

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

Fizika – matematika fakulteti

“Matematika” kafedrası

5130100 «Matematika» ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun

Asadova Mamlakat Furqat qizining

“Ikkinchi tartibli egri chiziqlar ”

mavzusida

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**“Ish ko'rildi va himoyaga ruxsat
o'qit. Z.N. Hamdamov
berildi”**

Ilmiy rahbar ____katta

” ____ ” ____2015y.

**Kafedra mudiri: ____ dots. Muxitdinov R.T.
____o'qit. H.B. Elmurodova**

Taqrizchi:

” ____ ” ____2015y. ” ____ ” ____2015y.

“Himoya qilishga ruxsat berildi”

**Fakultet dekani ____ prof. Sh.M.Mirzayev
« ____ » ____2015 y**

Buxoro- 2015y.

Mundarija

Kirish.....	3
I Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida umumiy mulohazalar	
1.1. Ellips ta’rifi, tenglamasi, direktrisasi, eksentrisiteti, diametrlari.....	6
1.2. Giperbola ta’rifi, tenglamasi, direktrisasi, eksentrisiteti, asimptotalari, diametrlari.....	20
1.3. Parabola ta’rifi, tenglamasi, direktrisasi, eksentrisiteti, diametrlari.....	35
II Umumiy tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqlarni kanonik holga keltirib aniqlash	
2.1. Parallel ko’chirish va burish yordamida umumiy tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqlarni kanonik holga keltirish.....	43
2.2. Invariantlar usul	55
Xotima.....	64
Adabiyotlar	65

Kirish

Vatanimizning kelajagi, xalqimizning ertangi kuni, mamlakatimizning jahon hamjamiyatidagi obro'-etibori avvalambor farzandlarimizning unib-o'sib, ulg'ayib, qanday inson bo'lib, hayotga kirib borishiga bog'liqdir. Biz bunday o'tkir haqiqatni hech qachon unutmasligimiz kerak.

I.A.Karimov

Bugun biz tarixiy bir davrda xalqimiz o'z oldiga uzgu va ulug' maqsadlar qo'yib, tinch-osoyishta hayot kechirayotgan, avvalambor o'z kuchi va imkoniyatlariga tayanib, demokratik davlat va fuqorolik jamiyati qurish yo'lida ulkan natijalarni qo'lga kiritayotgan bir zamonda yashamoqdamiz.

Men Abdulla Avloniyning "Tarbiya biz uchun yo hayot-yo mamot, yo najot yo halokat, yo saodat yo falokat masalasidir" degan fikrini ko'p mushohada qilaman.

Buyuk marifatparvarlarning bu so'zlari asrimizning boshida millatimiz uchun qanchalik muhim va dolzarb bo'lgan bo'lsa, hozirgi kunda biz uchun ham shunchalik, balki undan ham ko'ra muhim va dolzarbdir.

Chunki ta'lim-tarbiya ong mahsulidir, lekin ayni vaqtda ong darajasi va uning rivojini ham belgilaydigan omildir. Binobarin, ta'lim-tarbiya tizimini o'zgartirmasdan turib esa biz ko'zlagan oliy maqsad—ozod va obod jamiyatni barpo etib bo'lmaydi.

Barchamizga malumki, barkamol avlod haqida qayg'urish, sog'lom barkamol naslni tarbiyalab yetishtirishga intilish bizning milliy xususiyatimizdir.

Bu muqaddas zaminga yashayotgan har qaysi inson o'z farzandining baxtu saodati, fuzlu kamolini ko'rish uchun butun hayoti davomida kurashadi, mehnat qiladi, o'zini ayamaydi.

Ota-onaning farzand oldidagi burchlari, o'zlarini oxiratini obod etuvchi qarzlar bor. Dinu diyonatli xonadon oqsoqollaridan so'rasangiz, ularni lo'nda qilib sanab beradi: yaxshi nom qo'yish, yaxshi muallim qo'lga topshirib, savodini chiqarish, ilimli, kasb-hunarli qilish, boshini ikki, uyli-joyli qilish.

Shu bois mamlakatimizning istiqlol yillaridagi birinchi qadamlaridanoq, buyuk ma'naviyatimizni tiklash va yanada yuksaltirish uning milliy zaminini mustahkamlash, zamon talablari bilan uyg'unlashtirish asosida jahon andozalari va ko'nikmalari darajasiga chiqarish maqsadiga katta ahamiyat berilib kelinmoqda.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Karimov tomonidan taklif etilgan uzluksiz ta'limning tamomila yangi tizimi, O'zbekiston fuqarolarining XXI asr avlodini shakllantirishga sharoit yaratadi.

Ta'limning yangi modeli jamiyatda mustaqil fikrlovchi erkin shaxsning shakllanishiga olib keldi. O'zining qadr-qimmatini aniqlaydigan irodasi baquvvat, iymoni butun hayotda aniq maqsadga ega bo'lgan insonlarning tarbiyalash imkoniga bo'lamiz.

Ta'lim tizimini rivojlangan demokratik huquqiy davlat qurilishi jarayonida o'rganib borishi tushuniladi.

Shuni unutmasligimiz kerakki, kelajagimiz poydevori bilim dargohlarida yaratiladigan, boshqacha aytganda, xalqimizning ertangi kuni bo'lmish farzandlarimizning bugun qanday ta'lim va tarbiya olishiga bog'liq.

Bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi: Ikkinchi tartibli chiziqlar analitik geometriya fanining muhim boblaridan bo'lib, BMI da ikkinchi tartibli chiziqlarni ta'rifidan foydalanib tenglamasini keltirib chiqarish. Harakat yordamida klassifikatsiyalash qaralgan.

Bitiruv malakaviy ishining maqsadi: Bir qancha adabiyotlardan egri chiziqlarga doir ma'lumotlarni to'plash va ularni o'rganish. Bu egri chiziqlarni ta'rifidan foydalanib tenglamasini tuzish. Egri chiziqlar haqidagi ma'lumotlarni adabiyotlarga berilishiga ko'ra solishtirish. Ikkinchi tartibli egri chiziq haqida to'g'ri tasavvur qila olish uchun uning mazmuni bilan chuqurroq tanishish.

Bitiruv malakaviy ishining vazifalari: Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida ma'lumotlarga ega bo'lish, umumiy tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli egri chiziqlarni kanonik holga keltirib aniqlash.

Bitiruv malakaviy ishining o'rganilganlik darajasi: BMIga qo'yilgan masala to'la o'rganilgan, chuqur tahlil qilib yoritilgan.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti: Ikkinchi tartibli chiziqlar arifmetika va algebra metodlari yordamida tekshirilib, nazariy va amaliy masalalarni yechishda umumiy algebraik metodlar va formulalar beriladi.

