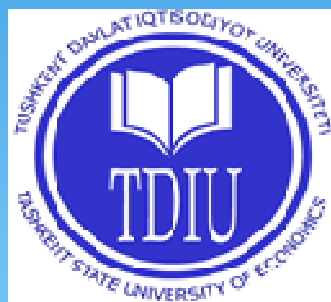


**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT
UNIVERSITETI**



“OLIIY MATEMATIKA” KAFEDRASI

IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA

KIRISH

Iqtisodiy yo'nalishlar uchun “Iqtisodchilar uchun matematika” fani matematikaning analitik geometriya, oliy va chiziqli algebra, matematik analiz, differensial tenglamalar bo'limlarini o'z ichiga oladi. “Iqtisodchilar uchun matematika” fani deyarli barcha fanlar bilan bog'liq, ko'p fanlar uchun asos bo'lganligi uchun ulardan oldin, asosan kursda o'tiladi.

O'quv fanining maqsadi va vazifalari

“Iqtisodchilar uchun matematika” fanining asosiy vazifalari – talabalarni mantiqiy fikrlashga, nazariy bilimlarni amaliyotga bevosita tatbiq etishga, to'g'ri xulosa chiqarish va to'g'ri qaror qabul qilishga o'rgatishdan iboratdir.

1-mavzu. Chiziqli algebra

1-mashg'ulot

1.1. Matrisalar

1.2. Matrisalar ustida amallar

1.3. Determinantlar

**Qo'llaniladigan pedagogik
texnologiyalar: aqliy hujum, bahs-
munozara, ma'ruza.**

1.1. Matrisalar

Ta'rif. O'lchamlari $m \times n$ bo'lgan matritsa deb, satrlar soni m ga, ustunlar soni n ga teng bo'lgan va $m \cdot n$ ta sondan tashkil topgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi sonli jadvalga aytiladi.

Matritsalar lotin alifbosining katta harflari A,B,C va h.k. bilan belgilanadi va matritsani tashkil etuvchi sonlar uning elementlari deb atalib, matritsaning

i –satri va j -ustuni kesishmasida joylashgan elementi
-ko'rinishda yoziladi.

a_{ij}

Matritsalar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda yoki qisqacha $A = (a_{ij}), i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ shaklda ham ifodalanishi mumkin. Matritsalar ni ifodalashda $\| \cdot \|$ yoki $[.]$ belgilardan ham foydalaniladi.

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \quad - \text{vektor —satr,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ b_{m1} \end{pmatrix} \quad - \text{vektor-ustun}$$

Ta'rif. Satrlari soni ustunlari soniga teng bo'lgan matritsa kvadrat matritsa deyiladi.

Ta'rif. Agar kvadrat matritsa uchun $i \neq j$ bo'lganda $a_{ij} = 0$ bo'lsa, bunday matritsa diogonal matritsa deyiladi.

Ta'rif. Agar diogonal matritsada barcha $i = \overline{1, n}$ lar uchun $a_{ii} = 1$ bo'lsa, bunday matritsa birlik matritsa deb ataladi va E bilan belgilanadi, ya'ni

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 1 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

Ta'rif. Agar A matritsa elementlarining tartib raqamlarini o'zgartirmagan holda mos satrlarini mos ustun yoki ustunlarini satr qilib almashtirsak, hosil bo'lgan yangi matritsa A matritsaning transponirlangani deb nomlanib, A' (yoki A^T) shaklda belgilanadi.

$$1.(A)' = A$$

$$2.(\lambda A)' = \lambda \cdot A$$

$$3.(A+B)' = A' + B'$$

$$4.(A \cdot B)' = B' \cdot A'$$

1.2. Matrisalar ustida amallar

Ta'rif. Bir xil o'lchamli $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ matritsalar uchun ularning yig'indisi deb shu o'lchamli $C=(c_{ij})$ matritsaga aytiladiki, istalgan $i=\overline{1,n}$ va $j=\overline{1,m}$ lar uchun $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ tenglik orqali aniqlanadi va matritsalar yig'indisi $A+B$ shaklda belgilanadi, ya'ni $C=A+B$.

