

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulteti

“Matematika” kafedrası

Qo'chqorov Otabek Beknazarovichning

**Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar va ularning taqribiy
hisoblashga tadbiri**

mavzusida

5130100 – “Matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

“Ish ko'rildi va himoyaga ruxsat
berildi”

Ilmiy rahbar _____ prof. B.I. Islomov
“ _____ ” _____ 2015 y.

Kafedra mudiri _____ dots. Muxitdinov R.T. Taqrizchi _____ Yakobova SH.U. “ _____ ”
_____ 06 _____ 2015 y. “ _____ ” _____ 2015 y

«Himoya qilishga ruxsat berildi »

Fakultet dekani _____ prof. Sh.M. Mirzayev
“ _____ ” _____ 2015 y

Buxoro- 2015 y.

Mundarija:

Kirish.....	3
-------------	---

I Bob. Bir o'zgaruvchli chiziqli tengsizliklar haqida boshlang'ich tushunchalar.

1.1 Tengsizliklar haqida asosiy tushincha.	9
1.2 Teng kuchli tengsizliklar.....	24
1.3 Kasr chiziqli tengsizliklar.....	26
1.4 Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar.....	27
1.5 Qo'sh tengsizliklarning xossalari va ular ustida amallar.....	30
1.6 Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar sistemasi.....	33
1.7 $ ax + b < c$ ko'rinishdagi tengsizliklarni yechish va ular ustida amallar.....	37
1.8 Ayniy tengsizliklar. Tengsizliklarni isbotlash va misollar.....	39

II Bob. Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar va ularning taqribiy hisoblashga tadbiqu.

2.1 Miqdorlarning taqribiy qiymatlari. Yaqinlashish xatosining moduli.....	46
2.2. Son taqribiy qiymatning yaqinlashish aniqligi, misollar.....	48
2.3. Yig'indi, ayirma, ko'paytma va bo'linmani baholashda chegaralar metodini qo'llash.....	51
Xotima.....	54
Adabiyotlar ro'yxati.....	55

Kirish

„Bizning eng ulugʻ maqsadimiz,
eng ulugʻ gʻoyamiz shuki,
Oʻzbekistonning bitta yoʻli bor.
Mustaqillikni mustahkamlab,
mamlakatimizni har tamonlama
yuksaltirib, erkin hayot sari olgʻa
yurish”

I. A. Karimov

Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining “Barkamol avlod yili” davlat dasturi toʻgʻrisidagi qarorida quyidagilar bayon qilingan.

Mamlakatimizda sogʻlom va barkamol avlodni tarbiyalash, yoshlarning oʻz ijodi va intellektual salohiyatini roʻyobga chiqarib, mamlakatimiz yigit - qizlarini XXI asr talablariga toʻliq javob beradigan har tomonlama rivojlangan shaxslar etib voyaga yetkazish uchun shart sharoitlar va imkoniyatlarni yaratish boʻyicha keng koʻlamli aniq yoʻnaltirilgan chora tadbirlarni amalga oshirish maqsadida, shuningdek, Oʻzbekiston Respublikasida 2010 yilning “Barkamol avlod yili” davlat dasturi tasdiqlansin. Unda quyidagilar asosiy vazifalar etib belgilansin.

Taʼlim jarayonida yangi axborot kommunikatsiya va pedagogik texnologiyalarning elektron darsliklari, multimedia vositalarini keng joriy etish orqali mamlakatimiz maktablari, kasb hunar kollejlari, litseylar va oʻquv yurtlarida oʻqitish sifatini tubdan yaxshilash taʼlim muassasalari keng laboratoriya bazasini zamonaviy turdagi oʻquv laboratoriya uskunalari, kompyuter texnikalari bilan mustahkamlash, shuningdek, oʻqituvchilar va murabbiylar mehnatini moddiy hamda maʼnaviy ragʻbatlantirish boʻyicha samarali tizimni yanada rivojlantirish lozim.

Ilm fanni yanada rivojlantirish, iqtidorli va qobiliyatli yoshlarni ilmiy faoliyatga keng jalb etish ularning oʻz ijodiy va intellektual salohiyatini roʻyobga

chiqarishi uchun sharoit yaratishga doir kompleks chora tadbirlarni ishlab chiqish kerak.

Ma'lumki, ota bobolarimiz qadimdan bebaho boylik bo'lmish ilmu fan, ma'rifat, ta'lim tarbiyani inson kamoloti va millat ravnaqining eng asosiy sharti va garovi deb bilgan.

Albatta ta'lim tarbiya ong mahsuli. Lekin ayni vaqtda ong darajasi va uning ravnaqini ham belgilaydigan, ya'ni xalq ma'naviyatini shakllantiradigan va boyitadigan eng muhim omildir. Binobarin ta'lim tarbiya tizimini va shu asosda ongni o'zgartirmasdan turib, ma'naviyatni rivojlantirib bo'lmaydi.

Shuni unutmasligimiz kerakki, kelajagimiz poydevori bilim dargohlarida yaratiladi, boshqacha aytganda xalqimizning ertangi kuni qanday bo'lishi, farzandlarimizning bugun qanday ta'lim tarbiya olishiga bog'liq.

Ta'limni tarbiyadan, tarbiyadan ta'limni ajratib bo'lmaydi bu sharqona qarash, sharqona hayot falsafasi.

Bu haqda fikr yuritganda men Abdulla Avloniyning "Tarbiya biz uchun yo hayot, yo mamot, yo najot, yo halokat, yo saodat, yo falokat masalasidir" degan chuqur ma'noli so'zlarini eslayman.

Muxtasar qilib aytganda, oxirgi yillarda ta'limni tarbiya sohasida amalga oshirgan ko'lami va mohiyatiga ko'ra ulkan ishlarimiz biz ko'zlagan ezgu niyatlarimizga erishish hech kimdan kam bo'lmaydigan hayot barpo etish, yoshlarimiz butun xalqimizning ma'naviy yuksalishi yo'lida mustahkam zamin yaratdi, desak hech qanday xato bo'lmaydi.

"Diplomga ega bo'lish bu hali tom ma'nodagi ziyoli emas, ziyoli odam tafakkuri saviyasi pok yuragi, ichki madaniyati bilan mutlaqo bo'lakcha inson bo'ladi".

"Har qaysi inson olloh taollo ato etgan noyob qobiliyat va iste'dodni avvalo o'zi uchun, oilasining, millatining, xalqining, davlatining farovonligi, baxt saodati, manfaati uchun to'liq baxshida etadi, bunday jamiyat shu qadar kuchli taraqqiyotga erishadiki, uning jur'at va samarasini hatto tasavvur qilish ham oson emas".

Biz o'z iste'dodli fidoiy bobolarimiz farzandlarimizga bilim va kasb

cho'qqilarini zabt etishi uchun qanot berishimiz kerak. "Ma'rifatga intilish kerak".

"Ma'rifatga intilish xalqimizning azaliy fazilatlaridan biridir".

Islom Abdug'aniyevich Karimov

"Tarbiya uch narsaga ehtiyoj sezadi: iste'dodga, ilmga va mashqqa".

Arastu

Umumlashtirilgan holda kadrlar tayyorlash tizimining shakllanishi va faoliyat ko'rsatishining asosiy tamoyillari, mening nazarimda quyidagi vazifalarni o'z ichiga oladi:

Barcha xil va turdagi ta'lim muassasalarida yuqori malakali mutaxassislar tayyorlash uchun uzluksiz ta'lim va fan, ishlab chiqarish salohiyatidan samarali foydalanish.

Davlat ta'lim standartlarini joriy etish va ularning faoliyat ko'rsatish mexanizmini ishlab chiqarish.

Ixtisosliklar, malaka darajasiga ko'ra mutaxassislarga bo'lgan umumdavlat va mintaqaviy talablarning istiqbolini aniqlash.

Ta'lim tizimini tuzilish va mazmun jihatdan isloh qilish uchun o'qituvchilarni va murabbiylarni qayta tayyorlash.

Davlat va ijtimoiy muassalarning kasbga yo'naltirish bo'yicha faoliyatini takomillashtirish.

Bunda kasb tanlashning bozor ehtiyojlari va imkoniyatlarini e'tiborga olish zarur, toki har bir shaxs o'ziga mos kasbni egallay olsun.

O'quvchi yoshlarni vatanga sadoqat, yuksak ahloq, ma'naviyat va ma'rifat, mehnatga vijdonan munosabatda bo'lish ruhida bo'lish ruhida tarbiyalash.

Ta'lim muassasalarini birinchi navbatda umumta'lim maktablarini davlat tomonidan moliyaviy va moddiy texnikaviy to'liq ta'mirlash me'yorlarini amalga oshirish va uning mexanizmini takomillashtirish.

Kadrlar tayyorlash va ta'lim sohasida chet el sarmoyalarini, xalqaro donorlik tashkilotlari va jamiyatlarining mablag'larini jalb etish.

Davlat va jamiyat kadrlar tayyorlash tizimini uzluksiz rivojlantirish va takomillashtirish kafili bo'lishi lozim.

Ma'lumki, xalq ta'limini asosiy bo'g'inini uzluksiz ta'lim tizimini tashkil etadi. Shu sababli bu masala alohida diqqat va e'tibor qaratish lozim.

Uzluksiz ta'limni davlat ta'lim standartlari va tegishli ta'lim dasturlari bilan ta'minlashda avvalo ularning jahon talablari darajasiga javob berishi yuksak ma'naviyat zahirida qurilganiga asosiy e'tibor berish kerak.

Shuning uchun ham umumta'lim dasturini maktabgacha tarbiya, boshlang'ich, umumiy ta'lim va maktabdan tashqari ta'lim tarzida tuzsak maqsadga muvofiq bo'ladi.

Barkamol avlod tarbiyalash insoniyatning eng yorqin orzusi bo'lib kelgan, biroq dunyo xalqlarining barchasi ham bu haqda o'ylayvermagan. Bunday orzudagi insonlar azaliy ma'rifatga, ma'naviyatga mansub bo'lgan yurtlarning donishmandlari, eng mo'tabar ziyolilari, hukmdorlari hisoblangan. Ularning orasida O'zbekiston deb atalmish muazzam zaminimizda yashayotgan bobolarimizning o'z o'rni, hurmati bor. Bu jahon hamjamiyati qabul qilingan haqiqatdir. Barkamol avlodni tarbiyalash orzusida o'z tariximizdan juda ko'p dalillar mujassamlashib kelgan.

Bituruv malakaviy ish mavzuning dolzarbligi. Maktab boshlang'ich sinflardan boshlab o'quvchilar sonli taqqoslashlar bilan tanisha boshlaydilar. Keyinroq ular tengsizliklarning xossalari va ularning yechish metodlari bilan tanishadilar.

Hayotda juda ko'p hodisalar taqqoslash bilan o'rganiladi. Hayotning biror sohasi yo'qki unga taqqoslash bo'lmasa. Bu hollarda albatta sonlar taqqoslanadi.

O'rta maktabda sonli tengsizliklardan boshlab to funksional tengsizliklargacha ularning xossalari va yechish usullari bayon qilinadi.

Tengsizliklargacha o'rta maktab dasturida yetarlicha soatlar ajratilgan bo'lishiga qaramasdan o'quvchilarning bu sohada qiziqishi kamroqdek. Ko'p hollarda tengsizliklarni xuddi tenglamadek yechib qo'yishadi.

Tengsizliklarni yechishda uning yechimi nima bo'lishini o'quvchi yaxshi tassavur qilishi kerak. Tengsizlik va tenglama yechimlari nimasi bilan o'xshash nimasi bilan farq qilishini yaxshi anglay olishi kerak. Tenglama va tengsizliklarni

yechish tariflari o`xshash bo`lib faqat quydagi ikki farqga ega:

1. Doimo tengsizlikning yechimi deyiladi
2. O`zgaruvchini biror to`plamdagi yechimi tushuniladi.

Umuman tengsizliklari yechishda ildiz degan termin ishlatilmaydi

Tengsizliklar bilan tenglamalarni yechishning maxsus fariqlari mavjud.

Tenglama tengsizliklar bir necha almashtirishlar har xil natijalarga olib kelishi mumkin.

Masalan: tenglamani ikkala tomonini noldan farqli va aniqlanish sohasini tegishli bo`lgan ko`paytmaga ko`paytirsak tenglama berilgan tenglama teng kuchli bo`ldi, lekin shu ish tengsizliklarda doimo to`g`ri natijaga olib kelavermaydi. Xuddi shu o`xshash yechimlar xatolikka olib kelishi mumkin.

-tengsizliklar qanday bo`lishidan qat'iy nazar oldin shu ko`rinishidan tenglamalarni yechishni bilish kerak.

- Shu bilan birga qanaqa tengsizliklarni yechishda ularning xossalari ular ustida qanday amallar boshqarish mumkinligini yaxshi bilish kerak.

- Tengsizliklarni yechish tenglamalarni yechishdan ko`ra ko`proq bilim va ko`nikma talab qilishi bilan bir qatorda ular o`quvchilarni ko`proq fikirlashga o`rgatadi.

Ayrim hollarda tenglamalar yoki tenglamalar sistemasi bilan yechilmaydigan jarayonlarni tengsizlik yoki tengsizliklar sistemasi bilan o`rganishi mumkin.

Tengsizliklar tadbiqi oliy matematikada va umuman matematikaning boshqa yo`nalishlarida juda ko`p qo`llaniladi. Asosan qo`llaniladigan yo`nalishlardan biri taqribiy hisoblashlar va baholash katta kichik qiymatlarni toppish va hokazo.