Bitiruv malakaviy ishining ob'ekti: Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlar ya'ni ellips, giperbola, parabola tenglamalari va ularning xossalari universitet matematika yo'nalishining birinchi bosqich talabalariga turli adabiyotlar, o'quv qo'llanmalar asosida o'rganiladi. Ularning tenglamalari ta'rifi suyanib keltirib chiqariladi. Shuningdek, bu ishda yoritilgan ikkinchi tartibli egri chiziqlarning eksentrisiteti, direktrisalari diametrlari ham analitik geometriyada o'rganiladi.

Bitiruv malakaviy ishining ilmiy farazi: Ushbu BMI referativ xarakterga ega bo'lib, uslubiy qo'llanma sifatida foydalanish maqsadida tayyorlangan. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni o'rganish.

Bitiruv malakaviy ishining yangiligi: Ushbu BMI referativ xarakterga ega bo'lib, ikkinchi tartibli chiziqlar haqida to'liq ma'lumot berilgan.

Bitiruv malakaviy ishining amaliy ahamiyati: Ushbu BMIdan oliy o'quv yurtlarining "Matematika" ta'lim yo'nalishi bakalavr talabalari uslubiy qo'llanma sifatida foydalanishlari mumkin.

Bitiruv malakaviy ishining metodologik asosi: Ellips ta'rifi, giperbola tarifi, invariantlar usuli.

Bitiruv malakaviy ishining metodlari: Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlarni parallel ko'chirish va burish

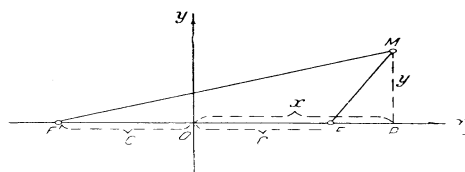
Bitiruv malakaviy ishining tarkibi va hajmi: bitiruv malakaviy ishi 2 bob 5 paragrafdan iborat bo'lib, ushbu bitiruv malakaviy ishning hajmi esa 65 betdan iborat.

I. Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida umumiy mulohazalar.

1.1 Ellips ta'rifi, tenglamasi, direktrisalari, ekscentrisiteti, markazi, diametrlari .

1.1.1 Ellips ta'rifi. Har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha masofalarining yig'indisi o'zgarmas miqdor bo'lgan geometrik o'rin ellips deyiladi.

Bu ta'rifga asoslanib, ellipsning tenglamasini tuzish mumkin . Buning uchun berilgan nuqtalarni F va F' , ularning orasidagi masofani $2c$ va o'zgarmas miqdorni $2a$ faraz qilamiz. F va F' nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziqni absissa o'qi va unga perpendikulyar bo'lib, FF' ning o'rtasidan o'tgan to'g'ri chiziqni ordinata o'qi faraz qilamiz (1.1.1-chizma).



(1.1.1-chizma)

Ellipsqa qarashli nuqtalardan biri $M(x, y)$. Qilingan shart bo'yicha $FF' = 2c$ bo'lib, ordinata o'qi, FF' ning o'rtasidan o'tgani uchun, u nuqtalarning koordinatalari $F(c, 0)$ va $F'(-c, 0)$ bo'ladi. Ellips ta'rifiga muvofiq

$$MF + MF' = 2a . \quad (1.1.1)$$

$M(x, y)$ va $F(c, 0)$, $M(x, y)$ va $F'(-c, 0)$ nuqtalar orasidagi masofalar (ikki nuqta orasidagi masofaning formulasi bo'yicha) quyidagicha bo'ladi:

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \quad (1.1.2)$$

MF va MF' ifodalar (1.1.1) ga qo'yilsa:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarilsa :

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 ,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

bo'ladi. Endi bu tenglikni yana bir marotaba kvadratga ko'taramiz:

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 ,$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 ,$$

yoki

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 ,$$

yoki

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (1.1.3)$$

Shakldagi $MF + MF'$ uchburchakda :

$$MF + MF' > FF' ,$$

yoki $MF + MF' = 2a$ va $FF' = 2c$ bo'lgani uchun $2a > 2c$ yoki $a > c$ yoki $a^2 > c^2$,

yoki

$$a^2 - c^2 > 0 ;$$

Shuning uchun $a^2 - c^2$ ni biror b^2 bilan ifoda qilish mumkin :

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad (1.1.4)$$

Buni (3) ga qo'ysak:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (1.1.5)$$

Yoki buning ikkala tomonini a^2b^2 ga bo'linsa , ellips uchun bnday tenglama kelib chiqadi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.1.6)$$

Bu tenglamani yoki (1.1.5) ni ellipsning eng sodda tenglamasi yoki kanonik tenglamasi deyiladi .

Ellipsning shaklini uning tenglamasi bo'yicha tekshirish.

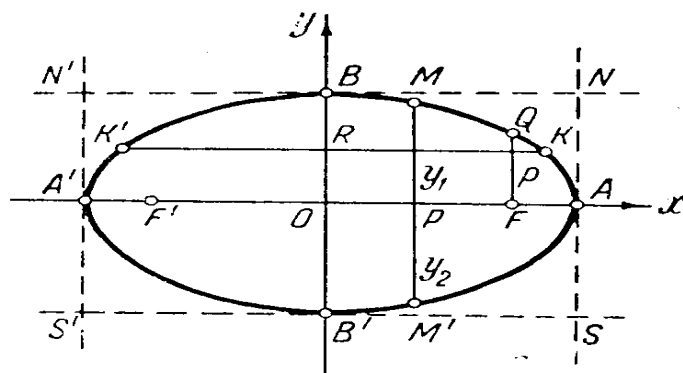
Ellipsning tenglamasini chiqarishda biz uning shaklini ko'rmay, faqat berilgan ta'rifga asoslangan edik. Endi ellipsning shaklini va uning ba'zi bir xususiyatlarini uning tenglamasi yordami bilan tekshiramiz. Buning uchun ellipsning

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenglamasini y ga nisbatan yechamiz :

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (1.1.7)$$

Tenglamani tekshirish oldida undagi x va y ning ellipsdagi ixtiyoriy nuqtaning o'zgaruvchi koordinatalari ekanligini yana bir marotaba takidlab o'tamiz. (1) tenglikka qaraganda y x ning funksiyasi bo'ladi. Shuning uchun y ning qiymatlari x ga berilgan qiymatlariga qarab aniqlanadi. Masalan, absolyut qiymati a dan kichik bo'lgan har bir $x = OP$ ga y uchun ikki qiymat to'g'ri keladi: $y_1 = PM$ va $y_2 = PM'$. Bularning absolyut qiymatlari o'zaro teng va ishoralari bir-biriga teskari (1.1.2-chizma)



1.1.2-chizma

Boshqacha qilib aytganda absissa o'qidagi P nuqtaga ikkita simmetrik M va M' nuqtalar to'g'ri keladi. Bu natija umuman ellipsning absissa o'qiga nisbatan simmetrik ekanligini ko'rsatadi.