Ta'rif. $A=(a_{ij})$ matritsaning λ -songa ko'paytmasi deb shunday C matritsaga aytiladiki, bunda C matritsa elementlari ushbu $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ tenglik orqali aniqlanadi.

Ta'rif. $A=(a_{ij})_{m \times n}$ va $B=(b_{ij})_{n \times k}$ matritsalar ko'paytmasi deb shunday matritsaga aytiladiki, uning $C=(c_{ij})_{m \times k}$

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, k}$$

elementi tenglik orqali aniqlanib, matritsalar ko'paytmasi ko'rinishda ifodalanadi.

A matritsaning B matritsaga ko'paytmasini aniqlashda, A matritsaning ustunlar soni B matritsaning satrlar soniga teng bo'lishi talab etiladi.

Masalan. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 10,5 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ matrisalar uchun ko'paytmani aniqlang.

Yechish.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 10,5 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 6 + 0 \cdot 10,5 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 6 + 0 \cdot 10,5 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 6 + 1 \cdot 10,5 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 6 & 3 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 6 + 2 \cdot 10,5 + 0 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 0 \cdot 6 & 0 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 14 & 12 \\ 28,5 & 12 & 21 \\ 21 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 10,5 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 12 \\ 28,5 & 12 & 21 \\ 21 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

A n -tartibli kvadrat matritsa bo'lsin. U holda

$$A \cdot E = E \cdot A = A \quad \text{va}$$

$$O \cdot A = A \cdot O = O$$

munosabatlar o'rinli .

Natural k son uchun A matritsaning « k -darajasi»

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k - m a r t a}$$

Shartli ravishda va deb qabul qilinadi.

$$A^0 = E \quad , \quad A^1 = A$$

Matrisalarning iqtisodiyotdagi tadbiqlari

Masalan. Agr 17,5 % QQS (Qo'shimcha qiymat solig'i) qo'yilganda avtomashina ijarasiga bo'lgan narxlar $p = [139 \quad 160 \quad 205 \quad 340 \quad 430]$.

v soliqsiz narx vektori aniqlang.

Yechish. 17,5 % QQS da asosiy foiz stavkasi 117,5% bo'ladi. Suning uchu soliqsiz narx vektori

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{1}{1.175} \right) \cdot p = \left(\frac{1}{1.175} \right) \cdot [139 \quad 160 \quad 205 \quad 340 \quad 430] = \\ &= \left[\left(\frac{1}{1.175} \right) 139 \quad \left(\frac{1}{1.175} \right) 160 \quad \left(\frac{1}{1.175} \right) 205 \quad \left(\frac{1}{1.175} \right) 340 \quad \left(\frac{1}{1.175} \right) 430 \right] = \\ &= [118.30 \quad 136.17 \quad 174.47 \quad 289.36 \quad 365.96] \end{aligned}$$

Iqtisodiy modellarda, ayniqsa ekonometrik tahlilda koeffisientlarni baholashda bir o'zgaruvchini boshqa vektorga bog'liq holda tushuntiriladi. Bunga misol sifatida $q = \beta x$ vector funksiyani keltirish mumkin, bunda β x o'zgaruvchi berilgan vector uchun vector koeffisient hisoblanadi.

Maslan. T vaqtda neftga bo'lgan talab chiziqli bo'lsin

$$q^t = \beta_0 + \beta_1 x_1^t + \beta_2 x_2^t + \beta_3 x_3^t + \beta_4 x_4^t + \beta_5 x_5^t$$

bu yerda yuqorigi indekslardagi t vaqt davrini ifodalaydi(darajani emas)

x_1 = neft narxi

x_2 = o'rtacha daromad

x_3 = o'rinbosar yoqilg'i narxi

x_4 =komplemanin narxi (masalan, avtomobil)

x_5 = aholi.

