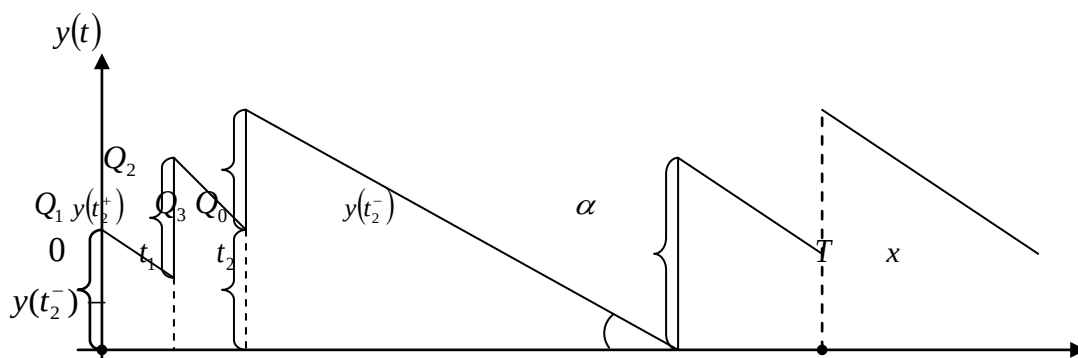
formulaga ko'ra

$$S.Y. = \int_0^9 [123 - q^2 - 4q - 6] dq = \left(117q - \frac{q^3}{3} - 2q^2 \right) \Big|_0^9 = 648.$$



7.6.3. Zahiralarini boshqarishda Vilson modeli

$y(t) - t$ ($t \geq 0$) vaqtdagi ma'lum mahsulotning ombordagi zahirasi bo'lsin. $t \geq 0$ vaqtda $y(t) \geq 0$ bo'lsin, ya'ni omborda mahsulot tanqisligiga yo'l qo'yilmasin. Mahsulotdan μ intensivlik bilan teng taqsimotda foydalanilsin, ya'ni Δt vaqtda ombordan zahiraning $\mu \Delta t$ qismi olinsin. Boshqa tomondan, vaqtning $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3, \dots$ holatlarida omborga $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ miqdorda mahsulot keltirilsin. Ombordagi $y(t)$ – mahsulot zahirasi o'zgarishini quyidagi b'lakli-silliq chiziqlar bilan tasvirlash mumkin, bunda og'ma kesmalar parallel va $\mu = tg \alpha$.



orqali t_2 – navbatdagi vaqt uchun ombordagi shu vaqtgacha bo'lgan mahsulot zahirasini, $y(t_2^+)$ – orqali t_2 – vaqtda omborga Q_2 miqdordagi mahsulot keltirilgandan so'nggi mahsulot zahirasini belgilaylik. Demak, $y(t_2^+) = y(t_2^-) + Q_2$.

s - birlik vaqt davomida bir birlik mahsulotni saqlash uchun xarajatlar, g - bir partiya mahsulot hajmini yetqazish uchun xarajatlar bo'lsin.

U holda T vaqtdagi o'rtacha xarajatlar $f_T(y(t), 0 \leq t \leq T) = \frac{1}{T} (s \int_0^T y(t) dt + gn(T))$

munosat bilan aniqlanadi, bunda $n(T) - [0; T]$ vaqt oralig'idagi mahsulot yetkazishlar soni.

Zahirani boshqarish tizimini optimallashtirish uchun $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3, \dots$ - mahsulot yetqazish vaqlarini va $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ - mahsulot miqdorlarini shunday tanlash zarurki, bunda $f_T(y)$ funksiya fiksilangan T qiymatda minimumga erishsin. Bunda T davrni rejalashtirish gorizonti deyiladi.

Ta'rif . Agar barcha yetkazilayotgan mahsulot miqdorlari teng, ya'ni $Q_0 = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q$ va barcha vaqt oraliqlari teng, ya'ni $\Delta t_i = \frac{Q}{\mu}, i \in N$ bo'lsa, u holda Q mahsulot miqdorini yetkazishga mos rejaga Vilson rejasi deyiladi.

Teorema. Har qanday T vaqt uchun $f_T(y)$ funksiya minimumga erishadigan optimal reja mavjud va u Vilson rejasidir.

$Q - [0; T]$ vaqt oralig'ida $n(T)$ - mahsulot yetkazishlar soniga mos mahsulot yetkazish hajmi bo'lsin, ya'ni $\mu T = Qn(T)$. U holda

$$f_T(y(t), 0 \leq t \leq T) = \frac{1}{T} \left(\frac{s\mu}{2} \cdot \frac{T^2}{n(T)} + gn(T) \right) = \frac{sQ}{2} + \frac{g\mu}{Q}.$$

Bu funksiya $Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}}$ qiymatda o'zining minimumga erishadi. Bunda, agar

$\frac{\mu T}{Q}$ butun son bo'lsa, Q_0 - mahsulot yetkazishning optimal o'lchovini ifodalaydi va demak unga mos reja Vilson rejasidir.

8-MAVZU. QATORLAR NAZARIYASI

1-mashg'ulot

8.1.1. Sonli qatorlar

8.1.2. Qatorlar yaqinlashishining zaruriy sharti

8.1.3. Taqqoslash alomati

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: bahs-munozara, hikoya, ko'rsatish.

8.1.1. Sonli qatorlar

Ta'rif. Sonli $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

ifodaga sonli qator deyiladi.

Bu yerda $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ qator hadlari, a_n esa qatorning umumiy hadi deyiladi. Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki qator ma'lum qonuniyat bilan tuzilgan sanoqli sondagi qo'shiluvchilar yig'indisi bilan aniqlanar ekan.

Qatorning dastlabki chekli sondagi hadlaridan tuzilgan ushbu

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

yig'indilarga, shu qatorning xususiy yig'indilari deyiladi.

Agar qator hadlari sanoqli ekanligini e'tiborga olsak $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ xususiy yig'indilar ham o'z navbatida sonli ketma-ketlikni tashkil etishini ko'ramiz.

Ta'rif. Agar xususiy yig'indilarning $\{S_n\}$ ketma-ketligi $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ chekli limitga ega bo'lsa, u holda ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator, limit S esa qator yig'indisi deyiladi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad \text{ko'rinishda yoziladi.}$$

Ta'rif. Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lmasa (limiti cheksiz yoki mavjud emas), u holda (1) uzoqlashuvchi qator deyiladi.

Maslan. Qatorni tekshiring

$$b + bq + bq^2 + \dots + bq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}, (b \neq 0)$$

Uning dastlabki n ta hadlari yig'indisi formula bilan aniqlanadi.

$$S_n = \frac{b + bq^n}{1 - q} = \frac{b}{1 - q} + \frac{b}{1 - q} q^n$$

Bu qator yig'indisi uchun oldingi tasdiqlar bevosita q ga bog'liqdir.

1) agar $|q| < 1$ bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ bo'lgani sababli $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1 - q}$ chekli limitga ega bo'lamiz. Ya'ni $|q| < 1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S = \frac{b}{1 - q}$ formula bilan hisoblanadi.

2) Agar $|q| > 1$ bo'lsa $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = \infty$ ekanligi ravshan. Shu sababli, $q < -1$ da $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ mavjud bo'lmaydi, $q > 1$ da $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ bo'lib qator, uzoqlashuvchi bo'ladi.

3) Agar $q=1$ desak $S_n = b + b + \dots + b = b \cdot n$ ko'rinishni oladi. Bu holda ham $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ bo'lgani sababli qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

4) Agar $q=-1$ deb olinsa qator $b - b + b - b + \dots + (-1)^{n-1}b + \dots$ ko'rinishda bo'ladi. Bunday qator uchun $S_n = S_{2m} = 0$, $S_n = S_{2m+1} = b$, ($m=1,2,3,\dots$). Bu esa $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ mavjud emasligini bildiradi. Shuning uchun $q=-1$ bo'lgan holda ham qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Teorema. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning har qanday qoldig'i ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha, qator qoldig'i yaqinlashuvchi bo'lsa, uning o'zi ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi S bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ qator ham yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi, $k \cdot S$ ga teng bo'ladi.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashuvchi qatorlar bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ qatorlar ham yaqinlashuvchi qatorlar bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

8.1.2. Qatorlar yaqinlashishining zaruriy sharti

Teorema(Qatorlar yaqinlashishining zaruriy sharti) Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lsa, had tartib raqami cheksiz o'sib borganda qator umumiy hadi a_n nolga intiladi, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Natija. Agar qator uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ shart bajarilmasa, u holda qator uzoqlashuvchidir.

Masalan. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^2})$ uzoqlashuvchi qatordir, chunki $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2}) = 1 \neq 0$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ bo'lishi qator yaqinlashishining faqat zaruriy sharti bo'la oladi. Ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Lekin $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ bo'lganda, har doim ham $\sum_{n=1}^n a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lavermaydi.

Masalan, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4} + \dots$ garmonik qator uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{n} = 0$ shart bajarilsada, bu garmonik qator uzoqlashuvchi qatordir.

8.1.3. Taqqoslash alomati

Ta'rif: Agar barcha $n=1,2,3,\dots$ lar uchun $a_n > 0$ bo'lsa,

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat hadli qator deyiladi.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ musbat hadli qatorlar berilgan bo'lsin.

Teorema. Agar barcha $n=1,2,3,\dots$ lar uchun $a_n \leq b_n$, bo'lib $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Teorema. Agar barcha $n=1,2,3,\dots$ lar uchun $a_n \leq b_n$ bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ham uzoqlashuvchi qatordir.

Masalan. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$ qator tekshirilsin.

Yechish. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ garmonik qatorni olaylik, $n=1,2,3,\dots$ bo'lganda $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ekanligini ko'ramiz, hamda garmonik qator uzoqlashuvchi qatordir. Shuning uchun teorema asosan, berilgan qator uzoqlashuvchidir.

2-mashg'ulot

8.2.1. Dalamber alomati

8.2.2. Koshi alomati. Koshining integral alomati

8.2.3. Leybnits qatori

8.2.4. Shartli va absolyut yaqinlashish

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, pinbord, ko'rsatish.

8.2.1. Dalamber alomati

Teorema. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat hadli qator bo'lib $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$ limit mavjud bo'lsin.

- 1) agar $b < 1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi;
- 2) agar $b > 1$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Masalan. Qatorni yaqinlashishini tekshiring. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n^2-1)}{n!}$.

Yechish. $a_n = \frac{3^n(n^2-1)}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}((n+1)^2-1)}{(n+1)!}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}((n+1)^2-1)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n(n^2-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot n^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{(n+1)n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = 0 < 1.$$

Demak, qator yaqinlashuvchi.