Tadqiqot obyekti va predmeti. Maktablar, akademik litseylar va kasb-hunar ko`lejlarda tahsil olayotgan o`quvchilar uchun bir o`zgaruvchili chiziqli tengsizliklar va ularning taqribiy hisoblashga tatbiqi hamda tengsizliklar isbotining bazi usullari

Ishning maqsadi va vazifalari. Bitiruv malakaviy ishi vazifasi tengsizliklar bobini oddiydan murakkabgacha yetarlicha o`rganib, o`quvchiga o`rganish uchun

qulay bo'lgan qo'llanma yaratish.

Tadqiqot usuli va uslubiyoti. Tahlil qilish, savol-javob, suhbat, kuzatish, umumlashtirish.

Olingan asosiy natijalar. Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar va ularning taqribiy hisoblashga tatbiqi va tengsizliklarni isbotlashning bir nechta usullari o'rganilgan ularga doir misollar bajarib ko'rsatilgan va mustaqil yechish uchun misollar ko'rsatilgan.

Natijadaning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati. Bitiruv malakaviy ishi referativ ko'rinishda bo'lib, bitiruv ishida yangilik qilinmagan. Bir nechta manbalardan mavzuga doir ma'lumotlar to'plangan.

Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi. Qo'llanish sohasi. Xulosa va takliflar: berilgan uslubiy ko'rsatmalar va tavsiya qilingan misollar maktab, akademik litsey va kasb-hunar kollejlarda o'qitish va bilimni nazorat qilish jarayoni samaradorligini oshiradi.

Ishning hajmi va tuzilishi. Kirish qismi, 2 ta bob va xotimalardan iborat. Sonli tengsizliklar va ularning xossalari, o'rtacha qiymatlar va ular orasidagi munosabatlar, bazi olimlar isbotlagan tengsizliklar, bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar va ularning taqribiy hisoblashga tatbiqini o'rganishdan iborat.

1-Bob. Bir o'zgaruvchli chiziqli tengsizliklar haqida boshlang'ich tushunchalar.

1.1 Tengsizliklar haqida asosiy tushunchalar

Agar $a-b$ ayirma musbat son bo'lsa, a son b sonidan katta deyiladi va $a > b$ deb yoziladi. Agar $a-b$ ayirma manfiy bo'lsa, a son b sonidan kichik deyiladi va $a < b$ deb yoziladi. Bu ta'rif har qanday musbat son noldan katta har qanday manfiy son noldan kichik va istalgan musbat sonidan ham kichikdir. Berilgan ixtiyoriy a va b sonlar uchun quyidagi munosabotlardan bittasi va faqat bittasi o'rinli bo'ladi.

$$a > b, a < b, a = b.$$

Geometrik nuqtai nazardan $a < b$ tengsizlik a nuqta koordinata to'g'ri chiziqda b nuqtadan chapda tamonda yotishini bildiradi, $a > b$ esa a nuqta koordinata o'qiga b nuqtadan o'ngda yotishini bildiradi $<, >$ belgilar qat'iy tengsizlik belgilari deyiladi. $a < b$ yoziv a soni b sonidan kichikligini bildiradi. Agar yaqinlashishlar bir xil ishorali bo'lsa, ular bir xil ishorali tengsizliklar deyiladi, masalan: $a > b, c > d$ tengsizliklar bir xil ma'noli tengsizliklar $a > b$ va $c > d$ tengsizliklar qarama-qarshi belgili tengsizliklar deyiladi.

1.1.1 Teorema. $a - b > 0$ bo'lsa, $a > b$ bo'ladi, $a - b < 0$ bo'lsa, $a < b$ bo'ladi, ($a - b = 0$ bo'lsa, $a = b$ bo'ladi).

1.2 Tengsizliklarning asosiy xossalari:

1. Agar $a > b$ bo'lsa, $b < a$ va aksincha, agar $b < a$ bo'lsa, $a > b$ bo'ladi, ya'ni
$$a > b \Leftrightarrow b < a.$$
2. Agar $a > b$ va $b > c$ bo'lsa, $a > c$ bo'ladi.
3. Agar $a > b$ bo'lib, c -ixtiyoriy son bo'lsa, $a + b > b + c$ bo'ladi. To'g'ri tengsizlikning ikkala qismiga bir xil son qo'shilsa, tengsizlik o'zgarmaydi, ya'ni: $(a > b, c \text{-ixtiyoriy son}) \Leftrightarrow (a + c) > (b + c).$
4. $a > b$ va $n > 0$ bo'lsa, $an > bn$ va $a:n > b:n$ bo'ladi.

To'g'ri tengsizlikning ikkala qismi birgina musbat songa ko'paytirilsa yoki bo'linsa, tengsizlik o'zgarmaydi, ya'ni:

$$(a > b, n > 0) \Leftrightarrow (an > bn),$$

$$(a > b, n > 0) \Leftrightarrow (a:n > b:n).$$

5. To'g'ri tengsizlikning ikkala qismi birgina manfiy songa ko'paytirilsa yoki bo'linsa hamda tengsizlik belgisi qarama-qarshisiga, yana to'g'ri tengsizlik hosil bo'ladi, ya'ni:

$$(a > b, n < 0) \Leftrightarrow (an < bn), (a < b, n < 0) \Leftrightarrow (a:n < b:n).$$

1.1.1 Tarif. Ikkala tengsizlikda ham bir xil ($>$), ($\geq$) yoki ($<$), ($\leq$) belgi turgan bo'lsa, ular bir xil ma'noli, agar tengsizliklardan birida $>$ ($\geq$) belgi, ikkinchisida $<$ ($\leq$) belgi tursa, ular qarama-qarshi ma'noli tengsizliklar deb ataladi.

6. $a > b$ va $c > d$ bo'lsa, ya'ni bir xil ma'noli to'g'ri tengsizliklarning chap qismini chap qismiga, o'ng qismini o'ng qismiga qo'shish mumkin.

1.1.1-misol.

$$1) \begin{array}{r} + 13.1 > 7 \\ + 8.4 > 6 \\ \hline 21.5 > 13 \end{array} \quad 2) \begin{array}{r} + 0.38 < 1.4 \\ + -2 < -1 \\ \hline -1.62 < 0.4 \end{array}$$

71,2 > 13,4 dan 18,1 > 11,2 tengsizlikni ayirish uchun yo birinchisini 13,4 < 71,2 ko'rinishda yozib olib, so'ngra ayirish yoki ikkinchisini 11,2 < 18,1 yozib olib, so'ngra ayirish kerak.

7. $a > b$ va $c < d$ bo'lsa, $a - c > b - d$ bo'ladi, ya'ni qarama-qarshi ma'noli to'g'ri tengsizliklarning chap qismidan chap qismini, o'ng qismidan o'ng qismini ayirib, birinchi tengsizlikning belgisini qo'yish kerak.

1.1.2-misol.

$$1) \frac{-8 > 3}{-6 < 7} \quad 2) \frac{-13 < 18}{7 > 6} \\ 2 > -4 \quad 6 < 12$$

8. $a > b > 0$ va $c > d > 0$ bo'lsa, $ac > bd$ bo'ladi, ya'ni qismlari musbat bo'lgan bir xil ma'noli to'g'ri tengsizliklarning mos qismlarini ko'paytirish mumkin.

9. a va b musbat sonlar bo'lib, $a < b$ va $n \in \mathbb{N}$ bo'lsa, $a^n < b^n$ bo'ladi, ya'ni qismlari musbat bo'lgan to'g'ri tengsizlikning har ikkala qismini bir xil natural ko'rsatkichli daraja ko'rinishida yozish mumkin.

10. a, b musbat sonlar bo'lib, $a < b$ bo'lsa, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ bo'ladi.

1.1.3-misollar. Ushbu amallarni bajaring:

$$1) \frac{-81,9 > -2,7}{3,4 < 10,8} \Rightarrow 81,9 - 3,4 > -2,7 - 10,8 \Rightarrow 78,5 > -13,5$$

$$2) \frac{13,91 < 18,4}{0 < 7,1} \Rightarrow 13,91 + 0 < 18,4 + 7,1 \Rightarrow 13,91 < 25,5$$

$$3) \frac{7,83 < 8,4}{10,8 > 7,4} \Leftrightarrow \frac{7,83 < 8,4}{7,4 < 10,8} \Leftrightarrow 7,83 + 7,4 < 8,4 + 10,8 \Rightarrow \\ \Rightarrow 15,23 < 19,2$$

$$4) 2 < 3 \Rightarrow 2^3 < 3^3 \Rightarrow 8 < 27$$

$$5) 4 < 7 \Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{7}$$

1.3 Ayrim muxim sodda tengsizliklar isboti.

Bu paragrafda ayrim muxim tengsizliklarni isboti va isbot qilish yo'llari

ko'rsatiladi. Tengsizliklarni isbot qilishda albatta tengsizlikni tarifidan xossalardan foydalaniladi. Oldin isbot qilingan tengsizliklar natijasida foydalaniladi. Tengsizliklar qonunlarning buzilmaganligi yoki teskarisini faraz qilish bilan tengsizliklarni isbot qilish mumkin. Bir nechta tengsizliklar olib isbot qilish yo'llarini keltiramiz.

1.1.4-misol. Ava B sonlarning ixtiyoriy qiymatida

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

tengsizlikni o'rinli bo'lishini ko'rsating.

Yechish: Isbot qilishdan oldin tengsizlikga diqqat bilan qarab $a^2 + b^2$ bilan bog'liq tengsizliklar haqida fikr yuritish kerak bo'ladi. Malumki $(a-b)^2 \geq 0$ doimo o'rinli bundan $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ yoki $a^2 + b^2 \geq 2ab$ oxirgi tengsizlikni ikkala tomoniga $(a+b)^2$ ni xosil qildik. Demak $a^2 + b^2 + 2ab \leq 2a^2 + 2b^2$ yoki $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ Oxirgi tengsizlikni ikkala tomonini 4 ga bo'lamiz.

$$\frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

yoki

$$\frac{(a+b)^2}{2} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

Ikkala tomonidan kvadrat ildiz olamiz.

$$\left| \frac{a+b}{2} \right| \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Modul xossasidan

$$\frac{a+b}{2} \leq \left| \frac{a+b}{2} \right|$$

Ekanligini hisobga olsak

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Tengsizlik o'rinli bo'lib chiqadi. Tenglik $a=b$ bo'lganda o'rinli bo'ladi.

1.1.5-misol. Agar a, b, c va d manfiy bo'lmagan sonlar bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsating,

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

Yechish.

Birinchi ishni chap tamonidagi kop hadlarni ko'paytirishdan boshlash kerak.

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} = \sqrt{ab + ad + cb + cd}$$

Ifodani biror sonni qo'shish va ayirishda ifoda qiymati o'zgarmasligidan foydalanamiz va ifodani to'la kvadratga ajratishga harakat qilamiz.

$$\begin{aligned} \sqrt{ab + ad + bc + cd} &= \sqrt{ab + 2\sqrt{abcd} + cd + ad + 2\sqrt{abcd} + bc} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{ab})^2 + 2\sqrt{abcd} + (\sqrt{cd})^2 + (\sqrt{bc})^2 - 2\sqrt{(bc)(ad)} + (\sqrt{ad})^2} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2 + (\sqrt{bc} - \sqrt{ad})^2} \end{aligned}$$

Agar $(\sqrt{bc} + \sqrt{ad})^2 \geq 0$ tengsizlikning o'rinli ekanligi va uni tashlab yuborishni e'tiborga olsak, tengsizlik chap tamoni faqat kuchayadi va quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$$\sqrt{(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2 + (\sqrt{bc} - \sqrt{ad})^2} \geq \sqrt{(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2} = \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

va natijada.

$$\sqrt{(a+c) \cdot (b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

o'rinli bo'ladi.

Agar $bc = ad$ bo'lsa tengsizlikni tenglik sharti bajariladi. Endi matematika analiz va oily matematikada ko'p uchraydigan ayrim tengsizliklar isbotini keltiramiz.

Bular esa ayrim boshqa tengsizliklar isboti uchun asos bo'ladi.

1.1.6-misol. Ixtiyoroy a va b sonlari uchun

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Yechish. bu tengsizlikni isbot qilishda sonning modili xossalaridan foydalanamiz. Ma'lumki $|x| \geq 0$ hamda $x \leq |x|, x \geq -|x|$ bulardan va

$$-a \leq |a| \leq a \qquad -b \leq |b| \leq b$$

Bir xil ma'noli tengsizlikga mos ravishda qo'shishdan foydalansak quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} -a \leq |a| \leq a \\ -b \leq |b| \leq b \end{cases}$$

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Bundan

$$|a| + |b| \leq |a| + |b|$$

Bu tengsizlik $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_1| + |a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

Tengsizlikni xususiy xoli bo'ladi.

1.1.7-misol. a va b sonlarning ixtiyoriy qiymatlarida

$$|a + b| \geq |a| - |b|$$

Tengsizlik o'rinligini isbot qiling.

Yechish.

$$|a + b| \geq |a| + |b|$$

Tengsizlik o'rinligi ko'rsatilgan edi b sonni $-b$ ga almashtirsak quyidagi tengsizlikga ega bo'lamiz.

$$|a - b| \leq |a| + |-b|$$

Agar $|-b|=|b|$ e'tiborga olsak

$$|a - b| \leq |a| + |-b|$$

(1) o'rinli bo'ladi ma'lumki $a=(a+b)-b$ aynan tenglik buning ikkala tamonidan modul olamiz.

$$|a| = |(a + b) - b|$$

Yoki (1) tengsizlikni e'tiborga olsak

$$|a| = |(a + b) - b| \leq |a + b| + |b|$$

yoki

$$|a| \leq |a + b| + |b|$$

Bundan

$$|a| - |b| \leq |a + b|$$

bundan kelib chiqadi.

$$|a + b| \geq |a| - |b|.$$

Isbotlandi.