1.3. Determinantlar

Ta'rif. n -tartibli kvadrat $A = (a_{ij})$ matritsaning determinanti deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k}$$

Bu ta'rifdan foydalanib 2 va 3 tartibli determinantlarni hisoblash uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{k=1}^3 a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + \\ &+ a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{21} a_{12} a_{33} \end{aligned}$$

Masalan.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = ?$$

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33.$$

Determinantlarning xossalari

- * **1-xossa.** Agar determinantning biron-bir satri (ustun) dagi barcha elementlari nolga teng bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng bo'ladi.
- * **2-xossa.** Agar determinantning biron-bir satr (ustun) elementi soniga ko'paytirilsa, determinant qiymati ham shu soniga ko'payadi.
- * **3-xossa.** Transponirlashdan determinantning qiymati o'zgarmaydi.
- * **4-xossa.** Agar determinantning ikkita qo'shni satrlari o'rnini almashtirsak, determinantning qiymati qarama – qarshisiga o'zgaradi.
- * **5-xossa.** Agar Determinant bir xil ikki satrga (ustunga) ega bo'lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo'ladi.

- * **6-xossa.** Agar determinantda ikki satrning (ustun) mos elementlari proporsional bo'lsa, u holda uning qiymati nolga teng.
- * **7-xossa.** Agar determinantning biron satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib yig'indi hosil qilsak, bunday yig'indi nolga teng bo'ladi, ya'ni .
- * **8- xossa.** Determinanning biron-bir satri (ustuni) elementlarini bir xil songa ko'paytirib, boshqasiga qo'shishda determinantning qiymati hosil bo'ladi.
- * **9-xossa.** Matritsalar ko'paytmasining determinanti, ularning determinantlari ko'paytmasiga teng bo'ladi.

2-mashg'uloti.

2.1. Yuqori tartibli determinantlar.

2.2. Teskari matritsa.

2.3. Matritsa rangi.

**Qo'llaniladigan pedagogik
texnologiyalar: Tushuntirish,
tezkor-so'rov, ma'ruza.**

2.1. Yuqori tartibli determinantlar

Ta'rif. n -tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ matritsa a_{ij} elementining M_{ij} -minori deb, A -matritsaning i -satri va j -ustunini o'chirishdan keyin hosil bo'lgan $(n-1)$ tartibli matritsa determinantiga aytiladi.

Ta'rif. n -tartibli $A=(a_{ij})$ matritsa a_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} -deb quyidagi songa aytiladi $A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$.

Ta'rif. n -tartibli $A=(a_{ij})$ kvadrat matritsaning determinanti deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k}$$

Laplas teoremasi. Istalgan i va j lar uchun

$$\sum_{s=1}^n a_{is} A_{is} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} = |A| \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,n}$$

Masalan.
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = 91.$$

2.2. Teskari matritsa

Ta'rif. A kvadrat matritsaga teskari matritsa deb, shunday matritsaga aytiladiki, uning uchun

A^{-1} tenglik o'rinli bo'lsin.

Ta'rif. Agar $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ matritsa uchun bo'lsa, bunday matritsa xos bo'lmagan matritsa, $|A| \neq 0$ bo'lsa xos matritsa deyiladi.

Teorema. Kvadratik matritsaga teskari matritsa mavjud va yagona bo'lishi uchun, uning xos bo'lmagan matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

Teskari matrisa hisoblash formulasi

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n2} \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{jk} & \dots & A_{nk} \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{jn} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Masalan. Berilgan matrisaga teskari matrisani toping.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33.$

$$A_{11} = -16, A_{12} = 9, A_{13} = 31$$

$$A_{21} = 9, A_{22} = -3, A_{23} = -3$$

$$A_{31} = 11, A_{32} = 0, A_{33} = -11$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{33} & -\frac{1}{11} \\ \frac{11}{33} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

2.3. Matrisa rangi

Ta'rif. A matritsaning rangi deb uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga aytilib, $r(A)$ orqali belgilanadi.

Ta'rif. Matritsa ustidagi elementar almashtirishlar deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi:

1. Barcha elementlari noldan iborat satrni (ustunni) tashlab yuborish.
2. Satrning (ustunning) barcha elementlarini noldan farqli songa ko'paytirish.
3. Satr (ustun) o'rinlarini almashtirish.
4. Berilgan satr (ustun) elementlariga boshqa satr (ustun) elementlarini biron songa ko'paytirib qo'shish.
5. Matritsani transponirlash.