8.2.2. Koshi alomati

Teorema. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) qator uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ bo'lib:

$q < 1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi,

$q > 1$ bo'lganda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu erda ham $q = 1$ bo'lib qolsa, qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi ochiq qoladi.

Masalan. Qatorning yaqinlashishini tekshiring. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^{n^2}$.

Yechish. $a_n = \left(\frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^{n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n \cdot \ln(3n^2 + 4n + 5)}{6n^2 - 3n - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n \cdot \ln 6}{12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n \ln 2} = 0 < 1$$

Qator yaqinlashuvchi.

Koshining integral alomati

Teorema . Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonli qator berilgan bo'lsa, uning umumiy hadini natural sonlar to'plamida aniqlangan $a_n = f(n)$ funksiya deb qarash mumkin, ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x \geq 1$ bo'lganda musbat uzluksiz funksiya bo'lib, $\int_1^{\infty} f(x) dx$ xosbo'lmagan integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'ladi va ushbu xosbo'lmagan integral uzoqlashsa, qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Masalan. Qatorlarning yaqinlashuvchiligini tekshiring. $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots, \alpha \geq 2$

Yechish. $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\alpha \geq 2$. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{1-\alpha} \left(0 - \frac{1}{1-\alpha} \right) = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}$. Qator yaqinlashuvchi.

8.2.3. Leybnits qatori

$\{a_n\}$ musbat hadli ketma-ketlik hadlaridan quyidagicha tuzilgan

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

qatorga ishorasi almashuvchan qator deyiladi.

Teorema (Leybnits teoremasi): Agar ishorasi almashuvchan qatorda $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$ bo'lib, uning umumiy hadi nolga intilsa ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$), u holda ishorasi almashuvchi yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Masalan. $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots$ qator yaqinlashishi tekshirilsin.

Yechish. 1) $\frac{1}{3} > \frac{2}{9} > \frac{1}{9} > \frac{4}{81} > \dots$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0$. Demak, Leybnits teoremasi shartlari bajariladi va qator yaqinlashuvchi.

8.2.4. Shartli va absolyut yaqinlashish

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator berilgan bo'lsin. Bu qator hadlari modullaridan iborat bo'lgan, ushbu $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qatorni qaraymiz.

Teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Teskari tasdiq o'rinli emas, ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yaqinlashuvchi bo'lishi shart emas.

Shunday holatlar bo'ladiki $\sum a_n$ yaqinlashuvchi, ammo $\sum |a_n|$ uzoqlashuvchidir. Bunday hollarni tartibga keltiruvchi ayrim tushunchalarni kiritamiz.

Ta'rif. Agar berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator hamda uning hadlari modullaridan tuzilgan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator ham yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum a_n$ absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Masalan. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$ qator tekshirilsin.

Yechish. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ qator, maxraji $q = \frac{1}{2} < 1$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning barcha hadlari yig'indisi sifatida yaqinlashuvchi qatordir. Demak, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ qator absolyut yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Masalan. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ qator tekshirilsin.

Yechish. Bu qator ishorasi almashuvchan qator bo'lib, Leybnits teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni yaqinlashuvchi qator.

Lekin uning hadlari modullaridan tuzilgan: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

qator garmonik qator bo'lib, uning uzoqlashuvchi qator ekanligi bizga ma'lum.

Shu sababli, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ shartli yaqinlashuvchi qator ekan.

3-mashg'ulot

8.3.1. Funksional qatorlar

8.3.2. Darajali qatorlar

8.3.3. Abel teoremasi

8.3.4. Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi va sohasi

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: ma'ruza, tezkor so'rov, ko'rsatish.

8.3.1. Funksional qatorlar

Ta'rif. Hadlari funksiyalardan iborat bo'lgan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ko'rinishdagi qatorlarga funksional qator deyiladi.

Misollar. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x = \ln x + \ln^2 x + \ln^3 x + \dots$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots$

Funksional qator uchun asosiy masala uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash, bu holat sonli qatornikidan farqlidir. Funksional qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi asosan x o'zgaruvchining qanday qiymat qabul qilishiga bevosita bog'liq bo'ladi.

Ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ qator $x = x_1$ bo'lganda yaqinlashsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ qator $x = x_1$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi.

Ta'rif. x o'zgaruvchining $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ qator yaqinlashadigan barcha qiymatlari to'plamiga, ushbu qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi va $D(\Sigma)$ bilan belgilanadi.

8.3.2. Darajali qatorlar

Ta'rif. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

ko'rinishdagi funksional qatorga darajali qator deyiladi. Bu erda a_n - darajali qator koeffitsientlari deyiladi.

Masalan. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)} = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + \dots$

Ta'rif. x o'zgaruvchining $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator yaqinlashadigan barcha qiymatlari to'plamiga, ushbu darajali qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi va $D(\Sigma)$ bilan belgilanadi.

Masalan. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ darajali qator x o'zgaruvchining $(-1, 1)$

oralikdan olingan har bir qiymatida cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi sifatida yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak bu qator uchun $D(\Sigma) = (-1, 1)$.

8.3.3. Abel teoremasi. Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi va sohasi

Teorema (Abel teoremasi). Agar (1) darajali qator biror $x = x_0$ da yaqinlashsa, u holda bu qator $|x| < |x_0|$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x larda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar darajali qator x ning ba'zi qiymatlarida yaqinlashuvchi, ba'zi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda yagona shunday $M > 0$ son topiladiki, darajali qator x ning $|x| < M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida absolyut yaqinlashuvchi, x ning $|x| > M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu teorema yordamida topilgan M soniga darajali qatorning yaqinlashish radiusi, $(-M, M)$ interval esa uning yaqinlashish intervali deyiladi.

Qatorning berilishiga qarab M chekli son yoki $R = \infty$ bo'lishi mumkin.

Agar M chekli son bo'lsa, u holda darajali qatorning yaqinlashish radiusi

$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ yoki $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ formula bilan aniqlanadi. Umuman darajali qatorning yaqinlashish radiusi R bilan belgilanadi ($M = R$).

Agar R chekli son bo'lsa, Abel teoremasidan (8) darajali qatorning $D(\Sigma) = (-R; R)$ sohada yaqinlashishi kelib chiqsada, $x = -R$ va $x = R$ da qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi ochiq qoladi. Bu masala har bir darajali qator uchun alohida - alohida ko'rib chiqiladi.

Masalan. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ qatorning yaqinlashish radiusi aniqlansin.

Yechish. Berilgan qatorda $a_n = 1, n = 1, 2, 3, \dots$. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

Darajali qatorlarni hadma-had differentsiallash va integrallash

Darajali qator o'zining $(-R; R)$ yaqinlashish sohasida x o'zgaruvining $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ funksiyasini aniqlaydi.

Bu $f(x)$ funksiya $(-R; R)$ yaqinlashish sohasida uzluksiz bo'lib, istalgan tartibli uzluksiz hosilalarga egadir. Shu bilan birga $f'(x)$ hosila yuqoridagi qator hadlarining hosilalari yig'indisiga tengdir, ya'ni $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$.

Xuddi shuningdek, $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$ $f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$ va hakazo.

Bu xossa, odatda «darajali qatorni hadma-had differentsiallash» xossasi deb yuritiladi.

Ya'ni $(-R; R)$ oraliqdan olingan har qanday x uchun

$$\int f(x)dx = C + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dots$$

Qatorlar nazariyasining iqtisodiyotdagi tadbirlari To'lovlar oqimining hozirgi qiymati

Oldingi mavzularda $PV_t = V / (1+r)^t$ ketma-ketlik hozirgi pul qiymatlar yig'indisini ifodalab, kelajakdagi T vaqt oraliqda V pul qiymatli olingan. Ko'p iqtisodiy sharoitda, biz bunday miqdorda bir qator joriy qiymati teng bo'lishigini talab qilishimiz

kerak. Masalan, yuridik va jismoniy shaxslarga berilgan uzoq vaqtli kredit yoki ipoteka mablag'i kelajakda kelib tushadigan pul miqdoriga oqimi evaziga beriladi. Shunday qilib, r foizli stavkada T yil uchun jismoniy shaxs har yil oxirida pul to'lab borsa, u holda bu to'lovlar oqimi hozirgi qiymati quyidagicha

$$P_T = \sum_{t=1}^T \frac{V}{(1+r)^t} = \frac{V}{(1+r)^1} + \frac{V}{(1+r)^2} + \dots + \frac{V}{(1+r)^T}. \quad (1)$$

(1) formuladagi o'zgaruvchilarning o'zaro munosabatlari ipoteka jadvalidan kelib chiqqan. Qoida bo'yicha ular har oylik to'lov asosda hisoblanib, bu holatda mos keluvchi foiz stavkasi $r/12$ bo'ladi, bu yerda r yillik o'sish va T yillik to'lov emas balki oylik to'lov hisoblanadi. Shu bilan birga, yillik to'lov asosida to'lanadigan quyidagi misolni qaraylik. Yiliga 8 %li \$100.000 miqdordagi 25 yil uchun olingan kreditni har yili yopish uchun $V=\$9,367.88$ pul miqdorni to'lab borishi kerak. Agar bu kredit 50 yil uchun olingan bo'lsa, u holda yillik to'lov $V=\$8,174.28$ ni tashkil etadi. Agar to'lovlar muddatsiz berilgan bo'lsa, u holda biz $a = V / (1+r)$, $p = 1 / (1+r)$ cheksiz geometrik progressiyadan foydalanishimiz mumkin, unda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_T = \sum_{t=1}^T \frac{V}{(1+r)^t} = \frac{V / (1+r)}{1 - (1 / (1+r))} = \frac{V}{r}. \quad (2)$$

Shunday qilib, yuqoridagi misolimiz uchun $V=rP=\$8,000$ ega bo'lamiz, bu esa 50 yil uchun berilgan kreditni yillik to'loviga yaqin pul miqdoridir. Buning sababi shuni ko'rsatadiki, shu kundan boshlab 50 yil \$8,000 oladi, bu yerda yillik foz stavkasi 8% bo'lib, $\$8,000 / (1+0.08)^{50} = \170.57 tashkil etadi. Hozirgi qiymatdagi to'langan barcha summa \$8,000, 50 yildan so'ng olingan qiymat quyidagicha:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=50}^T \frac{V}{(1+r)^t} = \lim_{T \rightarrow \infty} P_T - \sum_{t=1}^{50} \frac{V}{(1+r)^t}$$

bizning misol uchun taxminan 2.1% li farqni tashkil etadi, ya'ni \$2,132.13 (\$100,000-\$97,867.87). Shunday qilib, vaqtlar soni yoki foiz stavkasi juda kichik bo'lmasligi shartlarni hisobga olib, biz cheksiz qator formulasidan foydalanib, chekli qatorning hozirgi qiymatiga yaqin baholarni olishimiz mumkin bo'ladi. Oxirgi shartning sababi shundaki, agar r nolga intilsa, unda chegirma koeffitsienti $p = 1 / (1 + p)$ birga intiladi va shu sababli kelajakdagi to'lovlar ko'p miqdordagi pulni tashlab bermaydi va uni bekor qilib bo'lmaydi. Umuman olganda, agar foiz stavka 1% 1/2 qismini tashkil etsa, u holda \$ 8,000 ko'rsatkichli cheksiz kiruvchi pul miqdorning hozirgi qiymati bir yilda \$1.6 million bo'ladi va 50 - yilda esa hozirgi to'lovning qiymati

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=50}^T \frac{V}{(1+r)^t} = \$1.246,858$$

hamda hamma qo'yilgan miqdorning 78%idir, oldingi 2.1% ga aniqlik bilan solishtirganda tashkil etib, agarda foiz stavkasi yiliga 8% bo'lsa.