$x = \pm a$ bo'lsa, $y = 0$ bo'lib, u ellipsning eng kichik ordinatasi bo'ladi; shu bilan birga ellipsning $A(a,0)$ va $A'(-a,0)$ nuqtalari aniqlanadi. $x = 0$ bo'lsa, $y = \pm b$ bo'ladi va $|y| = b$ ellipsning eng katta ordinatasi bo'ladi. Shu bilan birga ellipsning yana $B(0,b)$ va $B'(0,-b)$ nuqtalari aniqlanadi.

Lekin x ning absolyut qiymati a dan katta bo'lmasligi shart, chunki $|x| > a$ bo'lgan choqda y mavhum bo'ladi. Demak, absissasining absolyut qiymati a dan katta bo'lgan hech bir nuqta bizning ellipsga qarashli bo'la olmaydi. Shuning bilan ellips ordinata o'qiga parallel bo'lgan $x = a$ va $x = -a$ (NS va N'S') to'g'ri chiziqlar orasiga bo'ladi.

Endi ellipsning tenglamasini x ga nisbatan yechamiz. Bu holda:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \quad (1.1.8)$$

Bu tenglik ustida ham (1.1.7) tenglik ustida qilingan muhokamalarni qilish mumkin. Haqiqatda absolyut qiymati b dan kichik bo'lgan har bir $y = OR$ ga x

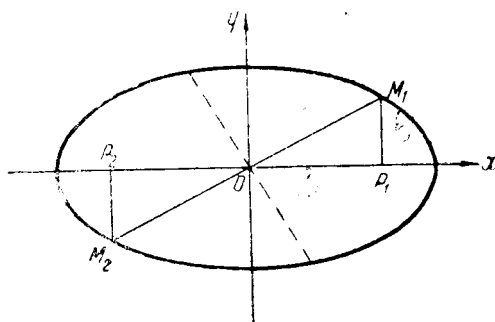
uchun ikki qiymat to'g'ri keladi : $x_1 = RK$ va $x_2 = RK'$. Bularning absolyut qiymatlari o'zaro teng va ishoralari bir-biriga teskari . Boshqacha qilib aytganda , ordinata o'qidagi R nuqtaga ikkita simmetrik K va K' nuqtalar to'g'ri keladi. Bu natija umuman ellipsning ordinata o'qiga nisbatan simmetrikanligini ko'rsatadi. Lekin hammavagt $|y| \leq b$ bo'lishi shart, chunki aks holda x mavhum bo'ladi. Demak, ordinatasining absolyut qiymati b dan katta bo'lgan hech bir nuqta ellipsda bo'lmaydi. Shuning uchun ellips: absissa o'qiga parallel bo'lgan $y = +b$ va $y = -b$ to'g'ri chiziqlar (SS' va NN') orasida bo'ladi.

Tekshirishdan chiqqan natijalarga qaraganda ellipsning cheksiz uzoqlashgan nuqtalari bo'lmay, balki u NN' SS' to'g'ri to'rtburchak ichidagi yopiq shakldan iborat.

Ellipsning simmetriya o'qlari: $AA' = 2a$ uning katta o'qi va $BB' = 2b$ uning kichik o'qi deyiladi; o'qlarining ellips bilan uchrashgan A, A', B va B' nuqtalari ellipsning boshlari deyiladi. F va F' nuqtalar ellipsning fokuslari deyiladi. Ellipsning fokusidan o'tgan ordinatasi ellipsning parametri deyiladi va u , odatda p bilan belgilanadi. Fokusning absissasi c bo'lgani uchun :

$$p = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{b^2}{a} .$$

Ellipsdagi har bir $M_1(x_1, y_1)$ nuqtaga koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan $M_2(-x_1, -y_1)$ nuqtaga mos keladi, chunki bu nuqta ham ellipsning tenglamasini qanoatlantiradi. (1.1.3-chizma)



1.1.3-chizma.

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1 .$$

Bunga qaraganda ellipsning koordinatalar boshidan o'tgan har bir M_1M_2 vatari shu nuqtada teng ikkiga bo'linadi, chunki

$$\frac{x_1 + (-x_1)}{2} = 0, \quad \frac{y_1 + (-y_1)}{2} = 0 .$$

Shuning uchun koordinatalar boshi ellipsning simmetriya markazi yoki qisqacha uning markazi deyiladi.

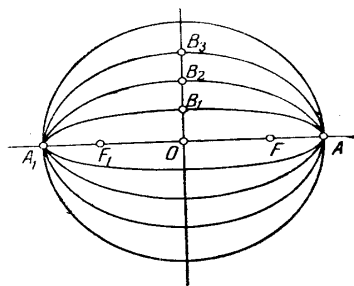
Ellipsning eksentrisiteti.

Ellips fokuslari orasidagi masofaning ellipsning katta o'qiga nisbati uning eksentrisiteti deyiladi va u odatda e harfi bilan belgilanadi, ya'ni

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} . \quad (1.1.9)$$

$c < a$ bo'lgani uchun hammavaqt $e < 1$ bo'ladi.

Ekssentrisitetning geometrik ma'nosini tekshiramiz. Buning uchun (1) ifodadagi a ni o'z holicha qoldirib, b ning qiymatini orttirib boramiz. Buning natijasida e ning qiymati kamayib boradi. Ikkinchi tomondan $b = OB_1, OB_2, OB_3, \dots$, bo'lib, o'sib borganda ellips aylanaga yaqinlashib boradi va $b = a$ bo'lganda $e = 0$ bo'lib, u aylananing o'zi bo'ladi (1.1.4-chizma).



1.1.4-chizma.

Aksincha (1.1.9) ifodadagi a ni o'z holicha qoldirib, b ning qiymati kamaytirib borilsa, bundan e ning qiymati o'sib boradi. Ikkinchi tomondan b ning qiymatlari $\dots, OB_3, OB_2, OB_1, \dots$, bo'lib kamayib borganda, ellips aylanadan uzoqlashib, o'tkirlashib boradi va b ning limiti 0 bo'lganda $e = 1$ bo'lib, ellips AA_1 orasidagi ikkilangan kesmaga aylanadi. Shuning bilan e ning qiymati ellipsning shaklini ifoda qiladi.