1.1.8-misol. a va b sonlarning ixtiyoriy qiymatlarida

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

tengsizlik bajarilishini ko'rsating.

Yechish. 7-misolda ixtiyoriy a va b sonlar uchun

$$|a + b| \geq |a| - |b|$$

Tengsizlik to'g'riligi isbot qilingan edi. Agar bu b ni $-b$ bilan almashtirsak

$$|a - b| \geq |a| - |-b| \quad \text{va} \quad |-b| = |b|$$

tenglik o'rirligidan

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

Tenglikni to'g'riligi kelib chiqadi.

1.1.9-misol Quyidagi tengsizlikni isbot qiling .

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|$$

Yechish. ushbu tengsizlik R^m fazoda ketma-ketligi limiti hisoblashga foydalaniladi.

Ma'lumki ketma-ketlikni yaqinlashishini tekshirishda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$p(x^n, a) < \varepsilon$ ekanligini ko'rsatish kerak bo'ladi. Ya'ni:

$$p(x^n, a) = p[x^n, \dots, (x^n)_m],$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} < \varepsilon$$

Keltirilgan tengsizlikni ikki usul bilan isbot qilish mumkin.

1-usul. Ko'rinib turibdiki $a=0$, $b=0$, $c=0$ da berilgan tengsizlik o'rinli. Agar a, b va c sonlarning hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, u holda

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} > 0$$

Tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda quyidagi almashtirishni bajarish mumkin

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \\ &= \frac{|a| \cdot |a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{|b| \cdot |b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{|c| \cdot |c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

Agar a, b, c larning bir vaqtga nolga teng emasligini e'tiborga olsak quyidagi tengsizlik o'rinli.

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq \sqrt{b^2} = |b|$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq \sqrt{c^2} = |c|$$

Bulardan esa quyidagilar o'rinliligi kelib chiqadi.

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq 1, \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq 1, \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq 1$$

Natijada keltirilgan ifodadagi ya'ni

$$\frac{|a| \cdot |a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{|b| \cdot |b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{|c| \cdot |c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq |a| + |b| + |c|$$

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

nisbatlar o'zidan katta qiymati 1 bilan almashtiramiz. Demak tengsizlik o'rinli ekan

2-usul.

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq (|a| + |b| + |c|)^2$$

tengsizlikni ikkala tamonini manfiy bo'lmagani uchun ikkala tamonini kvadratga ko'tarish mumkin. Natijada

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq (|a| + |b| + |c|)^2$$

tengsizlikga ega bo'lamiz. O'ng tomonini kvadratga ko'taramiz.

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq (|a|)^2 + (|b|)^2 + (|c|)^2 + 2|a| \cdot |b| + 2|a| \cdot |c| + 2|b| \cdot |c|$$

Bundan

$$0 \leq 2|a| \cdot |b| + 2|a| \cdot |c| + 2|b| \cdot |c|$$

yoki

$|a| \cdot |b| + |a| \cdot |c| + |b| \cdot |c| \geq 0$ o'rinli. bu esa tengsizlikni o'rinli ekanligini bildiradi. Tengsizlikda tenglik o'rinli bo'ladi. Berilganlardan hech bo'lmasa ikkatasi nolga teng bo'lsa,

1.1.10-misol. Musbat a, b va c sonlar uchun

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+d}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$$

tengsizlikni isbotlang.

Yechilishi. Tengsizlikning chap qismida shakl almashtirish bajarib uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz.

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \geq 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 6 \quad (1.1.1)$$

Ikkita musbat son uchun o'rta arifmetik va o'rta geometrik qiymatlar orasidagi Koshi tengsizlikdan foydalanamiz.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2, \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$$

Bu tengsizlikdan foydalanib (1.1.1) tengsizlikni xosil qilamiz.

1.4 O'rtacha qiymatlar va ular orasidagi munosabatlar.

1.O'rtacha qiymatlar $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ musbat sonlar ketma ketligi uchun o'rta arifmetik qiymat

$$A(a)A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

2.O'rta geometrik qiymat

$$G(a) = G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}$$

3.O'rta kvadratik qiymat

$$K(a) = K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

4.O'rta garmonik qiymat larni aniqlaymiz.

$$N(a) = N_n = \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}$$

Xususan x,y musbat sonlar uchun bu o'rta qiymatlar quyidagicha aniqlanadi.

$$A_2 = \frac{x+y}{2}; \quad G_2 = \sqrt{xy} \quad K_2 = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}; \quad N_2 = \frac{2xy}{x+y}$$

1.5 O'rta arifmetik va o'rta geometrik qiymatlar haqida

Koshi tengsizligi va uning isboti.

1.1.2 Teorema. $A_n \geq G_n$ va $A_n = G_n$ tenglik faqat va faqat $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

tenglik bo'lganda o'rinli.

Isboti.

$A_n \geq G_n$ ekanligini isbotlaymiz $n = 2$ da $\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$ Bu tengsizlik uchun ixtiyoriy musbat a_1 va a_2 sonlar uchun o'rinli bo'lgan $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ tengsizlikdan oson hosil qilinadi. Berilgan tengsizlikni xtiyoriy n ta natural sonlar uchun to'g'ri deb, $n + 1$ ta natural sonlar uchun to'g'riligini isbotlaymiz. Bu sonlar $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_{n+1}$ bo'lsin a_{n+1} ularning orasida eng kattasi bo'lsin. Ya'ni,

$$a_{n+1} \geq a_1 \dots \dots a_{n+1} \geq a_n$$

Shuning uchun

$$a_{n+1} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

$$A_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n + 1} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n + 1},$$

$a_{n+1} \geq a_n$ bo'lgani uchun $a_{n+1} = A_n + \alpha$ deb yozish mumkin, bu yerda $\alpha \geq 0$ U holda

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + A_n + \alpha}{n + 1} = A_n + \frac{\alpha}{n + 1}.$$

Bu tenglikni ikkala qismini $(n+1)$ – darajaga ko'tarib, quyidagini topamiz

$$(A_n + 1)^{(n+1)} = (A_n + \frac{\alpha}{n+1})^{n+1} = (A_n)^{n+1} + C_{n+1}^1 (A_n)^n \frac{\alpha}{n+1} + \dots \geq (A_n)^{n+1} +$$

$$+ \alpha (A_n)^n = (A_n + \alpha)(A_n)^n = (A_n)^n a_{n+1}$$

Farazga ko'ra, $(A_n)^n \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ Buni e'tiborga olib

$$(A_{n+1})^{n+1} \geq (A_n)^n \cdot a_{n+1} \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}.$$

Bundan

$$A_{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}}$$

Tenglik $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ bo'lganda o'rinli bo'ladi. isbotlandi

1.1.11-misol. $x, y > 0$ bo'lsa, $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ tengsizlikni isbotlang.

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x^2 + y^2 + 1$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq xy$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \geq y \quad \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \geq x$$

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y.$$

1.1.12-misol. $x > 0$ bo'lsa, $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$ tengsizlikni isbotlang.

Yechilish.

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[12]{x}} \cdot 2^{\sqrt[4]{x}} = 2 \cdot 2^{x^{\frac{1}{6}}} = 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$$

1.6 O'rta geometrik va o'rta garmonik qiymatlar orasidagi tengsizlik va uning tengsizliklarni isbotlashdagi ahamiyati.

1.1.3 Teorema. $G(a) \geq H(a)$ ekanligini jumladan, $G(a) = H(a)$. Tenglik faqat va faqat $a_1 = a_2 = a_n$ shart bajarilsa to'g'riligini isbotlang.

Isboti. Koshi tengsizligidan foydalanib (1-masalaga qarang)

$$(N(a))^{-1} = \frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_1^{-1} \cdot a_2^{-1} \cdot \dots \cdot a_n^{-1}} = G(a)^{-1}$$

Tenglikga Aega bo'lamiz jumladan $N(a) = G(a)$ tenglik faqat $a_1 = a_2 = a_n$ da bajariladi.

1.1.13-misol. Agar $a, b, c, > 0$ bo'lsa, tengsizlikni isbotlang.

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a + b + c}{3}$$

Yechilishi: $9 \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \cdot (a + b + c)$

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \frac{1}{\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}}$$

$$(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{9\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{abc}} = 9$$

1.1.14-misol. Agar $a, b, c > 0$ $ab^2c^3 = 1$ bo'lsa, tengsizlikni yeching.

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 6$$

Yechish.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \geq 6 \frac{1}{\sqrt[3]{ab^2c^3}} = 6$$

1. $x, y, z > 0$ bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlikni isbotlang.

$$\frac{1}{(x + y + z)} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{28\sqrt{3}}{\sqrt[9]{xyz(x + y + z)}}$$

2. Agar $x_1 x_2 \dots x_n > 0$ va $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1$ bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlikni isbotlang.

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1 + x_2 + x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt{(1 + x_1)(x_2 + \dots + x_n)}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{(1 + x_1 + \dots + x_{n-1})x_n}} \geq 1$$

3. $x, y, z > 0$ bo'lsa, u holda quyidagi tenglikni isbotlang.

$$\frac{x^2 - yx}{x + y} + \frac{y^2 - yz}{y + z} + \frac{z^2 - xz}{x + z} \geq 0$$

4. Agar $a, b, c > 0$ bo'lsa, u holda quyidagi tenglikni isbotlang.

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

5. Agar $a, b, c, d > 0$ bo'lsa u holda quyidagi tengsizlikni isbotlang.

$$a^{p+2} + b^{p+2} + c^{p+2} \geq a^{p+2}bc + b^{p+2}ac + c^{p+2}ab$$

O'rta arifmetik va o'rta kvadratik qiymatlar orasidagi tengsizlik.

1.1.4 Teorema: $K(a) \geq A(a)$ tengsizlik o'rinli ekanligini jumladan, $K(a) = A(a)$ tenglik faqat $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ holdagina o'rinli bo'lishini isbotlang.

Isboti. Koshi tengsizligidan foydalanib (1-masalaga qarang)

$$2a_i a_j \leq a_i^2 + a_j^2 \quad 1 \leq i < j \leq n$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Demak,

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j} a_i a_j \leq \\ &\leq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i^2 + a_j^2) = n(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \dots + a_n^2) \end{aligned}$$

Eslatib o'tamiz, $K(a) = A(a)$ tengli, faqat $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ o'rinli bo'ladi.

1.1.14-misol. $H(a) \geq \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ va $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq K(a)$ tengsizliklarni isbotlang.

Yechimi. Umumiylikni chegaralangan holda $\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = a_1$ $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = a_n$ deb hisoblash mumkin. U holda

$$H(a) = \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} > \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_1^{-1} \dots + a_n^{-1}} = a_1$$

$$K(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \leq \sqrt{\frac{a_n^2 + a_n^2 + \dots + a_n^2}{n}} = a_n$$

bo'ladi.

Izoh 1. Yuqoridagi misollardan

$\max\{a_1, a_2 \dots a_n\} \geq k(a) \geq A(a) \geq G(a) \geq H(a) \geq \min\{a_1 a_2 \dots a_n\}$ ekanligi kelib chiqadi.

1.1.15-misol. $a, b, c > 0$ bo'lsa $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ tengsizlikni isbotlang.

Yechish:

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

1.1.16-misol. $6(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b)^2(a + b + c)^2$ isbotlang.

Yechish.

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

$$6(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b)^2(a + b + c)^2$$

1.2. Teng kuchli tengsizliklar

1.2.1. Ta'rif. Ikki tengsizliklarning har birining yechimi ikkinchisining ham yechimi bo'lsa, bunday tengsizliklarga teng kuchli (ekvivalent) tengsizliklar deyiladi.

Masalan, $x + 1 > 3$ va $3x > 6$ tengsizliklar teng kuchli tengsizliklardir (chunki ularni ham x ning 2 dan katta barcha qiymatlari qanoatlantiradi). Bu teng kuchli tengsizliklar $(x + 1 > 3) \Leftrightarrow (3x > 6)$ kabi yoziladi.

Yechimga ega bo'lmagan tengsizliklar ham teng kuchli tengsizliklar deb ataladi. Masalan, $x^2 + 1 < 0$ va $-x^2 > 3$ teng kuchli tengsizliklardir.

Teng kuchli tengsizliklarning xossalari ifoda qiluvchi teoremlarni (isbotsiz) keltiramiz.

1.2.1-teorema. Tengsizlikning ikkala qismiga son yoki o'zgaruvchining barcha qiymatlari uchun aniqlangan ifoda qo'shilsa yoki ikkala qismidan ayrilsa, berilgan

tengsizlikka teng kuchli tengsizlik hosil bo'ladi.

Masalan, $x - 1 > 3$ tengsizlikning ikkala qismiga 1 ni qo'shsak, $x > 3 + 1$ tengsizlik berilgan tengsizlikka teng kuchli bo'ladi, ya'ni $x - 1 > 3 \Leftrightarrow x > 3 + 1$. $x + 3 < 1$ tengsizlikning har ikkala qismiga $x^2 + 2$ ni qo'shsak, berilganiga teng kuchli bo'lgan $x + 3 + x^2 + 2 < 1 + x^2 + 2$ tengsizlik hosil bo'ladi, ya'ni

$$x + 3 < 1 \Leftrightarrow x + x^2 + 5 < x^2 + 3.$$

1.2.1.Natija. Sonning yoki o'zgaruvchili ifodaning ishorasini qarama-qarshisiga almashtirib, tengsizlikning bir qismidan ikkinchi qismiga o'tkazish mumkin.