Teorema. Matritsa rangi uning ustida elementar almashtirishlarni bajarish natijasida o'zgarmaydi.

Masalan. Berilgan matrisalarning rangini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Yechish.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{-1} \quad \boxed{-4} \quad \boxed{-1} \\ \leftarrow \begin{array}{c} + \quad + \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ -19 & -6 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -19 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{-2} \quad \boxed{-1} \\ \leftarrow \begin{array}{c} + \quad + \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -15 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Demak, } \text{rang}(A) = 3.$$

3-mashg'ulot

3.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.

3.2. Tenglamalar sistemani matrisaviy usulda yechish.

3.3. Tenglamalar sistemani Kramer qoidasida yechish.

3.4. Tenglamalar sistemani Gauss usulida yechish.

3.5. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: So'rov, ma'ruza, auksion.

3.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.

n ta noma'lum va m ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasi deb quyidagi sistemaga aytiladi.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1j} x_j + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2j} x_j + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{ij} x_j + \cdots + a_{in} x_n = b_i \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mj} x_j + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{array} \right. ,$$

Ta'rif. Agarda tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lsa, u birgalikda deyiladi, aks holda birgalikda emas deyiladi.

Ta'rif. Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi yagona (cheksiz ko'p) yechimga ega bo'lsa, u aniq (noaniq) deyiladi.

Bizga tenglamalar sistemasidan tashqari,
quyidagi

[illegible]

tenglamalar sistemasi ham berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar tenglamalar sistemalarining yechimlar to'plami ustma-ust tushsa, u holda ular teng kuchli (ekvivalent) tenglamalar sistemalari deyiladi.

3.2. Tenglamalar sistemani matrisaviy usulda yechish

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

bu yerda A – sistemaning asosiy matritsasi,

B - ozod hadlar matritsasi deyiladi. U holda berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yoza olamiz:

$$AX = B$$

Tenglamalar sistemasida tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lsin. Bunda sistema matritsasi xos bo'lmagan matritsa bo'lsa, u holda ... bo'ladi.

Quyidagilarni hosil qilamiz

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ A_{1j} & A_{2j} & \cdots & A_{nj} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Masalan. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Yechish. Tenglamalar sistemasini matrisa usulida yechamiz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = 24 + 27 + 16 - 24 - 24 - 1 = 1 \neq 0.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Demak, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

3.3. Tenglamalar sistemani Kramer qoidasida yechish

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1j} & A_{2j} & \cdots & A_{nj} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

munosabatdan

$$x_j = \frac{1}{\Delta} (b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}) = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad \Delta_j = \overline{1, n}$$

Kramer teoremasi. Agar sistema determinanti noldan farqli bo'lsa, u holda sistema yagona yechimga ega bo'lib, bu yechim quyidagi formulalar orqali topiladi.

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}$$

formulalar Kramer formulalari deb
,tenglamalar sistemasini bu formulalar orqali yechilishi esa Kramer
yoki determinantlar usuli deyiladi.

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}$$

Masalan. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Yechish. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -16$. Asosiy determinan $\Delta = -16 \neq$

0 bo'lgani uchun sistema yagona yechimga ega va uni Kramer formulalaridan topamiz

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -32, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -16.$$

$$x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1.$$

3.4. Tenglamalar sistemani Gauss usulida yechish

Ta'rif. Matritsaning rangi deb uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga aytilib va r orqali belgilanadi.

Matritsa ustidagi elementar almashtirishlar :

- * 1. Barcha elementlari noldan iborat satrni (ustunni) tashlab yuborish.
- * 2. Satrning (ustunning) barcha elementlarini noldan farqli songa ko'paytirish.
- * 3. Satr (ustun) o'rinlarini almashtirish.
- * 4. Berilgan satr (ustun) elementlariga boshqa satr (ustun) elementlarini biron songa ko'paytirib qo'shish.
- * 5. Matritsani transponirlash.