Ellipsning o'qlarini uning eksentrisiteti e va parametri p yordami bilan ifoda qilish mumkin. Haqiqatan

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{va} \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

bo'lgani uchun, bundan

$$b^2 = ap, \quad a^2 e^2 = a^2 - ap,$$

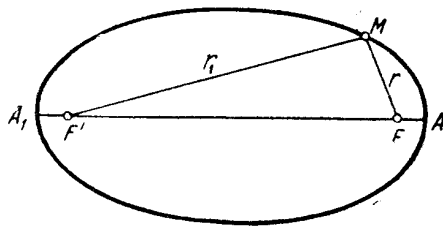
demak,

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (1.1.10).$$

Ellipsning radius-vektorlari.

Ellipsdagi biror nuqta bilan uning biror fokusigacha masofasi u nuqtaning radius-vektori deyiladi.

Faraz qilaylik, ellipsdagi biror $M(x,y)$ nuqtaning radius-vektorlari $MF = r$ va $MF' = r_1$ bo'lsin (1.1.5-chizma).



1.1.5-chizma.

$M(x,y)$ va $F(c,0)$, $M(x,y)$ va $F'(-c,0)$ nuqtalar orasidagi masofalar (ikki nuqta orasidagi masofaning formulasi bo'yicha) quyidagicha bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} r &= MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ r_1 &= MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.11)$$

Bularning har biri kvadratga ko'tarilsa

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 - 2cx + c^2 + y^2, \\ r_1^2 &= x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \end{aligned}$$

Keyingi tenglamadan avvalgisi ayirib olinsa

$$r_1^2 - r^2 = 4cx,$$

yoki

$$(r_1 - r)(r_1 + r) = 4cx \quad (1.1.12)$$

Ellipsning asosiy xossasiga muvofiq :

$$r_1 + r = 2a \quad (1.1.13)$$

Bu (1.1.12)ga qo'yilsa

$$2a(r_1 - r) = 4cx$$

yoki

$$r_1 - r = 2\frac{c}{a}x \quad (1.1.14)$$

(1.1.13) dan (1.1.14) ni ayirib olsak

$$2r = 2a - 2\frac{c}{a}x \quad \text{yoki} \quad r = a - \frac{c}{a}x \quad (1.1.15)$$

(1.1.13) bilan (1.1.14)ni qo'shsak

$$2r_1 = 2a + 2\frac{c}{a}x \quad \text{yoki} \quad r_1 = a + \frac{c}{a}x. \quad (1.1.16)$$

Bizda $\frac{c}{a} = e$ edi. Shuning uchun (1.1.15) va (1.1.16) tengliklarni quyidagicha yozish mumkin .

$$\begin{aligned} r &= a - ex \\ r_1 &= a + ex \end{aligned} \quad (1.1.17) .$$

Bu formulalar bilan ellipsdagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning radius-vektorlari a va e orqali aniqlanadi.

Ellipsning direktrisalari

Ushbu

$$\begin{aligned} r &= a - ex \\ r_1 &= a + ex \end{aligned}$$

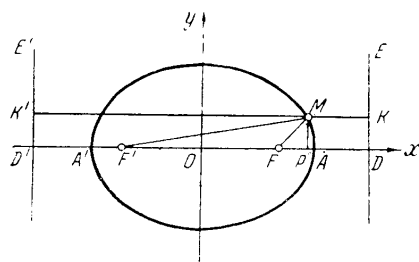
radius-vektor formulasini

$$\begin{aligned} r &= e\left(\frac{a}{e} - x\right) \\ r_1 &= e\left(\frac{a}{e} + x\right) \end{aligned}$$

ko'rinishida yozib, qavs ichidagi ifodalarga diqqat qilaylik. Birinchi qavsda $\frac{a}{e}$ va ikkinchi qavsda $-\frac{a}{e}$, ordinata o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlik bo'lgan masofani ko'rsatadi yoki $e = \frac{c}{a}$ bo'lgani uchun:

$$x = +\frac{a^2}{c}, \quad x = -\frac{a^2}{c}. \quad (1.1.18)$$

Bu tenglamalar ifoda qilgan parallel to'g'ri chiziqlardan biri koordinatalar boshidan o'ng tomonda va ikkinchisi chap tomonda bo'ladi (1.1.6-chizma)



1.1.6-chizma.

(1.1.18) tenglama bilan ifoda qilingan to'g'ri chiziqlar ellipsning direktrisalari deyiladi. $a > c$ bo'lgani uchun $\frac{a^2}{c} > a$ bo'ladi.

Bu esa ikkala direktrisaning ellipsdan tashqarida ekanligini ko'rsatadi (DE va $D'E'$ to'g'ri chiziqlar).

Endi ellipsdagi biror $M(x, y)$ nuqtada absissa o'qiga parallel qilib MK to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. So'ngra M nuqta bilan F va F' fokuslarni o'zaro tutashtiramiz. $M(x, y)$ nuqta ellipsda bo'lgani uchun radius-vektor formulasi bo'yicha :

$$MF = a - ex = a - \frac{c}{a}x = \frac{a^2 - cx}{a} ;$$

shakliga muvofiq :

$$MK = OD - OP = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a^2 - cx}{c},$$

$$MF : MK = \frac{a^2 - cx}{a} : \frac{a^2 - cx}{c},$$

yoki

$$MF : MK = c : a = e .$$

Shu yo'l bilan davom etganda ikkinchi direktrisa uchun ham xuddi shu natijaning o'zi kelib chiqadi, ya'ni

$$MF' : MK' = c : a = e .$$

Demak, ellipsdagi biror nuqtadan uning biror fokusigacha masofasining u nuqta bilan u fokusga qarashli direktrisasi orasidagi masofaga nisbati o'zgarmas miqdorga (e ga) tengdir.

Ellipsning diametrlari.

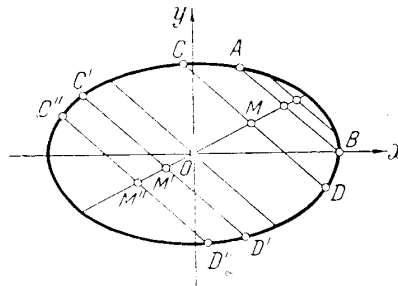
Berilgan yo'nalishga parallel bo'lgan vatarlarning o'rta nuqtalaridan iborat bo'lgan geometrik o'rin egri chiziqning diametri deyiladi.