Misol. Faraz qilaylik yiliga uzluksiz teng oqimli qiymatlar summasi \$10,000 bo'lib, yiliga 6% foiz stavka bilan qo'yilsin. Unda quyidagilarni hisoblang:

(i) Hozirgi qiymatning barcha oqim foydasini; (ii) 50 - yildan boshlab hozirgi qiymatning foydasini; (iii) Boshlang'ich 50 yildagi foyda qiymatini.

Yechish. (i) $\lim_{T \rightarrow \infty} P_T = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\$10,000}{(1.06)^t} = \frac{\$10,000}{1.06} = \$166,666.67.$

(ii) Chegaralanmagan vaqtgacha qo'yilgan \$10,000 miqdorning boshlang'ich 50 yildagi qiymati (i) topilgan \$166,666.67 summani tashkil etadi. Shunday qilib, 50 - yildagi qiymat foydasi quyidagicha:
$$\frac{\$166,666.67}{(1.06)^{50}} = \$9,048.06.$$

(iii) Boshlang'ich 50 yildagi foyda qiymati esa (i) topilgan qiymatdan (ii) topilgan qiymatni ayirmasiga teng, ya'ni $\$166,666.67 - \$9,048.06 = \$157,618.61$.

Yuqorida keltirilgan misollar bir qator teng to'lovli hozirgi qiymatni topish muammosi bilan bog'liq bo'lgan misollardir. Ammo, umuman olganda hozirgi qiymatni ixtiyoriy turdagi to'lovlar orqali baholash mumkin. Faraz qilaylik, misol uchun korxona SKga investitsiya kiritish masalasini qarab chiqmoqda, ya'ni sotish davomida tovar narxining ortishi hisobiga tovarlarni sotishdan tushgan foyda evaziga to'lasin. Faraz qilaylik, ishlab chiqarish bosqichi bir yilning oxirida boshlanadi va birinchi yilda mahsulotni sotishdan tushgan sof foyda $\pi(1+g)$ tashkil etsin hamda keyingi har yilda bu ko'rsatkich g tezlik bilan ko'payib borsin. Shunday qilib, t vaqt mobaynida foyda quyidagicha bo'ladi $a_t = \pi(1+g)^t$ va daromad (yalpi daromad) oqimining (chegirmasiz)

$$\text{qiymati: } GB = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T a_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \pi(1+g)^t$$

bu yerda agar π va g musbat bo'lsa, u holda qator uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

$$\text{Foydaning chegirmasiz yoki hozirgi qiymat oqimi : } PVB = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \frac{\pi(1+g)^t}{(1+r)^t}$$

(3)

$a = \pi(1+g)/(1+r)$ va $g = (1+g)/(1+r)$ bo'lganda faqatgina geometrik progressiyaning beradi. Shu bilan birga, $PVB = \pi(1+g)/(r-g)$ chekli bo'ladi, faqat va faqat agar $g < r$ (ya'ni $|\rho| < 1$) bo'lsa. Foydali sarmoya ekanligini aniqlashimiz uchun biz faqatgina $PVB > C$ yoki $PVB < C$ aniqlashimiz kerak. Bu diskontlash loyihaning sof foyda baholanishida ishlatiladi. Ko'p hollarda, iqtisodiy jihatdan uzoq vaqtga qo'yilgan sarmoyaning afzalliklaridan biri bu dastlabki davrlarda faollashadi.

Misol. Faraz qilaylik, to'lovlar oqimi biron bir bisnez ishlab chiqarish \$20,000 sarmoya bilan ish boshlab, yiliga 4% ko'rsatkich bilan o'sib borsin. Shu bilan birga foiz stavkasi 8% bo'lsin. To'lovlar oqimining hozirgi qiymatini toping.

Yechish. (3) formulaga asosan, bir yil hosobiga ko'ra to'lovlar oqimining hozirgi qiymati quyidagicha

$$PVB = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \frac{\$20,000(1+0.04)^t}{(1+0.08)^t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \$20,000 \left(\frac{1.04}{1.08} \right)^t.$$

Bu misol $a = \$20,000(1.04)/(1.08)$ va $p = (1.04)/(1.08)$ bilan berilgan geometrik progressiyadir. (7.5) formuladan foydalanib, cheksiz geometrik progressiyaning

$$\text{yig'indisini topamiz, va quyidagiga ega bo'lamiz: } PVB = \frac{a}{1-p} = \$520,000.$$

Yuqoridagi boshlang'ich sarmoyani qo'shib, quyidagi natijani olamiz: \$540,000.

Matrisalar qatori

$M(k, l) - k \times l$ o'lchamli haqiqiy elementli matrisa to'plami bo'lsin.

$\{A_n\} \in M(k, l)$ matrisalar ketma – ketligi berilgan bo'lsin, $n \in N$.

Masalan. 2×2 o'lchovli matrisalar ketma–ketligi. $A_n = \{a_{ij}^{(n)}\}$, $\{a_{ij}^{(n)}\} = \frac{1}{(ij)^n}$,

$i = 1, 2, j = 1, 2$ bo'lsa, uni quyidagicha tushunamiz:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/16 \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} 1 & (1/2)^n \\ (1/2)^n & (1/4)^n \end{pmatrix}, \dots$$

Ta'rif. $A = \{a_{ij}\}$ matrisa $\{A_n\}$ matrisalar ketma – ketligining limiti deyiladi, agar har qanday i va j juftlar uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij}$, $i = \overline{1, k}, j = \overline{1, l}$ tenglik o'rinli bo'lsa.

Masalan. 2×2 o'lchovli $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (1/2)^n & (1/4)^n \end{pmatrix}$, $n \in N$ ketma–ketlik limiti topilsin.

Yechish: Ma'lumki, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & (1/2)^1 \\ (1/2)^1 & (1/4)^1 \end{pmatrix}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & (1/2)^n \\ (1/2)^n & (1/4)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

Ta'rif. $\{A_n \in M(k, l)\}$, $n \in N$ matrisalar ketma – ketligi uchun

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots \quad (1)$$

yig'indi matrisalar qatori deyiladi.

$$S_1 = A_1, S_2 = A_1 + A_2, \dots, S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n, \dots \quad (2)$$

xususi yig'indisi ketma – ketligi.

Ta'rif. Agar $\{S_n\}$ xususi yig'indilar ketma – ketligi yaqinlashsa, (1) qator yaqin ham yaqinlashadi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (3)$$

limit (1) qatorning yig'indisi deyiladi.

Masalan. 2×2 o'lchovli $A_n = \begin{pmatrix} (1/2)^n & (1/3)^n \\ (1/4)^n & (1/5)^n \end{pmatrix}$ uchun $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$

qatorning yig'indisini hisoblang.

Yechish. $S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, S_n matrisa elementlari maxraji birdan kichik geometrik progressiyalardir. Shuning uchun bu qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$$

A k o'lchovli kvadrat matrisa bo'lsin.

$E + A + A^2 + \dots + A^n + \dots$ (4) qator ham muhim hisoblanadi. (4) qatorning yaqinlashishi A Leontev matrisasining (produktivligi) mahsulдорligiga ekvivalentdir.

Ta'rif. k o'lchovli A kvadrat matrisa va $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ darajali qator berilgan bo'lsin.

$$a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n A^n \quad (5)$$

qatorga darajali matrisaviy qator deyiladi. (5) qatorning yaqinlashishi oddiy darajali qatorning yaqinlashishiga keltiriladi.

λ son A matrisaning xos qiymati deyiladi, agar shunday $x \neq 0$ vektor topilsaki

$$Ax = \lambda x$$

munosabat o'rinli bo'lsa (5) qator bilan birga

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda^n \quad (6)$$

qatorni qaraymiz.

Ta'rif. (5) matrisaviy darajali qator yaqinlashuvchi bo'ladi, agar A matrisaning har qanday λ xos qiymati uchun (6) qator yaqinlashuvchi bo'lsa. Agarda A matrisaning Frobenius soni birdan kichik bo'lsa, u holda A.Leontev matrisasi mahsuldor bo'ladi. Haqiqatan ham, A nomanfiy matrisa unumdor deyiladi, agarda

$$E + A + A^2 + A^3 + \dots + A^n + \dots$$

darajali matrisaviy qator yaqinlashuvchi bo'lsa. Yuqoridagi mulohazalardan ma'lumki, bu matrisaviy qator yaqinlashishi uchun A matrisaning har qanday λ xos soni uchun

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n + \dots$$

sonli qator yaqinlashsa. Bu qator $|\lambda| < 1$ shartda yaqinlashadi. A nomanfiy matrisa bo'lgani uchun uning modul bo'yicha maksimal qiymati λ_A haqiqiy va nomanfiydir. Shuning uchun matrisaviy qatorning yaqinlashishi $\lambda_A < 1$ shartga ekvivalentdir.

9-MAVZU. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR NAZARIYASI

1-mashg'ulot

9.1.1. Differensial tenglama haqida umumiy tushunchalar

9.1.2. O'zgaruvchisi ajraladigan va unga keltiriladigan differensial tenglamalar

9.1.3. Bir jinsli va unga keltiriladigan differensial tenglamalar Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: hikoya, suhbat, ko'rsatish.

9.1.1. Differensial tenglama haqida tushunchalar

Ta'rif. Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchi(lar), noma'lum funksiya va bu funksiya hosilalari yoki differentsiallarini bog'lovchi tenglamaga aytiladi.