Teorema. Matritsa rangi uning ustida elementar almashtirishlarni bajarish natijasida o'zgarmaydi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi ustida bajariladigan elementar almashtirish deb quyidagilarga aytiladi:

- * -sistemadagi biron-bir tenglamani noldan farqli songa ko'paytirish,
- * - tenglamalar o'rnini almashtirish ,
- * - biron-bir tenglamani songa ko'paytirib , boshqa bir tenglamaga qo'shish.
- * Mana shu almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan yangi tenglamalar sistemasi avvalgisiga ekvivalent, ya'ni yechimlar to'plami ikkala sistema uchun bir xil bo'ladi.

Kroneker-Kapelli teoremasi. Agar sistema matritsasi rangi kengaytirilgan matritsa rangiga teng bo'lsa, u holda sistema birgalikda bo'ladi.

Demak,

- * 1. Agar $r(A) = r(\bar{A})$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'ladi.
- * 2. Agar $r(A) \neq r(\bar{A})$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi.
- * 3. Agar $r(A) = r(\bar{A}) = n$ bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi.
- * 4. Agar $r(A) = r(\bar{A}) < n$ bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

3.5. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

Agar chiziqli tenglamalar sistemasida ozod hadlar nolga teng bo'lsa, ya'ni $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ bo'lsa, hosil bo'lgan tenglamalar sistemasi bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi, ya'ni

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \text{-----} \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

Bu sistema kengaytirilgan matritsaning oxirgi ustuni elementlari nolga teng bo'lgani uchun sistema matritsasi va kengaytirilgan matritsalar rangi teng bo'ladi, ya'ni $r(A) = r(\bar{A})$ bo'ladi. Shuning uchun Kroneker-Kaspeyli teoremasiga ko'ra bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda bo'ladi. Masalan, $(0,0,\dots, 0)=0$ sistemaning trivial yechimi (nol yechim) bo'ladi.

Tenglamalar sistemasining matritsa ko'rinishi quyidagidan iborat:

$$AX=0.$$

Yuqorida keltirilgan 1-4 xulosalarga ko'ra, agar $r(A)=n$ bo'lsa sistema yagona, nol yechimga ega, agarda $r(A)<n$ bo'lsa, cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Demak $m=n$ bo'lgan holda sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli bo'lar ekan.

Ta'rif. Agar sistemaning $X_1, X_2, \dots, X_k$ -chiziqli erkli yechimlar sistemasi berilgan bo'lib, bu sistemaning istalgan x yechimi ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, ya'ni shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sonlar mavjud bo'lsaki,

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k$$

bo'lsa, u holda bu sistema fundamental yechimlar sistemasi deyiladi

Teorema. Agar sistema uchun $r(A) < n$ bo'lsa, u holda istalgan fundamental yechimlar sistemasi $k = n - r(A)$ ta yechimdan iborat bo'ladi.

4- mashg'ulot

4.1. Kompleks sonlar

4.2. Muavr formulasi

4.3. Ko'p tarmoqli iqtisod uchun balans modeli

Qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar: aqliy hujum, tezkor-so'rov, ma'ruza.

4.1.Kompleks sonlar

Ta'rif. Agar x va y haqiqiy sonlar hamda i begi uchun :

$$1) x + 0 \cdot i = x, 0 + i \cdot y = iy, 1 \cdot i = i, -1 \cdot i = -i,$$

$$2) \text{ faqat } x = x_1, y = y_1 \text{ bo'lg andagina } x + yi = x_1 + y_1 i \text{ boladi,}$$

$$3) (x + yi) \pm (x_1 + y_1 i) = (x \pm x_1) + (y \pm y_1) i,$$

$$4) (x + yi) \cdot (x_1 + y_1 i) = (x \cdot x_1 - y \cdot y_1) + (x \cdot y_1 + x_1 \cdot y) i$$

$$5) \frac{x + yi}{a + bi} = \frac{ax + by}{a^2 + b^2} + \frac{ay - bx}{a^2 + b^2} i$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda ifodaga ***kompleks son*** deyiladi.