Ellipsning diametrini aniqlash maqsadida bir necha $AB, CD, C'D', C''D''$ parallel vatarlarni o'tkazamiz. Bu vatarlar o'zaro parallel bo'lgani uchun ularning absissa o'qi bilan tashkil qilgan burchaklari o'zaro teng bo'lib, faqat ularning ordinata o'qidan kesgan boshlang'ich ordinatalari bir-biriga teng bo'lmaydi. Shuning uchun k ni o'zgarmas va l ni o'zgaruvchi parametr faraz qilganda u vatarlarning hammasini

$$y = kx + l$$

tenglama bilan ifoda qilish mumkin.

Vatarlardan birining, masalan, CD ning, ellips bilan kesishgan nuqtalarining koordinatalarini $C(x_1, y_1)$ va $D(x_2, y_2)$ faraz qilamiz (1.1.7-chizma).



1.1.7-chizma.

Bularni aniqlash uchun ellipsning tenglamasi bilan yuqoridagi tenglamani birlashtirib yechishga, ya'ni ushbu

$$\left. \begin{array}{l} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = kx + l \end{array} \right\} (1.1.19)$$

Sistemani yechishga to'g'ri keladi.

Bu sistemani yechish uchun ikkinchi tenglamadan y ning ifodasini birinchiga qo'yamiz:

$$b^2x^2 + a^2(kx + l)^2 = a^2b^2,$$

yoki

$$b^2x^2 + a^2k^2x^2 + 2a^2klx + a^2l^2 - a^2b^2 = 0,$$

yoki

$$(b^2 + a^2 k^2)x^2 + 2a^2 k l x + a^2(l^2 - b^2) = 0$$

yoki

$$x^2 + \frac{2a^2 k l}{b^2 + a^2 k^2} x + \frac{a^2(l^2 - b^2)}{b^2 + a^2 k^2} = 0 .$$

Bu tenglama ikkinchi darajali bo'lgani uchun, uning umuman ikki ildizi bo'ladi. Ulardan biri x_1 va ikkinchisi x_2 faraz qilinsa, kvadrat tenglamaning asosiy xossasiga muvofiq

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2 k l}{b^2 + a^2 k^2},$$

yoki

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2 k l}{b^2 + a^2 k^2}. \quad (1.1.20)$$

Ikkinchi tomondan CD vatarining o'rtasini $M(x, y)$ faraz qilsak,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (1.1.21)$$

demak, (2) ga asosan,

$$x = -\frac{a^2 k l}{b^2 + a^2 k^2} \quad (1.1.22)$$

$M(x, y)$ nuqta CD da bo'lgani uchun uning absissasini $y = kx + l$ tenglamaga qo'yish mumkin. Bu holda

$$y = -\frac{2a^2 k^2 l}{b^2 + a^2 k^2} + l ,$$

yoki

$$y = \frac{b^2 l}{b^2 + a^2 k^2} \quad (1.1.23)$$

(1.1.23) ni (1.1.22) ga hadlab bo'lsak,

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2 k},$$

yoki

$$y = -\frac{b^2}{a^2 k} x. \quad (1.1.24)$$

Izlangan diametrning tenglamasi shundan iborat, chunki u $M(x, y)$ nuqtaning koordinatalari orasidagi munosabatni ifoda qiladi. Bu tenglama birinchi darajali bo'lgani uchun to'g'ri chiziqni ifoda qiladi. Ikkinchi tomondan uning boshlang'ich ordinatasi nolga teng. Shuning uchun bu tenglama koordinatalar boshidan, ya'ni ellipsning markazidan o'tgan to'g'ri chiziqni ifoda qiladi.

$y = kx + l$ to'g'ri chiziqning absissa o'qi bilan tashkil qilgan burchagi α faraz qilinsa,

$$\operatorname{tg} \alpha = k \quad (1.1.25)$$

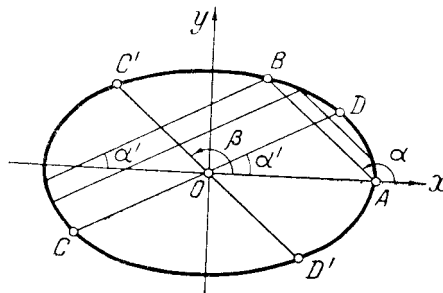
bo'ladi. Bu yo'nalishga tegishli CD diametrning absissa o'qi bilan tashkil qilgan burchagi α' faraz qilinsa, (1.1.24) bo'yicha

$$\operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2 k}, \quad (1.1.26)$$

(1.1.25) bilan (1.1.26) hadlab ko'paytirilsa,

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2}. \quad (1.1.27)$$

Ellipsning CD diametriga parallel bo'lgan vatarlarining ham absissa o'qi bilan tashkil qilgan burchagi α' bo'ladi (1.1.8-chizma).



1.1.8-chizma.

Agar bu vatarlarga tegishli $C'D'$ diametrning absissa o'qi bilan tashkil qilgan burchagi β faraz qilinsa, (1.1.27) ga asosan

$$\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2}. \quad (10)$$

(9) va (10) tengliklar o'zaro solishtirib qaraganda

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha',$$

Yoki

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta,$$

Bu esa birinchi vatarlar sistemasi ikkinchi diametrga parallel ekanligini ko'rsatadi ($AB \parallel D'C'$). Demak, birinchi CD diametr bilan teng ikkiga bo'lingan vatarlar ikkinchisi $C'D'$ diametrga paralleldir.

Bu xususiyatga ega bo'lgan diametrlar qo'shma diametrlar deyiladi. Ellipsning o'qlari ham bu xossaga ega bo'lgani uchun ular ellipsning bosh diametrlari deyiladi.

Misollar.

Misol 1. Katta o'qi 6 ga kichik o'qi 4 bo'lgan ellips tenglamasi tuzilsin.

Berigan misolda $2a = 6$ va $2b = 4$, demak: $a = 3$ va $b = 2$. Bular ellipsning umumiy tenglamasiga qo'yilsa, izlangan tenglama kelib chiqadi:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Misol 2. Fokuslari orasidagi masofa 6 ga, ikkinchi o'qi 8 ga teng bo'lgan ellipsning tenglamasi tuzilsin.