$5x - 5 > 7 + x$ tengsizlikning chap qismidagi -5 o'ng qismga $+5$ qilib, o'ng qismidagi $+x$ ni chap qismga $-x$ qilib o'tkazsak: $5x - x > 7 + 5$ yoki $5x - 5 > 7 + x \Leftrightarrow 4x > 12$.

1.2.2-teorema. Agar tengsizlikning ikkala qismi musbat songa yoki o'zgaruvchining barcha qiymatlarida faqat musbat qiymatlarni qabul qiladigan ifodaga ko'paytirilib (yoki bo'linib), berilgan tengsizlikka teng kuchli tengsizlik hosil bo'ladi.

Masalan, 1) $(2x > 6 - x) \Leftrightarrow (10x > 5(6 - x))$;

$$1)(x - 1 < 5) \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + 3) < 5(x^2 + 3).$$

$x > 3$ tengsizlikni $\frac{1}{(x-4)^2}$ ga ko'paytirsak, hosil bo'lgan $\frac{x}{(x-4)^2} > \frac{3}{(x-4)^2}$ tengsizlik

$x > 3$ tengsizlikka teng kuchli bo'la olmaydi, chunki $\frac{1}{(x-4)^2}$ ifoda o'zgaruvchi

$x = 4$ bo'lganda musbat emas ($\frac{1}{(x-4)^2}$ ifoda $x = 4$ bo'lganda manoga ega emas).

Haqiqatan ham, $x = 4$ berilgan tengsizlikni qanoatlantiradi, ammo hosil bo'lgan tengsizlik $x = 4$ bo'lganda manoga ega bo'lmaydi.

1.2.3-teorema. Agar tengsizlikning ikkala qismi manfiy songa yoki o'zgaruvchining barcha qiymatlarida faqat manfiy qiymatlarni qabul qiladigan ifodaga ko'paytirilib (yoki bo'linib), tengsizlikning belgisini qarama-qarshisiga almashtirilsa, berilgan tengsizlikka teng kuchli tengsizlik hosil bo'ladi.

1.2.1.Misollar.

- 1) $3x - 6 < 0 \Leftrightarrow 3x < 6$
- 2) $9x - 1,8 > 0 \Leftrightarrow x - 0,2 > 0$
- 3) $7x - 3 > 4 \Leftrightarrow 7x > 7$
- 4) $2(x - 1) < x \Leftrightarrow x - 1 < 0,5x$
- 5) $x^2 + 3 > 0 \Leftrightarrow -x^2 - 1 < 0$
- 6) $x^2 > -1 \Leftrightarrow x^2 + 3 > 0$
- 7) $x > 1,5 \Leftrightarrow x - 1,5 > 0$
- 8) $x < 2 \Leftrightarrow x + 2 < 0$
- 9) $5x - 10 < 0 \Leftrightarrow x - 2 < 0$
- 10) $7x < 0,7 \Leftrightarrow 7x - 0,7 > 0$

1.3. Kasr chiziqli tengsizliklar.

Bunday tengsizliklarni yechishga doir misollar ko'ramiz:

1.3.1-misol. $\frac{2x+1}{3x-2} > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Kasr musbat bo'lishi uchun surat va maxraj bir xil ishoraga ega bo'lishi kerak, ya'ni yo ularning ikkalasi musbat, yo ikkalasi manfi bo'lishi kerak.

Demak, ikkita tengsizliklar sistemasiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 3x - 2 > 0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} 2x + 1 < 0 \\ 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

Birinchi sistemada topamiz:

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \text{ ya'ni } x > \frac{2}{3}$$

Ikkinchi sistemadan topamiz:

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x < \frac{2}{3} \end{cases} \text{ ya'ni } x < -\frac{1}{2}$$

Natijada berilgan tengsizlikning quydagi yechimlarini hosil qilamiz:

$$x < -\frac{1}{2}; \quad x > \frac{2}{3}$$

1.3.2-misol. $\frac{3x+7}{2x-7} \geq 5$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Birin-ketin quydagilarni topamiz.

$$\frac{3x+7}{2x-7} - 5 \geq 0, \quad \frac{3x+7-10x+35}{2x-7} \geq 0$$

Tengsizlikning ikkala qismini -1 ga ko'paytirib va bunda tengsizlik belgisi o'zgartirilib, quydagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{7x-42}{2x-7} \leq 0$$

Agar kasrning: 1) surati noldan kichik yoki nolga teng bo'lib, maxraji esa noldan katta bo'lsa; 2) surati noldan katta yoki nolga teng bo'lib, maxraji esa noldan kichik bo'lsa, kasr nolga teng yoki noldan kichik bo'ladi. Demak, tengsizliklarning ikkisistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 7x-42 \leq 0 \\ 2x-7 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x-42 \geq 0 \\ 2x-7 < 0 \end{cases}$$

Birinchi sistemadan topamiz:

$$\begin{cases} x \leq 6 \\ x > \frac{7}{2} \end{cases} \quad \text{ya'ni} \quad \frac{7}{2} < x \leq 6.$$

Ikkinchi sistemadan topamiz:

$$\begin{cases} x \geq 6 \\ x < \frac{7}{2} \end{cases} \quad \text{tengsizlk sistemasi yechimga ega emas.}$$

Demak, berilgan tengsizlikning yechimlar to'plami $(\frac{7}{2}; 6]$ oraliqdan iborat ekan.

1.4. Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizlik.

1.4.1. Tarif. Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizlik deb $ax + b > 0$, $(ax + b \geq 0)$

(1) yoki $(ax + b < 0)$, $(ax + b \leq 0)$ (1') ko'rinishdagi tengsizliklarga yoki soddalashtirilgandan so'ng (1) yoki (1') ko'rinishga keltirish mumkin bo'lgan tengsizliklarga aytiladi (bunda x — o'zgaruvchi, $a \neq 0$ va b — o'zgarmas sonlar).

Masalan, $5x - 0,8 > 0$; $4 - 3,7x \leq 0$ bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklardir.

1. $0,5x + 2 > 0$ tengsizlikni grafik usulda yechish uchun $y = 0,5x + 2$

funksiyaning grafigini chizamiz

Grafik $[-4; +\infty)$ oraliqda x o'qning yuqorisiga joylashadi. Bu esa $[-4; +\infty)$ to'plamida $0,5x + 2$ funksiya musbat ekanligini bildiradi. Shu sababli berilgan tengsizlikning yechimi $[-4; +\infty)$ to'plamdan iborat bo'ladi. Yechim koordinata to'g'ri chizig'ida $[-4; +\infty)$ sonli oraliq bilan tasvirlanad

2. Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizlikni tengsizliklarning teng kuchliligi haqidagi teoremdan foydalanib yechamiz. $ax + b < 0$ tengsizlikning har ikkala qismini (-1) ga ko'paytirib, $ax + b > 0$ ko'rinishdagi tengsizlikka keltirish mumkin bo'lgani uchun $ax + b > 0$ tengsizlikning har ikki qismiga $-b$ ni qo'shsak, berilganiga teng kuchli $ax > -b$ tengsizlik hosil bo'ladi. Bunda $a > 0$ bo'lsa, tengsizlikning har ikkala qismini a ga bo'lib, unga teng kuchli $x > -\frac{b}{a}$ tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikning va unga teng kuchli bo'lgan berilgan tengsizlikning yechimi $[-\frac{b}{a}; +\infty)$ to'plamdan iborat bo'ladi.

$ax > -b$ da $a < 0$ bo'lsa, tengsizlikning har ikki qismini a ga bo'lib, unga teng kuchli $x < -\frac{b}{a}$ tengsizlikni hosil qilamiz. U holda yechim $(-\infty; -\frac{b}{a}]$ to'plamdan iborat bo'ladi.

1.4.1-misol. Tengsizlikni yeching: $7(x - 3) + 2 > x - (1 - 2x)$.

Yechish: Qavslarni ochamiz: $7x - 21 + 2 > x - 1 + 2x$ yoki

$$7x - 19 > 3x - 1$$

O'zgaruvchi bo'lgan hadlarni tengsizlikning chap qismiga, o'zgarmas bo'lgan sonlarni o'ng qismga o'tkazib, o'xshash hadlarni ixchamlaymiz: $4x > 18$ bundan $x > 4,5$. Jovob: $[4,5; +\infty)$.

1.4.2-misol. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{7}{2x-1} < 0$$

Yechish: kasr manfiy bo'lish uchun uning maxraji manfiy bo'lishi kerak, ya'ni $2x - 1 < 0$. $\frac{7}{2x-1} < 0 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0$ tengsizlikni yechsak: $x < 0,5$.

Jovob: $(-\infty; 0,5]$.

Agar bir o'zgaruvchili kasr ko'rinishda bo'lib, kasr maxrajida noma'lum ishtirok etmasa, uni normal ko'rinishga keltirish uchun quydagi ishlar qilinadi:

1) tengsizlik butun ko'rinishga keltiriladi; 2) qavslar ochiladi; 3) noma'lumlar tengsizlikning bir qismiga, ma'lumlar esa ikkinchi qismiga o'tkaziladi; 4) o'xshash hadlar ixchamlanadi; 5) tengsizlikning har ikkala qismi o'zgaruvchining

koeffitsientiga bo'linadi (bo'linuvchi musbat son bo'lsa, tengsizlik belgisi saqlanadi, bo'linuvchi manfiy son bo'lsa, tengsizlik belgisi qarama-qarshisiga almashtiriladi).

1.4.3-misol. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{x-1}{2} + \frac{3-2x}{3} - 2 < x + \frac{4-3x}{4}$$

Yechish. Tengsizlikning barcha hadlarini 12 ga ko'paytirib yechamiz:

$$6(x-1) + 4(3-2x) < 12x + 3(4-3x),$$

$$6x - 6 + 12 - 8x - 24 < 12x + 12 - 9x$$

yoki $-2x - 18 < 3x + 12$. Bunda $-2x - 3x < 18 + 12$ yoki $-5x < 30$, ya'ni $x > -6$. Jovob: $[-6; +\infty)$.

1.4.4-misolalar. Tengsizliklarni yeching.

$$1) \quad 5x - 0,2 > -2x - 33,1$$

$$5x + 2x > -33,1 + 0,2$$

$$7x > -32,9$$

$$x > -32,9:7$$

$$x > -4,7$$

$$2) \quad 4(x-1) > x + 2(x-5)$$

$$4x - 4 > x + 2x - 10$$

$$4x - 3x > -10 + 4$$

$$x > -6$$

$$3) \quad 3(x+4) - 1 > 2(x-1) + x$$

$$3x + 12 - 1 > 2x - 2 + x$$

$$3x - 3x > -11 - 2$$

$$0 > -13$$

$$4) \quad 5 - 4(x-1) > (x+3) \cdot 2$$

$$5 - 4x + 4 > 2x + 6$$

$$5 + 4 - 6 > 2x + 4x$$

$$3 > 6x$$

$$x < \frac{1}{2}$$

$$5) \quad \frac{5x-3}{4} > 0. \text{ Kasr musbat bo'lishi uchun surat musbat bo'lishi kerak.}$$

$$5x - 3 > 0 \Rightarrow 5x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{5} \Rightarrow x > 0,6. \text{ Jovob: } 0,6$$

$$6) \quad \frac{17}{3x-1} < 0. \text{ Kasr manfiy bo'lishi uchun maxraji manfiy bo'lishi kerak, ya'ni}$$

$$3x - 1 < 0 \Rightarrow 3x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{3}. \text{ Jovob: } (-\infty; \frac{1}{3})$$

$$7) \frac{2x-9}{7} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(2x-9) > 7 \cdot 1 \Leftrightarrow 4x-18 > 7 \Leftrightarrow 4x > 7+18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x > 25, x > \frac{25}{4} \Rightarrow x > 6\frac{1}{4}, \text{ Jovob: } (6\frac{1}{4}; +\infty)$$

$$8) \frac{13-4x}{3} > \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(13-4x) > 3 \cdot 3 \Leftrightarrow 52-16x > 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 52-9 > 16x, \quad 16x < 43 \Leftrightarrow x < \frac{43}{16} \Leftrightarrow x < 2\frac{11}{16}$$

9)

$$(x-2)(x+1)-3 > x^2+x+5 \Leftrightarrow x^2+x-2x-2-3 > x^2+x+5 \Leftrightarrow x^2-x-5 > x^2+x+5 \Leftrightarrow -5-5 > x^2+x-x^2+x \Leftrightarrow -10 > 2x \Rightarrow x < -5.$$

Jovob: $(-\infty; -5)$

$$10) 4x^2-7x+3 > (3-2x)^2 \Leftrightarrow 4x^2-7x+3 > 9-12x+4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2-4x^2-7x+12x > 9-3 \Rightarrow 5x > 6 \Rightarrow x > \frac{6}{5} \Rightarrow x > 1\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$x > 1,2. \quad \text{Jovob: } (1,2; +\infty)$$

$$11) \frac{2x-3}{3} - \frac{3x-5}{4} < 0 \Rightarrow 4(2x-3) - 3(3x-5) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x-12-9x+15 < 0 \Rightarrow -x+3 < 0 \Rightarrow x > 3, \text{ Jovob: } (3; +\infty)$$

$$12) x-3 > \frac{2x+1}{4} \Leftrightarrow 4(x-3) > 2x+1 \Leftrightarrow 4x-12 > 2x+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-2x > 1+12 \Rightarrow 2x > 13 \Rightarrow x > \frac{13}{2}. \text{ Jovob: } (6,5; +\infty)$$

1.5. Qo'sh tengsizliklarning xossalari va ular ustida amallar

1.5.1. Ta'rif. Qo'sh tengsizliklar deb $a < b < c$ yoki $a > b > c$ ko'rinishdagi tengsizliklarga aytiladi.

Qo'sh tengsizliklarning ba'zi asosiy xossalari bilan tanishaylik:

1. Agar $a < b < c$ bo'lsa $c > b > a$ bo'ladi, ya'ni $(a < b < c) \Leftrightarrow (c > b > a)$.

2. Agar $a < b < c$ bo'lib, d — ixtiyoriy son bo'lsa, $a+d < b+d < c+d$

bo'ladi, ya'ni $(a < b < c, d \text{ — ixtiyoriy son}) \Leftrightarrow (a+d < b+d < c+d)$.