$i=\sqrt{-1}$ belgini odatda
mavhum birlik deyiladi.

$x+yi$ kompleks son $(x;y)$ haqiqiy sonlar jufti bilan aniqlanadi.

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ – kompleks sonning moduli, bu vektor bilan Ox o'q orasidagi burchak kompleks sonning argumenti deyiladi.

$x + y \cdot i = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ ifodaga *kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi* deyiladi.

$$z_1 = x_1 + y_1 \cdot i = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1), \quad z_2 = x_2 + y_2 \cdot i = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i (\sin(\varphi_1 - \varphi_2))).$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n))$$

Muavr formulalari

Agar

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

bolsa, u holda

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

Bu formulaning $r = 1$ bo'lgandagi ko'rinishiga Muavr formulasi deyiladi :

$$(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi.$$

$$\left(\frac{1}{r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)} \right)^n = r^{-n} (\cos n\varphi - i \cdot \sin n\varphi).$$

Kompleks sondan ildiz chiqarish

$z=x+iy$ kompleks son uchun

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n} \right),$$

bu yerda $k=0,1,2,\dots,n-1$.

Masalan. $z = -2 + 2i$. a) $z^4 = ?$ b) $\sqrt[3]{z}$.

Yechish. a) $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{-2} = \frac{3\pi}{2}$.

$$z^4 = (2\sqrt{2})^4 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)^4 = 64 \left(\cos 4 \cdot \frac{3\pi}{2} + i \sin 4 \cdot \frac{3\pi}{2} \right) = 64 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = 64(-1 + 0i) = -64$$

$$b) \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right), k=0,1,2$$

$$k=0 \text{ da } \sqrt[3]{z} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1+i.$$

$$k=1 \text{ da } \sqrt[3]{z} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$k=2 \text{ da } \sqrt[3]{z} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Algebraning asosiy teoremasi

Teorema(*Bezu teoremasi*). $f(x)$ ko'phadni

$(x-a)$ ga bo'lgandagi qoldig'i $f(a)$ ga teng.

Teorema. $x=a$ son $f(x)$ ko'phadning ildizi bo'lishi uchun u $x-a$ ga qoldiqsiz bo'linishi zarur va yetarli.

Teorema(*Algebraning asosiy teoremasi*). Kompleks sonlar maydonida nolinchi darajadan yuqori darajali har bir ko'phadning eng kamida bitta kompleks ildizi bor.

Teorema. Kompleks sonlar maydonida
n - darajali $f(x)$ ko'phadning n ta ildizi bor.

$$f(x) = a_0 \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$$

ifoda ko'phadning chiziqli ko'paytuvchilarga yoyilmasi deyiladi.

Haqiqiy sonlar maydonidagi juft darajali
ko'phadning haqiqiy ildizlari soni faqat juft bo'la oladi.

Haqiqiy sonlar maydonida toq darajali ko'phadning
haqiqiy ildizlari soni faqat toq bo'la oladi.

Haqiqiy sonlar maydonidagi har bir ko'phadni shu
maydondagi birinchi va ikkinchi darajali ko'phadlar
ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

4.3. Ko'p tarmoqli iqtisod uchun balans modeli

Balans modelining asosiy masalasi: n ta tarmoqli xo'jalikning har bir ishlab chiqargan mahsulot miqdori qanday bo'lganda ehtiyoj to'la qondiriladi?

Tarmoqlar orasidagi ishlab chiqarish va iste'mol bog'lanishni aniqlash murakkab masaladir. Bu masalani birinchi bo'lib V.V. Leontev 1936 yil matematik model ko'rinishida ifodalagan. U 1929-1932 yillarda amerika iqtisodiy inqirozini tahlil qilishga urungan, bu model matrisalar algebrasiga asoslagan.

x_i - i -tarmoqning shu davr davomida ishlab chiqargan mahsulot hajmining pul birligidagi qiymatini, $i=1,2,\dots,n$ x_{ij} deb i tarmoq mahsulotining j tarmoq ehtiyoji uchun sarf etilgan hajmining pul miqdorini belgilaymiz. y_i deb i tarmoq mahsulotining noishlab chiqarish ehtiyoji hajmining pul miqdorini belgilaymiz.