Bu misolda $2c = 6$, demak $c = 3$; $2b = 8$, demak, $b = 4$. Bularning yordami bilan a ni topish mumkin.

$$a^2 - c^2 = b^2$$

bo'lgani uchun bundan:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ yoki } a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

bo'ladi. Shuning uchun : $a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

a va b ning qiymatlari ellipsning umumiy tenglamasiga qo'yilsa, izlangan tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Misol 3. Ellipsning tenglamasi berilgan:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Buning katta va kichik o'qlari, fokuslarining koordinatalari va parametri topilsin.

Berilgan tenglama ellipsning umumiy tenglamasi bilan solishtirib qaranganda :

$$a^2 = 36, b^2 = 9, \text{ demak, } a = 6, b = 3.$$

Shuning uchun ellipsning o'qlari $2a = 12$ va $2b = 6$ bo'ladi; bularning yordami bilan fokuslar orasidagi c masofani topamiz:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \quad \text{va} \quad 2c = 6\sqrt{3}.$$

Ellipsning parametri :

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{6} = 1,5.$$

Misol 4. Ellipsning tenglamasi $3x^2 + 5y^2 - 16 = 0$. Buning katta va kichik o'qlari va fokuslarining koordinatalari topilsin.

Ellipsning tenglamasini eng avval odatdagi shaklga keltiramiz. Buning uchun uning ma'lum hadi 16 ni o'ng tomonga o'tkazib, so'ngra ikkala tomonni 16ga bo'lamiz:

$$3x^2 + 5y^2 = 16,$$

yoki

$$\frac{3x^2}{16} + \frac{5y^2}{16} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\frac{16}{3}} + \frac{y^2}{\frac{16}{5}} = 1.$$

Bu tenglamani ellips tenglamasi bilan solishtirib qaraganda :

$$a^2 = \frac{16}{3}, \text{ bundan } a = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3},$$

$$b^2 = \frac{16}{5}, \text{ bundan } b = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5},$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{16}{3} - \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{32}{15}},$$

$$F(\sqrt{\frac{32}{15}}, 0) \text{ va } F'(-\sqrt{\frac{32}{15}}, 0).$$

Misol 5. Ellipsning tenglamasi $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$. Buning absissasi 4 birlikka teng bo'lgan nuqtasining radius-vektorlari topilsin.

Berilgan tenglama bo'yicha: $a^2 = 64, b^2 = 36$, bundan $a = 8, b = 6$;

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7},$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}\sqrt{7} \text{ va } x = 4.$$

Bular radius-vektor formulasiga qo'yilsa

$$\begin{aligned} r &= a - ex = 8 - \sqrt{7} \\ r_1 &= a + ex = 8 + \sqrt{7} \end{aligned}$$

Misol 6. Ellipsning tenglamasi $8x^2 + 12y^2 - 15 = 0$. (1,2) nuqtadan o'tgan diametr bilan unga qo'shma bo'lgan diametrning tenglamalari tuzilsin.

Ellipsning diametri uning markazidan, demak, (0,0) nuqtadan o'tadi. Masalaning shartiga qaraganda u (1,2) nuqtadan ham o'tishi kerak. Shuning uchun bu diametrning tenglamasini

$$y = 2x, k = 2$$

Bu diametrga qo'shma bo'lgan diametrning burchak koeffisienti k_1 faraz qilinsa,

$$kk_1 = -\frac{b^2}{a^2},$$

bundan

$$k_1 = -\frac{b^2}{a^2k},$$

yoki misolda $k=2$ bo'lgani uchun

$$k_1 = -\frac{b^2}{2a^2}.$$

Berilgan tenglamaga asosan :

$$a^2 = \frac{15}{8}, b^2 = \frac{5}{4},$$

demak:

$$k_1 = -\frac{1}{3}.$$

Shuning uchun qo'shma diametr tenglamasi

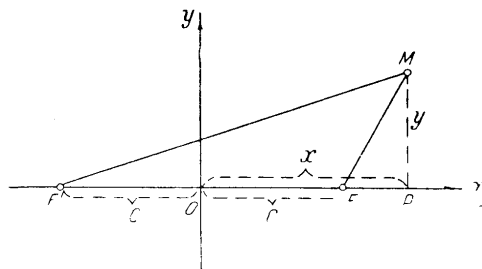
$$y = -\frac{1}{3}x$$

bo'ladi.

1.2 Giperbola ta'rifi, tenglamasi, direktrisasi, eksentrisiteti, asimtotalari, diametrlari.

Giperbolaning ta'rifi. Har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha masofalarining ayirmasi o'zgarmas miqdor bo'lgan geometrik o'rin giperbola deyiladi.

Berilgan nuqtalarni F va F' , ularning orasidagi masofani $2c$ va o'zgarmas miqdorni $2a$ faraz qilamiz. F va F' nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziqni absissa o'qi va unga perpendikulyar bo'lib, FF' ning o'rtasidan o'tgan to'g'ri chiziqni ordinata o'qi faraz qilamiz (1.2.1-chizma)



1.2.1- chizma.

Giperbolaga qarashli nuqtalardan biri M va uning o'zgaruvchi koordinatalari x va y bo'lsin. $FF' = 2c$ bo'lib, ordinata o'qi, FF' ning o'rtasidan o'tgani uchun, u nuqtalarning koordinatalari $F(c,0)$ va $F'(-c,0)$ bo'ladi.

Giperbolaning asosiy ta'rifiga muvofiq:

$$MF' - MF = 2a. \quad (1.2.1)$$

$M(x, y)$ va $F(c,0)$, $M(x, y)$ va $F'(-c,0)$ nuqtalar orasidagi masofalar (ikki nuqta orasidagi masofaning formulasi bo'yicha) quyidagicha bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} MF &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ MF' &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

MF va MF' ifodalar (1) ga qo'yilsa:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

yoki

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - 2a.$$

Keyingi tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarilsa :

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 ,$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 .$$

O'xshash hadlar ixchamlansa,

$$-cx = a^2 - a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} ,$$

yoki

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx .$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini yana bir marta kvadratga ko'taramiz:

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 ,$$

yoki

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 ,$$

yoki

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 ,$$

yoki

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) . \quad (1.2.3)$$

Shakldagi $MF'F'$ uchburchakda

$$MF' - MF < F'F$$

yoki

$$2a < 2c , \text{ yoki } a < c ,$$

yoki

$$a^2 < c^2 \text{ yoki } a^2 - c^2 < 0 ;$$

Shuning uchun $a^2 - c^2 = -b^2$ (1.2.4) deb faraz qilamiz.

