

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika – matematika fakulteti

“Matematika” kafedrası

5130100 «Matematika» ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun

Zaripova Gulnora Obloberdi qizining

“Gruppalar nazariyasi, asosiy tushunchalar va teoremlar”

mavzusida

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**“Ish ko'rildi va himoyaga ruxsat
berildi”**

**Ilmiy rahbar _____ prof. Omirov B.A.
” _____ ” _____ 2015y.**

Kafedra mudiri:

_____ dots. Muxitdinov R.T.

Taqrizchi: _____ o'qit. Elmurodova.H. B

” _____ ” _____ 2015y.

” _____ ” _____ 2015y.

“Himoya qilishga ruxsat berildi”

Fakultet dekani

prof. Sh. M.Mirzayev

« _____ » _____ 2015 y

Buxoro- 2015y.

Kirish	3
I bob Binar algebraik amal.....	9
1.1§ Binar algebraik amal ta'rifi, turlari, misollar	7
1.2§ Yarim grupp. Monoid, misollar.....	11
Xulosa.....	14
II bob Grupp.....	15
2.1§ Grupp ta'rifi, asosiy xossalari	15
2.2§ Qism grupp, Normal grupp. Faktor grupp	19
2.3§ Gruppalarning gomomorfizmi, izomorfizmi, gomomorfizm to'g'risidagi teoremlar.....	28
2.4§ Grupp va qism gruppasining tartibi haqidagi Lagranj teoremasi.....	35
Xulosa.....	63
Xotima.....	64
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.....	65

Kirish.

“O‘z oldiga qo‘yilgan yuksak vazifa
va marralarga erishishda zamonaviy
bilim va tarbiya sohibi bo‘lgan,
yangicha fikrlayotgan yoshlarimiz
bizning asosiy tayanchimiz va
suyanchimizdir”.

I.A.Karimov.

Il‘gor millat va rivijlangan davlat bo‘lishning zarur shartlaridan biri aqliy va jismoniy, ma‘daniy va ma‘naviy, axloqiy, g‘oyaviy – siyosiy va huquqiy jihatdan, har tomonlama yetuk, barkamol insonlarga ega bo‘lishdir.

Ma‘naviy – ma‘rifiy jihatdan inson, inson irodasi mustahkam, e‘tiqodi yuksak, vijdon amri bilan yashaydigan shaxs, barkamol avlod har qanday davlat, xalq va millatning eng katta boyligi, qudrati salohiyati manbaidir.

Mamlakatimiz prezidenti tomonidan ta‘kidlab kelinayotganidek, “Har qaysi davlat, har qaysi millat nafaqat yerosti va yerusti boyliklari bilan, harbiy qudrati va ishlab chiqarish salohiyati bilan, balki birinchi navbatda o‘zining yuksak madaniyati va ma‘naviyati bilan kuchlidir”.

Odamlari, fuqarolari bilimli – zakovatli, uddaburon, g‘oyaviy siyosiy jihatdan ziyrak va hushyor, tadbirkor, har tomonlama yetuk bo‘lgan jamiyat har qanday islohotlarga qodir bo‘ladi va har qanday muammo va qiyinchiliklarni yenga oladi. Oily rahbarimiz bu haqida shunday dedi: “Lo‘nda qilib aytganda, bugungi kunda oldimizda qo‘ygan buyuk maqsadlarimizga, ezgu niyatlartimizga erishishimizda jamiyatimizning yangilanishi, hayotimizning taraqqiyoti va istiqboli amalga oshirayotgan islohotlarimiz, rejalarimizning samarasi taqdiri bularning barchasi avvalambor zamon talablariga javob beradigan yuqori malakali, ongli mutaxassis kadrlar tayyorlash muammosi bilan chambarchas bog‘liqligini barchamiz anglab yetmoqdamiz.

Shu bilan birga barchamiz yana bir haqiqatni anglab yetmoqdamiz. Faqatgina chinakam ma‘rifatli odam inson qadrini, millat qadriyatlarini, bir so‘z

bilan aytganda, o'zligini aniqlash, erkin va ozod jamiyatda yashash, mustaqil davlatimizning jahon hamjamiyatida o'ziga munosib, fidoiyluk bilan kurashishi mumkin".

Mustaqil va erkin fikrlayotgan, ongli yashaydigan, o'z haq – huquqlarini yaxshi taniydigan, o'z kuchi va aqliga ishonadigan, ma'naviy – axloqiy yetuk barkamol bo'lgan avlodni, mustaqil fikrlashga qodir, jasoratli, fidoiy va tashabbuskor kishilarni tarbiyalab yetkazadigan xalq va millat kelajakka ochiq ko'z, katta ishonch, umid va ixlos bilan qaray oladi. Fuqarolarni ana shunday noyob xislat va fazilat sohiblari qilib shakllantirilgan davlatning istiqboli porloq bo'ladi.

Mamlakatimiz kuch qudrati aholining soni bilan emas, balki odamlarning intellektual salohiyati, zamonaviy bilim asoslarini texnika va texnologiyalarni, ko'plab xorijiy tillarni egallaganligi, g'oyaviy siyosiy yetukligi, huquqiy bilimlilik va madaniylik darajasi, irodasini mustahkamligi, inson e'tiqodining bitligi, o'z shaxsiy manfaatlarini shaxs, Vatan manfaatlari bilan uyg'un holda ko'ra olishi elim deb, yurtim deb yashashi, faoliyat ko'rsatishi bilan kuchlidir. O'zbekiston davlati hozirgi paytda o'z oldiga ana shunday oliy maqsadni qo'yib kelajak sari intilmoqda.

Prezident Islom Karimovning "O'zbekiston XXI – asrga intilmoqda" asosida belgilab berilgandek, "Erkin fuqaro ma'naviyatini, ozod shaxsni shakllantirish oldimizda turgan eng dolzarb vazifadir". Boshqacha qilib aytganda biz o'z haq – huquqlarini tayinlaydigan, o'z kuchi va imkoniyatlariga tayanadigan, atrofida ro'y berayotgan voqea va hodisalarga mustaqil munosabat bilan yondashadigan, ayni zamonda shaxsiy manfaatlarini mamlakat va xalq manfaatlari bilan uyg'un holda ko'radigan erkin, har jihatdan barkamol insonlarni tarbiyalashimiz kerak.

Inson kamoloti millat va mamlakat taraqqiyotiga asos bo'ladi. Aql zakovatli yuksak ma'naviyatli kishilarni tarbiyalay olsakgina O'zbekiston davlat mustaqilligini barqaror bo'ladi, yurtimizda farovonlik va taraqqiyot qaror topadi, oldimizda turgan buyuk maqsadlarga erishamiz. "Oldimizda mustaqil davlat qurishdek murakkab va sharaflilik vazifa turgan bir paytda bu ma'naviy qadriyatlarning ahamiyati ming karra ortadi. Nega deganfa har qanday ulug'

maqsadlarga yetishish, yangi jamiyat, faovon turmush qurish, inson zotiga munosib g'ozal hayot barpo etish, avvalo, shu jamiyat a,zolari bo'lgan komil odamlarga, kelajak barkamol avlodiga bog'liqdir”.

Kamolotga erishgan inson deganda mukammal tarbiyali, boshqalarga takabburlik qilmaydigan, hech kimga haqorat ko'zi bilan qaramaydigan, yolg'on so'zlamaydigan, rostgo'y, bag'rikeng, sahovatli, muruvvatli odam ko'z o'ngimizda gavdalanadi.

Kamolotga erishgan inson deganda mukammal tarbiyali, ma'naviyatli, inson va'dasiga vafo qiladi, omonatga xiyonat qilmaydi, birovlarini dog'da qoldirmaydi, so'zda sobit turadi, ig'vo, g'iybat, munofiqlikdan o'zini saqlaydi, yomon yo'llardan yaramas ishlardan, nojo'ya harakatdan o'zini tuyadi. Bunday inson ota – onasining hurmatini bajo keltiradi, ularni o'zidan rozi qilishga say – harakat qiladi, farzandlari, butun oila a'zolariga mehribonlik ko'rsatadi, qarindosh – urug'lridan aloqasini uzmaydi, mahalla ko'y, qishloqdoshlari, jamoasi, xullas kalom tevarak – atrofni o'rab olgan jamiki insonlar farovonligi haqida qayg' uradi. Ularga mehr – muhabbatli bo'ladi, ulardan mehr – muhabbatini ayamaydi, muruvvatini ta'na qilmaydi, odamlarga yaxshilik qilish, ezgulik ko'rsatishni o'z vazifasi, ma'suliyati deb biladi.

Ma'naviy – axloqiy o'z nasl – nasabi, kechmisj tarixi, boy madaniy – ma'naviy merosi bilan farqlanish, milliy rasm – rusumlarni, oilaviy an'analarni avaylab – asrash va boyitish, ota – bobolarning muborak nomlariga dog' tushurmaslikka intilish, o'z mehnati, aql – idrok tafakkuri, intellektual salohiyati bilan ajdodlari obro'yini tushurmaslikka harakat qilish, odamlarning hurmat – ehtiromiga sazovor bo'lish insonning kamoloyga yetganligining muhim belgilaridandir,

Ma'naviy barkamollikning ma'no – mazmuni aytib o'tilganlardangina iborat emas. “O'zbekistonga uning yeri, tabiatiga, bu yerda yashayotgan xalqlarga muhabbat, o'lkaning tarixi, madaniyat, an'alarini teran bilish” kamolotning namoyon bo'lishi hisoblanadi.

Bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi: Gruppalar nazariyasi Algebra faning asosiy bo'limlaridan biri bo'lib, bir qator matematik masalalarni hal qilishda muhim amaliy ahamiyatga ega.

Bitiruv malakaviy ishining maqsadi: Gruppalar va ularning xossalari, gruppalarining gomomorfizmi, izomorfizmi, gomomorfizm to'g'risidagi teoremlar, hamda gruppalar va qism gruppalarining tartibi haqidagi Lagranj teoremlarini o'rganish.

Bitiruv malakaviy ishining vazifalari: Gruppalar va ularga doir tushunchalarni yoritish, misollarda gruppalar xossalari izohlash.

Bitiruv malakaviy ishining o'rganilganlik darajasi: BMIga qo'yilgan masalalar to'la o'rganilgan, chuqur tahlil qilinib yoritilgan.

Bitiruv malakaviy ishining ob'yekti: Gruppalar, qism gruppalar, faktor gruppalar, gruppalar haqidagi teoremlar.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti: Gruppalar, qism gruppalar, faktor gruppalar, gruppalar izomorfizmi, gruppalar gomeomorfizmi.

Bitiruv malakaviy ishining ilmiy farazi: Ushbu BMI referativ xarakterga ega bo'lib, uslubiy qo'llanma sifatida foydalanish maqsadida tayyorlangan.

Bitiruv malakaviy ishining yangiligi: Ushbu BMI referativ xarakterga ega bo'lib, gruppalar o'ldir bir qator teoremlar isboti keltirilib, misollarda izohlab ko'rsatilgan.

Bitiruv malakaviy ishining amaliy ahamiyati: Ushbu BMI dan oliy o'quv yurtlarining "Matematika" ta'lim yo'nalishi bakalavr talabalari uslubiy qo'llanma sifatida foydalanishlari mumkin.

Bitiruv malakaviy ishining metodologiyasi: Gruppalar, qism gruppalar, yarim gruppalar, monoid

Bitiruv malakaviy ishining metodlari: Gruppalarining gomomorfizmi, izomorfizmi, gomomorfizm to'g'risidagi teoremlar. Gruppalar va qism gruppalarining tartibi haqidagi Lagranj teoremlari

Bitiruv malakaviy ishining hajmi va tuzilishi: BMI ikki bob, oltita paragrafdan iborat

I BOB. Binar algebraik amal.

1.1§ Binar algebraik amal ta'rifi, turlari va misollar.

Ta'rif. X to'plam berilgan bo'lsin. $f : X^n \rightarrow X$ funktsiyaga X dagi algebraik amal deyiladi.

O'zgaruvchilar soniga qarab algebraik amal bir o'rinli yoki unar (bitta o'zgaruvchi qatnashsa), ikki o'rinli yoki binar (ikkita o'zgaruvchi qatnashsa), uch o'rinli yoki ternar (uch o'zgaruvchi qatnashsa), va umumiy holda n – o'rinli yoki n -ar (n -ta o'zgaruvchi qatnashsa) deyiladi.

Nol o'rinli yoki nular algebraik amal sifatida X to'plamning istalgan elementini alohida olish amali tushuniladi.

Binar algebraik amalning turlari . Algebra fanida ko'pincha binar amallar qaraladi, shuning uchun ushbu hol jiddiyoq tahlil qilinishi lozim.