Ta'rif. Agar izlanayotgan funksiya bir o'zgaruvchili bo'lsa, tenglama oddiy differensial tenglama, ko'p o'zgaruvchili bo'lsa-xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Ta'rif. Differensial tenglamaning tartibi deb unda qatnashayotgan hosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Umumiy holda n -tartibli oddiy differensial tenglama quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Umumiy, xususiy va maxsus yechim

Ta'rif. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning yechimi deb tenglamani ayniyatga aylantiruvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Ta'rif. $y' = f(x, y)$ tenglamaning umumiy yechimi deb c o'zgarmasning ixtiyoriy qiymatida bu tenglamani qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, c)$ funksiyalar majmuiga aytiladi.

Ta'rif. $\{\varphi(x, c)\}$ - differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'lsin. $y' = f(x, y)$ tenglamaning D sohasidagi xususiy yechimi deb $c = c_0$ o'zgarmas qiymatda olingan $y = \varphi(x, c_0)$ funksiyaga aytiladi.

Ta'rif. Umumiy yechimlar oilasidan ajratib bo'lmaydigan yechimga maxsus yechim deyiladi.

Yechimning mavjudligi va yagonaligi

Yechimning grafigi integral egri chiziq deyiladi. Differensial tenglamalar nazariyasida asosiy masala yechimning mavjudligi va yagonaligidir.

Koshi teoremasi. Agar $f(x, y)$ funksiya va uning xususiy hosilasi $f'_y(x, y)$ OXY tekislikning biror D sohasida uzluksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in D$ nuqtaning biror atofida $y' = f(x, y)$ tenglamaning $x = x_0$ da $y = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir.

9.1.2. O'zgaruvchisi ajraladigan va unga keltiriladigan differensial tenglamalar

Ta'rif. Birinchi tartibli differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchi, noma'lum funksiya va bu funksiya birinchi tartibli hosilasi yoki differensialini bog'lovchi tenglamaga aytiladi.

Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarning umumiy ko'rinishi : $F(x, y, y') = 0$

Hosilaga nisbatan yechilgan oddiy differensial tenglama: $y' = f(x, y)$

Ta'rif. Ushbu $y' = f_1(x)f_2(y)$ ko'rinishdagi tenglamalar o'zgaruvchisi ajralgan differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda $f_1(x)$, $f_2(y)$ - uzluksiz funksiyalar

Bu tenglamani yechish uchun «o'zgaruvchini ajratish usuli»ni qo'llaymiz: y' hosilani uning ekvivalent formasi dy/dx ga almashtirib, tenglikning ikkala tomonini

$$\frac{dx}{f_2(y)} \text{ ga ko'paytiriladi : } \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Tenglikning ikkala tomonini integrallasak, $\int dy / f_2(y) = \int f_1(x)dx + C$, bu yerda C - o'zgarmas kattalik.

Masalan. $y' = \frac{x(\sqrt{y^2+1})}{y}$ tenglamaning $(0,1)$ nuqtadan o'tuvchi xususiy yechimini toping.

Yechish: O'zgaruvchilarni ajratamiz: $ydy / \sqrt{y^2+1} = xdx$. Bundan,

$$\int ydy / \sqrt{y^2+1} = \int xdx + C, \text{ demak, } \sqrt{y^2+1} = \frac{x^2}{2} + c \quad y^2+1 = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2 \quad y = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2 - 1}$$

$(0,1)$ nuqtadan o'tuvchi yechim I uchun $C = \pm\sqrt{2}$ topiladi. Demak, $y = \sqrt{(x^2/2 + \sqrt{2})^2 - 1}$.

9.1.3. Bir jinsli va unga keltiriladigan differensial tenglamalar

Ta'rif. Agar $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ ayniyat o'rinli bo'lsa, $f(x, y)$ m o'lchovli bir jinsli funksiya deyiladi.

Ta'rif. Agar $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ bir xil o'lchovli bir jinsli funksiyalar bo'lsa, u holda $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deyiladi.

Bu tenglama $y = ux$ almashtirish yordamida, bu yerda u yangi nomalumli funksiya, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

Masalan. Differensial tenglamani yeching. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

Yechish: $y = ux$ almashtirishni bajarib $u + xu' = 1/u + u$ yoki $xu' = \frac{1}{u}$ ni hosil qilamiz.

Bundan $udu = \frac{dx}{x}$ yoki $\frac{1}{2} u^2 = \ln|Cx|$. Dastlabki o'zgaruvchilarga qaytib $y^2 = x^2 \ln(C^2 x^2)$

yoki $y = \pm x \sqrt{\ln(C^2 x^2)}$ hosil bo'ladi.

Ushbu $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$ ko'rinishdagi tenglamalar bir jinsli tenglamaga keltiriladi.

Agar $c_1 = c = 0$ bo'lsa, u holda $\frac{dy}{dx} = \frac{a + b \frac{y}{x}}{a_1 + b_1 \frac{y}{x}}$ - bir jinsli tenglama hosil bo'ladi.

Agar $c \neq 0, c_1 \neq 0$ bo'lsa, $x = x_1 + h, y = y_1 + k$ deb $\frac{dy}{dx} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}$ bo'ladi.

H va k ni $\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$ tenglik o'rinli bo'ladigan qilib tanlaymiz. U holda

$\frac{dy}{dx} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}$ - bir jinsli tenglamani hosil qilamiz.

Agar $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ bo'lsa, $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}$. Bu holda $z = ax + by$ deb $\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$.

2-mashg'ulot

9.2.1. Chiziqli differensial tenglamalar

9.2.2. Bernulli tenglamasi

9.2.3. Rikatti tenglamasi

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: tushuntirish, namoyish, ko'rsatish.

9.2.1. Chiziqli differensial tenglamalar

Ta'rif. Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb $y' + p(x)y = q(x)$ ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda $p(x), q(x)$ -uzluksiz funksiyalar.

Bu tenglamani «o'zgarmasni variatsiyalash usuli» bilan yechamiz.

Dastlab, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi topiladi: $y' + p(x)y = 0$

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Shuning uchun $y \neq 0$ deb $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$, $y = C e^{-\int p(x)dx}$. Endi C ni x ning funksiyasi, deb qaraymiz:

$C = C(x)$, $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, («o'zgaruvchini variatsiyalash» deb shu jarayon ko'zda tutiladi).

Bu ifodani berilgan tenglamaga qo'yib soddalashtirsak, $C'(x) = q(x) e^{\int p(x)dx}$.

Ushbu tenglikning ikkala tomonini integrallasak, $C(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C_1$, $C_1 - \text{const}$.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz: $y(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$.

Masalan. Differensili tenglamani yeching. $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.

Yechish: Avval $y' - \frac{2}{x}y = 0$ ni yechamiz. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| \Rightarrow y = Cx^2$.

$C = C(x)$, u holda $y = C(x)x^2$ uni berilgan tenglamaga qo'yib, $u(x)$ ni topamiz:

$C'x^2 - 2xC - \frac{2}{x}x^2C = 2x^3 \Rightarrow C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + C_1$ bundan berilgan tenglamaning

umumiy yechimini topamiz. $y = (x^2 + C_1)x^2$.

9.2.2. Bernulli tenglamasi

Ta'rif. $y' + p(x)y = q(x)y^n$, $n = \text{const}$ ko'rinishidagi tenglamaga Bernulli tenglamasi deyiladi.

Agar $n = 0$ bo'lsa, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan, $n = 1$ da chiziqli, bir jinsli tenglama hosil bo'ladi. Shuning uchun (8) da $n \neq 0$, $n \neq 1$ deb faraz qilinadi. $z = y^{1-n}$, almashtirish

Bernulli tenglamasini chiziqli tenglamaga keltiradi, bunda $z' = (1-n)y^{-n}y'$, $z' + (1-n)pz = (1-n)q$.

Maslan. Differensili tenglamani yeching. $y' + xy = xy^3$.

Yechish: Bu tenglama Bernulli tenglamasidir $n = 3$. $z = y^{-2}$ almashtirishni bajaramiz. U holda $z' = -2y^{-3}y'$. $z' + (-2)xz = -2x$. Bu tenglamaning umumiy yechimini

topamiz: $z(x) = Cx^2 + 1$. Natijada ushbu $y = \pm(Cx^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ yechimni olamiz.

9.2.3. Rikatti tenglamasi

Ta'rif. $\frac{dy}{dx} + a(x)y + b(x)y^2 = C(x)$ ko'rinishdagi tenglamaga Rikatti tenglamasi deyiladi.

Bu tenglama umumiy holda kvadraturada integrallanmaydi. Lekin, agar bu tenglamaning biror $y = y_1(x)$ xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, $y = y_1 + z$ almashtirish Rikatti tenglamasini z o'zgaruvchiga nisbatan Bernulli tenglamasiga keltiradi.

Maslan. Differensil tenglamani yeching. $\frac{dy}{dx} - axy + ay^2 = 1$.

Yechish. Bu Rikatti tenglamasidir. $y = x$ bu tenglamaning xususiy yechimidir. Suning uchun $y = x + z$ almashtirish bu Rikatti tenglamasini z o'zgaruvchiga nisbatan Bernulli tenglamasiga keltiradi: $\frac{dz}{dx} + axz + az^2 = 0$.

3- mashg'ulot

9.3.1. To'la differensial tenglamalar

9.3.2. Integrallovchi ko'paytuvchi

9.3.3. Yuqori tartibli differensial tenglamalar

9.3.4. Tartibi pasayadigan yuqori tartibli differensial tenglamalar

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: bahs munozara, namoyish, muammoli masala va vaziyatlar.

9.3.1. To'la differensial tenglamalar

Ta'rif. Agar $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (1) tenglamada $M(x, y)$ va $N(x, y)$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar uchun $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (2) munosabat o'rinli bo'lsa, u

holda (1) tenglamaga to'la differensialli differensial tenglama deyiladi.

(2) shatning bajarilishi (1) tenglamaning o'ng tomoni biror $u(x, y)$ funksiyaning to'la differensialli ekanligini anglatadi. U holda (1) tenglama $du(x, y) = 0$ yoki

$u(x, y) = C$ umumiy integralga ega bo'ladi. Bunda $M = \frac{\partial u}{\partial x}$, $N = \frac{\partial u}{\partial y}$.

(1) tenglamaning umumiy yechimi $u = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy + C$.