$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i=1,2,\dots,n$ - tenglamalar balans munosabatlari deb nomlanadi.

$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j=1,2,\dots,n)$ deb belgilash kiritsak,

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1,2,\dots,n$$

a_{ij} bevosita xarajatlar koeffitsienti deb nomlanadi va ishlab chiqarish jarayonida qo'llanilayotgan texnologiya orqali aniqlanadi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

deb, bu yerda A -texnologik matritsa, X -yalpi mahsulot vektori, Y - yakuniy mahsulot vektori deb nomlanadi. Bundan $X = AX + Y$ munosabatni va $X = (E - A)^{-1} Y$ yechimni hosil qilamiz.

$S = (E - A)^{-1}$ -bevosita xarajatlar matritsasi deb nomlanadi.

Agar istalgan $Y \geq 0$ vektor uchun $X \geq 0$ yechimi mavjud bo'lsa, $A \geq 0$ matritsa samarali matritsa deyiladi. Bu holda Leontev modeli ham samarali model deyiladi.

Agar A matritsaning har bir ustun elementlari yig'indisi 1 dan katta bo'lmay, hech bo'lmaganda biron–bir ustun elementlari yig'indisi 1 dan kichik bo'lsa, u holda A samarali matritsa bo'ladi.

Masalan. Quyidagi jadvalda tarmoqlarning reja davriga mo'ljallangan xarajat koeffitsientlari va chekli mahsuloti shartli pul birligida berilgan.

Tarmoq		Iste'mol		Chekli mahsulot
		Sanoat	Qishloq xo'jaligi	
Ishlab chiqarish	Sanoat	0,3	0,25	300
	Qishloq xo'jaligi	0,15	0,12	100

Quyidagilarni

a) Tarmoqlarning rejalashtirilgan yalpi mahsulot miqdorini, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, tarmoqlarning sof mahsulotini;

b) Agar qishloq xo'jaligining chekli mahsuloti 20% ga, sanoatniki 10% ga oshirilsa, har bir tarmoqning zarur yalpi ishlab chiqarish miqdorini topish kerak.

Yechish. a) To'g'ridan – to'g'ri xarajatlar koeffisientini A matrisa va chekli mahsulot vektori Y ni yozib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 \\ 0,15 & 0,12 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

bundan $E - A = \begin{pmatrix} 1-0,3 & -0,25 \\ -0,15 & 1-0,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,25 \\ -0,15 & 0,88 \end{pmatrix}$ matrisani yozib olamiz.

U holda to'la xarajatlar matrisasi

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,5785} \begin{pmatrix} 0,88 & 0,15 \\ 0,25 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix}.$$

Yalpi mahsulot vektorini aniqlaymiz:

$$X = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 482 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Tarmoqlar mahsulot yetkazib berish miqdori x_{ij} ni $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$ formuladan topamiz. Masalan $x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,3 \cdot 482 = 144,6$.

Tarmoqlarning yalpi mahsuloti, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, shuningdek tarmoqlarning sof mahsulotlarini hisoblab topib, quyidagi jadvalni tuzamiz.

Tarmoq		Iste'mol		Chekli mahsulot	Yalpi mahsulot
		Sanoat	Qishloq xo'jaligi		
Ichlab chiqarish	Sanoat	144,6	62,5	300	482
	Qishloq xo'jaligi	72,3	30	100	150
Sof mahsulot		265,1	157,5		
Yalpi mahsulot		482	250		

b) Shartga ko'ra chekli mahsulot vektori

$$Y = \begin{pmatrix} 300 \cdot 1,1 \\ 100 \cdot 1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix}$$

U holda mahsulot vektori quyidagicha bo'ladi:

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 532,8 \\ 287,1 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib sanoatdagi ishlab chiqarishni 532,8 shartli pul birligigacha, qishloq xo'jaligida 287.1 shartli pul birligigacha oshirish kerak.