Ushbu holda $x = (x, u) \in X^2$ uchun $f(x, u)$ belgilash o'rniga $x f u$ belgilash qabul qilingan (f belgini o'rniga ixtiyoriy maxsus belgi ishlatilishi mumkin, masalan $+, -, \circ, \oplus, \otimes, *, /, \bullet, \times, \cdot, \#, \wedge, \vee, \cup, \cap$).

Misollar.

a) xaqiqiy sonlar to'plamida qo'shish “+” amali, ko'paytirish “ $\times$ ” amali, ayirish “−” amali;

b) $f : X \rightarrow X, g : X \rightarrow X$ funktsiyalar uchun $h(x)=g(f(x)) \forall x \in X$ tenglik bilan aniqlangan $g \circ f : X \rightarrow X$ kompozitsiyani mos qo'yadigan akslantirish;

v) Mulohazalar algebrasida aniqlangan $\wedge$ va $\vee$ amallar;

g) Barcha to'plamlar orasida aniqlangan $\cup$ va $\cap$ amallar

binar algebraik amallarga misol sifatida qaralishi mumkin.

Bitta to'plamning o'zida bir nechta algebraik amallar aniqlangan bo'lishi mumkin.

Faraz qilaylik, X to'plamda $\otimes$ binar amal berilgan bo'lsin.

Ta'rif. $\otimes$ binar algebraik amal kommutativ deyiladi, agar ixtiyoriy $x \in X$ va $u \in X$ uchun $x \otimes u = u \otimes x$ tenglik bajarilsa.

Masalan, haqiqiy sonlar to'plamida qo'shish va ko'paytirish amallari kommutativ bo'ladi, ayirish amali esa nokommutativ amaldir.

Ta'rif. $\otimes$ binar algebraik amal assotsiativ deyiladi, agar ixtiyoriy $x, y, z \in X$ uchun $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$ tenglik bajarilsa.

Masalan, haqiqiy sonlar to'plamida qo'shish va ko'paytirish amallari assotsiativ bo'ladi, ayirish amali esa noassotsiativ amal bo'ladi.

Faraz qilaylik, X to'plamda ikkita $\oplus, \otimes$ binar amallar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. $\otimes$ amal $\oplus$ amalga nisbatan distributiv deyiladi, agar ixtiyoriy $x, y, z \in X$ uchun $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$, $(y \oplus z) \otimes x = (y \otimes x) \oplus (z \otimes x)$ tengliklar bajarilsa.

Masalan, haqiqiy sonlar to'plamida ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributiv bo'ladi.

Neytral va simmetrik elementlar.

Ta'rif. $e \in X$ element $\otimes$ amalga nisbatan chap (o'ng) neytral deyiladi, agar ixtiyoriy

$x \in X$ uchun $e \otimes x = x$ ($x \otimes e = x$) tenglik bajarilsa.

Ta'rif. $e \in X$ element $\otimes$ amalga nisbatan neytral deyiladi, agar u ham chap, ham o'ng neytral element bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $x \in X$ uchun $e \otimes x = x \otimes e = x$ tengliklar bajarilsa.

a) 0 – haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan qo'shish amaliga nisbatan neytral element;

b) 1 - haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan ko'paytirish amaliga nisbatan neytral element;

v) Bo'sh to'plam to'plamlar birlashmasiga nisbatan neytral element;

g) $e(x)=x \quad \forall x \in X$ tenglik bilan aniqlangan $e : X \rightarrow X$ ayniy funktsiya $f : X \rightarrow X$ funktsiyalar to'plamida aniqlangan kompozitsiya amaliga nisbatan neytral element.

1-teorema. Agar neytral element mavjud bo'lsa, u yagonadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni e va e' – turli neytral elementlar bo'lsin. U holda $e' = e' \otimes e = e$. Bu esa farazimizga zid. Demak, e neytral element yagonadir.

Natija. Agar neytral element mavjud bo'lsa, u holda barcha chap va ung neytral elementlar u bilan ustma-ust tushadi.

Ta'rif. X to'plamda aniqlangan $\otimes$ amalga nisbatan neytral $e \in X$ mavjud bo'lsin. $x' \in X$ element $x \in X$ ga chap (o'ng) simmetrik deyiladi, agar $x' \otimes x = e$ ($x \otimes x' = e$) tenglik bajarilsa.

Ta'rif. X to'plamda aniqlangan $\otimes$ amalga nisbatan neytral $e \in X$ element mavjud bo'lsin. $x' \in X$ element $x \in X$ ga simmetrik deyiladi, agar u $x \in X$ ga ham chap ham o'ng simmetrik element bo'lsa, ya'ni $x' \otimes x = x \otimes x' = e$ tenglik bajarilsa.

2-teorema. X to'plamda aniqlangan $\otimes$ assotsiativ amalga nisbatan neytral $e \in X$ mavjud bo'lsin. Agar $x \in X$ uchun $x' \in X$ simmetrik element mavjud bo'lsa, u yagonadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $x' \in X$ va $x'' \in X$ elementlar $x \in X$ uchun turli simmetrik elementlar bo'lsin, ya'ni $x' \otimes x = x \otimes x' = e$, $x'' \otimes x = x \otimes x'' = e$.

U holda assotsiativlik xossasidan $x' = x' \otimes e = x' \otimes (x \otimes x'') = (x' \otimes x) \otimes x'' = e \otimes x'' = x''$, ya'ni $x' = x''$ tenglik kelib chiqadi. Bu esa farazimizga zid. Demak, x' simmetrik element yagonadir.

Xulosa qilib aytganda binar algebraik amallar xossalarini bayon etishda quyidagi usullar qo'llanilishi maqsadga muvofiqdir.

a) Binar algebraik amalni ko'paytirish amali deb nomlash va $x, y \in X$ uchun

$x \otimes u$ o'rniga xu yozish. Bundan tashqari "neytral element" so'z birikmasi o'rniga "birlik element" so'z birikmasini, "simmetrik element" so'z birikmasi o'rniga esa "teskari element" so'zini ishlatish. Birlik element va x ga teskari element mos ravishda 1 va x^{-1} orqali belgilanadi. Tabiiyki, amallarning xossalari ko'rinishi ham mos ravishda o'zgaradi.

Masalan, ushbu holda assotsiativlik xossasi $x(uz) = (xu)z$ ko'rinishga ega.

Ushbu holda algebraik xossalari mul'tiplikativ tilda bayon etilgan deyiladi ("multiplication" – inglizcha «köpaytirish» so'zini anglatadi).

b) Binar algebraik amalni qo'shish amali deb nomlash va $x, y \in X$ uchun $x \otimes u$ o'rniga $x + u$ yozish, bundan tashqari "neytral element" so'z birikmasi o'rniga "nol element" so'z birikmasini, "simmetrik element" so'z birikmasi o'rniga esa "qarama-qarshi element" so'z birikmasini ishlatish. Nol element va x ga qarama-qarshi element mos ravishda 0 va $(-x)$ orqali belgilanadi. Tabiiyki, bu holda amallarning xossalari umumiy ko'rinishi ham mos ravishda o'zgaradi. Masalan, assotsiativlik xossasi quyidagicha yoziladi: $x + (u + z) = (x + u) + z$.

Shu holda algebraik xossalari additiv tilda bayon etilgan deyiladi ("addition" – inglizcha «qo'shish» so'zini anglatadi).

1.2§ Yarim gruppalar. Monoid, misollar

Aytaylik $A \neq \emptyset$ to'plam, $*$ - A to'plamda aniqlangan binar amal bo'lsin.

3.2-TA'RIF. Agar A to'plamda aniqlangan $*$ binar amal assotsiativ bo'lsa, ya'ni $\forall (a, b, s \in A), (a * b) * s = a * (b * s)$ bajarilsa, u holda $A = (A; *)$ - algebraik sistemaga yarimgruppalar deyiladi. Agar $*$ amal + (qo'shish) amali bo'lsa, $(A; +)$ - additiv yarimgruppalar, $\cdot$ (ko'paytirish) bo'lsa, $(A; \cdot)$ - multiplikativ yarimgruppalar deyiladi.

Agar $*$ amal kommutativ bo'lsa, ya'ni $\forall (a, b \in A), a * b = b * a$ bo'lsa, A ni kommutativ yarimgruppalar deyiladi.

$\forall (a, x, y \in A), (a * x = a * y \Rightarrow x = y)$ va $(x * a = y * a \Rightarrow x = y)$ bo'lsa, u holda A ni qisqartirishga ega bo'lgan yarimgruppalar deyiladi.

MISOLLAR: 1. $M \neq \emptyset, A = \{ \langle r \rangle : r : M \rightarrow M \}, *$ - akslantirishlarning ko'paytirish (kompozitsiyasi) amalidan iborat bo'lsin. U holda $(A; *)$ algebraik sistema yarimgruppalar bo'ladi. Chunki akslantirishlarni ko'paytirish amali assotsiativlik xossasiga ega.

1. $A = \{e, a\}$ ikki elementli to'plam bo'lib, unda aniqlangan $*$ amal quyidagi jadval orqali berilgan bo'lsin, u holda $(A; *)$ algebraik sistema yarimgruppalar bo'ladi. Lekin u qisqartirishga ega bo'lmaydi, chunki, $(a * e = a * a) \wedge (e * a = a * a)$

munosabatlardan $a=e$ bo'lishi kelib chiqmaydi.

*	e	a
E	e	a
A	a	a

3.3 - TA'RIF. Agar $(A; *)$ yarimgruppa bo'lib, A to'plam $*$ amalga nisbatan e neytral element mavjud bo'lsa, u holda A monoid deyiladi.

MISOLLAR. 3. Yuqoridagi 2-misolda keltirilgan yarimgruppa monoid bo'ladi.

4. $(\mathbb{N}; \cdot)$ algebraik sistema multiplikativ monoid bo'lishini ko'rsatish oson. $\langle \mathbb{N}; + \rangle$ additiv yarimgruppa monoid bo'lmaydi, chunki $\mathbb{N}$ to'plamda qo'shish amaliga nisbatan neytral element mavjud emas.

Aytaylik $(A; *)$ yarimgruppa bo'lsin, u holda:

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n \in A) \quad a_1 * a_2 * \dots * a_n \quad (1)$$

belgini

$$a_1 * a_2 * \dots * a_n = (a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1}) * a_n$$

ma'nosida tushuniladi.

Agar $*$ amal $+$ (qo'shish) dan iborat bo'lsa, (1) ni qisqacha $\sum_{k=1}^n a_k$

ko'rinishda, $*$ amal $\cdot$ (ko'paytirish) dan iborat bo'lsa, $\prod_{k=1}^n a_k$ ko'rinishda

belgilaymiz. Demak,

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n \quad (2)$$

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}) \cdot a_n \quad (3)$$

Xususiy holda $a_1=a_2=a_n=a$ bo'lsa, u holda (2) $na=(n-1)a+a$, (3) esa $a^n=a^{n-1}\cdot a$ ko'rinishga keladi.

Xulosa

Ushbu bobda , binar algebraik amal, binar algebraik amal ta'rifi, turlari haqida barcha asosiy ma'lumotlar berilgan hamda shularga oid bir qancha misollar keltirilgan.

II bob Gruppya.

2.1§ Gruppya ta'rifi, asosiy xossalari.

Chekli yoki cheksiz G to'plamda bitta algebraic amal aniqlangan deb faraz qilamiz. Demak, bu amal G to'plamda bajariluvchan va bir qiymatlidir. Bu yerda ham algebraic amalni ko'paytirish deb atab, istalgan ikkita $a, b \in G$ element

ko'paytmasini $a \cdot b$ yoki ab ko'rinishda belgilaymiz. Shunday qilib, $\forall a, b \in G$ element ko'paytmasi G ning yagona elementiga tengdir.

1-ta'rif. Quyidagi ikkita aksiomaga bo'ysunuvchi chekli yoki cheksiz G to'plam yarimgruppa deyiladi:

1) $\forall a, b \in G$ ($a, b \in G$ va bir qiymatli);

2) $\forall a, b, c \in G ((ab)c = a(bc))$.

Demak, G yarim gruppada bitta algebraic amal aniqlangan va G ning elementlarini ko'paytirish assosiativdir.

Masalan, butun sonlar to'plami yolg'iz qo'shish amali yoki yolg'iz ko'paytirish amaliga nisbatan yarim gruppa tashkil qiladi, P sonli maydon ustida n - tartibli kvadratik matritsalar to'plami ham matritsalarini qo'shish yoki ko'paytirishga nisbatan yarim gruppa tashkil etadi.