Masalan. Differensialli tenglamani yeching. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

Yechish. $M = \frac{2x}{y^3}$, $N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$. $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

$u(x, y) = \int \frac{2x}{y^3}dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$. Demak,

$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ yoki $\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}$. Bundan $\varphi(y) = -\frac{1}{y} + C$ va

$u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C$.

9.3.2. Integrallovchi ko'paytuvchi

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (1) tenglamadagi $M(x, y)$ va $N(x, y)$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar uchun $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (2) munosabat o'rinli bo'lmagligi

mumkin. U holda (1) tenglamaning chap qismi biror funksiyaning to'la differensialli bo'lmaydi. Bunday hollarda shunday $\mu = \mu(x, y)$ funksiya topish mumkinki, tenglamaning barcha hadlarini shu funksiya ko'paytirilganda tenglamaning chap qismi birov funksiyaning to'la differensialli bo'ladi. Bu usul bilan

topilgan tenglamaning umumiy yechimi berilgan tenglamaning umumiy yechimi bilan bir xil bo'ladi. Odatda, $\mu = \mu(x, y)$ funksiyaga (1) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi deyiladi.

$\mu = \mu(x, y)$ funksiyaga (1) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi bo'lsin.

Unda $\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$ tenglamada $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ shart o'rinli bo'ladi.

Ya'ni $\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$ yoki $M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$ yoki

$M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$. Oxirgi tenglamani umumiy holda yechish qiyin masala. Ba'zan, xususiy hollarda bu masalani sodda yechish mumkin.

$\mu = \mu(y)$ bo'lsa $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ yoki $\mu(y) = \exp \left(\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy \right)$, bu yerda

$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ ifoda faqat y ning funksiyasidan iborat bo'lishi kerak.

$\mu = \mu(x)$ bo'lsa $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ yoki $\mu(x) = \exp \left(\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx \right)$, bu yerda

$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ ifoda faqat x ning funksiyasidan iborat bo'lishi kerak.

Masalan. Differensiali tenglamani yeching. $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$.

Yechish. Bu yerda $M = xy^2 + y$, $N = -x$. $\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy + 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$. $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$.

$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{xy^2 + y} = -\frac{2}{y} = \mu(y)$. $\mu(y) = \exp \left(-\int \frac{2}{y} dy \right) = \frac{1}{y^2}$. Berilgan tenglamaning

har ikki qismini $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ ga ko'paytirib: $\left(x + \frac{1}{y} \right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$. Bu to'la

differensialli differensiali tenglamadir $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \right)$. Bu tenglamani yechib

$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0$ umumiy yechimni hosil qilamiz.

9.3.3. Yuqori tartibli differensial tenglamalar

Ta'rif. n - tartibli oddiy differensial tenglama deb, $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda x - erkli o'zgaruvchi, y - izlanayotgan funksiya, $y', y'', \dots, y^{(n)}$ - birinchi, ikkinchi va h.k n - tartibli hosilalar.

n- tartibli hosilaga nisbatan yechilgan tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

n-tartibli tenglama uchun ham mavjudlik va yagonalik teoremasi o'rinli.

Teorema. Agar $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ tenglamada $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funksiya va uning $y, y', y^{(n-1)}$ argumentlari bo'yicha xususiy hosilalari $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ qiymatlarni o'z ichiga oluvchi biror sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa, otenglamaning $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir.

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - \text{boshlang'ich shartlar deyiladi.}$$

Tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlar bilan yechimini qidirish masalasi Koshi masalasi deyiladi.

Ta'rif. Tenglamaning umumiy yechimi deb shunday $y = \phi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ funksiyalar to'plamiga aytiladiki, ular $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, c_n$ o'zgarmaslarning ixtiyoriy qiymatida tenglamani qanoatlantirib, boshlang'ich shartlarga bo'ysunsa.

Ta'rif. Tenglamaning xususiy yechimi deb $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, c_n$ o'zgarmaslarning tayin $\tilde{n}_1^0, \tilde{n}_2^0, \dots, c_n^0$ qiymatlaridagi $y = \phi(x, \tilde{n}_1^0, \tilde{n}_2^0, \dots, c_n^0)$ funksiyasiga aytiladi.

9.3.4. Tartibi pasayadigan yuqori tartibli differensial tenglamalar

1. $y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishidagi tenglamalarni bevosita n marta x bo'yicha integrallash yordamida umumiy integrali topiladi.

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x) dx + c_1, y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^x f(x) dx \right) dx + c_1(x - x_0) + c_2, \dots,$$

$$y = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx \dots dx + \frac{c_1(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_2(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_n.$$

2. $y'' = f(x, y')$ ko'rinishidagi tenglamalarni $y' = p(x)$ deb, tartibini bittaga pasaytirish mumkin: $p' = f(x, p)$. Bu tenglamani integrallab, $p = p(x, c_1)$ umumiy yechimni topamiz. $y' = p(x)$ munosabatdan esa $y = \int p(x, c_1) dx + c_2$ umumiy integralni hosil qilamiz.

3. $y'' = f(y, y')$ ko'rinishidagi tenglamalarni $y' = p(y)$ deb, tartibini bittaga pasaytirish mumkin. Lekin, bunda $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$. U holda

$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallab, $p = p(y, c_1)$ umumiy yechimni topamiz. $y' = p(y)$ munosabatdan esa umumiy integralni hosil qilamiz.

4- mashg'ulot

9.4.1. O'zgarmas koeffisientli, chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar

9.4.2. Xarakteristik tenglama

9.4.3. Fundamental yechimlar sistemasi

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, ko'rsatish, pinbord.

9.4.1. O'zgarmas koeffisientli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar

Ta'rif. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu yerda y -izlanayotgan funksiya, $p(x), q(x), f(x)$ -biror (a, b) intervalda aniqlangan, uzluksiz funksiyalar.

Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda ikkinchi tartibli, chiziqli, bir jinsli tenglama deyiladi. Agar $f(x) = 0$ bo'lsa, u bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglama deyiladi.

Berilgan tenglamada $p(x)$ va $q(x)$ funksiyalar o'zgarmas bo'lgan holini qaraymiz. Bunday tenglamalar o'zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamalar deyiladi.

Demak, $y'' + py' + qy = f(x)$ ko'rinishdagi tenglamalarni qaraymiz, bu yerda p va q -ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Ushbu chiziqli bir jinsli $y'' + py' + qy = 0$ tenglamani qaraymiz, p va q - haqiqiy sonlar.

Ta'rif. Agar $y'' + py' + qy = 0$ tenglama $y_1(x), y_2(x)$ yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi: $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ faqat $c_1 = c_2 = 0$ bo'lgan holdagina o'rinli bo'lsa, u holda ular chiziqli erkli, aks holda chiziqli bog'liq deyiladi.

Teorema. Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ $y'' + py' + qy = 0$ tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa, u holda $y(x) = y_1(x) \pm y_2(x)$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Teorema. Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ $y'' + py' + qy = 0$ tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa, u holda $y(x) = \tilde{n}_1 y_1(x)$ va $y(x) = c_2 y_2(x)$ lar ham bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Teorema. Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ $y'' + py' + qy = 0$ tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa, u holda $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

n -tartibli chiziqli differensial tenglama deb quyidagi ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi: $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$ bu yerda $f(x), p_0(x), \dots, p_{n-1}(x) - (a, b)$ da berilgan uzluksiz funksiyalar.

$L[x] = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y$ deb belgilasak, qisqacha ushbu tenglamani hosil qilamiz: $L[y] = f(x)$.

Unga mos bir jinsli tenglama esa: $L[y] = 0$ ko'rinishda bo'ladi.

Teorema. $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$ tenglama

(a, b) kesmada $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yagona yechimga ega.

Teorema. Agar $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalar $L[y] = 0$ tenglamaning yechimlari bo'lsa, ularning chiziqli kombinatsiyasi $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_m y_m(x)$ shu tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Ta'rif. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar uchun $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$

Wronskiy determinant yoki berilgan funksiyalarning Wronskiyani deyiladi.

Teorema. Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ $[a; b]$ kesmada chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda bu funksiyalarning Wronskiy determinanti nolga teng.

Teorema. Agar $y'' + py' + qy = 0$ tenglamaning $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlaridan tuzilgan $W(y_1, y_2)$ Wronskiy determinanti tenglamaning koefitsientlari uzlusiz bo'lgan $[a; b]$ kesmadagi biror $x = x_0$ qiymatida nolga teng bo'lmasa, u holda u bu kesmagi x ning hech bir qiymatida nolga aylanmaydi.

Teorema. Agar $y'' + py' + qy = 0$ tenglamaning $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlari $[a; b]$ kesmada chiziqli erkli bo'lsa, u holda bu yechimlardan tuzilgan $W(y_1, y_2)$ Wronskiy determinanti berilgan kesmaning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

Ta'rif. $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi deb uning n ta $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ chiziqli erkli yechimlar sistemasiga aytiladi.

Ta'rif. Agar $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ funksiyalar $(m-1)$ tartibgacha hosilalarga ega bo'lsa, u holda ushbu m -tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Wronskiy determinanti (vronsian) deyiladi va $W(x)$ yoki $W[y_1, \dots, y_m]$ kabi belgilanadi.

Teorema. $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ tenglamaning $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimlari chiziqli erkli bo'lishi uchun ulardan tuzilgan Wronskiy determinanti noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Natija. Agar (a, b) ning bitta x_0 nuqtasida $W(x_0) \neq 0$ bo'lsa, ular (a, b) da chiziqli erkli sistemani tashkil etadi.

Ta'rif. $L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y' + p_0y = 0$ ko'rinishdagi tenglamalarga o'zgarmas koefitsientli, chiziqli, bir jinsli differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda $p_i = i = 0, 1, \dots, n-1$ - o'zgarmas sonlar.

Bu tenglamani yechish uchun uning fundamental yechimlari sistemasi, ya'ni n ta chiziqli erkli $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimlarni topish kerak. U holda uning umumiy

yechimi $y = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ - ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

9.4.2. Xarakteristik tenglama

$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ tenglamaning xususiy yechimlarini $y = e^{kx}$, $k = \text{const}$, ko'rinishda izlaymiz. U holda $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, ..., $y^{(n)} = k^n e^{kx}$

$$\text{Bularni tenglamaga qo'yib } L_n[e^{kx}] = e^{kx} [k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \dots + p_1k + p_0] = 0$$

$$\text{Bu yerdan } e^{kx} \neq 0 \text{ bo'lgani uchun } k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \dots + p_1k + p_0 = 0.$$

Demak, agar $k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \dots + p_1k + p_0 = 0$ algebraik tenglamaning yechimi bo'lsa,

$$y = e^{kx}$$

funksiya $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ ning xususiy yechimi bo'ladi.