Bu holda (1.2.3) tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2,$$

yoki

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \quad (1.2.5)$$

Bu tenglama giperbolaning eng sodda yoki kanonik tenglamasi deyiladi. Agar buning ikkala tomoni a^2b^2 ga bo'linsa, tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.2.6)$$

Giperbolaning shaklini uning tenglamasi bo'yicha tekshirish

Giperbolaning shaklini aniqlash uchun uning

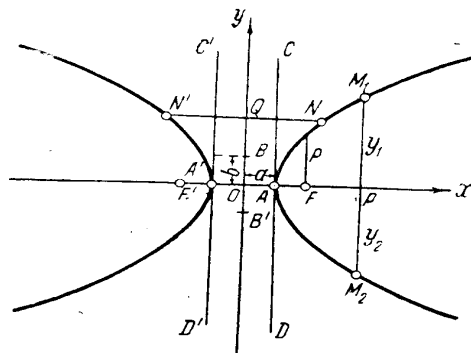
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenglamasini olib, uni y ga nisbatan yechamiz:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (1.2.7)$$

Bunga qaraganda y ning qiymatlari x ga berilgan qiymatlarga qarab aniqlanadi. Masalan, absolyut qiymatidan katta bo'lgan har bir $x = OP$ ga y uchun ikkita qiymat to'g'ri keladi: $y_1 = PM_1$ va $y_2 = PM_2$. Bularning absolyut qiymatlari o'zaro teng va ishoralari bir-biriga teskari. Boshqacha qilib aytganda absissa o'qidagi P nuqtaga ikkita simmetrik M_1 va M_2 nuqtalar to'g'ri keladi. Bu natija umuman giperbolaning absissa o'qiga nisbatan simmetrik ekanligini ko'rsatadi.

$x = \pm a$ bolsa, $y = 0$ bo'lib, u giperbolaning eng kichik ordinatasi bo'ladi; shuning bilan giperbolaning $A(a,0)$ va $A'(-a,0)$ nuqtalari aniqlanadi (1.2.2-chizma)



1.2.2-chizma.

Lekin x ning absolyut qiymati a dan kichik bo'lmاسligi kerak, chunki $|x| < a$ bo'lganda $x^2 - a^2 < 0$ bo'lgani uchun bu holda u mavhum bo'ladi. Shuning bilan $x = +a$ va $x = -a$, ya'ni A va A' nuqtalardan o'tib, ordinata o'qiga parallel bo'lgan CD va $C'D'$ to'g'ri chiziqlar orasidagi giperbolaga qarashli hech qanday nuqta bo'lmaydi.

x ning qiymati $+a$ dan $+\infty$ gacha va $-a$ dan $-\infty$ gacha o'zgarganda y ning absolyut qiymati 0 dan ∞ gacha o'zgaradi. Bu esa giperbolaning ikki tomonga qarab cheksiz darajada kengayib ketgan ikki juft muntazam tarmoqlaridan iborat ekanligini ko'rsatadi.

Endi giperbolaning tenglamasini x ga nisbatan yechamiz. Bu holda :

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2} \quad (1.2.8)$$

Bunga qaraganda y ga har qancha qiymat berish mumkin, y ga berilgan har bir qiymatga qarab x uchun hamma vaqt ikkita haqiqiy son to'g'ri keladi. Ularning absolyut qiymatlari o'zaro teng bo'lib, ishoralari teskaridir. Masalan, $y = OQ$ bo'lganda $x_1 = QN$, $x_2 = QN'$ va $|x_1| = |x_2|$ bo'ladi. Bu esa giperbolaning ordinata o'qiga nisbatan simmetrik ekanligini ko'rsatadi.

$x = 0$ bo'lgan vaqtda

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{-a^2} = \pm b \sqrt{-1}$$

bo'ladi. Agar koordinatalar boshidan ordinata o'qiga yuqoriga va quyiga qarab b ni o'lchasak, unda B va B' nuqtalari aniqlanadi. Bu nuqtalar giperbolaning o'zida bo'lmagani uchun $BB' = 2b$ giperbolaning mavhum o'qi deyiladi.

A va A' nuqtalar giperbolaning boshlari deyiladi va $AA' = 2a$ uning haqiqiy o'qi deyiladi. Berigan F va F' nuqtalar giperbolaning fokuslari deyiladi.

Giperbolaning fokusiga qarashli ordinatasi uning parametri deyiladi va u odatda p harfi bilan belgilanadi. Fokusining absissasi c bo'lgani uchun

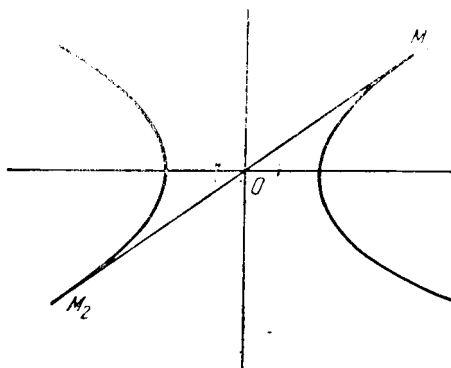
$$p = \frac{b}{a} \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{b^2}{a}, \quad (1.2.9)$$

chunki $c^2 - a^2 = b^2$ edi.

Ellips singari giperbolaning har bir $M_1(x_1, y_1)$ nuqtaga koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan $M_2(-x_1, -y_1)$ nuqta mos keladi, chunki bu nuqta ham giperbolaning tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = 1.$$

Demak, giperbolaning koordinatalar boshiga o'tgan har bir vatari shu nuqtada teng ikkiga bo'linadi, ya'ni koordinatalar boshi giperbolaning simmetriya markazi yoki qisqacha markazi bo'ladi (1.2.3-chizma)



1.2.3-chizma.

Teng tomonli va qo'shma giperbola

Giperbolaning kanonik tenglamasini olamiz:

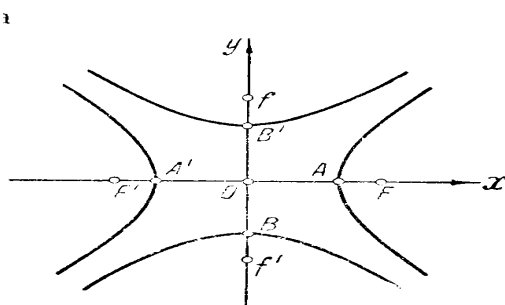
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.2.6)$$

Agar bu tenglamaning biror tomonining ishorasi teskari qilinsa,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{yoki} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (1.2.10)$$

tenglamalar hosil bo'ladi. Bu tenglamalar avvalgi tenglama bilan solishtirib qaraganda x va y ning rollari almashganini ko'ramiz. Shuning uchun keyingi har bir tenglama ham giperbolani ifoda qiladi, faqat :

- 1) uning haqiqiy o'qi $BB' = 2b$ va mavhum o'qi $AA' = 2a$ bo'ladi (demak u absissa o'qini kesmaydi, 1.2.4 -chizma) ;
- 2) f va f' fokuslari ordinata o'qida va ularning har biri koordinatalar boshidan $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ masofada turadi;
- 3) Uning har bir nuqtasidan fokuslarga masofalarning ayirmasi $2b$ ga teng va
- 4) Uning parametri $\frac{a^2}{b}$ bo'ladi.