2-ta'rif. Quyidagi to'rtta aksiomaga bo'ysunuvchi chekli yoki cheksiz G to'plam gruppa deyiladi:

1) $\forall a, b \in G$ ($a, b \in G$ va bir qiymatli) (G da algebraic amal aniqlangan);

2) $\forall a, b, c \in G ((ab)c = a(bc))$ (G da ko'paytirish assosiativ);

3) $\forall a \exists e \in G (ae = a)$ (G da o'ng birlik element mavjud);

4) $\forall a \exists x \in G (ax = e)$ (har bir $a \in G$ element uchun G da o'ng teskari element mavjud).

$a, b, c, d, \dots$ elementlardan tuzilgan G gruppa $G = \{a, b, c, d, \dots\}$ ko'rinishda belgilanadi.

G gruppada ko'paytirish amali kommutativ bo'lishi shart emas.

Agar gruppa yana $\forall a, b \in G (ab = ba)$ talabni ham qanoatlantirsa, G ni kommutativ gruppa (yoki Abel gruppasi), $\exists a, b \in G (ab \neq ba)$ bo'lgan holda G ni nokommutativ gruppa deyiladi.

G gruppaning $(ab = ba)$ tenglikni qanoatlantiruvchi a va b elementlari o'rin almashinuvchi elementlar, $(ab \neq ba)$ bo'lgan holda esa ularni o'rin almashinmas elementlar deyiladi. G gruppaning quyidagi asosiy xossalarini ko'rib o'tamiz.

1. G gruppaning e o'ng birligi chap birlik ham bo'ladi.

Haqiqatan, 3-aksioma bo'yicha $ee = e$ yoki 4-aksiomada aytilgan $ax = e$ ga muvofiq,

$$eax = ax \quad (1)$$

Yana 4-aksiomaga ko'ra $xy = e$ bo'lgani sababli (1) dan ushbuni hosil qilamiz: $ea(xy) = a(xy)$, $ea e = ae$ yoki $ea = a$. Demak, $\forall a \in G$ element uchun o'ng birlik vazifasini bajaruvchi e element chap birlik ham bo'ladi.

G da yagona birlik element mavjud, chunki e va e' birlik elementlar bo'lsa, $ee' = e'$ va $ee' = e$ dan ko'paytmaning bir qiymatligiga asosan darhol $e' = e$ kelib chiqadi.

2. Har bir $a \in G$ elementning x o'ng teskari elementi chap teskari element vazifasini ham bajaradi. Haqiqatan ham, $ax = e$ bilan birga, 4-aksiomaga muvofiq $xy = e$ (2)

bo'ladi. Buning ikkala tomonini chapdan a ga ko'paytirib, quyidagiga ega bo'lamiz: $(ax)y = ae$, $ey = a$ yoki $y = a$. Demak, (2) $xa = e$ ko'rinishni oladi, ya'ni x element a ning chap teskari elementi vazifasini ham bajaradi.

a ga yagona teskari element mavjud, chunki x va x' ni a ga teskari elementlar desak, $x' = x'e = x'(ax) = (x'a)x = ex = x$ bo'ladi. a ga yagona teskari element a^{-1} ko'rinishda belgilanadi. Shunday qilib,

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

a va a^{-1} o'zaro teskari elementlar deyiladi.

3. $ab = ba$ dan $a^{-1}b = ba^{-1}$ va $a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ kelib chiqadi.

Haqiqatan, $ab = ba$ ni chap va o'ng tomondan a^{-1} ga ko'paytirsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$ba^{-1} = a^{-1}b \quad (3)$$

Endi (3) ni chap va o'ng tomondan b^{-1} ga ko'paytirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

4. $ax = b$ va $ya = b$ tenglamalar mos ravishda yagona $x = a^{-1}b$ va $y = ba^{-1}$ yechimlarga ega.

Bu yechimlar $ax = b$ ni chap tomondan, $ya = b$ ni esa o'ng tomondan a^{-1} ga ko'paytirish bilan hosil qilinadi.

5. $a_1, a_2, \dots, a_k \in G$ elementlarni ko'paytirish umuman assosiativdir.

Haqiqatan ham, $(a_1 a_2) a_3 = a_1 (a_2 a_3)$ ni $a_1 a_2 a_3$ ko'rinishda yoza olamiz. Endi uchta elementni ko'paytirish assosiativ bo'lganidan, $(a_1 a_2 a_3) a_4 = (a_1 a_2)(a_3 a_4) = a_1(a_2 a_3 a_4)$ va hakazo. Demak, k ta element ko'paytmasini qavssiz yoza olamiz:

$$a_1 a_2 \dots a_k = \prod_{i=1}^k a_i$$

6. G ning k ta elementini ko'paytirish bajariluvchan va bir qiymatli $a_1 a_2 = b_2 \in G$ va bir qiymatli;

$a_1 a_2 a_3 = (a_1 a_2) a_3 = b_2 \cdot a_3 = b_3 \in G$ va bir qiymatli;

$a_1 a_2 a_3 a_4 = (a_1 a_2 a_3) a_4 = b_3 \cdot a_4 = b_4 \in G$ va bir qiymatli va hakazo.

7. $a_1, a_2, \dots, a_k \in G$ elementlarning $a_1 a_2 \dots a_k$ ko'paytmasiga teskari element $a_k^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$ bo'ladi.

Buni tekshirib ko'rsak,

$$\begin{aligned} (a_1 a_2 \dots a_k)(a_k^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}) &= (a_1 a_2 \dots a_{k-1})(a_k a_k^{-1})(a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}) = \\ &= (a_1 a_2 \dots a_{k-1})e(a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}) = (a_1 a_2 \dots a_{k-2})(a_{k-1} a_{k-1}^{-1})(a_{k-2}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}) = \\ &= (a_1 a_2 \dots a_{k-2})e(a_{k-2}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}) = a_1 \cdot a_1^{-1} = e \end{aligned}$$

bo'ladi. Shunday qilib, $(a_1 a_2 \dots a_k)^{-1} = a_k^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$ dir.

Xususiyl holda $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$.

8. $\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_n$ ko'paytmani a^n ko'rinishda yozib, a elementning darajasi

deymiz. Shuningdek, $a^{-1} \cdot a^{-1} \dots a^{-1} = (a^{-1})^n$ ni bunday ham yozamiz: $(a^{-1})^n = a^{-n}$.

U holda a ning $-n$ darajasiga ega bo'lamiz. Endi, $\forall a \in G$ uchun $a^0 = e$ deb qabul qilamiz. Demak, $\forall a \in G$ elementning istalgan butun darajasi yana G ning elementi bo'ladi.

Quyidagilarni isbotlash oson:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ va } (a^m)^n = a^{mn}$$

bunda m va n - istalgan butun sonlar. Faqat o`rin almashinuvchi  $a$  va  $b$  elementlar uchungina  $(ab)^n = a^n b^n$  bo`ladi.

Shuni ham aytib o`taylikki,  $a^n$  va  $a^{-n}$  o`zaro teskari elementlardir, chunki

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = n.$$

Elementlarining soni chekli bo`lgan grupp chekli grupp, elementlari cheksiz ko`p bo`lgan grupp cheksiz grupp deyiladi. Gruppaning elementlari soni uning tartibi deyiladi. Shunday qilib, chekli va cheksiz tartibli gruppalar mavjud.

Misollar:

1. G butun sonlar to`plami sonlarni qo`shish amaliga nisbatan grupp tasgil etadi, chunki $\forall m, n, k \in G$ uchun $(m+n)+k = m+(n+k)$. Birlik element vazifasini nol soni bajaradi, chunki $\forall n \in G$ uchun $n+0 = n$; har bir n elementga teskari element bo`lib, $-n$ xizmat qiladi: $n+(-n) = 0$. Bu grupp cheksiz va kommutativdir.

2. Noldan tashqari barcha ratsional sonlar to`plami  $G$  sonlarni ko`paytirish amaliga nisbatan cheksiz kommutativ grupp tashkil qiladi, chunki istalgan $r \neq 0$ va $s \neq 0$ ikkita ratsional son uchun $rs \neq 0$ bo`lib, demak, $rs \in G$ va bir qiymatli; $\forall z, s, t \in G$ uchun $(rs)t = r(st)$; G da birlik element vazifasini 1 soni bajaradi: $r \cdot 1 = r$; $r \neq 0$ ga teskari element $\frac{1}{r}$ dir: $r \cdot \frac{1}{r} = 1$.

3. Noldan tashqari barcha haqiqiy sonlar to`plami, shuningdek, noldan tashqari barcha kompleks sonlar to`plami ko`paytirishga nisbatan cheksiz kommutativ gruppalar tashkil etadi.

4. Birinchi misoldagidek, ratsional sonlar to`plami qo`shish amaliga nisbatan cheksiz kommutativ grupp tashkil etadi.

5. P sonli maydon ustida $(m \times n)$ matritsalar to`plami matritsalarini qo`shishga nisbatan cheksiz kommutativ grupp hosil qiladi.

Haqiqatan ham, istalgan ikkita $(m \times n)$ matritsa yig`indisi yana  $P$  maydon ustida  $(m \times n)$  matritsa bo`lgani uchun bir qiymatli ravishda shu to`plamga

qarashlidir; istalgan uchta $(m \times n)$ matritsani qo'shish-assosiativ; birlik element vazifasini nol matritsa bajaradi; har bir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa mavjud.

2.2§ Qism grupp. Normal grupp. Faktor grupp.

Qism grupp. Ta'rif. G gruppaning H qism to'plami G dagi algebraic amalgam nisbatan grupp tashkil etsa, H ni G ning qism gruppasi (G dagi qism grupp) deyiladi.

Teorema. G gruppaning H qism to'plami G da qism grupp tashkil etishi uchun quyidagi ikkita shart bajarilishi zarur va yetarli;

1. $\forall h, h' \in H (hh' \in H)$ (G dagi algebraik amal H da ham algebraik amaldir);
2. $\forall h \in H (h^{-1} \in H)$ (H ning istalgan h elementiga teskari h^{-1} element ham H ga qarashli).

Isboti. 1. H grupp (G dagi qism grupp) bo'lsa, yuqoridagi ikkita shart albatta bajariladi.

2. Ikkala talab ham bajariladi desak, $\forall h \in G$ uchun $hh^{-1} = e \in H$ bo'ladi. Endi $H \subseteq G$ ga ko'ra $\forall h, h', h'' \in H$ uchun $(hh')h'' = h(h'h'')$ ham bajariladi. Teorema isbot bo'ldi.

G grupp o'zining qism gruppasidir.

$e \in G$ birlik element G ning qism gruppasi bo'ladi, chunki bu bitta elementdan tuzilgan E qism to'plam qism grupp bo'lish shartini qanoatlantiradi. E birlik qism grupp deyiladi.

G gruppasi o'zining xos qism gruppasi, G ning qolgan hamma qism gruppalarini esa uning xos (haqiqiy) qism gruppalarini deyiladi.

G chekli gruppaning har bir qism gruppasi ham cheklidir. G cheksiz gruppasi chekli yoki cheksiz qism gruppalariga ega. Masalan, e chekli qism gruppasi, G ning o'zi cheksiz qism gruppasi.

G kommutativ gruppaning istalgan qism gruppasi kommutativdir. G nokommutativ gruppasi esa kommutativ va nokommutativ qism gruppalariga ega. Masalan, e birlik element kommutativ qism gruppasi bo'lib, G ning o'zi esa nokommutativ qism gruppasi.

Misol. 1. qo'shish amaliga nisbatan kompleks sonlar gruppasi G uchun H butun sonlar gruppasi, H' ratsional sonlar gruppasi va H'' haqiqiy sonlar gruppasi cheksiz xos qism gruppalar bo'ladi.

2. Ko'paytirish amaliga nisbatan noldan tashqari barcha kompleks sonlar gruppasi G uchun noldan tashqari barcha ratsional sonlar gruppasi H cheksiz haqiqiy qism gruppasi, $H' = \{1, -1, i, -i\}$ esa chekli haqiqiy qism gruppasi bo'ladi.

Gruppa yoyilmasi. G gruppaning istalgan A qism to'plamini sistemasi deb ataymiz. Bu sistemasi xususiylashtirilgan holda qism gruppasi tashkil etishi yoki bitta a elementdan iborat bo'lishi mumkin. A va B sistemalarini olib, $ab (a \in A \text{ va } b \in B)$ elementlardan tuzilgan sistemani AB ko'rinishda belgilaymiz. AB sistemasi A va B sistemalarining ko'paytmasi deyiladi. Bu yerda $AB \subseteq G$ ekanligi ravshan, chunki har bir $ab \in G$. Shunga o'xshash, ba elementlardan tuzilgan sistemasi BA ko'rinishga ega bo'lib, u B va A sistemalarining ko'paytmasini tasvirlaydi. Umuman, $BA \neq AB$, ya'ni sistemalarini ko'paytirish nokommutativdir. Masalan,

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} \right\}$$

uchinchi darajali simmetrik gruppaning

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{va} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} \right\}$$

sistemalari uchun

$$AB = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} \right\},$$

$$BA = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} \right\}$$

bo`lib, demak,  $BA \neq AB$  dir. Lekin istalgan  $A, B, C$  uchta sistemani ko`paytirish-assosiativ, chunki $(AB)C$ sistema $(ab)c$ elementlardan, $A(BC)$ sistema $a(bc)$ elementlardan tuzilgan bo`lib,  $(ab)c = a(bc) = abc$  ekanligi bizga ma`lum. Shu sababli $(AB)C = A(BC) = ABC$. Umuman, $A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq G$ sistemalar uchun

$$A_1 \cdot A_2 \dots A_k = \prod_{i=1}^k A_i \subseteq G.$$

Xususiyl holda $Ab, aB, Abc, aBc, \dots$ ko`rinishdagi sistemalar ham qaraladi.