Ta'rif. $k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \dots + p_1k + p_0 = 0$ algebraik tenglama

$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

9.4.3. Fundamental yechimlar sistemasi

Xarakteristik tenglamaning ildizlari uchun quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1-hol. $k_1, k_2, \dots, k_n$ - turli haqiqiy ildizlar bo'lsin. U holda n ta $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \dots, e^{k_nx}$ funksiyalar bir jinsli tenglamaning yechimlari bo'lib, $(-\infty, +\infty)$ da chiziqli erkli sistemani tashkil etadi. Shuning uchun, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y = \sum_{i=1}^n c_i e^{k_i x}$ funksiyadir.

Agar birorta k_j kompleks son ($k_j = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$) bo'lsa, qolgan sonlar orasida unga qo'shma bo'lgan $k_s = \alpha - i\beta, s \neq j$, son mavjuddir. Kompleks $e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}$ funksiyalar bir jinsli tenglamaning tenglamaning yechimi bo'lgani uchun $\frac{1}{2}[e^{(\alpha-i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}] = e^{\alpha x} \cos \beta x$ va $\frac{1}{2}[e^{(\alpha-i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}] = e^{\alpha x} \sin \beta x$ funksiyalar ham bir jinsli tenglamaning yechimi bo'ladi (bu yerda Eyler formulasi $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ dan foydalaniladi).

Bu holda $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \dots, e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, e^{k_nx}$ yechimlar sistemasi ham chiziqli erkli ekanligini ko'rsatish mumkin.

2-hol. k_1 xarakteristik tenglamaning m karrali ildizi bo'lsin.

Bu holda $e^{k_1x}, xe^{k_1x}, \dots, e^{m-1}e^{k_1x}$ funksiyalar bir jinsli tenglamaning ixtiyoriy (a, b) da chiziqli erkli yechimlari bo'ladi.

U holda bir jinsli tenglamaning fundamental yechimlari sistemasi quyidagicha bo'ladi:

$$e^{k_1x}, xe^{k_1x}, \dots, \tilde{\sigma}^{m-1}e^{k_1x}, e^{k_{m+1}x}, e^{k_{m+2}x}, \dots, e^{k_nx}$$

3-hol. Agar $k_1 - m$ karrali kompleks ildiz bo'lsa ($k_1 = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$), u holda unga qo'shma bo'lgan m karrali $\bar{k}_1 = \alpha - i\beta$ ildiz mavjuddir. Qo'shma $\bar{k}_1$ ildizga quyidagi yechimlar mos keladi: $e^{\bar{k}_1x}, xe^{\bar{k}_1x}, \dots, x^{m-1}e^{\bar{k}_1x}$.

Bularni mos ravishda qo'shib, ayirib, 2ga bo'lib, quyidagi 2 ta haqiqiy funksiyalar sistemalarini olamiz:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Sistemadagi kompleks funksiyalarni bu funksiyalar bilan almashtirilsa ,yana chiziqli erkli sistema hosil bo'ladi.

Masalan. Differensial tenglamani yeching. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Yechish. Bu differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi:

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0 \text{ ya'ni, } (k-2)(k^2-1) = 0 \text{ bo'ladi.}$$

Bu algebraik tenglamaning ildizlari $k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = -1$. Bu ildizlarga mos keluvchi yechimlar: $c_1 e^{2x}, c_2 e^x, c_3 e^{-x}$.

Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$ ko'rinishda bo'ladi.

5- mashg'ulot

9.5.1. O'zgaras koeffitsientli ,chiziqli,bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar

9.5.2. Tanlash usuli

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: hikoya, tezkor so'rov, pinbord.

9.5.1. O'zgaras koeffitsientli chiziqli,bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar

n -tartibli o'zgaras koeffitsientli chiziqli,bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglama deb quyidagi ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$$

bu yerda $f(x), p_0(x), \dots, p_{n-1}(x) \in (a, b)$ da berilgan uzluksiz funksiyalar.

Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda ikkinchi tartibli, chiziqli, bir jinsli tenglama deyiladi. Agar $f(x) = 0$ bo'lsa, u bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglama deyiladi.

Ta'rif. $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi deb uning n ta $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ chiziqli erkli yechimlar sistemasiga aytiladi.

Bu tenglamani yechish uchun uning fundamental yechimlari sistemasi, ya'ni n ta chiziqli erkli $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimlarni topish kerak. U holda uning umumiy

yechimi
$$y = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ - , ixtiyoriy o'zgaras sonlar.

9.5.2. Tanlash usuli

O'zgaras koeffitsientli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarning yechimini topish quyidagi fundamental teorema asoslanadi.

Teorema. Bir jinsli bo'lmagan $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$ - n -tartibli, chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi, uning xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat.

Maslan. Differensial tenglamani yeching. $y'' - 5y' + 4y = 8$.

Yechish: Unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz: $y = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$.

O'ng tomonning ko'rinishidan kelib chiqib, ushbu bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning xususiy yechimini $\tilde{y} = c$ ko'rinishda qidiramiz. Bu ifodani tenglamaga qo'ysak $c = 2$ bo'ladi.

Demak, tenglamaning umumiy yechimi: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + 2$

1-hol. Umumiy holda, xarakteristik tenglama s karrali nol ildizni o'z ichiga olsa va bir jinsli bo'lmagan tenglamaning o'ng tomoni n -darajali $P_n(x)$ ko'phad bo'lsa, tenglamaning xususiy yechimi $Q_n(x)^s$ ko'rinishda qidiriladi. Bu yerda $Q_n(x)$ n -darajali o'zgarmas koeffitsientli ko'phad.

2-hol. Umumiy holda, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning o'ng tomoni $P_n(x)e^{\alpha x}$ ko'rinishda bo'lsa, uning xususiy yechimi $\tilde{y}(x) = x^s Q_n(x)e^{\alpha x}$ ko'rinishda qidiriladi, α - xarakteristik tenglamaning ildizi, s uning karraligi.

3-hol. Tenglamaning o'ng tomoni $P_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_m(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$ bo'lib, $\alpha + i\beta$ xarakteristik tenglamaning s karrali ildizi bo'lsa, uning xususiy yechimi $\tilde{y} = x^s [U_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V_m(x)e^{\alpha x} \sin \beta x]$ ko'rinishda qidiriladi. Bu yerda $U_n(x)$ va $V_n(x) - P_n(x)$ va $Q_n(x)$ ko'phadlarning umumiy ko'rinishi.

6-mashg'ulot

9.6.1. O'zgaras koeffisientli, chiziqli differensial tenglamar sistemaslari

9.6.2. Differensial tenglamalar nazariyasining iqtisodiyotdagi tadbirlari

9.6.3. Keynsning dinamik modeli

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: ma'ruza, ko'rsatish, bahs-munozara.

9.6.1. O'zgaras koeffisientli, chiziqli differensial tenglamar sistemaslari

Odatda, differensial tenglamalar isitemalari qaralayotgaganda, funksiya argumentlari t orliqi, noma'lum funksiyalar esa $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ orqali belgilanadi.

[illegible]

ko'rinishdagi tenglamalar sistemasiga birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi deyiladi.

(1) tenglamaning $x_{10} = x_1(t_0), x_{20} = x_2(t_0), \dots, x_{n0} = x_n(t_0)$ (2)

shartlarni qanolantiruvchi yechimini topish masalasi boshlang'ich shartli masala yoki Koshi masalasi deyiladi. (2) shartlar boshlang'ich shartlar yoki Koshi shartlari deyiladi.

Teoreme (yechimninng mavjudligi va yagonaligi). Agar

$f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ($i=1, 2, \dots, n$) funksiyalar va barcha

$$\frac{\partial f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n) \text{ xususiy hosilalar}$$

boshlang'ich qiymatlarning atrofida uzluksiz bo'lsa, u holda (1) tenglamaning (2) shartni qanoatlantiruvchi yechimi shu atrofda mavjud va yagonadir.

Ta'rif. Ushbu

[illegible]

Bu yerda $a_{ij} - const$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$) - sistemaning koeffitsientlari
 deviladi.

Quyidagich belgilashlarni qabul qilsak ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

u holada (3) sistemani

$$\frac{dX}{dt} = AX + F \quad (4)$$

matrisaviy ko'rinishda yozish mumkin.

Ta'rif. Agar (4) sistemada $F = 0$, hosil bo'lgan

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (5)$$

sistema (4) sistemaga mos bir jinsli sistema deyiladi.

[illegible]

Kursimizda chiziqli, bir jinsli, o'zgarmas koeffisientli differensial tenglamalar sistemalarini o'rganamiz.

Bir jinsli yoki bir jinsli bo'lmagan o'zgaras koeffisientli, chiziqli differensial tenglamalar sistemasini bitta yuqori tartibli o'zgaras koeffisientli, chiziqli differensial tenglamaga keltirib integrallash usuli qulay hisoblanadi.

Soddalik uchun bu usulni ikki noma'lum funksiyali bir jinsli, o'zgarmas koeffisientli, chiziqli differensial tenglama uchun o'rganamiz.

Bu sistemening ko'rinishi quyidagicha

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \end{cases} \quad (7)$$

Sistemening birinchi tenglamasini t bo'yicha differensiallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = a_{11} \frac{dx_1(t)}{dt} + a_{12} \frac{x_2(t)}{dt} \quad (8).$$

(8) sistemada $\frac{dx_1(t)}{dt}$ va $\frac{x_2(t)}{dt}$ hosilalarni (7) sistemedagi ifodalarini qo'yib:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = a_{11}(a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)) + a_{12}(a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)) ,$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})x_1(t) + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22})x_2(t)$$

yoki

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t) .$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} = b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t) \end{cases}$$

sistemada $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} \neq 0$ bo'lsa, u holda bu sistemani $x_1(t)$ va $x_2(t)$ noma'lumlarga

nisbatan yechish mumkin. Bunda $x_1(t)$ va $x_2(t)$ noma'lum funksiyalarga

$\frac{dx_1}{dt}$ va $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ hosilalar orqali chiziqli ifodalanadi.

$$x_1(t) = a \frac{dx_1}{dt} + b \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (9), \quad x_2(t) = c \frac{dx_1}{dt} + d \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (10)$$

(9) $x_1(t)$ funksiyaga nisbatan ikkinchi tartibli, bir jinsli, o'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamadir. Uni yechib $x_1(t)$ funksiyani hosil qilamiz. Topilgan $x_1(t)$ funksiyani ikkinchi tenglamaga qo'yib $x_2(t)$ funksiyani hosil qilamiz.

$$\text{Masalan, } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 5x_2 \end{cases} \quad \text{differensial tenglamalar sistemasini yechish uchun}$$

sistemaning birinchi tenglamasini t bo'yicha differensiallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 3 \frac{dx_1}{dt} + 2 \frac{dx_2}{dt} = 3(3x_1 + 2x_2) + 2(4x_1 + 5x_2) = 17x_1 + 16x_2 .$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 17x_1 + 16x_2 \end{cases}$$

sistemani $x_1(t)$ va $x_2(t)$ noma'lumlarga nisbatan yechib:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} - 8 \frac{dx_1}{dt} &= -7x_1 \\ 3 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - 17 \frac{dx_1}{dt} &= 14x_2 . \end{aligned}$$

Birinchi tenglamani yechamiz.