3. Agar $a < b < c$ bo'lib, $n > 0$ bo'lsa, $an < bn < cn$ yoki $a:n < b:n < c:n$

bo'ladi, ya'ni $(a < b < c, n > 0) \Leftrightarrow (an < bn < cn);$

$$(a < b < c, n > 0) \Leftrightarrow (a:n < b:n < c:n).$$

4. Agar $a < b < c$ bo'lib, $n < 0$ bo'lsa, $an > bn > cn$ yoki $a:n > b:n > c:n$

bo'ladi, ya'ni $(a < b < c, n < 0) \Leftrightarrow (an > bn > cn);$

$$(a < b < c, n < 0) \Leftrightarrow (a:n > b:n > c:n).$$

1.5.2.Tarif. $a < b < c$ va $a' < b' < c'$ yoki $a > b > c$ va $a' > b' > c'$ tengsizliklarga bir xil ma'noli $a < b < c$ va $a' > b' > c'$ yoki $a > b > c$ va $a' < b' < c'$ tengsizliklarga esa qarama-qarshi ma'noli qo'sh tengsizliklar deyiladi.

Agar $a < b < c$ va $a' < b' < c'$ bo'lsa, $a + a' < b + b' < c + c'$ bo'ladi.

Masalan,

$$1) \frac{5 < 7 < 15}{+ \quad -1 < 0 < 3} \quad 2) \frac{-0,9 < -0,3 < 0}{+ \quad 13 < 14 < 15}$$

$$\frac{4 < 7 < 18}{12,1 < 13,7 < 15}$$

$5 < 7 < 11$ tengsizlik bilan $8 > 0 > -10$ tengsizliklarni qo'shish uchun ularni bir xil ma'noli qo'sh tengsizliklarga keltirish kerak, ya'ni

$$\frac{5 < 7 < 11}{+ \quad 8 > 0 > -10} \Rightarrow \frac{5 < 7 < 10}{-8 < 0 < 10} \quad yoki \quad \frac{-5 > -7 > -11}{8 > 0 > -10}$$

$$\frac{-3 < 7 < 21}{3 > -7 > -21}$$

6. Agar $a < b < c$ va $a' > b' > c'$ bo'lsa, $a - a' < b - b' < c - c'$ bo'ladi.
 $a > b > c$ va $a' < b' < c'$ bo'lsa, $a - a' > b - b' > c - c'$ bo'ladi.

Masalan,

$$1) \frac{-1 < 10 < 11}{- \quad -9 > -10 > -13} \quad 2) \frac{40 > 28 > 7}{- \quad -4 < 0 < 1}$$

$$\frac{8 < 20 < 24}{44 > 28 > 6}$$

Bir xil ma'noli tengsizliklarni ayirish uchun avval ularni qarama-qarshi ma'noli tengsizlik ko'rinishda yozib olib, so'ngra ayirish kerak.

7. Agar $0 < a < b < c$ va $0 < a' < b' < c'$ bo'lsa, $aa' < bb' < cc'$ bo'ladi.

Masalan, $2 < 3 < 5$ va $0,2 < 1 < 3$ bo'lsa, $2 * 0,2 < 3 * 1 < 5 * 3$ yoki $0,4 < 3 < 15$ bo'ladi.

8. Agar $0 < a < b < c$ va $n \in N$ bo'lsa, $a^n < b^n < c^n$ bo'ladi.

Ya'ni $(0 < a < b < c, n \in N) \Leftrightarrow a^n < b^n < c^n$.

9. Agar $0 < a < b < c$ bo'lsa, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$ bo'ladi, ya'ni

$$(0 < a < b < c) \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}.$$

1.5.1 Misollar.

$$1) \frac{\begin{matrix} -0,8 < 1 < 1,7 \\ + \\ 2,1 < 4 < 5,3 \end{matrix}}{1,3 < 5 < 7} \quad 2) \frac{\begin{matrix} 10,1 < 12,9 < 13,2 \\ + \\ -5,4 < -4 < -3,8 \end{matrix}}{4,7 < 8,9 < 9,4} \quad 3) \frac{\begin{matrix} 4 < 7 < 21,3 \\ - \\ 9 > 8 > 6,1 \end{matrix}}{-5 < -1 < 15,2}$$

$$4) \frac{\begin{matrix} -4,8 < 0 < 2,3 \\ - \\ 5,2 > 4 > 3,7 \end{matrix}}{-10 < -4 < -1,4} \quad 5) \frac{\begin{matrix} 7 < 8 < 9 \\ + \\ 10 > 5 > 3 \end{matrix}}{3 > -3 > -6} \Leftrightarrow \frac{\begin{matrix} -7 > -8 > -9 \\ + \\ 10 > 5 > 3 \end{matrix}}{3 > -3 > -6}$$

$$6) \frac{\begin{matrix} -10,1 < -9,2 < -8,3 \\ + \\ 1 > 0 > -1 \end{matrix}}{11,1 > 9,2 > 7,3} \Leftrightarrow \frac{\begin{matrix} 10,1 > 9,2 > 8,3 \\ + \\ 1 > 0 > -1 \end{matrix}}{11,1 > 9,2 > 7,3}$$

$$7) \frac{\begin{matrix} 20 < 30 < 37 \\ - \\ 19 < 21 < 23 \end{matrix}}{39 < 51 < 60} \Leftrightarrow \frac{\begin{matrix} 20 < 30 < 37 \\ - \\ -19 > -21 > -23 \end{matrix}}{39 < 51 < 60}$$

$$8) \frac{\begin{matrix} 7,8 < 10,4 < 13 \\ - \\ -4,5 < -3,9 < -2,6 \end{matrix}}{3,3 < 6,5 < 10,4} \Leftrightarrow \frac{\begin{matrix} 7,8 < 10,4 < 13 \\ - \\ 4,5 > 3,9 > 2,6 \end{matrix}}{3,3 < 6,5 < 10,4}$$

$$9) \frac{\begin{matrix} 13,4 < 15,7 < 20,9 \\ \times \\ 2 < 5 < 10 \end{matrix}}{26,8 < 78,5 < 209} \quad 10) \frac{\begin{matrix} 2 < 7 < 11 \\ \times \\ -5 > -6 > -10 \end{matrix}}{10 < 42 < 110} \Leftrightarrow \frac{\begin{matrix} 2 < 7 < 11 \\ \times \\ 5 < 6 < 10 \end{matrix}}{10 < 42 < 110}$$

1.6. Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar sistemasi

1.6.1-tarif. Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar sistemasi deb

$$\begin{cases} ax + b \vee 0 \\ cx + d \vee 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + b \vee 0 \\ cx + d \vee 0 \\ lx + k \vee 0 \end{cases}$$

ko'rinishdagi yoki shunday ko'rinishga keltirish mumkin bo'lgan tengsizliklar sistemasiga aytiladi. ($\vee$ belgi $>, <, \geq, \leq$ belgilaridan birini bildiradi.)

1.6.2-tarif. Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar sistemasining yechimi deb o'zgaruvchining sistemani tashkil etuvchi barcha tengsizliklarini qanoatlantiradigan qiymatlar to'plamiga aytiladi.

1.6.1-misol. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 3x + 23 > 3 - x, \\ x - 4 > 3(x - 4). \end{cases}$$

Yechish.

$$\begin{cases} 3x + x > 3 - 23 \\ x - 4 > 3x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x > -20 \\ -2x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x < 4. \end{cases}$$

Sistemaning yechimi har ikkala tengsizlik yechimlari to'plamlarining kesishmasidan iborat bo'ladi: $[-5; +\infty) \cap (-\infty; 4]$ *Javob:* $[-5; 4]$. Yechimlar to'plamining koordinata to'g'ri chizig'idagi tasviri rasimda ko'rsatilgan.

1.6.2-misol. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} \frac{x+4}{2} \leq \frac{x}{2} - 2x, \\ \frac{12+x}{2} \leq \frac{x}{4} + 3x. \end{cases}$$

$$\text{Yechish. } \begin{cases} x + 4 \leq x - 4x \\ 24 + 2x \leq x + 12x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \leq -4 \\ -11x \leq -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2\frac{2}{11} \end{cases}$$

Yechim har ikki tengsizlik yechimlari to'plamlarining kesishmasidan iborat, ya'ni $[-\infty; -1] \cap [2\frac{2}{11}; +\infty) = \emptyset$. *javob* $\emptyset$.

1.6.3-misol. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} - 2x + 3 \leq 0,5 \\ 7 - 2x < 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4x + 6 \leq 1 \\ 7 - 1 < 2x + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \leq 1 - 6 \\ 6 < 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x > \frac{6}{4} \end{cases}$$

Jovob: $[5; +\infty)$

1.6.4-misol. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 2,4 - x < 3x + \frac{2}{5} \\ 3,1x \leq 3x + 0,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 5x < 15x + 2 \\ 31x \leq 30x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 2 < 15x + 5x \\ 31x - 30x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 < 20x \\ x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,5 \\ x \leq 8 \end{cases}$$

Jovob: $(0,5; 8]$

1.6.5-misol. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 0,3 - 3x > 0,1x - 1 \\ 2x - 1 < 0,3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3 + 1 > 0,1x + 3x \\ 2x + x < 0,3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,3 > 3,1x \\ 3x < 1,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13 > 31x \\ 30x < 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{13}{31} \\ x < \frac{13}{30} \end{cases}$$

Jovob: $(-\infty; \frac{13}{31})$

1.6.6-misol. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} - 1 \geq x + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - 2x \geq \frac{1}{3} + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 \geq 2x + 1 \\ 1 - 8x \geq \frac{4}{3} + 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2x \geq 1 + 2 \\ 3 - 4 \geq 12x + 24x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ -1 \geq 36x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -\frac{1}{36} \end{cases}$$

Jovob: $x \in \emptyset$.

1.6.7-misol. $\frac{2x-1}{4x+1} > 0$, kasr musbat bo'lishi uchun surati va maxrajidagi

ifodalar bir xil ishorali bo'lishi kerak, ya'ni

$$a) \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 4x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 1 \\ 4x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ bu sistemaning yechimi } (-\infty; -\frac{1}{4})$$

$$b) \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 4x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 1 \\ 4x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ bu sistemaning yechimi } (\frac{1}{2}; +\infty)$$

Har ikkala sistemaning yechimlari to'plamining birlashmasi $(-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$ berilgan tengsizlikni yechimi bo'ladi.

1.6.7-misol.

$\frac{3x-5}{2x+4} < 0$ Tengsizlikni yeching.

$$a) \begin{cases} 3x - 5 < 0 \\ 2x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 5 \\ 2x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{3} \\ x > -\frac{4}{2} \end{cases} \text{ bu sistemaning yechimi } (-2; \frac{5}{3})$$

$$b) \begin{cases} 3x - 5 > 0 \\ 2x + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 5 \\ 2x < -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{3} \\ x < -2 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi $\emptyset$ javob: $(-2; \frac{5}{3})$.

1.6.8-misol.

$$\frac{3x+1}{1-2x} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{1-2x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+1-3+6x}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9x-2}{1-2x} \geq 0$$

$$a) \begin{cases} 9x - 2 \geq 0 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x \geq 2 \\ 1 > 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{9} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

bu sistemaning yechimi $[\frac{2}{9}; \frac{1}{2})$

$$b) \begin{cases} 9x - 2 \leq 0 \\ 1 - 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{9} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

bu sistemaning yechimi $\emptyset$ javob: $[\frac{2}{9}; \frac{1}{2})$

1.6.9-misol

$$\frac{3-2x}{x+1} < 4 \Leftrightarrow \frac{3-2x-4x-1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2-6x}{x+1} < 0$$

$$a) \begin{cases} 2 - 6x < 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < 6x \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > -1 \end{cases}$$

bu sistemaning yechimi $(\frac{1}{3}; +\infty)$

$$b) \begin{cases} 2 - 6x > 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x < -1 \end{cases}$$

bu sistemaning yechimi $(-\infty; -1)$ javob $(-\infty; -1) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$

1.6.10-misol. Tengsizlikni yeching:

$$\frac{7-2x}{x+1} < 1.$$

Yechish. Tengsizlikning har ikki qismini ishorasi (musbat yoki manfiyligi) ma'lum bo'lgan $x+1$ ifodaga ko'paytirish mumkin emas. Shuning uchun berilgan tengsizlikni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{7-2x}{x+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{7-2x}{x+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{7-3x-1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{6-3x}{x+1} < 0.$$

Kasr manfiy bo'lishi uchun uning surat va maxrajidagi ifodalar har xil ishorali bo'lishi kerak, ya'ni:

$$a) \begin{cases} 6-3x > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \text{ yoki } b) \begin{cases} 6-3x < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}.$$

$$a) \begin{cases} 6-3x > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x < -6 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > -1 \end{cases}.$$

Bu sistemaning yechimi : $[2; +\infty)$

Har ikki sistema yechimlari to'plamlarining birlashmasi $] -\infty; -1[\cup]2; +\infty[$ berilgan tengsizlikning yechimi bo'ladi.