1-teorema. G gruppasi va uning istalgan H sistemasi uchun ushbu tengliklar o`rinli:

$$GH = HG = G.$$

Isboti. Masalan,

$$GH = G$$

ni isbotlaymiz. Chap tomonning istalgan gh elementi G dagi g va h elementlarning ko`paytmasi sifatida yana  $G$  ga qarashli. Aksincha, o`ng tomonning istalgan g elementini $(gh^{-1})h$ ko`rinishda tasvirlasak,  $gh^{-1} \in G$  va  $h \in H$  ga asosan  $g(gh^{-1})h \in GH$  bo`ladi.

$HG = G$ ham huddi shunday isbotlanadi.

Xususiyl holda, H sistema G ning bitta g elementini ifodalasa, $Gg = gG = G$ ni hosil qilamiz. Yana $H = G$ bo`lishi ham mumkin. Bu vaqtda $GG = G$ dir. Buni $G^2 = G$ sgklda yozamiz. Demak, umuman, $G^n = G$, bu yerda n – ixtiyoriy natural son.

2-teorema. Agar a va b lar G gruppaning elementlari va H bu gruppaning qism gruppasi bo'lsa, u holda Ha va Hb sistemalar yo o'zaro teng bo'ladi, yoki ular bitta ham umumiy elementga ega bo'lmaydi.

Isboti. Ha va Hb biror umumiy elementga ega, ya'ni

$$ha = h'b \quad (1)$$

(bunda $h, h' \in H$) deb faraz qilsak, (1) ning ikkala tomonini chapdan H ga ko'paytirib, 1-teoremaga ko'ra ushbu tenglikka kelimiz:

$$Hha = Hh'b \quad \text{yoki} \quad Ha = Hb.$$

Demak, Ha va Hb sistemalar teng bo'lmasa, ular bitta ham umumiy elementga ega bo'lmaydi, chunki aks holda $Ha = Hb$ kelib chiqadi.

Bundan keyin G gruppaga qarashli $Ha, Hb, Hc, Hd, \dots$ sistemalarning birlashmasini ko'pincha $Ha + Hb + Hc + Hd + \dots$ ko'rinishda belgilaymiz.

Gruppalar nazariyasida kommutativ gruppaning algebraic amali "+" ishora bilan belgilanadi. Bunday holda $Ha, Hb, Hc, Hd, \dots$ sistemalar $H + a, H + b, H + c, H + d, \dots$ ko'rinishda yozilgani uchun ularning birlashmasini, $(H + a) \cup (H + b) \cup (H + c) \cup (H + d) \cup \dots$ ko'rinishda yozamiz.

Misol.

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} \right\} \text{ gruppani}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ qism gruppasi bo'yicha qo'shni sistemalarga yoyamiz. Bu ish}$$

quyidagicha bajariladi. Birinchi sistema sifatida H ni olamiz; ikkinchi sistemani hosil qilish uchun H ni G ning H ga qarashli bo'lmagan istalgan elementiga,

masalan, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ga ko'paytiramiz:

$$H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

H ni yana G ning H va $H\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ga qarashli bo'lmagan elementiga, masalan,

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ga ko'paytiramiz:

$$H\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bu H , $H\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $H\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ uchala sistema G ning hamma elementlarini o'z ichiga olgani uchun yoyish prosessi tamom bo'lib, ushbu yoyilmani hosil qilamiz:

$$S_3 = H + H\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + H\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bu yoyilmaning sistemalari ikkitadan elementga ega.

Siklik gruppalar. Ixtiyoriy G gruppaning a elementini olib, uning barcha butun darajalaridan tuzilgan

$$A = \{..., a^{-n}, ..., a^{-2}, a^{-1}, a^0, a, a^2, ..., a^n, ...\} \quad (1)$$

to'plamni qaraymiz. $A \subseteq G$ ekanligi ravshan, chunki har bir butun daraja G ning elementidir.

1-teorema. A to'plam G ning qism gruppasidir.

Isboti. Qism gruppaning zaruriy va yetarli sharti bajariladi:

$$\forall a^k, a^l \in A (a^k \cdot a^l = a^{k+l} \in A) \text{ va } \forall a^k \in A (a^{-k} \in A).$$

A ni a element tomonidan vujudga keltirilgan siklik gruppaga deyiladi va $A = \{a\}$ ko'ronishda belgilanadi.

Bu yerda ikki hol ro'y berishi mumkin:

1-hol. A da har xil elementlar soni chekli, ya'ni A chekli gruppaga. Masalan, G gruppaga chekli bo'lganda bu hol albatta ro'y beradi. Demak, bu holda a ning (1) darajalari orasida bir-biriga tenglari albatta bor, ya'ni

$$a^\alpha = a^\beta \quad (2)$$

bunda $\alpha \neq \beta$, chunki $\alpha = \beta$ shartda (2) tenglik bitta darajani ifodalaydi. Bu yerda $\alpha - \beta = \gamma > 0$ deb faraz qilsak, (2) dan

$$a^{\alpha-\beta} = e \quad \text{yoki} \quad a^\gamma = e \quad (3)$$

kelib chiqadi. Demak, a ning e gat eng musbat darajalari mavjud. Bunday γ daraja ko'rsatkichlar orasida eng kattasi yo'q, chunki istalgan k natural son uchun (3) bilan birga $a^{k\gamma} = (a^\gamma)^k = e$ ham o'rinli. Lekin bular orasida eng kichigi bor; uni m bilan belgilaymiz; $a \neq e$ shartda $m \geq 2$ bo'lib, $a = e$ shartda esa $m = 1$ dir. Shunday qilib,

$$a^m = e \quad (4)$$

Tenglik bajarilib, lekin $0 < r < m$ musbat son uchun $a^r \neq e$ bo'ladi.

2-teorema. (4) tenglik bajarilgan holda

$$e, a, a^2, a^3, \dots, a^{m-1} \quad (5)$$

Darajalar har xil bo'lib, istalgan a butun daraja (5) darajalarning biriga tengdir.

Isboti. (5) darajalardan qandaydir ikkitasi teng deylik:

$$a^\alpha = a^\beta, \quad (0 \leq \beta < \alpha \leq m-1)$$

bundan $a^{\alpha-\beta} = a^\gamma = e$ kelib chiqadi; $0 < \alpha - \beta = \gamma < m$ bo'lgani sababli $a^\gamma = e$ tenglik bajarila olmaydi. Demak, (5) darajalar har xildir.

Endi

$$\lambda = mq + r, \quad 0 \leq r \leq m-1 \quad (6)$$

Tenglikka asosan ushbuga ega bo'lamiz: $a^\lambda = a^{mq+r} = (a^m)^q \cdot a^r = a^r$, bu yerda a^r daraja xuddi (5) larning biriga tengdir.

3-teorema. (4) tenglik bajarilishi bilan birga yana a^λ butun daraja $a^\lambda = e$ ni qanoatlantirishi uchun λ son m ga bo'linishi zarur va yetarli.

Isboti. 1. λ son m ga bo'linsa, $\lambda = mq$ bo'lib, demak, $a^\lambda = a^{mq} = (a^m)^q = e^q = e$ kelib chiqadi.

2. $a^\lambda = e$ desak, 2-teoremaga ko'ra $a^\lambda = a^r$ bo'lib, $a^r = e$ ga ega bo'lamiz. Bu yerda $0 \leq r \leq m-1$ ekanini nazarda tutsak, $r > 0$ shartda $a^r = e$ ning bajarilishi mumkin emas ekanligini ko'ramiz. Shu sababli, $r = 0$ bo'lib, (6) dan $\lambda = mq$ kelib chiqadi, ya'ni λ son m ga bo'linadi.

Shunday qilib, qaralayotgan 1-holda (1) ning har xil elementlari faqat m ta, ya'ni (5) elementlardangina iborat bo'lib, $A = \{a\}$ siklik grupp

$$A = \{a\} = \{e, a, a^2, \dots, a^{m-1}\} \quad (7)$$

ko'rinishni oladi. Demak, siklik grupp chekli m -tartibli gruppani tasvirlaydi.

2-hol. (1) elementlar – har xil. Bu holda λ son noldan farqli bo'lsa, a^λ daraja uchun $a^\gamma = e$ tenglik bajarilmaydi, chunki aks holda (1) darajalarning ikkitasi bir-biriga teng bo'lib qoladi, bundan kelib chiqadiki, A grupp cheksiz siklik grupp bo'ladi.

Ta'rif. $a^\gamma = e$ tenglikni qanoatlantiruvchi γ musbat ko'rsatkichlar orasida eng kichigu bo'lgan m va a elementlarning tartibi deyiladi.

Bu holda a chekli tartibli (m -tartibli) element deyiladi.

Hech qanday γ natural son va $a \neq e$ element uchun $a^\gamma = e$ tenglik bajarilmasa, a ni cheksiz tartibli element deb atash qabul qilingan.

Yuqoridagi mulohazalardan bunday xulosa kelib chiqadi: chekli m -tartibli a element tomonidan chekli m -tartibli (7) siklik grupp vujudga keltiriladi. Cheksiz tartibli a element esa cheksiz tartibli siklik gruppani vujudga keltiradi.

Chekli gruppaning hamma elementlari chekli tartibli, cheksiz gruppaning elementlari esa chekli va cheksiz tartibli bo'lishi mumkin.

Misol. Noldan tashqari kompleks sonlarning ko'paytirishga nisbatan grupasi G da $a = i, b = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, c = 2$ elementlar mos ravishda 4, 8 va cheksiz tartibli. Haqiqatan,

$$a^2 = i^2 = -1, a^3 = a^2 \cdot a = (-1)i = -i, a^4 = a^3 \cdot a = (-i)i = 1; \quad b^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i;$$

$$b^8 = (b^2)^4 = i^4 = 1;$$

2 ning esa hech darajasi $2^\gamma = 1$ ni qanoatlantirmaydi.

Bu elementlar tomonidan quyidagi siklik gruppalar vujudga keltiriladi:

$$A = \{i\} = \{1, i, -1, -i\};$$

$$B = \left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right\} = \left\{1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\},$$

$$C = \{2\} = \left\{ \dots, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots, 2^n, \dots \right\}.$$

4-teorema. Chekli gruppaga qarashli har bir elementning tartibi bu grupp tartibining bo'luvchisidir.

Isboti. m - tartibli a element m - tartibli $\{a\}$ siklik gruppani vujudga keltiradi. Shu sababli Lagranj teoremasiga asosan m son grupp tartibining bo'luvchisidir.

Masalan, $b = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$ elementning tartibi, ya'ni 3 son S_3 grupp tartibining, 6 ning bo'luvchisidir.

Normal bo'luvchi. Faktor- grupp.

Ta'rif. G gruppaning istalgan g elementi bilan o'rinalmashinuvchi H qism gruppasi G ning normal bo'luvchisi (invariant qism gruppasi) deyiladi.

Demak, ta'rifga ko'ra $\forall g \in G (Hg = gH)$. Masalan, simmetrik gruppaning

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \right\}$$

qism gruppasi G da normal bo'luvchidir. Bunga ishonch hosil qilish maqsadida H istalgan $g \in G$ element bilan o'rin almashinuvchi ekanini tekshirib ko'ramiz:

$h \in H$ uchun $Hh = hH = H$ bo'lganidan H qism grupp o'zining har bir h elementi bilan o'rin almashinuvchidir. Demak, H ning qolgan uchta element bilan o'rin almashinuvchi ekanini tekshirib ko'rish lozim;

$$\begin{aligned} a = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} \text{ uchun: } Ha &= \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \right\} \times \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} \right\} \text{ va } aH = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \right\} \text{ dir. Demak, } Ha = aH. \end{aligned}$$

Kommutativ gruppaning har bir qism gruppasi normal bo'luvchi bo'ladi.

Endi G gruppani H normal bo'luvchi bo'yicha qo'shni sistemalarga yoyamiz:

$$G = H + Ha + Hb + Hc + Hd + \dots \quad (1)$$

Elementlarini (1) qo'shni sistemalardan iborat

$$G/H = \{H, Ha, Hb, Hc, Hd, \dots\}$$

to'plamni qaraymiz.