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - 8 \frac{dx_1}{dt} + 7x_1 = 0.$$

$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{7t}.$$

$$x_2(t) = -C_1 e^t + 2C_2 e^{7t}.$$

Buning uchun

[illegible]

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \dots, x_n = \alpha_n e^{kt}$$

sistemaga qo'yib, e^{kt} ifodaga bo'lib va barcha hadlarni nenglikning bir tomoniga yig'ib, quyidagi sistemani hosil qilamiz

[illegible]

[illegible]

Quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

α_i^j ($i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,n$) qiymatlar topiladi va ularni izlanayotgan yechim ko'rinishiga qo'yib, sistemaning n ta xususiy yechimlari hosil qilinadi.

$$x_1^{(j)} = \alpha_1^{(j)} e^{k_j t}, x_2^{(j)} = \alpha_2^{(j)} e^{k_j t}, \dots, x_n^{(j)} = \alpha_n^{(j)} e^{k_j t} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

Bu yechimlarni matrisaviy ko'inishda

$$X_1 = A^{(1)}e^{k_1t}, X_2 = A^{(2)}e^{k_2t}, \dots, X^{(N)} = A^{(N)}e^{k_nt} \quad ,$$

bu yerda

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \dots \\ \alpha_i^{(n)} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Masalan, $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$ differensial tenglamalar sistemasini yechaylik.

Berilgan sistemaga mos xarakteristik tenglama quyidagicha bo'ladi

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$k^2 - 4k - 5 = 0.$$

Bu tenglama ildizlari $k_1 = -1$, $k_2 = 5$. Ularga mos yechimlar esa

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1^{(1)} e^{-t}, y_1 = \alpha_2^{(1)} e^{-t} \\ x_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t}, y_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t} \end{cases}.$$

$x_1 = \alpha_1^{(1)} e^{-t}$, $y_1 = \alpha_2^{(1)} e^{-t}$ yechimlarni berilgan sistemaga qo'yib

$$\begin{cases} -\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} \\ -\alpha_2^{(1)} = 4\alpha_1^{(1)} + 3\alpha_2^{(1)} \end{cases} \text{ yoki } \alpha_2^{(1)} = -\alpha_1^{(1)}.$$

Demak, $x_1 = C_1 e^{-t}$, $y_1 = -C_1 e^{-t}$, $C_1 = \alpha_1^{(1)}$.

$x_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t}$, $y_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t}$ yechimlarni berilgan sistemaga qo'yib

$\alpha_2^{(2)} = 2\alpha_1^{(2)}$ ekanligini hosil qilamiz.

Demak, $x_1 = C_2 e^{5t}$, $y_1 = 2C_2 e^{5t}$, $C_1 = \alpha_1^{(2)}$.

Sistema chiziqli bo'lgani uchun sistemaning umumiy yechim

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}$$

ko'rinishda bo'ladi.

II - hol. Agar xarakteristik tenglama γ karrali k ildizga ega bolsa, u holda sistema yechimlari quyidagi ko'rinishda izlanadi

$$X(t) = (A_0^{(s)} + A_1^{(s)} t + \dots + A_{\gamma-1}^{(s)} t^{\gamma-1}) e^{k_s t}, \quad (14)$$

bu yerda

$$A_i^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i}^{(s)} \\ \alpha_{2i}^{(s)} \\ \dots \\ \alpha_{ni}^{(s)} \end{pmatrix}, \alpha_{ij}^{(s)} = \text{const}.$$

Masalan,
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases} \quad \text{differensial tenglamalar sistemasini yechamiz}$$

Sistemaning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \quad .$$

Bu tenglama ildizlari $k_1 = k_2 = 2$.

Demak, yechimni

$$\begin{cases} x = (\alpha_1 + \beta_1 t) e^{2t} \\ y = (\alpha_2 + \beta_2 t) e^{2t} \end{cases}$$

ko'rinishida izlaymiz.

Yechimlarni berilgan sistemaga qo'yib

$$2\alpha_1 + \beta_1 + 2\beta_1 t = \alpha_1 + \beta_1 t - \alpha_2 - \beta_2 t,$$

bundan esa

$$\beta_2 = -\beta_1,$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1 - \beta_1.$$

Bu yerda α_1 va β_1 ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lgani uchun ularni mos ravishda C_1 va C_2 orqali belgilab, quyidagi umumiy yechimga ega bo'lamiz

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_1 t) e^{2t} \\ y = -(C_2 + C_2 + C_2 t) e^{2t}. \end{cases}$$

III-hol. Agar xarakteristik tenglama $k_j = p + iq$ ildizga ega bo'lsa, u holda unga mos

$$X_j = A^{(j)} e^{k_j t}$$

yechimni ikkita haqiqiy yechimga: shu ildizga mos kompleks funksiyaning haqiqiy va mavhum qismidagi funksiyalariga almashtirish mumkin.

Masalan,
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases} \quad \text{sistemani yechaylik.}$$

Sistemaga mos xarakteristik tenglama
$$\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0$$

Yoki
$$k^2 + 9 = 0 \quad .$$

Bu tenglama ildizlari $k_{1,2} = \pm 3i$.

Demak, yechimni

$$\begin{cases} x = \alpha_1 e^{3it} \\ y = \alpha_2 e^{3it} \end{cases}$$

ko'rinishida izlaymiz.

Bularni sistemaga qo'yib

$$(1-3i)\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0.$$

Bu tenglamani, masalan, $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 1-3i$ yechimlar qanoatlantiradi.

Demak,

$$\begin{cases} x = 5e^{3it} = 5(\cos 3t + i \sin 3t) \\ y = (1-3i)e^{3it} = (1-3i)(\cos 3t + i \sin 3t). \end{cases}$$

Bu yechimlarning haqiqiy va mavhum qismlari berilgan sistemaning yechimlari bo'ladi, ularning chiziqli kom, inatsiyalari esa umumiy yechim bo'ladi:

$$\begin{cases} x = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t \\ y = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\cos 3t - 3\sin 3t). \end{cases}$$

9.6.2. Differensial tenglamalar nazariyasining iqtisodiyotdagi tadbiqlari Ishlab chiqarishning tabiiy o'sish modeli

Faraz qilaylik, qandaydir mahsulot p narx bilan sotiladi, $Q(t)$ funksiya t vaqt mobaynida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori o'zgarishini bildiradi desak, u holda t vaqt davomida $pQ(t)$ ga teng daromad olinadi. Aytaylik olingan daromadning bir qismi mahsulot ishlab chiqarish investitsiyasiga sarf bo'lsin, ya'ni

$$I(t) = mpQ(t) \quad (1)$$

m - investitsiya normasi, o'zgarmas son va $0 < m < 1$.

Agar bozor yetarlicha ta'minlangan va ishlab chiqarilgan mahsulot to'la sotilgan degan tasavvurdan kelib chiqilsa, ishlab chiqarish tezligining yana oshishiga (akselatorga) olib keladi. Ishlab chiqarish tezligi esa investitsiyaning o'sishiga proporsional, ya'ni

$$Q' = lI(t), \quad (2)$$

bu yerda $1/l$ - akselator(o'sish) normasi. (1) formulani (2) ga qo'yib

$$Q' = kQ, \quad k = lmp \quad (3)$$

differensial tenglamani olamiz. (3) o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. Bu tenglama umumiy yechimining ko'rinishi $Q = Ce^{kt}$, bunda C - ixtiyoriy o'zgarmas son.

Faraz qilaylik, boshlang'ich $t = t_0$ momentda mahsulot ishlab chiqarish hajmi Q_0 ma'lum bo'lsin. U holda bu shartdan C o'zgarmasni aniqlash mumkin:

$Q_0 = Ce^{kt_0}$, bundan $C = Q_0 e^{-kt_0}$. Natijada (3) tenglama uchun Koshi masalasining yechimini topamiz:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \quad (4)$$

Shunga e'tibor berish kerakki, matematik modellar umumiylik xossasiga ega. Aholining o'sishi dinamikasini, bakteriyalarning ko'payish jarayoni, radioaktiv parchalanish jarayonlari ham (4) formula bilan ifodalanadigan qonuniyatga bo'ysunadi.

Masalan.

1. Agar $Q' = kQ$ tenglamadagi proporsionallik koeffitsiyenti 0,1 ga teng bo'lsa, realizasiya qilingan mahsulot miqdori boshlang'ich vaqtdagi bilan solishtirilganda, qancha vaqt o'tgandan keyin ikki marta ko'payadi?

Realizasiya qilingan mahsulot miqdorini ikkilanishiga ketadigan vaqtni 20% ga qisqartirish uchun investitsiya normasini qancha foizga oshirish kerak?

Mahsulot miqdori boshlang'ich vaqtdagi bilan solishtirilganda ikki marta ko'payadigan vaqtni aniqlash uchun (4) bog'lanishda $t_0 = 0, k = 0,1, Q = 2Q_0$ deb olish yetarli. U holda $2Q_0 = Q_0 e^{0,1t}$ tenglikka kelamiz, bundan $t = 10 \ln 2 \approx 6,93$ vaqt birligi zarur bo'ladi.

Endi realizasiya qilingan mahsulot miqdorini ikkilanishiga ketadigan vaqtni 20% ga qisqartirish uchun investitsiya normasini hisoblaymiz.

$$t_1 = 0,8t, k_1 = \frac{k}{0,8} = 1,25k,$$

ya'ni investitsiya normasini 25% ga oshirish kerak.

2. Talab va taklif funksiyalari mos ravishda

$$y = 25 - 2p + 3\frac{dp}{dt}, x = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}.$$

Agar boshlang'ich momentida $p=9$ bo'lsa, muvozanat narxinig vaqtga bog'liqligini topaylik.