1.6.11-misol.

$$x-1 \leq \frac{x+1}{7} \leq x-\frac{4}{7}.$$

Yechish . 1-usul: (tengsizliklar sistemasiga keltirib yechish).

$$\begin{cases} x-1 \leq \frac{x+1}{7} \\ \frac{x+1}{7} \leq x-\frac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-7 \leq x+1 \\ x+1 \leq 7x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x \leq 8 \\ 5 \leq 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4}{3} \\ x \geq \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{6} \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

$$\text{javob: } \left[\frac{5}{6}; \frac{4}{3}\right].$$

2-usul: (qo'sh tengsizlikning xossalari va teng kuchlilikidan foydalanib yechish).

$$x-1 \leq \frac{x+1}{7} \leq x-\frac{4}{7} \Leftrightarrow 7x-7 \leq x+1 \leq 7x-4 \Leftrightarrow 7x-7-7x-1 \leq x+1-7x-1 \leq 7x-4-7x-1 \Leftrightarrow -8 \leq -6x \leq -5 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \geq x \geq \frac{5}{6}.$$

Javob: $[\frac{5}{6}; \frac{4}{3}]$

1.7 $|ax + b| < c$ ko'rinishdagi tengsizliklarni yechish

1. a) x ning ixtiyoriy

qiymatida $|x|$ manfiy bo'lgani uchun -2 dan katta.

Demak $|x| > -2$ tengsizlikning yechimi barcha sonlar to'plamidan iborat.

b) x ning noldan boshqa barcha qiymatlarida $|x| > 0$ bo'lgani uchun $|x| > 0$ tengsizlikning yechimi $(-\infty; 0] \cup [0; +\infty)$ to'plamdan iborat.

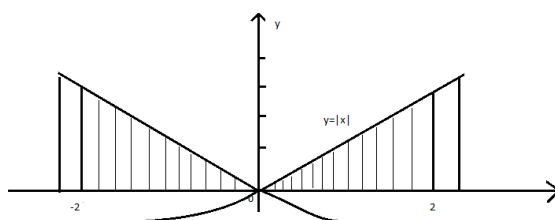
c) $|x| > 2$ tengsizlik x ning -2 dan kichik hamda 2 dan katta barcha qiymatlaridan o'rinli, $|x| > 2$ tengsizlik $x < -2$ va $x > 2$ to'plamga teng kuchli, ya'ni :

$$|x| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 2 \end{cases}$$

$x < -2$ tengsizlikning yechimi $(-\infty; -2]$

$x > 2$ tengsizlikning yechimi esa $[2; +\infty)$

Bu ikki tengsizliklar to'plamining yechimi ular yechmlari to'plamlarining birlashmasidan iborat bo'ladi, ya'ni $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. $|x| > 2$ tengsizlikni grafik yechish.



(1.7.1-chizma)

Demak , $|x| > c$ tengsizlikning yechimi

1) $c < 0$ bo'lganda

ixtiyoriy son

2) $c = 0$ bo'lganda

$(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. to'plamdan iborat bo'ladi

3) $c > 0$ bo'lganda

$$\begin{cases} x < -c \\ x > c \end{cases} \text{ tengsizliklar to'plamining yechimi}$$

$(-\infty; -c] \cup [c; +\infty)$. dan iborat.

Tengsizliklar sistemasining har bir yechimi sistemani tashkil qilgan har bir tengsizlikni qanoatlantirishi kerak. Shuning uchun tengsizliklar sistemasining yechimi sistemani tashkil etgan tengsizliklar yechimlari to'plamlarining kesishmasidan iborat. Tengsizliklar to'plamining yechimi esa uni tashkil etgan tengsizliklardan hamda kamida bittasini qanoatlantirishi kerak. Boshqacha aytganda, tengsizliklar yechimi to'plamni tashkil etuvchi tengsizliklar yechimlari to'plamlarining birlashmasidan iborat bo'ladi.

$$\text{Masalan, 1) } \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \end{cases} \text{ sistemaning yechimi } [1; \infty) \cap [2; \infty) = [2; \infty) \quad \begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$\text{tengsizliklar to'plamining yechimi: } [1; \infty) \cup [2; \infty) = [1; \infty) \quad \begin{cases} x < 3 \\ x < 1 \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasining yechimi $\emptyset$ bo'lgan holda $\begin{cases} x < 1 \\ x < 3 \end{cases}$ tengsizliklar to'plamining yechimi $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$ dan iborat.

1.7.1-misol. Tengsizlikni yeching $|2x - 5| > 4$

Yechish:

Berilgan tengsizlik $2x - 5 < -4$ va $2x - 5 > 4$ tengsizliklar to'plamiga teng kuchli, ya'ni

$$|2x - 5| > 4 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5 < -4 \\ 2x - 5 > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5 < -4 \\ 2x - 5 > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x < 1 \\ 2x > 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0.5 \\ x > 4.5 \end{cases}$$

Javob : har ikki tengsizlikning yechimlari to'plamining birlashmasi $(-\infty; 0.5] \cup [4.5; +\infty)$ dan iborat.

2.

$$\text{a) } |x| < -5 \text{ yoki}$$

$$\text{b) } |x| < 0 \text{ tengsizliklar yechimga ega emas } (\emptyset)$$

3. $|y| < 3$ tengsizlik esa -3 dan katta va 3 dan kichik sonlar, ya'ni

$$\begin{cases} y < 3 \\ y > -3 \end{cases}$$

tengsizliklar yechimi yoki $-3 < y < 3$ qo'sh tengsizlikning yechimi qanoatlantiradi. Demak, $|y| < 3 = -3 < y < 3$.

Javob: $(-3; 3)$

$|x| < c$ tengsizlik $c \leq 0$ bo'lganda yechimga ega bo'ladi, $c > 0$ bo'lganda esa $-c < x < c$ qo'sh tengsizlikning yechimi $(-c; c)$ to'plamdan iborat bo'ladi.

$$|ax + b| < c$$

Tengsizlik ham $c \leq 0$ bo'lganda yechimga ega emas, $c > 0$ bo'lganda esa $-c \leq ax + b < c$ yechimga ega bo'ladi, ya'ni $(|ax + b| < c; c > 0) = -c < ax + b < c$.

$-c < ax + b < c$ qo'sh tengsizlikning yechimi ham $ax + b > -c$ tengsizlikning, ham $ax + b < c$ tengsizlikning yechimi bo'ladi va aksincha, $ax + b > -c$ va $ax + b < c$ tengsizliklar yechimlarining kesishmasi $-c < ax + b < c$ qo'sh tengsizlikning yechimi bo'ladi, ya'ni

$$|ax + b| < c = \begin{cases} ax + b < -c \\ ax + b > c \end{cases}$$

4.

$$a) |x| \neq -3$$

tengsizlikning yechimi $(-\infty; +\infty)$ to'plamdan

b) $|x| \neq 0$ tengsizlikning yechimi noldan boshqa barcha sonlar to'plami $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ dan iborat.

c) $|x| \neq 2$ tengsizlikning yechimi esa $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 2 \end{cases}$ tengsizliklar to'plamining yechimidan iborat.

Demak $|x| \neq a$ tengsizliklar yechimi:

a) $a < 0$ bo'lsa $(-\infty; +\infty)$ to'plamdan

b) $a = 0$ bo'lsa $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

c) $a > 0$ bo'lsa $\begin{cases} x \neq -a \\ x \neq a \end{cases}$ tengsizliklar to'plamining yechimidan iborat.

1.8. Ayniy tengsizlik. Tengsizlikni isbotlash.

1.8.1-tarif. tengsizlikning aniqlanish sohasi deb o'zgaruvchining shu tengsiz

likni tashkil etuvchi ma'noga ega bo'ladigan qiymatlar to'plamiga aytiladi.

Masalan, $\frac{1}{a} > 0$ tengsizlikning aniqlanish sohasi noldan boshqa barcha sonlar to'plamidan iborat, $\frac{c+1}{c+2} < \frac{5}{c}$ tengsizlikning aniqlanish sohasi $\frac{c+1}{c+2}$ va $\frac{5}{c}$ ifodaning aniqlanish sohalarining birlashmasidan iborat $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$.

1.8.2-tarif. Ayniy tengsizlik deb o'zgaruvchining shu tengsizlik aniqlanish sohasidagi har bir qiymatda o'rinli bo'lgan (to'g'ri tengsizlikka aylanadigan) tengsizlikka aytiladi.

Masalan, $a + 2 > a$ va $a^2 > -1$ ayniy tengsizliklardir, chunki bu tengsizliklarning aniqlanish sohasi nollar to'plamidan iborat bo'lib, a ning ixtiyoriy qiymatida bu tengsizliklar o'rinli bo'ladi (to'g'ri tengsizlikka aylanadi).

1.8.3-tarif. tengsizlikni isbot qilish uchun o'zgaruvchining tengsizlik aniqlanish sohasidagi barcha qiymatlarida shu tengsizlikning to'g'ri tengsizlikka aylanishini ko'rsatish kerak.

Masalan, $(a + 2)^2 > 4a - 1$

Isbot. $a^2 + 4a + 4 > 4a - 1$

Tengsizlikning har ikki qismiga o'zgaruvchining barcha qiymatlarida aniqlangan $-4a - 4$ ifodani qo'shsak, berilganiga teng kuchli bo'lgan tengsizlik hosil bo'ladi.

$$a^2 + 4a + 4 - 4a - 4 > 4a - 1 - 4a - 4.$$

O'xshash hadlarni ixchamlasak $a^2 > -5$ ayniy tengsizlik hosil bo'ladi. Bu tengsizlik a ning barcha qiymatlarida o'rinli bo'ladi.

Endi teskari tartibda mulohaza yuritib, berilgan tengsizlikni isbot qilamiz.

$a^2 > -5$ ayniy tengsizlikning har ikki qismiga a ning barcha qiymatlarida aniqlangan $4a - 4$ ifodani qo'shsak $a^2 > -5$ ga teng kuchli bo'lgan $a^2 + 4a + 4 > -5 + 4a + 4$ yoki $(a)^2 > 4a - 1$ tengsizlik ham ayniy tengsizlik bo'ladi, ya'ni a ning barcha qiymatlarida o'rinli bo'ladi.

1.8.1-misol. $a > 0$ bo'lsa, $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ekani (ya'ni o'zoro teskari musbat sonlar

yig'indisi 2 dan kich emasligini isbotlansin.

Yechish: $a > 0$ bo'lgani uchun tengsizlikning har ikki qismni a ga ko'paytiramiz:

$a^2 + 1 \geq 2a$ yoki $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ Bunda: $(a - 1)^2 \geq 0$. Bu tengsizlik berilgan tengsizlikka teng kuchli bo'lgan ayniy tengsizlikdir. Endi teskari tartibda mulohaza yuritamiz. $(a - 1)^2 \geq 0$ ayniy tengsizlikdan $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ yoki $a^2 + 1 \geq 2a$.

Bu tengsizlikning har ikki qismini $a > 0$ ga bo'lsak, $a + \frac{1}{a} \geq 2$ bo'ladi.

$(a - 1)^2 \geq 0$ ayniy tengsizlikka teng kuchli bo'lgan berilgan tengsizlik ham ($a > 0$ bo'lganda) o'rinli.

Tengsizliklarni isbotlash

Matematikada tengsizlik tushunchasi ko'p uchraydigan tushinchalardan biridir. Tengsizlik R sonli to'plamda qaralib, shu to'plamdan olingan sonlar yoki algebraik ifodalarni katta, kichik, teng tushinchalari yordamida bog'laydi.

Sonli tengsizliklar quydagi xossalarga ega:

1. $\forall a, b, c \in R: a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$
2. $\forall a, b, m \in R: (a > b) \Leftrightarrow (a - m > b - m)$
3. $\forall a, b, c, d \in R: (a > b \wedge c > d) \Rightarrow a + c > b + d$
4. $\forall a, b, c, d \in R: (a > b \wedge c < d) \Rightarrow a - d < b - c$
5. $\forall a, b, c \in R: (a > b \wedge c > 0) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$
6. $\forall a, b, c \in R: (a > b \wedge c < 0) \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
7. $\forall a, b, c \in R^+: (a > b \wedge c > d) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot d$
8. $\forall a, b, c \in R^+: (a > b \wedge c < d) \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$

1.8.1-teorema. Bir necha musbat soning o'rta arifmetik qiymati shu sonlarning o'rta geometrik qiymatidan kichik emas.

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}.$$

1.8.2-teorema. Agar n ta musbat $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlarning ko'paytmasi birga teng bo'lsa u holda

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq n.$$

1.8.3-teorema. Ixtiyoriy berilgan $a_i > 0$ va $b_i > 0$; ($i = 1, n$) uchun

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 * \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

1.8.4-teorema. (Gyolder tengsizligi). Agar

$p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, x > 0, y > 0$ bo'lsa, uholda

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

1.8.2-misol. Agar $a \geq 0, b \geq 0$ bo'lsa, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ni isbotlang.