Teorema. G/H to'plam sistemalarni ko'paytirishga nisbatan gruppaga tashkil etadi.

Isboti. Gruppaga ta'rifdagi to'rtta aksiomaning bajarilishini ko'rsatamiz.

1. $\forall Hg, Hg' \in G/H (Hg \cdot Hg' \in G/H)$ va bir qiymatli. Haqiqatan, $Hg \cdot Hg' = HHgg' = Hgg'$ kelib chiqadi; $gg' \in G$ bo'lgani uchun (1) sistemalar orasida Hgg' sistema albatta bor; Hgg' ko'paytmaning bir qiymatligi shundan ma'lumki, (1) dagi barcha sistemalar har xil.

$$2. \forall Hg, Hg', Hg'' \in G/H ((Hg \cdot Hg')Hg'' = Hg(Hg'Hg'')),$$

Chunki sistemalarni ko'paytirish assosiativ ekanini bilamiz.

3. $\forall Hg \exists H \in G/H (HgH = Hg)$; ya'ni G/H to'plamda H sistema birlik element bo'lib xizmat qiladi, chunki $Hg \cdot H = HHg = Hg$.

4. $\forall Hg \exists Hg^{-1} (HgHg^{-1} = H)$, ya'ni G/H ning har bir Hg elementiga G/H da teskari Hg^{-1} element mavjud. Haqiqatan, $g^{-1} \in G$ bo'lgani sababli (1) sistemalar orasida Hg^{-1} sistema albatta bor bo'lib,

$$Hg \cdot Hg^{-1} = HHgg^{-1} = He = H$$

Bo'ladi. Bu G/H gruppaga faktor gruppaga deyiladi. G gruppaga chekli va n -tartibli, H normal bo'luvchi esa m -tartibli bo'lsa, $G = H + Hg_2 + \dots + Hg_s$ yoyilmadan ko'ringanidek, G/H faktor-gruppaning tartibi $s = \frac{n}{m}$ bo'ladi.

Masalan, yuqorida qaralgan S_3 gruppani $H = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \right\}$ normal

bo'luvchi bo'yicha yoysak,

$$S_3 = H + Ha$$

hosil bo`ladi, bunda  $a = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}$ . Demak, faktor-gruppa  $S_3/H = \{H, Ha\}$  ko`rinishga ega. Bu yerda S_3 ning tartibi 6 ga, H ning tartibi 3 ga teng bo`lganidan  $S_3/H$  ning tartibi  $\frac{6}{3} = 2$  ekanini ko`ramiz.

2.3§ Gruppalarining gomomorfizmi, izomorfizmi, gomomorfizm to`g`risidagi teoremlar

Faraz qilaylik, A va $\bar{A}$ gruppalar berilgan bo`lsin.  $A$  ning har bir  $a$  elementi biror qoida bo`yicha $\bar{A}$ ning bitta (yagona) $\bar{a}$ elementiga, shu bilan birga A ning hamma elementlari $\bar{A}$ ning hamma elementlariga akslansin. Bu holda A gruppaga $\bar{A}$ gruppaga bir qiymatli akslansin. Bu holda A gruppaga $\bar{A}$ gruppaga bir qiymatli akslansin. Bu holda A gruppaga $\bar{A}$ gruppaga bir qiymatli akslanadi deyiladi.

a elementning $\bar{a}$ elementga akslanishini $a \rightarrow \bar{a}$ yoki $\varphi a = \bar{a}$ ko`rinishda belgilaymiz.  $A$  ning  $\bar{A}$  ga akslanishi ham  $A \rightarrow \bar{A}$  yoki  $\varphi A = \bar{A}$  ko`rinishda belgilanadi.

1-ta`rif.  $A$  gruppaga elementlarining  $\bar{A}$  gruppaga elementlariga bir qiymatli akslanishi elementlarni ko`paytirishda ham o`z kuchini saqlasa, ya`ni $a, b \in A$ va $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ elementlar uchun bo`lgan $a \rightarrow \bar{a}$ va $b \rightarrow \bar{b}$ akslanishlardan $ab \rightarrow \overline{ab}$ akslanish kelib chiqsa, A gruppaga $\bar{A}$ gruppaga gomomorf akslanadi deyiladi.

A ning $\bar{A}$ ga gomomorf akslanishi bu gruppalarining gomomorfizmi deyiladi. Bu holda A va $\bar{A}$ gomomorf gruppalar deb ham ataladi. A ning $\bar{A}$ ga gomomorf akslanishi $A \cong \bar{A}$ ko`rinishda ham belgilanadi.

Ma`lumki, bir qiymatli  $A \rightarrow \bar{A}$  akslanishda  $A$  ning, umuman, bir qancha, hatto cheksiz ko`p elementlari $\bar{A}$ ning bitta elementiga akslanadi. Demak, bu holda $a \rightarrow \bar{a}$ va $b \rightarrow \bar{b}$ akslanishlarda $a \neq b$ bo`lsa ham, lekin  $\bar{a} = \bar{b}$  bo`lishi mumkin. Ikkinchi belgilashni ishlatsak, $a \neq b$ shartda $\varphi a = \varphi b$ bajarilishi mumkin.

Ko`paytirish assositiv bo`lgani uchun $a_1 \rightarrow \bar{a}_1, a_2 \rightarrow \bar{a}_2, \dots, a_n \rightarrow \bar{a}_n$ dan $\prod_{i=1}^n a_i \rightarrow \prod_{i=1}^n \bar{a}_i$ kelib chiqadi.

Ikkinchi belgilashni ishlatadigan bo'lsak, $\varphi a_1 = \overline{a_1}, \varphi a_2 = \overline{a_2}, \dots, \varphi a_n = \overline{a_n}$ dan $\varphi(a_1 a_2 \dots a_n) = \overline{a_1} \overline{a_2} \dots \overline{a_n} = \varphi a_1 \cdot \varphi a_2 \dots \varphi a_n$ yoki qisqacha

$$\varphi \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n \varphi a_i$$

Ning kelib chiqishini ko'ramiz. Bundan $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ shartda

$$\varphi a^n = (\varphi a)^n$$

hosil bo'ladi.

1-teorema. A va $\bar{A}$ gruppalarining gomomorfizmidagi:

1) $e \rightarrow \bar{e}$, bunda $e \in A$ va $\bar{e} \in \bar{A}$ – birlik elementlar;

2) $a \rightarrow \bar{a}$ dan $a^{-1} \rightarrow \bar{a}^{-1}$ kelib chiqadi.

Isboti. 1. $a \rightarrow \bar{a}$ va $e \rightarrow \bar{e}$ desak, $ae = a \rightarrow \bar{a}\bar{e}$ ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, bir tomondan $a \rightarrow \bar{a}$, ikkinchi tomondan, $a \rightarrow \bar{a}\bar{e}$ bo'lgani uchun akslanishning bir qiymatligiga asosan $\bar{a}\bar{e} = \bar{a}$ ni hosil qilamiz. bundan esa $\bar{e} = \bar{a}^{-1} \cdot \bar{a} = \bar{e}$ kelib chiqadi.

2. $a \rightarrow \bar{a}$ va $a^{-1} \rightarrow \bar{y}$ dan $aa^{-1} = e \rightarrow \bar{a}\bar{y}$ hosil bo'ladi. Lekin $e \rightarrow \bar{e}$. Shu sababli $\bar{a}\bar{y} = \bar{e}$ bo'lib, bundan $y = a^{-1}$ ga kelamiz.

Teoremaning ikkinchi qismiga muvofiq, $\varphi a_1^{-1} = \overline{a_1^{-1}}, \varphi a_2^{-1} = \overline{a_2^{-1}}, \dots, \varphi a_n^{-1} = \overline{a_n^{-1}}$ dan

$$\varphi(a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_n^{-1}) = \overline{a_1^{-1}} \overline{a_2^{-1}} \dots \overline{a_n^{-1}} = \varphi a_1^{-1} \cdot \varphi a_2^{-1} \dots \varphi a_n^{-1}$$
 ni hosil qilamiz. Endi $\varphi a^n = (\varphi a)^n$

tenglikda a o'rniga a^{-1} ni olsak va $\varphi a^{-1} = \overline{a^{-1}}$ ni nazarda tutsak,

$$\varphi(a^{-1})^n = (\varphi a^{-1})^n = (\overline{a^{-1}})^n \quad \text{yoki} \quad \varphi a^{-n} = \overline{a^{-n}} = (\varphi a)^{-n}$$
 kelib chiqadi. Yana

$\varphi a^0 = (\varphi a^0) = \overline{a^0}$ ning $\varphi e = \bar{e}$ ekanini hisobga olsak, istalgan n butun son uchun

$$\varphi a^n = (\varphi a)^n$$

tenglik o'rinli degan xulosaga kelamiz.

A gruppaning A dagi $\bar{e}$ birlik elementga akslanuvchi hamma elementlari to'plamini H bilan belgilaymiz.

2-teorema. H qism to'plam A gruppaning normal bo'luvchisidir.

Isboti. 1. Avval H ning A da qism gruppaga tashkil etishini ko'rsatamiz;

$\forall h, h' \in H (hh' \in H)$, chunki $h \rightarrow \bar{e}$ va $h' \rightarrow \bar{e}$ dan $hh' \rightarrow \bar{e}\bar{e} = \bar{e}$ kelib chiqadi, bu

$hh' \in H$ ekanini bildiradi. So'ngra $\forall h \in H (h^{-1} \in H)$, chunki $h \rightarrow \bar{e}$ dan $h^{-1} \rightarrow \bar{e}^{-1} = \bar{e}$ hosil bo'lgani uchun $h^{-1} \in H$ dir.

2. endi H ning A da normal bo'luvchi ekanini isbotlaymiz. aHa^{-1} va $a^{-1}Ha$ sistemalarning har qaysisi H ga qarashli, bunda $a \in A$. Haqiqatan, bu sistemalarning istalgan aha^{-1} va $a^{-1}ha$ elementlari uchun $aha^{-1} \rightarrow \bar{a} \cdot \bar{e} \cdot \bar{a}^{-1} = \bar{e}$ va $a^{-1}ha \rightarrow \bar{a}^{-1} \cdot \bar{e} \cdot \bar{a} = \bar{e}$ bo'lganligidan $aha^{-1}, a^{-1}ha \in H$ dir. Shu sababli $aHa^{-1} \subseteq H$ va $a^{-1}Ha \subseteq H$. Ikkinchi munosabatni chapdan a ga va o'ngdan a^{-1} ga ko'paytirib, $H \subseteq aHa^{-1}$ ni hosil qilamiz. Endi $aHa^{-1} \subseteq H$ va $H \subseteq aHa^{-1}$ munosabatlardan $H = aHa^{-1}$ kelib chiqadi. Buni o'ngdan a ga ko'paytirish bilan $Ha = aH$ ni topamiz. Bu esa H ning A da normal bo'luvchi ekanini tasdiqlaydi.

H normal bo'kuvchi $A \cong \bar{A}$ gomomorfizm yadrosi deyiladi.

3-teorema. A gruppani H yadro bo'yicha

$$A = H + Ha + Hb + Hc + Hd + \dots \quad (1)$$

qo'shni sistemalarga yoysak:

- 1) har bir qo'shni sistemadagi hamma elementlar $\bar{A}$ ning bitta elementiga akslangani holda turli sistemalardagi elementlar $\bar{A}$ ning turli elementlariga akslanadi.;
- 2) (1) sistemalar orasida $\bar{A}$ ning istalgan $\bar{g}$ elementiga akslanuvchi elementlardan tuzilgan Hg sistema mavjud bo'ladi.

Isboti. Ha sistema (1) ning ixtiyoriy sistemasi bo'lib, $a \rightarrow \bar{a} \in \bar{A}$ desak,

istalgan $ha \in Ha$ element uchun ham $ha \rightarrow \bar{a}$ bo'ladi, $h \rightarrow \bar{e}$ va $a \rightarrow \bar{a}$ dan $ha \rightarrow \bar{e}\bar{a} = \bar{a}$ kelib chiqadi. Shu munosabat bilan Ha sistema $\bar{a}$ elementga akslanadi, ya'ni $Ha \rightarrow \bar{a}$ aytish qabul qilingan.

A gruppaning $\bar{a}$ elementga akslanuvchi har bir g elementi Ha ga qarashlidir.

Haqiqatan, $g \rightarrow \bar{a}$ bo'lsa, u holda bu akslanishdan va $a^{-1} \rightarrow \bar{a}^{-1}$ dan $ga^{-1} \rightarrow \bar{a}\bar{a}^{-1} = \bar{e}$ hosil bo'lganligi sababli $ga^{-1} \in H$ kelib chiqadi va buning ikkala tomonini a ga ko'paytirib, $g \in Ha$ ga kelimiz.