Talab va taklifning tengligidan $25 - 2p + 3\frac{dp}{dt} = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}$, bundan $\frac{dp}{dt} = 10 - p$, ya'ni o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechib, $p = 10 - Ce^{-t}$ bog'lanishni hosil qilamiz. $p(0) = 9$ shartdan, $C = 1$ kelib chiqadi, nihoyat $p = 10 - e^{-t}$ va $\lim_{t \rightarrow \infty} p = \lim_{t \rightarrow \infty} (10 - e^{-t}) = 10$ bo'lib, narx turg'unlikka ega bo'ladi.

3. k - doimiy elastiklikka ega funksiya topilaylik.

Elastiklik ta'rifi va masala shartidan quyidagiga egamiz: $\frac{p}{Q} Q' = k$

ya'ni $\frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = k$.

$p \neq 0$ shartda $\frac{dQ}{Q} = k \cdot \frac{dp}{p}$ munosabatni hosil qilamiz. Bu tenglikni integrallab, $\ln|Q| = k \ln|p| + \ln C$, bundan esa $Q = C \cdot p^k$ yechimni hosil qilamiz.

Raqobat sharoitida ishlab chiqarishning o'sishi (Logistik o'sish)

Faraz qilaylik, $p = p(Q)$ -kamayuvchi funksiya bo'lsin, ya'ni ishlab chiqarish o'sishi bilan bozor to'yinadi va narx pasaya boradi: $\frac{dp}{dQ} < 0$. U holda tabiiy o'sish modeli

$$Q' = \alpha \cdot p(Q) \cdot Q \quad (5)$$

ko'rinishida bo'ladi, bu erda $\alpha = \ell m$.

Tenglamaning o'ng tomonidagi barcha ko'paytuvchilar musbatligidan $Q' > 0$, ya'ni $Q(t)$ funksiya o'suvchi.

Funksiyaning o'sish xarakteri (qavariq yoki botiqligi) uning ikkinchi tartibli hosilasi bilan aniqlanadi. (5) tenglamadan ushbu

$$Q'' = \alpha \left[Q'p(Q) + Q \frac{dp}{dQ} Q' \right] = \alpha Q' \left(p + \frac{dp}{dQ} Q \right).$$

tenglik kelib chiqadi.

Talab elastikligini kiritib, bu tenglikning ko'rinishini o'zgartirish mumkin:

$E(p) = \frac{Qdp}{pdQ}$, tenglikka ko'ra $Q'' = \alpha Q'p \left(1 + \frac{Qdp}{pdQ} \right)$, yoki $\frac{dQ}{dp} < 0$ bo'lgani uchun $E < 0$, nihoyat

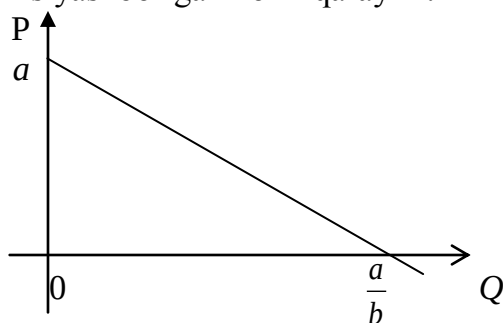
$$Q'' = \alpha Q'p(1 - 1/|E|) \quad (6)$$

tenglik hosil bo'ladi.

(6) tenglamadan elastik talabda, ya'ni $|E| > 1$ shartda, $Q'' > 0$ ekanligi kelib chiqadi va $Q(t)$ funksiyaning grafigi pastga qavariq ekanligi ma'lum bo'ladi. Bu esa mahsulot hajmining progressiv o'sishini bildiradi.

Noelastik talabda $|E| < 1$ va bu holda $Q'' < 0$ bo'lgani uchun $Q(t)$ funksiya yuqoriga qavariq, bu esa mahsulot hajmining sekin o'sishini (ya'ni yetarlicha ta'minlanganlikni) bildiradi.

Soddalik uchun, $P(Q) = a - bQ$, $a > 0, b > 0$ talab funksiyasi ishlab chiqarish funksiyasining chiziqli funksiyasi bo'lgan holni qaraylik.

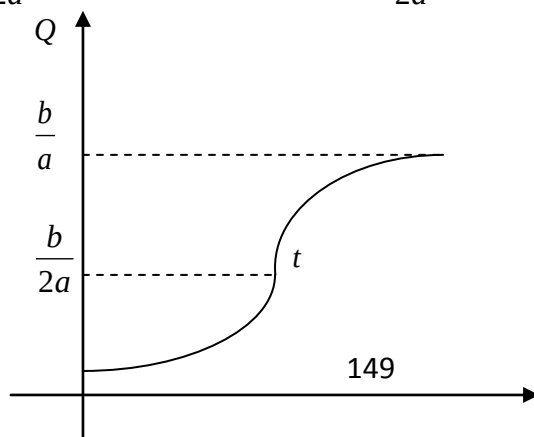


U holda (5) tenglama ushbu $Q' = \alpha(a - bQ)Q$ (7)

ko'rinishda bo'ladi. Agar $Q = 0$ yoki $Q = \frac{b}{a}$ bo'lsa, u holda $Q' = 0$ bo'ladi.

Demak, $Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ)$. (8)

Shuningdek, $Q < \frac{b}{2a}$ bo'lganda $Q'' > 0$ va $Q > \frac{b}{2a}$ bo'lganda esa $Q'' < 0$ bo'ladi.



$Q = Q(t)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi $t = Q = a/2b$. Bu holda $Q(t)$ yechimni aniq topish mumkin. (7) tenglamada o'zgaruvchilarni ajratib

$$\frac{dQ}{Q(a-bQ)} = \alpha dt$$

yoki $\frac{1}{a} \left(\frac{1}{Q} + \frac{b}{a-bQ} \right) dQ = \alpha dt.$

Bu munosabatni integrallab $\ln|Q| - \ln|a-bQ| = \alpha at + \ln C$

yoki $\frac{Q}{a-bQ} = Ce^{\alpha at}$. Bundan $Q(t) = \frac{aCe^{\alpha at}}{1+bCe^{\alpha at}}$

Chizmada kelitirilgan bu funksiyaning grafigi ((7) differensial tenglamaning integral egri chiziqlaridan biri) *logistik egri chiziq* deyiladi.

Bunday egri chiziqlar boshqa dinamik jarayonlarni ham xarakterlaydi. Masalan, ma'lumot(reklama) tarqalishi, organik muhitda bakteriyalarning ko'payishi, biologik organizmlarning chegaralangan muhitida epidemiya tarqalish dinamikasi jarayoni modellarini ifodalaydi.

9.6.3. Keynsning dinamik modeli

Dinamikaning asosiy komponentlari bo'lgan iqtisodiyotning daromad va harakatlarni bog'lovchi sodda balans modelini qaraymiz. Faraz qilaylik, $Y(t), E(t), S(t), I(t)$ -mos ravishda milliy daromad, davlat xarajatlari, iste'mol va investitsiya funksiyasi bo'lsin. U holda quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$\begin{aligned} Y(t) &= S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) &= a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) &= k(t)Y'(t) \end{aligned} \quad (9)$$

bu yerda $a(t)$ -iste'molga moyillik koeffitsienti ($0 < a(t) < 1$), $b(t)$ -chekli iste'mol, $k(t)$ -akseleratsiya normasi. (9) tenglamalarda ishtirok etuvchi barcha funksiyalar musbat.

(9) tenglamalarning ma'nosini oydinlashtiramiz. Barcha xarajatlarning yig'indisi milliy daromadga teng bo'lishi zarur - bu tenglik birinchi tenglamada ifodalangan. Xalq xo'jaligidagi umumiy iste'mol, milliy daromadning bir qismi bo'lgan ichki iste'mol va chegaraviy iste'moldan iborat bo'ladi. Mana shu jarayon ikkinchi tenglamada aks ettirilgan. Nihoyat investitsiya hajmi ixtiyoriy bo'lishi mumkin emas: u davlat texnologiyasi va infratuzilmasi xarakterlaydigan iqtisodiy ko'rsatkich bo'lib, akselator normasining oxirgi milliy daromadga ko'paytmasi bilan aniqlanadi, bu jarayon uchinchi tenglik bilan ifodalangan.

Faraz qilaylik, $a(t), b(t), k(t)$ va $E(t)$ funksiyalar berilgan. Bu funksiyalar davlat evolyutsiyasi va faoliyatini xarakterlaydi. Milliy daromad dinamikasini aniqlash, ya'ni t vaqtning funksiyasi bo'lgan Y ni topish masalasi asosiy iqtisodiy masalalardan biridir.

Ikkinchi tenglamadan $S(t)$ ni va uchinchi tenglamadan $I(t)$ ni birinchi tenglamaga qo'yamiz. $Y(t)$ funksiyaga nisbatan chiziqli bir jinsli bo'lmagan birinchi tartibli differensial tenglama hosil bo'ladi:

$$Y' = \frac{1-a(t)}{k(t)} Y - \frac{b(t)+E(t)}{k(t)} \quad (10)$$

Biz asosiy a, b, k parametrlarni o'zgarmas sonlar deb faraz qilib, ancha sodda holni tekshiramiz. U holda (10) tenglama o'zgarmas koeffitsientli birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga aylanadi:

$$Y'_t = \frac{1-a}{k} Y - \frac{b+E}{k}. \quad (11)$$

Ma'lumki, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi uning qandaydir xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat. (11) tenglamaning xususiy yechimi $\tilde{Y}$ sifatida $Y' = 0$ dagi, ya'ni muvozanat yechimini olamiz, ya'ni

$$\tilde{y} = \frac{b+E}{1-a}. \quad (12)$$

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $Y_0^{(t)} C \exp\left(\frac{1-a}{k} t\right)$ formula bilan beriladi.

Demak, (11) tenglamaning umumiy yechimi

$$Y(t) = \frac{b+E}{1-a} + C e^{\frac{1-a}{k} t} \quad (13)$$

(11) tenglamaning integral egri chiziqlari chizmada ko'rsatilgan.

Agar vaqtning boshlang'ich momentida $Y_0 < Y_p$ bo'lsa, u holda $C = Y_0 - Y_p < 0$ va egri chiziqlar (12) muvozanat yechimdan pastga ketadi, yani milliy daromad vaqt o'tishi bilan masalaning berilgan parametrlari a, b, k va E da kamayadi, chunki (13) da eksponenta darajasi musbat. Agar $Y_0 > Y_p$ bo'lsa, u holda $C > 0$ va vaqt o'tishi bilan milliy daromad o'sadi – integral egri chiziqlar $Y = Y_0$ muvozanat to'g'ri chizig'idan yuqoriga ketadi.