Isboti. 1-usul:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \\ a \geq 0, b \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ a \geq 0, b \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 \geq 4ab, \\ a \geq 0, b \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 \geq 0, \\ a \geq 0, b \geq 0. \end{array} \right.$$

2-usul:

$$\begin{aligned} & [(a-b)^2 \geq 0 \wedge a \geq 0 \wedge b \geq 0] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [(a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab) \wedge a \geq 0 \wedge b \geq 0] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [a \geq 0 \wedge b \geq 0 \wedge (a-b)^2 \geq 4ab] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [a \geq 0 \wedge b \geq 0 \wedge (a+b)^2 \geq 4ab] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [a \geq 0 \wedge b \geq 0 \wedge a+b \geq 2\sqrt{ab}] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left[a \geq 0 \wedge b \geq 0 \wedge \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \right]. \end{aligned}$$

3-usul: $|a|$ va $|b|$ kesmalarni tanlab olib, $|a + b|$ kesmaga teng diametrli aylana chizamiz. Bunda a yoki b kesmaning ikkinchi uchidan $a + b$ diametrga perpendikulyar bo'lib, o'tgan vatarning yarmi har doim diametrning yarmidan kichik ekanini aniqlash mumkin. Ya'ni: $\triangle CAD$ dan $a:AB = AB:b \Rightarrow AB^2 = ab \Rightarrow AB = \sqrt{ab}$.

CD-gipotenuza, shuning uchun uning uzunligi shu uchburchakning ixtiyoriy katetidan uzun, bunda $AO > AB \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

1.8.3-misol. Agar $a + b + c = 1$ bo'lsa, $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 5$ ekanini isbotlang.

Isbot. Bu tengsizlikni isbotlash uchun 1-teoremadan foydalanamiz.

$$\begin{aligned} \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} &\leq 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} &\leq 5 \wedge a + b + c - 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < & \\ < \frac{4a+2}{2} + \frac{4b+2}{2} + \frac{4c+2}{2} \wedge a + b + c - 1) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 2(a + b + c) + 3 \wedge a + b + c - 1) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5 \wedge a + b + c - 1). \end{aligned}$$

Demak, $a + b + c - 1$ bo'lganda $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$ bo'ladi.

1.8.4-misol. Quydagi tengsizlikni matematik induksiya metodi bilan isbotlang.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Isboti. $n - 1$ bo'lganda $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ tengsizlik o'rinli. Endi berilgan tengsizlik

$n = k$ uchun o'rinli, ya'ni

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

deb, uning $n = k + 1$ uchun o'rinli ekanini ko'rsatamiz:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

Buning uchun

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}.$$

tengsizlikning ikki tomonini $\frac{2k+1}{2k+2}$ ga ko'paytiramiz:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}$$

endi

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

tengsizlikni isbotlaymiz. Buning uchun bu tengsizliklarning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, so'ngra ixchamlasak:

$$2k^2 + 28k^2 + 19k + 4 < 12k^2 + 28k^2 + 20k + 4.$$

$$30k^2 + 19k + 4 < 40k^2 + 20k$$

Xulosa.

Bitiruv malakaviy ishining ushbu birinchi bobida bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklarning boshlang'ich tushunchalari haqida to'liq ma'lumot berilgan bo'lib, jumladan, tengsizliklar haqida asosiy tushunchalar, teng kuchli tengsizliklar, bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar, ularning asosiy xossalari va isboti, qo'sh tengsizliklarning asosiy xossalari va ular ustida amallar, kasr chiziqli tengsizliklar, bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar sistemasi, $|ax + b| < c$ ko'rinishdagi tengsizliklarni yechish va ular ustida amallar, ayniniy tengsizliklar, tengsizliklarni isbotlash va misollar umumiy holda bayon qilingan. Bunda har bir keltirilgan tushunchalar ta'riflandi va teoremlar matematik isboti bilan berildi. Shuning bilan birga har bir paragrafda bir qator turli xildagi misollarni yechib ko'rsadim.

2-Bob. Bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklarning taqribiy hisoblashga tadbiqlari.

2.1

Miqdorlarning

taqribiy qiymatlari . Yaqinlashish xatosining moduli.

Miqdorning haqiqiy qiymatini kamdan-kam hollardagina aniqlash mumkin.

Masalan, oilangizda necha kishi borligini, uchib ketayotgan samalyotda nechta passajir ketayotganini aniq aytish mumkin. Ammo kesmaning uzunligini, uning hajmini, kosmik kemaning tezligini aniq o'lchab bo'lmaydi.

Kishilar o'zining kundalik hayotida turli miqdorda (uzunlik, yuza, hajim, massa, temperatura va h. k) o'lchash natijasida ularning taqribiy qiymatlari bilan ish ko'radilar, ya'ni taqribiy qiymatlar asosan o'lchash natijasida hosil bo'ladi. Bundan tashqari sonlarni yaxlitlash natijasida ham, buyumlarni sanash natijasida (buyumlar juda ko'p bo'lib, ularni sanab chiqish qiyin bo'lgan yoki sanab chiqish mumkin bo'lmagan hollarda) ham taqribiy sonlar hosil bo'ladi.

2.1.1.Tarif. Miqdorning taqribiy qiymatining xatosi deb uning haqiqiy qiymati bilan taqribiy qimati orasidagi ayirmaga aytiladi. Ya'ni: $\Delta = x - a$.

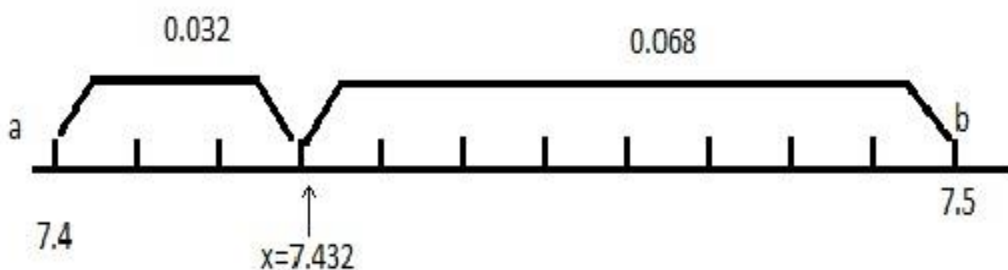
2.1.1-misol. Kamsamol majlisiga $x = 147$ o'quvchi qatnashdi. Majlisda taxminan $a = 140$ o'quvchi qatnashdi desak, bu taqribiy qiymatning xatosi $x - a = 7$ ga teng.

Agar majlisda taxminan $b = 150$ kamsamol qatnashdi desak, bu taqribiy qiymatning xatosi $x - b = -3$ bo'ladi.

Bu misolda kami bilan olingan taqribiy qiymat xatosi boshqacha aytganda kami bilan olingan yaqinlashish xatosi 7 musbat son bo'lib, ortig'i bilan olingan yaqinlashish xatosi -3 esa manfiy sonidir. Har ikki yaqinlashishda qaysi birida xato oz ekanini bilish uchun kami bilan olingan yaqinlashish xatosining modeli $|x - a| = |7| = 7$ bilan ortig'i bilan olingan yaqinlashish xatosining modeli $|x - b| = |-3| = 3$ ni taqqoslaymiz. Demak bu misolda ortig'i bilan olingan taqribiy qiymat xatosi kam ekan.

Ikki taqribiy qiymatning qaysi biri haqiqiy qiymatga yaqinligini bilish uchun kami bilan olingan va ortig'i bilan olingan $|q|$ taqribiy qiymatlar xatolari taqqoslanar ekan.

$x = 7,432$ sonining o'rniga uning kami bilan (0,1 aniqlikdagi) taqribiy qiymati $a = 7,4$ olinsa, kami bilan olingan yaqinlashish xatosining moduli $|x - a| = |7,432 - 7,4| = 0,032$ ga teng bo'ladi. Agar berilgan son o'rniga uning ortig'i bilan (0,1 aniqlikda) taqribiy qiymati $b = 7,5$ olinsa, ortig'i bilan olingan yaqinlashish xatosining moduli $|x - b| = |7,432 - 7,5| = |0,068| = 0,068$ ga teng bo'ladi. $0,032 < 0,068$ bo'lgani uchun 7,4 berilgan sonning haqiqiy qiymatiga yaqidir.



2.1.2-misol. x berilgan son, a uning taqribiy qiymati. Agar 1) $x = 2,8$ va $a = 3$, 2) $x = 0,7$ va $a = 0,5$ bo'lsa, taqribiy qiymat xatosining modulini toping.

1) $\Delta = x - a \Leftrightarrow |x - a| = |2,8 - 3| = |-0,2| = 0,2$

2) $|x - a| = |0,7 - 0,5| = |0,2| = 0,2$

2.1.3-misol. $\frac{5}{7}$ sonining 0,71 va 0,72 yaqinlashishlaridan qaysi biri yaxshi.

a)
$$\left| \frac{5}{7} - 0,71 \right| = \left| \frac{5}{7} - \frac{71}{100} \right| = \left| \frac{500}{700} - \frac{497}{700} \right| = \frac{3}{700}$$

b)
$$\left| \frac{5}{7} - 0,72 \right| = \left| \frac{5}{7} - \frac{72}{100} \right| = \left| \frac{500}{700} - \frac{504}{700} \right| = \frac{4}{700}$$

$\frac{3}{700} < \frac{4}{700}$ bo'lgani uchun $\frac{5}{7}$ sonining 0,71 yaqinlashish yaxshi.

2.1.4-misol. $x = 7,25$ sonining qanday taqribiy qiymatining xatosi: 1) 0,15 ga ,
2) -0,05 ga teng.

Yechish.

a)
$$7,25 - a = 0,15 \Rightarrow a = 7,25 - 0,15 \Rightarrow a = 7,1$$

b)
$$7,25 - b = -0,05 \Rightarrow b = 7,25 + 0,05 \Rightarrow b = 7,3$$

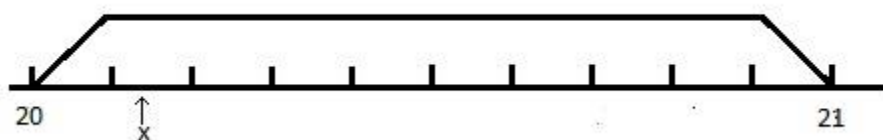
Demak, $x = 7,25$ sonining $a = 7,1$ taqribiy qiymatini xatosi 0,15 ga, $b = 7,3$ taqribiy qiymatning xatosi esa -0,05 ga teng.

2.1.5- misol. n ning nolga yaqin qiymatlarida $(1 + n)^2$ ifodaning qiymatlarini hisoblash uchun $(1 + n)^2 \approx 1 + 2n$ taqribiy formuladan foydalaniladi. Agar $n = 0,002$ bo'lsa, $(1 + n)^2$ ifodaning yaqinlashish xatosining modulini toping.

$$\begin{aligned} |(1 + n)^2 - (1 + 2n)| &= |(1 + 0,002)^2 - (1 + 2 \cdot 0,002)| = \\ &= |1,002^2 - 1,004| = |1,004004 - 1,004| = 0,000004 \end{aligned}$$

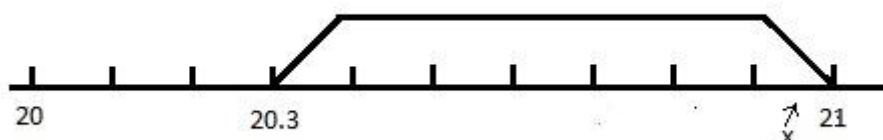
2.2. Son taqribiy qiymatining yaqinlashish aniqligi.

Daftarning bo'yi (x) nichizg'ich bilan o'lchab 20 sm dan qisqa emasligi, 21 sm dan esa ortiq emasligi aniqlandi, ya'ni $20 < x < 21$. x ning taqribiy qiymati uchun 21 olinsa x ning aniq qiymati ma'lum bo'lgani sababli yaqinlashish xatosining modulini bila olmaymiz. Ammo u 1 dan katta bo'lmaydi, chunki x quydagi rasimdagi ko'rinishda bo'lganda ham $|x - 21| \leq 1$ bo'ladi.



(2.2.1-chizma)

Agar x ning taqribiy qiymati uchun 20,3 ni olib, $|x - 20,3|$ ifodani boholasak, $|x - 20,3| \leq 0,7$ bo'ladi. Ya'ni:

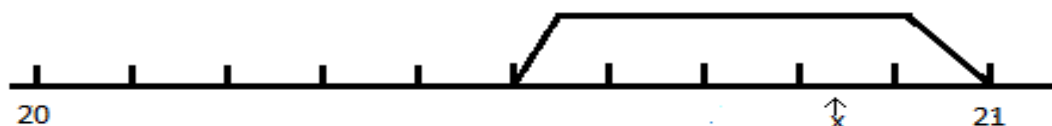


(2.2.2-chizma)

Bu halda x ning taqribiy qiymati 20,3 ning yaqinlashish aniqligi 0,7 ga teng deyiladi. Agar x ning taqribiy qiymati uchun 20,5 ni olsak $|x - 20,5| \leq 0,5$ bo'ladi, ya'ni x ning taqribiy qiymati 0,5 aniqlikda 20,5 ga teng. 20,5 soni 20 va 21 sonlarining o'rta arifmetik qiymatidir. Bu holda yaqinlashish xatosining moduli oldigilardan kichik bo'lgani uchun bu qiymat haqiqiy qiymatga yaqindir.

(2.2.3-

chizma)



Agar x sonining taqribiy qiymati uchun a soni olingan bo'lib, bunda yaqinlashish xatosining moduli h sonidan ortiq bo'lmasa ya'ni: $|x - a| \leq h$ bo'lsa, a soni x sonining h gacha aniqlikdagi taqribiy qiymati deyiladi. Bunda $x = a \pm h$, bu yerda h -yaqinlashish aniqligi yoki taqribiy qiymat xatosining chegarasi, h ni $|\Delta| \leq h$ tengsizlikni qanoatlantiradgan va imkon boricha $|\Delta|$ ga yaqin qilib olishga

harakat qilish kerak. h ning qiymati ma'lum bo'lsa, x ning aniq qiymatini o'z ichiga oluvchi chegaralarni ko'rsatish mumkin, ya'ni: $a - h \leq x \leq a + h$ (chunki $x = a \pm h = a - h \leq x \leq a + h$).