Ha dan farqli Hb sistema uchun $Hb \rightarrow \bar{b}$ bo'lsa, $\bar{a} \neq \bar{b}$ bo'ladi, chunki $\bar{a} = \bar{b}$ shartda A ning $\bar{a}$ ga akslanuvchi elementlari Ha ga qarashli bo'lganligidan $Ha = Hb$ ni hosil qilamiz, ammo $Ha \neq Hb$ edi.

Agar $H \rightarrow \bar{e}, Ha \rightarrow \bar{a}, Hb \rightarrow \bar{b}, Hc \rightarrow \bar{c}, Hd \rightarrow \bar{d}, \dots$ akslanishlarga murojaat qilsak, $\bar{A}$ gruppasi ushbu elementlardan tuzilgan bo'ladi:

$$\bar{A} = \{\bar{e}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \dots\} \quad (2)$$

Chunki istalgan $\bar{g} \in \bar{A}$ element (2) da mavjud. Haqiqatan ham, A da g ga akslanuvchi g element albatta bor bo'lib, u (1) sistemalarning biriga, masalan, Hb ga qarashli bo'ladi; u holda $Hg = Hb \rightarrow \bar{b}$ dan $\bar{g} = \bar{b}$ kelib chiqadi.

2-ta'rif. A gruppaning $\bar{A}$ gruppaga gomomorf akslanishi o'zaro bir qiymatli bo'lsa (ya'ni A ning elementlari $\bar{A}$ ning elementlariga o'zaro bir qiymatli akslansa), A gruppasi $\bar{A}$ gruppaga izomorf akslanadi deyiladi.

Bu holda biz A va $\bar{A}$ gruppalarining izomorfizmiga ega bo'lamiz. A va $\bar{A}$ ni izomorf gruppalar deb aytamiz. A ning $\bar{A}$ ga izomorf akslanishi $A \cong \bar{A}$ ko'rinishda belgilanadi.

Izomorfizmida A ning har bir a elementi $\bar{A}$ ning bitta elementiga akslanishi bilan birga, $\bar{a}$ ga faqat shu bitta a gina akslanadi. Demak, $a \rightarrow \bar{a}$ va $b \rightarrow \bar{b}$ da $a \neq b$ bo'lsa, u holda $\bar{a} \neq \bar{b}$ yoki $\varphi a \neq \varphi b$ bo'ladi. $A \cong \bar{A}$ izomorfizmning H yadrosi bitta e elementdangina iborat bo'ladi, chunki $\bar{e} \in \bar{A}$ ga faqat bitta e akslanadi: $e \rightarrow \bar{e}$. Bu holda (1) yoyilma $A = \{e\} + \{a\} + \{b\} + \{c\} + \{d\} + \dots$ ko'rinishni olib, ushbu o'zaro bir qiymatli $e \rightarrow \bar{e}, a \rightarrow \bar{a}, b \rightarrow \bar{b}, c \rightarrow \bar{c}, d \rightarrow \bar{d}, \dots$ akslanishlarga ega bo'lamiz.

4-teorema. A gruppasi $\bar{A}$ ga izomorf akslansa, aksincha, $\bar{A}$ gruppasi A ga izomorf akslanadi.

Isboti. O'zaro bir qiymatli $a \rightarrow \bar{a}$ akslanishga qarab, $\bar{a} \rightarrow a$ akslanishni o'rnatamiz. Bu akslanish ham o'zaro bir qiymatli ekanligi ravshan. Endi $a \rightarrow \bar{a}$ va $b \rightarrow \bar{b}$ dan $ab \rightarrow \overline{ab}$ kelib chiqqanligiga asosan $\bar{a} \rightarrow a$ va $\bar{b} \rightarrow b$ dan $\overline{ab} \rightarrow ab$ hosil bo'ladi. Demak, $A \cong \bar{A}$ ekanligi tasdiqlanadi.

A va $\bar{A}$ izomorf gruppalar tuzilish jihatidan bir xildir; ulardan biri chekli (cheksiz) bo'lganda, ikkinchisi ham chekli (cheksiz) bo'ladi. Chekli bo'lgan holda, ikkala gruppalar bir xil tartibli, cheksiz bo'lgan holda esa teng quvvatli gruppalar bo'ladi. Ulardan biri kommutativ (nokommutativ) bo'lsa, ikkinchisi ham kommutativ (nokommutativ) gruppalar bo'ladi. Izomorf gruppalarining bir-biriga akslanuvchi elementlari bir xil tartibli. Bu gruppalarining birida qancha qism gruppalar, normal bo'luvchilar mavjud bo'lsa, ikkinchisida ham ularga izomorf shuncha qism gruppalar, normal bo'luvchilar mavjud bo'ladi va hakazo. Xullas, izomorf gruppalarini tashkil etuvchi elementlarning tabiatiga va ular ustida bajariladigan algebraic amallarning qoidalariga e'tibor qilmasak, bunday gruppalar teng deb hisoblanadi.

Misollar. 1. Ko'paytirishga nisbatan $A = \{1, -1, i, -i\}$ gruppalar bilan $\bar{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix} \right\} = \{\bar{e}, \bar{a}\}$ gruppani olib, bir qiymatli akslanishlarni quyidagicha kiritamiz:

$$1 \rightarrow \bar{e}, -1 \rightarrow \bar{e}, i \rightarrow \bar{a}, -i \rightarrow \bar{a}.$$

Bu akslanishlar elementlarni ko'paytirishda o'z kuchini saqlaydi:

$i(-i) = 1 \rightarrow \bar{a}\bar{a} = \bar{e}$; $i(-1) = -i \rightarrow \bar{a} \cdot \bar{e} = \bar{a}$; $(-1) \cdot 1 = -1 \rightarrow \bar{e} \cdot \bar{e} = \bar{e}$ va xokazo. Demak, A gruppalar $\bar{A}$ ga gomomorf akslanadi. Gomomorfizm yadrosi $H = \{1, -1\}$ dan iborat.

2. A butun sonlarning qo'shishga nisbatan gruppasi bo'lsin. $\bar{A} = \{1, -1\}$ esa ko'paytirishga nisbatan gruppadir. A ning hamma juft sonlarini $\bar{A}$ dagi 1 ga, hamma toq sonlarini -1 ga bir qiymatli akslantiramiz:

$$2n \rightarrow 1 \text{ va } 2n+1 \rightarrow -1$$

Bu akslanishlar ko'paytirishda o'z kuchini saqlaydi:

$$2n + 2m = 2(n + m) \rightarrow 1 \cdot 1 = 1; 2n + (2m + 1) = 2(n + m) + 1 \rightarrow 1 \cdot (-1) = -1; (2n + 1) + (2m + 1) = 2(n + m + 1) \rightarrow (-1) \cdot (-1) = 1.$$

Shunday qilib, $A \approx \bar{A}$ bo'lib, gomomorfizm yadrosi juft sonlarning qo'shishga nisbatan

$$H = \{\dots, -2n, \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots, 2n, \dots\}$$

gruppasidir.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} \right\}$$

o`rniga qo`yishlar gruppasi bilan ko`paytirishga nisbatan

$$\bar{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 \\ 001 \\ 010 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 010 \\ 001 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 010 \\ 100 \\ 001 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 001 \\ 100 \\ 010 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 001 \\ 010 \\ 100 \end{pmatrix} \right\}$$

matritsalar gruppasini olamiz. A ning elementlarini $\bar{A}$ ning mos elementlariga (birinchini birinchiga ikkinchini ikkinchiga va xokazo) o`zaro bir qiymatli akslantiramiz. Bunday akslanishlar ko`paytirishda o`z kuchini saqlaydi. Masalan,

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 100 \\ 001 \\ 010 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 001 \\ 100 \\ 010 \end{pmatrix} \quad \text{dan}$$

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 100 \\ 001 \\ 010 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 001 \\ 100 \\ 010 \end{pmatrix}$$

kelib chiqadi, chunki birinchi va ikkinchi ko`paytmalar mos ravishda

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \begin{pmatrix} 001 \\ 010 \\ 100 \end{pmatrix}$$

ga teng bo`lib, bu elementlar xuddi bir-biriga akslanadi. Demak,

$$A \cong \bar{A}.$$

4. A musbat haqiqiy sonlarning ko`paytirishga nisbatan gruppasi,  $\bar{A}$  barcha haqiqiy sonlarning qo`shishga nisbatan gruppasi bo`lsin.  $a \in A$  elementga  $\log a \in \bar{A}$  ni o`zaro bir qiymatli mos keltirsak, bu moslik elementlarni ko`paytirishda o`z kuchini saqlaydi. Haqiqatan, $a \rightarrow \log a$ va $b \rightarrow \log b$ bo`lsa, $ab \rightarrow \log ab = \log a + \log b$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $A \cong \bar{A}$.

5-teorema. (gomomorfizm haqidagi teorema). A gruppasi $\bar{A}$ gruppaga gomomorf akslansa, A/H faktor gruppasi $\bar{A}$ gruppaga izomorf akslanadi, bunda H – gomomorfizm yadrosi.

Isboti. $A \approx \bar{A}$ gomomorfizm berilgan. A ni bu gomomorfizmning H yadrosi bo'yicha qo'shni $A = H + Ha + Hb + Hc + Hd + \dots$ sistemalarga yoysak, 3-teoremaga asosan

$$A/H = \{H, Ha, Hb, Hc, Hd, \dots\}$$

gruppa elementlari $\bar{A} = \{\bar{e}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \dots\}$ gruppa elementlariga o'zapa bir qiymatli akslanadi: $H \rightarrow \bar{e}, Ha \rightarrow \bar{a}, Hb \rightarrow \bar{b}, Hc \rightarrow \bar{c}, Hd \rightarrow \bar{d}, \dots$ bu akslanishlar elementlarni ko'paytirishda o'z kuchini saqlaydi. Haqiqatan ham, Ha, Hb ni A/H ning ixtiyoriy elementlari deb qarasak, shu bilan birga $Ha \rightarrow \bar{a}, Hb \rightarrow \bar{b}$ ni nazarda tutsak, $A \approx \bar{A}$ gomomorfizmda $a \rightarrow \bar{a}$ va $b \rightarrow \bar{b}$ dan $ab \rightarrow \bar{a}\bar{b}$ kelib chiqqani uchun $Hab \rightarrow \bar{a}\bar{b}$ bo'ladi. Bu esa $Hab = HHab = Ha \cdot Hb \rightarrow \bar{a}\bar{b}$ ni bildiradi.

Demak, $A/H \cong \bar{A}$.

Chekli gruppalar bo'lgan holda gruppaning qism gruppa bo'yicha yoyilmasining mavjudligi ushbu muhim teoremaga olib keladi:

2.4§. Gruppa va qism gruppasining tartibi haqidagi Lagranj teoremasi.

Lagranj teoremasi. Har qanday chekli gruppada ixtiyoriy qism gruppaning tartibi gruppa tartibining bo'luvchisidir.

Haqiqatan ham, chekli n -tartibli G gruppada k -tartibli A qism gruppa berilgan bo'lsin. G gruppaning A qism gruppa bo'yicha chap tomonlama yoyilmasini ko'ramiz. U j ta sinfdan tashkil topgan bo'lsin. j son G gruppada A qism gruppaning indeksi deyiladi. Har bir $x \in A$ chapki qo'shni sinf roppa-rosa k ta elementdan tashkil topgan, chunki agar

$$xa_1 = xa_2$$

bo'lsa, bu yerda a_1 va $a_2 \in A$ ning elementlari, u holda $a_1 = a_2$ bo'ladi, shunday qilib,

$$n = kj$$

shuni isbotlash talab qilingan edi.

Elementning tartibi uning siklik qism gruppasining tartibi bilan ustma-ust tushgani uchun Lagranj teoremasidan chekli gruppaning har qanday elementining tartibi grupp tartibining bo'luvchisi ekanligi kelib chiqadi.

Shuningdek, Lagranj teoremasidan tartibi tub son bo'lgan har qanday chekli gruppaning siklik ekanligi kelib chiqadi. Darhaqiqat, bu grupp uning 1 dan farqli ixtiyoriy elementi tomonidan vujudga keltirilgan qism gruppasi bilan ustma-ust tushishi kerak. Bundan, siklik gruppalarining yuqorida hosil qilingan tasviriga asosan, har qanday p tub son uchun izomorfizm aniqligida chekli p – tartibli yagona grupp mavjud ekanligi kelib chiqadi.

$n = 4$ bo'lgan holni ko'raylik.

$$S_4 = \{e, g_1, g_2, \dots, g_{23}\} = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 1243 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 1423 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 4123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 2134 \end{pmatrix} \\ e \quad g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4 \quad g_5 \\ \begin{pmatrix} 1234 \\ 2431 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 2341 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 3241 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 3214 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 4213 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 4231 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 3124 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 3142 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 4132 \end{pmatrix} \\ g_6 \quad g_7 \quad g_8 \quad g_9 \quad g_{10} \quad g_{11} \quad g_{12} \quad g_{13} \quad g_{14} \\ \begin{pmatrix} 1234 \\ 1324 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 1342 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 4312 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 2314 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 1432 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 3421 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1234 \\ 2413 \end{pmatrix} \\ g_{15} \quad g_{16} \quad g_{17} \quad g_{18} \quad g_{19} \quad g_{20} \quad g_{21} \quad g_{22} \quad g_{23} \end{array} \right\}$$

$$e \cdot g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = g_1$$

$$g_1 \cdot g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$$

$$g_1 \cdot g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = g_{19}$$

$$g_1 \cdot g_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = g_{12}$$

$$g_1 \cdot g_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = g_3$$

	e	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}	g_{17}	g_{18}	g_{19}	g_{20}	g_{21}	g_{22}	g_{23}
e	e	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}	g_{17}	g_{18}	g_{19}	g_{20}	g_{21}	g_{22}	g_{23}
g_1	g_1	e	g_{19}	g_{14}	g_5	g_4	g_{23}	g_{18}	g_9	g_8	g_{11}	g_{10}	g_{13}	g_{12}	g_3	g_{16}	g_{15}	g_{20}	g_7	g_2	g_{17}	g_{22}	g_{21}	g_6
g_2	g_2	g_{15}	g_{16}	g_{17}	g_{18}	g_{23}	g_4	g_5	g_{12}	g_{21}	g_{20}	g_3	g_{22}	g_9	g_{10}	g_{19}	e	g_{11}	g_6	g_1	g_{14}	g_{13}	g_8	g_7
g_3	g_3	g_{12}	g_{13}	g_{22}	g_9	g_{10}	g_1	e	g_{15}	g_{20}	g_{21}	g_2	g_{17}	g_{18}	g_{23}	g_{14}	g_5	g_6	g_{11}	g_4	g_{19}	g_{16}	g_7	g_8
g_4	g_4	g_5	g_{14}	g_{19}	e	g_1	g_{10}	g_9	g_{18}	g_7	g_6	g_{23}	g_{16}	g_{15}	g_2	g_{13}	g_{12}	g_{21}	g_8	g_3	g_{22}	g_{17}	g_{20}	g_{11}
g_5	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	e	g_{11}	g_8	g_7	g_{18}	g_{23}	g_6	g_{15}	g_{16}	g_{19}	g_{12}	g_{13}	g_{22}	g_9	g_{14}	g_{21}	g_{20}	g_{17}	g_{10}
g_6	g_6	g_7	g_{20}	g_{15}	g_{16}	g_{19}	g_{14}	g_{13}	g_4	g_{23}	g_{18}	g_5	g_2	g_1	e	g_{21}	g_8	g_9	g_{22}	g_{11}	g_{12}	g_3	g_{10}	g_{17}
g_7	g_7	g_6	g_{11}	e	g_{19}	g_{16}	g_{17}	g_{22}	g_{23}	g_4	g_5	g_{18}	g_1	g_2	g_{15}	g_8	g_{21}	g_{12}	g_{13}	g_{20}	g_9	g_{10}	g_3	g_{14}
g_8	g_8	g_{11}	g_6	g_5	g_{14}	g_{13}	g_{22}	g_{17}	g_{10}	g_1	e	g_9	g_4	g_3	g_{12}	g_7	g_{20}	g_{15}	g_{16}	g_{21}	g_{18}	g_{23}	g_2	g_{19}

g_9	g_9	g_{10}	g_{23}	g_4	g_3	g_{12}	g_{21}	g_{20}	g_{11}	e	g_1	g_8	g_5	g_{14}	g_{13}	g_{18}	g_{17}	g_{16}	g_{15}	g_{22}	g_7	g_6	g_{19}	g_2
g_{10}	g_{10}	g_9	g_{22}	g_{13}	g_{12}	g_3	g_2	g_{15}	e	g_{11}	g_8	g_1	g_{14}	g_5	g_4	g_{17}	g_{18}	g_7	g_{20}	g_{23}	g_{16}	g_{19}	g_6	g_{21}
g_{11}	g_{11}	g_8	g_{21}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{19}	g_{16}	g_1	g_{10}	g_9	e	g_3	g_4	g_5	g_{20}	g_7	g_{18}	g_{17}	g_6	g_{15}	g_2	g_{23}	g_{22}
g_{12}	g_{12}	g_3	g_4	g_{23}	g_{10}	g_9	g_8	g_{11}	g_{20}	g_{15}	g_2	g_{21}	g_{18}	g_{17}	g_{22}	g_5	g_{14}	g_{19}	e	g_{13}	g_6	g_7	g_{16}	g_1
g_{13}	g_{13}	g_{14}	g_5	g_6	g_{11}	g_8	g_9	g_{10}	g_{17}	g_{16}	g_{19}	g_{22}	g_7	g_{20}	g_{21}	g_4	g_3	g_2	g_1	g_{12}	g_{23}	g_{18}	g_{15}	e
g_{14}	g_{14}	g_{13}	g_{12}	g_{21}	g_8	g_{11}	e	g_1	g_{16}	g_{17}	g_{22}	g_{19}	g_{20}	g_7	g_6	g_3	g_4	g_{23}	g_{10}	g_5	g_2	g_{15}	g_{18}	g_9
g_{15}	g_{15}	g_2	g_1	g_{10}	g_{23}	g_{18}	g_7	g_6	g_{21}	g_{12}	g_3	g_{20}	g_9	g_{22}	g_{17}	e	g_{19}	g_{14}	g_5	g_{16}	g_{11}	g_8	g_{13}	g_4
g_{16}	g_{16}	g_{19}	e	g_{11}	g_6	g_7	g_{18}	g_{23}	g_{22}	g_{13}	g_{14}	g_{17}	g_8	g_{21}	g_{20}	g_1	g_2	g_3	g_4	g_{15}	g_{10}	g_9	g_{12}	g_5
g_{17}	g_{17}	g_{22}	g_9	g_8	g_{21}	g_{20}	g_{15}	g_2	g_{19}	g_{14}	g_{13}	g_{16}	g_4	g_6	g_7	g_{10}	g_{23}	g_4	g_3	g_{18}	g_1	e	g_5	g_{12}
g_{18}	g_{18}	g_{23}	g_{10}	g_1	g_2	g_{15}	g_{20}	g_{21}	g_6	g_5	g_4	g_7	e	g_{19}	g_{16}	g_9	g_{22}	g_{13}	g_{12}	g_{17}	g_8	g_{11}	g_{14}	g_3
g_{19}	g_{19}	g_{16}	g_{15}	g_{20}	g_7	g_6	g_5	g_4	g_{13}	g_{22}	g_{17}	g_{14}	g_{21}	g_8	g_{11}	g_2	g_1	g_{10}	g_{23}	e	g_3	g_{12}	g_9	g_{18}
g_{20}	g_{20}	g_{21}	g_8	g_9	g_{22}	g_{17}	g_{16}	g_{19}	g_2	g_3	g_{12}	g_{15}	g_{10}	g_{23}	g_{18}	g_{11}	g_6	g_5	g_{14}	g_7	e	g_1	g_4	g_{13}
g_{21}	g_{21}	g_{20}	g_7	g_{18}	g_{17}	g_{22}	g_{13}	g_{14}	g_3	g_2	g_{15}	g_{12}	g_{23}	g_{10}	g_9	g_6	g_{11}	e	g_{19}	g_8	g_5	g_4	g_1	g_{16}
g_{22}	g_{22}	g_{17}	g_{18}	g_7	g_{20}	g_{21}	g_{12}	g_3	g_{14}	g_{19}	g_{16}	g_{13}	g_6	g_{11}	g_8	g_{23}	g_{10}	g_1	g_2	g_9	g_4	g_5	e	g_{15}
g_{23}	g_{23}	g_{18}	g_{17}	g_{16}	g_{15}	g_2	g_3	g_{12}	g_5	g_6	g_7	g_4	g_{19}	e	g_1	g_{22}	g_9	g_8	g_{21}	g_{10}	g_{13}	g_{14}	g_{11}	g_{20}

$$g_{23} \cdot g_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad g_4 \qquad g_{23} \cdot g_{19} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad g_{10}$$

$$g_{23} \cdot g_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad g_{19} \quad g_{23} \cdot g_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad g_{13}$$

$$g_{23} \cdot g_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e \quad g_{23} \cdot g_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = g_{14}$$

$$g_{23} \cdot g_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad g_1 \qquad g_{23} \cdot g_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad g_{11}$$

$$g_{23} \cdot g_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad g_{22} \quad g_{23} \cdot g_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad g_{20}$$

$$g_{23} \cdot g_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad g_9$$

$$g_{23} \cdot g_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad g_8$$

$$g_{23} \cdot g_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad g_{21}$$

g_7 va g_3 o'zaro simmetrik, g_{16} va g_2 . g_6 va g_{14} o'zaro simmetrik.

g_8 va g_{10} , g_{12} va g_{18} , g_{17} va g_{21} , g_{13} va g_{23} o'zaro simmetrik.

$$g_2^2 = g_2 \cdot g_2 = g_{16}$$

$$g_2^3 = g_2^2 \cdot g_2 = g_{16} \cdot g_2 = e$$

$$\text{Demak, } g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, g_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, g_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, g_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, g_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, g_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, g_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, g_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$g_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{o`rniga qo`yish 3-tartibli elementlari}$$

$$A_4 = \{e; g_2; g_{16}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A_4 \subset S_4$$

	e	g_2	g_{16}
e	e	g_2	g_{16}
g_2	g_2	g_{16}	e
g_{16}	g_{16}	e	g_2

Bu ham multiplikativ gruppasi 3-darajali o`rniga qo`yishlarning ishora almashish gruppasi.

$A_3 = \{e; g_2; g_{16}\} = \{e; g_2; g_2^2\}$ – siklik qism gruppasi (g_2 – siklik gruppasi tashkil etuvchi element)

Huddi shunday $A_3 = \{e; g_2; g_{16}\} = \{e; g_{16}; g_{16}^2\}$ – ham siklik qism gruppasi.

Xulosa

Ushbu bobda , grupp ta'rifi, asosiy xossalari, qism grupp, normal grupp, faktor grupp, gruppalarning gomomorfizmi, izomorfizmi, gomomorfizm to'g'risidagi teoremlar. Grupp va qism gruppasining tartibi haqidagi Lagranj teoremasi keltirilgan bo'lib, bundan tashqari Lagranj teoremasidan tartibi tub son bo'lgan har qanday chekli gruppaning siklik ekanligi ko'rsatilgan. Darhaqiqat, bu grupp uning birdan farqli ixtiyoriy elementi tomonidan vujudga keltirilgan qism gruppasi bilan ustma-ust tushishi kerak. Bundan, siklik gruppalarning yuqorida hosil qilingan tasviriga asosan, har qanday p tub son uchun izomorfizm aniqligida chekli p tartibli yagona grupp mavjud ekanligi ko'rsatib o'tilgan.

Xotima

Birinchi bobda , binar algebraik amal, binar algebraik amal ta'rifi, turlari haqida barcha asosiy ma'lumotlar berilgan hamda shularga oid bir qancha misollar keltirilgan. Ikkinchi bobda , grupp ta'rifi, asosiy xossalari, qism grupp, normal grupp, faktor grupp, gruppalarning gomomorfizmi, izomorfizmi, gomomorfizm to'g'risidagi teoremlar. Grupp va qism gruppasining tartibi haqidagi Lagranj teoremasi keltirilgan bo'lib, bundan tashqari Lagranj teoremasidan tartibi tub son bo'lgan har qanday chekli gruppaning siklik ekanligi ko'rsatilgan. Darhaqiqat, bu grupp uning birdan farqli ixtiyoriy elementi tomonidan vujudga keltirilgan qism gruppasi bilan ustma-ust tushishi kerak. Bundan, siklik gruppalarning yuqorida hosil qilingan tasviriga asosan, har qanday p tub son uchun izomorfizm aniqligida chekli p tartibli yagona grupp mavjud ekanligi ko'rsatib o'tilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.