2.2.1-misol. 1,4 soni 1,361 sonining 0,05 gacha aniqlikdagi taqribiy qiymat ekanligini aniqlang.

1,361 sonining 1,4 soni bilan yaqinlashish xatosining moduli $|\Delta| = |1,361 - 1,4| = |-0,039| = 0,039$ ga teng. 0,039 soni 0,05 dan kichik bo'lgani uchun $|1,361 - 1,4| \leq 0,05$ tengsizlik to'g'ri. (bu yerda $h = 0,05$ bo'lib, 0,39 dan katta, ya'ni $|\Delta| \leq h$ shartni qanoatlantiradigan qilib olinadi.) Shunday qilib, 1,4 soni 1,361 sonining 0,05 aniqlikdagi taqribiy qiymati bo'ladi.

$|x - a| \leq h$ buyerda h -yaqinlashish aniqligi yoki taqribiy qiymat xatosining chegarasi. a soni x sonining h gacha aniqlikdagi taqribiy qiymati.

2.2.2-misol. Agar $x = 10 \pm 1$ bo'lsa, x soni qanday chegaralar orasida bo'ladi.

Yechish.

$a - h \leq x \leq a + h$ bu yerda $a = 10, h = 1$;

$$10 - 1 \leq x \leq 10 + 1 \Leftrightarrow 9 \leq x \leq 11$$

2.2.3-misol. x sonining taqribiy qiymati a , yaqinlashish xatosining moduli $|x - a|$ berilgan $a = 5$ va $|x - a| = 0,2$ bo'lsa, x ning aniq qiymatini o'z ichiga oluvchi chegarani ko'rsating.

Yechish.

$$|x - 5| = 0,2 \Leftrightarrow -0,2 = x - 5 = 0,2; \quad x = 5 - 0,2; \quad x = 5 + 0,2$$

$$x = 4,8; x = 5,2 \Rightarrow 4,8 \leq x \leq 5,2.$$

2.2.4-misol. 0,14 soni $\frac{1}{7}$ soning 0,01 gacha aniqlikda taqribiy qiymati ko'rinishda bo'la oladimi.

Yechish.

$$\left| \frac{1}{7} - 0,14 \right| \leq 0,01 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{7} - \frac{7}{50} \right| = \frac{1}{350} \approx 0,003 \text{ bo'la olmaydi.}$$

2.2.5-misol. 3,83 soni $3\frac{5}{6}$ soning 0,01 gacha aniqlikda taqribiy qiymati ko'rinishda bo'la oladimi.

Yechim.

$$\left| 3\frac{5}{6} - 3,83 \right| = \left| \frac{23}{6} - \frac{383}{100} \right| = \left| \frac{2300 - 2298}{600} \right| = \frac{2}{600} = \frac{1}{300} \approx 0,003$$

bo'lmaydi.

2.2.6-misol. To'g'ri to'rtburchakning bo'yi a mm, eni b mm. $7 \leq a \leq 8$ va $19 \leq b \leq 20$ bo'lsa, uning perimetirini va yuzini boholang.

Yechish.

$$a) \quad \begin{array}{l} 7 \leq a \leq 8 \\ 19 \leq b \leq 20 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 14 \leq 2a \leq 16 \\ 38 \leq 2b \leq 40 \end{array} \Leftrightarrow \frac{14 + 38 \leq 2a + 2b \leq 16 + 40}{52 \leq P \leq 56}$$

$$b) \quad \begin{array}{l} 7 \leq a \leq 8 \\ 19 \leq b \leq 20 \end{array} \Leftrightarrow \frac{7 \cdot 19 \leq ab \leq 8 \cdot 20}{133 \leq ab \leq 160} \Rightarrow 133 \leq S \leq 160.$$

2.3. Yig'indi, ayirma, ko'paytma va bo'linmani baholashda chegaralar metodini qo'llash.

2.3.1-misol. Agar $2,4 < x < 2,5$ va $1,3 < b < 1,7$ bo'lsa, $a \pm b$, ab , $\frac{a}{b}$ ifodaning qiymatini baholaylik.

Yechish. Berilgan qo'sh tengsizliklar bir xil ma'noli bo'lgani uchun ularni qo'shamiz.

$$\begin{array}{l} 2,4 < a < 2,5 \\ + 1,3 < b < 1,7 \\ \hline 3,7 < a + b < 4,2 \end{array}$$

Yig'indining kami va ortig'i bilan yaqinlashishlarni aniqladik. Ayirmaning baholashda $a - b = a + (-b)$ ekani e'tiborga olinadi. Ikkinchi qo'sh tengsizlikni

-1 ga ko'paytirib, tengsizlikning ishoralari qarama-qarshisiga o'zgartiriladi, ya'ni: $-1,3 > -b > -1,7$ yoki $-1,7 < -b < -1,3$. so'ngra qo'shiladi.

$$\begin{array}{r} 2,4 < a < 2,5 \\ + \quad -1,3 < -b < -1,7 \\ \hline 0,7 < a - b < 1,2 \end{array}$$

2.3.2-misol. Kvadratning tomoni 4,5 sm dan uzun, 4,6 sm dan qisqa bo'lsin, ya'ni $4,5 < b < 4,6$.

Kvadrat perimetiri qiymatining chegaralarini aniqlaymiz. $p = 4b$ bo'lgani uchun yuqoridagi qo'sh tengsizlikni 4 ga ko'paytiramiz. $4,5 \cdot 4 < b < 4,6 \cdot 4$ yoki

$$18 < b < 18,4.$$

Bu yerda kvadrat tamoni uzunligining chegaralarini bilgan holda unga bog'liq bo'lgan kvadrat perimetirini baholadik.

1. Biror c sonining chegaralari ma'lum bo'lsin. Masalan: $3 < c < 3,5$

$\frac{1}{c}$ ifodaning chegaralarini baholaylik.

$$\frac{1}{3,5} < \frac{1}{c} < \frac{1}{3}$$

yoki

$$\frac{2}{7} < \frac{1}{c} < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \approx 0,333 \dots \frac{2}{7} \approx 0,285$$

qiymatlarni o'nli kasir bilan almashtiramiz. Bunda quyi chegara $\frac{2}{7} \approx 0,285 \dots$ ni

kami bilan olingan yaqinlashish, masalan: 0,28 bilan, yuqori chegara $\frac{1}{3} \approx 0,333 \dots$

ni esa ortig'i bilan olingan yaqinlashish masalan: 0,34 bilan almashtirish mumkin.

Bunda faqat $\frac{1}{c}$ ning qiymatiga tegishli bo'lgan $(\frac{2}{7}; \frac{1}{3})$ oraliq kengaytirish mumkin.

Bu yerda quyi va yuqori chegaralarni tanlashda 0,285... va 0,333... cheksiz o'nli kasirni yaxlitlash qoidasidan foydalanib bo'lmaydi. Haqiqatdan ham

$0,285 \dots \approx 0,29$; $0,333 \dots \approx 0,33$ deb yaxlitlanganda $0,29 < \frac{1}{c} < 0,33$ ni hosil

qilib, $\frac{1}{c}$ ning qiymatiga tegishli oraliq toraytirilgan bo'ladi va shu sababli $\frac{1}{x}$

ifodaning na'malum bo'lgan haqiqiy qiymatlar to'plamining bir qismi berilgan

chegaradan tashqarida bo'lib qoladi. Yani:

$$\begin{aligned}2,4 < a < 2,5 \\ 1,3 < b < 1,7\end{aligned}$$

$$2,4 \cdot 1,3 < ab < 2,5 \cdot 1,7 \text{ yoki } 3,12 < ab < 4,25$$

Bo'linmaning chegaralarini topish maqsadida $\frac{a}{b} = a \frac{1}{b}$ ekanini e'tiborga olib, $\frac{1}{b}$ ning chegaralarini aniqlaymiz: $\frac{1}{1,7} < \frac{1}{b} < \frac{1}{1,3}$. Bu tengsizlikni $2,4 < a < 2,5$ bilan

hadma-had ko'paytiramiz:

$$\begin{aligned}2,4 < a < 2,5 \\ \frac{1}{1,7} < \frac{1}{b} < \frac{1}{1,3}\end{aligned}$$

$$2,4 \cdot \frac{1}{1,7} < \frac{a}{b} < 2,5 \cdot \frac{1}{1,3} = \frac{2,4}{1,7} < \frac{a}{b} < \frac{2,5}{1,3}.$$

Xulosa.

Ushbu bobning birinchi paragrafida miqdorlarning taqribiy qiymatlari, yaqinlashish xatosining moduli, ularning isbotlari, misollar kiritilgan. Ikkinchi paragrafida son taqribiy qiymatning yaqinlashish aniqligi, ularga doir tarif, teoremlar, isbotlari, misollar keltirib o'tilgan. Uchinchi paragrafida yig'indi, ayirma, ko'paytma va bo'linmani boholashda chegaralar metodini qo'llash kabi tengsizliklardan foydalanib bir qancha misollar, ularni isbotlashning bir qancha samarali usullarini ko'rsatdim.

Bu usullardan foydalanib o'rta maktab, akademik litsey, kasb-hunar kollejlari darsliglaridagi tengsizliklarni isbotlashda, bir nechta misollar yechishda qo'llash samara ko'rsatadi.

Xotima.

Bitiruv malakaviy ishining ushbu birinchi bobida bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklarning boshlang'ich tushunchalari haqida to'liq ma'lumot berilgan bo'lib, jumladan, tengsizliklar haqida asosiy tushunchalar, teng kuchli tengsizliklar, bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar, ularning asosiy xossalari va isboti, qo'sh tengsizliklarning asosiy xossalari va ular ustida amallar, kasr chiziqli tengsizliklar, bir o'zgaruvchili chiziqli tengsizliklar sistemasi, $|ax + b| < c$ ko'rinishdagi tengsizliklarni yechish va ular ustida amallar, ayniniy tengsizliklar, tengsizliklarni isbotlash va misollar umumiy holda bayon qilingan. Shuning bilan birga har bir paragrafda bir qator turli xildagi misollarni yechib ko'rsadim.

Bu usullardan foydalanib akademik litsey kasb-hunar kollejlari darsligidagi

tengsizliklarni isbotlashga doir bir nechta misollar yechib ko'rsatdim.

II Bobning birinchi paragrafida miqdorlarning taqribiy qiymatlari, yaqinlashish xatosining moduli, ularning isbotlari, misollar kiritilgan. Ikkinchi paragrafida esa son taqribiy qiymatning yaqinlashish aniqligi, ularga doir tarif, teoremlar, isbotlari va misollar keltirib ko'rsatdim. Uchinchi paragrafida esa yig'indi, ayirma, ko'paytma va bo'linmani boholashda chegaralar metodini qo'llash kabi tengsizliklardan foydalanib bir qancha misollar, ularni isbotlashning bir qancha samarali usullarini ko'rsatdim.

Bu usullardan foydalanib o'rta maktab, akademik litsey, kasb-hunar kollejlari darsliglaridagi tengsizliklarni isbotlashda, bir nechta misollar yechishda qo'llash samara ko'rsatadi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishimdan akademik litsey va kasb hunar kolleji, o'rta maktab o'quvchilari hamda abiyturyentlar keng foydalanishlari mumkin.

Adabiyotlar.

1. Karimov I.A. "2004-2009"yillarda maktab ta'limni rivojlantirish davlat umummilliy dasturi to'g'risida"gi farmon 2004-y.21-may. 50-53 betlar
2. Karimov I. A. „Barkamol avlod dasturi” Toshkent “Ma’naviyat”, 2010 y
3. O'zbekiston Respublikasi kadrlar tayyorlash milliy dasturi
4. B.M.Saxayev. „Algebradan qo'llanma”,Toshkent, „O'qtuvchi”, 1979 y
5. B.A.Gushev, A.G.Mordkovich. „Matematika”,Toshkent, „O'qtuvchi”, 1988 y
6. I.M. Jo'rayev, F.M. Jo'rayev, Matematikadan nostandart testlar, Buxoro, “Sharq”, 2004.y
7. F.Usmonov, R.Isomov, B.Xo'jayev Matematikadan Qo'llanma, Toshkent, “Yangi asr avlodi”, 2006.y
8. Sh.A.Alimov, O.R.Xolmuhamedov, M.A.Mirzaahmedov, “Algebra” umumiy

- ta'lim maktablarining 8 – sinfi uchun darslik, Toshkent, “O'qituvchi”, 2006, y
9. Abduhamidov, A.U. H.A.Nasimov, U.M.Nosirov, J.H.Husanov, Algebra va matematik analiz asoslari II- qisim, Toshkent, “O'qituvchi” 2010 y
10. S.To'rayev, Algebradan takrorlash, umumlashtirish darslari, Toshkent, “O'qituvchi” 2007 yil.
11. M.I.Skanavi tahriri ostida “Matematikadan konkurs masalalar to'plami”, Toshkent, “O'qituvchi” 1996 yil.
12. A.Г.Спинкин, Справочник по математики , Москва, “Наука” 1980 г.
- 13.Н .Я.Виликинб, В.Н.Литвинунко, А.Г.Мардкович, Элементарная математика , Москва, “Просовешение” г 1970.
- 14.Karim Muhammedov, Elementar matematikadan qo'llanma, Oliy o`quv yurtlariga kirivchilar uchun. Toshkent „Sharq” 2008-yil (419-426 b)
15. <http://lib.mexmat.ru:>
16. [www.eknigi.com/lib/Mathematics/:](http://www.eknigi.com/lib/Mathematics/)
17. www.Ziyonet.uz.
18. Orbita.uz.
19. fanlar.uz