- 1. I.A.Karimov** “Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch”.
- 2. Kurosh A.** Oliy algebra kursi. Toshkent. O'qituvchi. 1975 y.
- 3. Xojiyev I.S, Faynleb A.S.** Algebra va sonlar nazariyasi kursi. Toshkent.O'zbekiston. 2001 y.
- 4. Kostrinkin A.I.** V vedeniy v algebra. Moskva. Nauka.1977 g.
- 5. Fadeev D.K.** Leksii po algebre. Moskva.Nauka.1984 g.
- 6. Kostrinkin A.I.** Sborni zadach po algebra . Moskva. Nauka.1986 g.
- 7. Buxshtab A.A.** Teoriya chisel. Moskva. Prosvesheniy.1960 g.
- 8. Griбанov V.I, Titov P.I,** Sbornii zadach po teoriy chisel. Moskva. N.1964 g.
- 9. Бирман, Суслина, Фобдеев** “ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА”
- 10. А.Г. Курош** “Олий алгебра курси”— тошкент-1976
- 11. И.М. Гельфанд** “Лекции по линейной алгебре”—москва-1971

BITIRUV MALAKAVIY ISHI BO'YICHA TOPSHIRIQ SHAKLI

Buxoro davlat universiteti
Fizika-matematika fakulteti
Ta'lim yo'nalishi _____ 5130100- Matematika____
(kodi, to'liq nomi)
Kafedra Matematika

«TASDIQLAYMAN»

Fakultet dekani

(imzo, muhr)
« _____ » _____ 2015 y.

Bitiruv malakaviy ish bo'yicha TOPSHIRIQ VARAQASI

1. Ijrochi Zaripova Gulnora Obloberdi qizi
2. Mavzu: **“Gruppalar nazariyasi asosiy tushunchalar va teoremlar”**
Mavzu universitet Ilmiy kengashining «_____» _____ 20_ yildagi
_____ sonli qarori va universitet rektorining «_____» _____ 20_ yildagi
_____ sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan.
3. Mavzuning dolzarbligi, nazariy va amaliy (iqtisodiy, ekologik, ilmiy-
texnik, mehnat muhofazasi, hayot xavsizligi va h.k.) ahamiyati _____

4. Malakaviy ishini bajarish uchun tavsiya qilinadigan ilmiy, o'quv-uslubiy
va boshqa axborot manbalari (darslik, o'quv qo'llanmalari, ma'ruzalar matni,
monografiya, ilmiy maqolalar va h.k.)

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____

5. Bitiruv malakaviy ishi bo'yicha ma'lumotlar to'plash hamda tadqiqot
ishlari olib borish manbalari va joylari (o'quv zali va xonalari, ilmiy kutubxona,
laboratoriya, tashkilot, korxona, ilmiy yoki ta'lim
muassasasi) _____

6. Bitiruv malakaviy ishini tayyorlash buyicha amalga oshiriladigan ishlar rejasi:

№	Ishning mazmuni	Taxminiy hajmi (bet)	Ijro muddati	Izoh
1.	Masalaning qo'yilishi. Mavzuning dolzarbligi, echilishi yoki o'rgani-lishi lozim bo'lgan masalaning mohiyati va maqsadini yoritib berish (kirish qismi).	1-10	sentabr	
2.	Mavzu bo'yicha ma'lumotlarni to'plash va tahlil qilish (yordamchi mulohaza va faktlar).	5-16	noyabr	
3.	Olib borilgan tajribalar, tadqiqot ishlari, natijalarni tahlil qilish va tartibga solish (paragraf, bob, bo'lim yoki qismlar bo'yicha).	10-15	dekabr, yanvar	
4.	Olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati bo'yicha xulosa berish hamda tadbiiq sohalari va usullariga oid takliflar tayyorlash.	10-12	fevfar, mart	
5.	Bitiruv malakaviy ishini rasmiylashtirish va uning himoyasi uchun zaruriy ko'rgazmali vositalarni (jadvallar, rasmlar, grafiklar, diagrammalar maket, stand va h.k.).		aprel	
6.	Dastlabki himoyaga tayyorgarlik ko'rish va himoyaga chiqish matnini tayyorlash.		may	

7. Ilmiy maslahatchilar:

Maslahatchi	Bo'limlar	Topshiriq	Izoh

Ilmiy rahbar
Kafedra mudiri

prof. B. A. Omirov
dots.R. T. Muxitdinov

Topshiriqni bajarishga oldim

G. O. Zaripova

« _____ » _____ 20__ y.

BITIRUV MALAKAVIY ISHI ANNOTATSIYASI (QISQACHA MAZMUNI)
SHAKLI

Buxoro davlat universiteti Fizika-matematika fakulteti bitiruvchisi Zaripova Gulnora Obloberdi qizining “5130100-Matematika” ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha bakalavr darajasini olish uchun **“Gruppalar nazariyasi asosiy tushunchalar va teoremlar”** mavzusidagi bitiruv malakaviy ishining ANNOTATSIYASI (QISQACHA MAZMUNI)

1. Bitiruv malakaviy ish mavzuning dolzarbligi: _____

2. Tadqiqot ob’ekti va predmeti: _____

3. Ishning maqsadi va vazifalari: _____

4. Tadqiqot usuli va uslubiyoti: _____

5. Olingan asosiy natijalar: _____

6. Natijalarning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati: _____

7. Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi. Qo‘llanish sohasi. Xulosa
va takliflar: _____

8. Ishning hajmi va tuzilishi:

Rahbar

(imzo)

Talaba

(imzo)

prof. B.A. Omirov

G.O. Zaripova

Buxoro davlat universiteti Fizika-matematika fakulteti
5130100-“Matematika” ta’lim yo‘nalishi bitiruvchi kurs talabasi Zaripova Gulnora
Obloberdi qizining **“Gruppalar nazariyasi asosiy tushunchalar va teoremlar”**
mavzusida yozgan bitiruv malakaviy ishiga **ilmiy rahbar** tomonidan
TAQRIZ

Mavzudolzarbligi

BMIning maqsad va vazifalari muallif-talaba tomonidan qay darajada
yoritilganligi va ularga qay darajada erishganligi _____

BMIning ilmiy jihatdan yangiligi _____

Olingan natijalarning asoslanganligi _____

Xulosa va takliflar sifati _____

Talabaning BMIning bajarishdagi faolligi va ilmiy tahlil qila olish
qobiliyati _____

BMIning “Oliy o‘quv yurtlarida bakalavr bitiruv malakaviy ishni bajarishga
qo‘yiladigan talablar” ga mosligi va himoyaga tavsiya qilinishi _____

Ilmiy rahbar:

prof. B.A. Omirov

Buxoro davlat universiteti fizika-matematika fakulteti
5130100-“Matematika” ta’lim yo‘nalishi bitiruvchi kurs talabasi Zaripova Gulnora
Obloberdi qizining **“Gruppalar nazariyasi asosiy tushunchalar va teoremlar”**
mavzusida yozgan bitiruv malakaviy ishiga
TAQRIZ

Mavzu dolzarbligi _____

BMIning tuzilishi, tarkibi _____

Qisqacha mazmuni _____

Ilmiy tafsilot _____

Asosiy natijalar _____

Xulosa va tavsiyalarining nechog‘lik asoslanganligi va to‘g‘riligi _____

BMIning ilmiy yangiligi _____

BMIning ilmiy va amaliy ahamiyati _____

BMIning tugallanganlik darajasi _____

BMIning kamchiliklari _____

BMIning “Oliy o‘quv yurtlarida bakalavr bitiruv malakaviy ishni bajarishga
qo‘yiladigan talablar” ga qanchalik muvofiqligi _____

Umumiy xulosa _____

Taqrizchi: _____

DAVLAT ATTESTATSIYASIYA KOMISSIYASIGA

Buxoro davlat universiteti
Fizika-matematika fakulteti

Fizika-matematika fakulteti 5130100-“Matematika” ta’lim yo’nalishi bitiruvchi kurs talabasi Zaripova Gulnora Obloberdi qizining **“Gruppalar nazariyasi asosiy tushunchalar va teoremlar”** mavzusida bitiruv malakaviy ishi rasmiy himoyaga ruxsat etilsin.

Himoyaga bitiruvchining o’zlashtirishi to’g’risida **ma’lumotnoma**, bitiruv malakaviy ish haqida rahbar hamda kafedra yig’ilishi bayonnomasi (kafedra xulosasi), taqriz va talabaga tavsifnoma ilova qilinadi.

Kafedra mudiri:

Fakultet dekani:

Buxoro davlat universiteti Fizika-matematika fakulteti “5130100- Matematika” ta’lim yo’nalishi bitiruvchi talabasi Zaripova Gulnora Obloberdi qizining o’zlashtirishi haqida

MA’LUMOTNOMA

Bitiruvchi talaba Zaripova Gulnora Obloberdi qizi Buxoro davlat universitetining fizika-matematika fakulteti 5130100 - Matematika ta’lim yo’nalishida 20__ -20__ o’quv yillari 20__ O’zR OO’MTV tomonidan tasdiqlangan namunaviy o’quv rejasi bo’yicha barcha fanlardan nazoratlarni topshirib quyidagicha baholandi:

“A’lo” _____;

“Yaxshi” _____;

“Qoniqarli” _____.

Fizika-matematika
fakulteti dekani:

Buxoro davlat universiteti Fizika-matematika fakul'teti "5130100-Matematika" ta'lim yo'nalishi bitiruvchisi Zaripova Gulnora Obloberdi qizining "Gruppalar nazariyasi asosiy tushunchalar va teoremlar" mavzusidagi bitiruv malakaviy ishiga DAK nig

XULOSA

Buxoro Davlat unversiteti DAK Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi BMIini bajarish haqidagi 1998 yil 31 dekabr №362 sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan nizomga asosan quyidagilarni aniqladi.

1.BMIini hajmi va talab bo'yicha rasmiylashtirilganligi (me'yor: tabiiy fanlar yo'nalishlari -50 betdan, ijtimoiy fanlar yo'nalishlari - 70 betdan kam bo'lmasligi kerak): talabga javob beradi – **10 ball**, talabga qisman javob beradi – **7 ball**, talabdan chetga chiqish holatlari mavjud – **4 ball**.

2.Mavzuning davlat va universitet grantlari dasturlari asosida yoki dolzarb muammolar bo'yicha tanlanganligi: davlat dasturiga kirgan bo'lsa - **8 ball**, grant loyihasi bo'yicha -**7 ball**, BuxDU dasturi bo'yicha - **6 ball**, dolzarb muammolar bo'yicha **5 ball**.

3.Mavzu dolzarbligini asoslanganligi: etarli darajada asoslangan – **5 ball**, etarli darajada asoslanmagan -**3 ball**, noaniq - **2 ball**.

4.Maqsad va vazifalarning aniq ifodalanganligi: to'liq -**7 ball**, aniq emas-**3 ball**

5.BMIini bajarishda ilmiy tekshirish metodlaridan foydalanganlik darajasi: to'la -**8 ball**, o'rtacha -**6 ball**, foydalanilmagan -**3 ball**.

6.Olingan natijalarning yangiligi va ishonchlilik darajasi: natija yangi -**8 ball**, ilgari olingan -**6 ball**, to'la ishonchli emas – **3 ball**

7.BMIning xulosa qismida ishlab chiqarishga tavsiya berilganligi: bevosita ishlab chiqarishga tavsiya bor -**6 ball**, ijtimoi soxada qo'llashga (talim, atrof-muhitni himoya qilish ma'naviy-marifiy, b.q.) tavsiya qilingan – **5 ball**, tasiya yo'q -**3 ball**.

8.Bitiruvchi mavzu bo'yicha olingan natijalarni tanqidiy baholanganlik darajasi: aniq-**8 ball**, to'la aniq emas – **6 ball**, tanqidiy baholanmagan -**4 ball**.

9.Ishning ilmiylik xarakteri: ilmiy tadqiqotlar asosida- **8 ball**, aralash shakldan-**5 ball**, referativ xarakterda-**3 ball**.

10. Adabiyotlaran foydalanganlik darajasi: ilmiy-amaliy jurnallar, morografiya, etakchi olimlar asarlarida to'la foydalanilgan -**6 6all**, faqat darslik ma'ruza matnlardi, o'quv qo'llanma va ma'lumotnomalardangina foydalanilgan -**4 ball**.

11.Bitiruvchining ma'ruzaga baxo: a'lo- **10 ball**, yaxshi – **7 ball**, qoniqarli – **6 ball**.

12.Berilgan savollarga javoblari: to'liq -**8 ball**, o'rta -**6 ball**, qoniqarli -**4 ball**.

13.BMI ga (tashqi) taqrizchi tomonidan baholanishi: a'lo -**8 ball**, yaxshi -**6 6all**, qoniqarli -**5 ball**.

14.BMI ga qo'yilgan yakuniy ball _____

15.Bahosi _____

Eslatma: Har bir band bo'yicha aniqlangan ballning tagiga chizib belgilanadi.

DAK raisi _____

F.I.SH. imzo

A'zolari _____

F.I.SH. imzo

F.I.SH. imzo

F.I.SH. imzo

(Muhr o'rni)

Sana " _____ " _____ 20_ y.