(1.2.4-chizma)

Agar (1.2.6) tenglamada $b = a$ faraz qilinsa, bu holda

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

yoki

$$x^2 - y^2 = a^2$$

bo'ladi. Bunday giperbola teng tomonli giperbola deyiladi.

Giperbolaning asimptotalari

Giperbolaning muhim xususiyatlaridan biri shundaki, uning nuqtalari boshlaridan uzoqlashib borgan sari asimptota deb atalgan to'g'ri chiziqlarga cheksiz yaqinlashib boradi.

Bu masalani aniqlash uchun ushbu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.2.6)$$

giperbolani koordinatalar boshidan o'tgan biror

$$y = kx \quad (1.2.11)$$

to'g'ri chiziq bilan kesib ko'ramiz. Buning uchun (1.2.6) va (1.2.11) tenglamalarni birlashtirib yechishga to'g'ri keladi, chunki chiziqlarning o'zaro kesishgan nuqtalarining koordinatalari har ikkalasi uchun umumiy bo'ladi. (1.2.11) ni (1.2.6) ga qo'ysak:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2 x^2}{b^2} = 1,$$

yoki

$$b^2 x^2 - a^2 k^2 x^2 = a^2 b^2,$$

yoki

$$x^2 (b^2 - a^2 k^2) = a^2 b^2,$$

bundan :

$$x = \frac{ab}{\pm \sqrt{b^2 - a^2 k^2}} ; \quad (1.2.12)$$

buni (1.2.11) ga qo'ysak :

$$y = \frac{abk}{\pm \sqrt{b^2 - a^2 k^2}} . \quad (1.2.13)$$

$b^2 - a^2 k^2 > 0$ yoki $k^2 < \frac{b^2}{a^2}$ yoki $|k| < \frac{b}{a}$ bo'lgan holda (1.2.12) va (1.2.13) kasrlarning maxrajlaridagi radikalning qiymati haqiqiy bo'ladi; bu holda x va y ning qiymatlari ham haqiqiy bo'lib (1.2.11) to'g'ri chiziq (1.2.6) giperbolani, ikki nuqtada kesadi.

$b^2 - a^2 k^2 < 0$ yoki $k^2 > \frac{b^2}{a^2}$ yoki $|k| > \frac{b}{a}$ bo'lgan holda haligi radikalning qiymati mavhum bo'ladi va bu holda (1.2.11) to'g'ri chiziq (1.2.6) giperbola bilan kesishgan nuqtalari bo'lmayd.

Endi faraz qilaylik, $b^2 - a^2 k^2 = 0$ bo'lsin, ya'ni $k^2 = \frac{b^2}{a^2}$ yoki bundan:

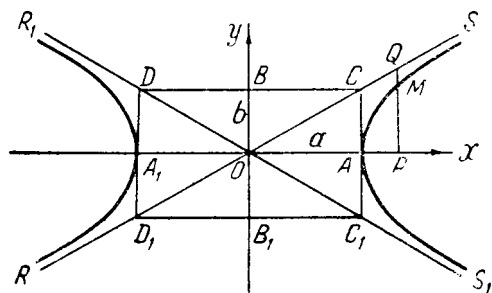
$$k_1 = \frac{b}{a}, \quad k_2 = -\frac{b}{a} . \quad (1.2.14)$$

k ning bu qiymatlarida (1.2.12) va (1.2.13) da x va y cheksizlikka aylanadi va bu holda (1.2.11) ning ko'rinishi

$$y = +\frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x \quad (1.2.15)$$

bo'ladi, ya'ni koordinatalar boshidan o'tgan ikkita to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. Bu chiziqlar giperbolaning asimptotalari deyiladi.

(1.2.15) ning tuzilishiga qaraganda, bu chiziqlarni , ularning burchak koefitsiyentlari yordami bilan yasash qulaydir. Masalan birinchi to'g'ri chiziqni yasash uchun, koordinatalar boshidan absissa o'qining musbat yo'nalishida $OA = a$ ni va A nuqtada absissa o'qiga perpendikulyar bo'lgan chiziqda $AC = b$ ni o'lchab olib , O va C nuqtalardan RS to'g'ri chiziq o'tkazilsa kifoya qiladi (1.2.5-chizma). Shu usul bilan ikkinchi chiziqni ham yasash mumkin (R_1S_1).



1.2.5- chizma.

Giperbola asimptotalarining xossalarini oddiylashtirish maqsadi bilan RS ning biror Q nuqtasidan absissa o'qiga perpendikulyar tushuramiz. Buning giperbola bilan uchrashgan nuqtasi $M(x,y)$ va absissa o'qi bilan uchrashgan nuqtasi $P(x,0)$ bo'lsin.

QP va MP ordinatalar orasidagi QM ayirmani tekshiramiz. $M(x,y)$ nuqta giperbolada bo'lgani uchun

$$MP = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (1.2.16)$$

va Q nuqta RS da bo'lgani uchun

$$QP = \frac{b}{a} x, \quad (1.2.17)$$

demak, izlangan ayirma quyidagicha bo'ladi:

$$QM = QP - MP = \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) . \quad (1.2.18)$$

Bu ifodaning o'ng tomonini $(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ ga ko'paytiramiz ham bo'lamiz. Bu vaqtda :

$$QM = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \quad (1.2.19)$$

Bu ifoda QM ning qiymati x ga bog'liq ekanligini ko'rsatadi. Uning o'ng tomonidagi kasrning surati o'zgarmas miqdor bo'lgani uchun uning maxrajidagi x ning qiymati o'sib borganda, kasrning o'zi (QM) kamayib boradi. Bunga qaraganda giperboladagi M nuqtaning absissasi o'ng tomonga qarab uzoqlashgan sari M nuqtaning o'zi haligi RS to'g'ri chiziqqa yaqinlashib boradi va x cheksiz katta bo'lganda QM nolga aylanadi:

$$\lim(QM) = \lim\left(\frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right) = 0. \quad (1.2.20)$$

Ikkinchi R_1S_1 to'g'risida ham shu yo'l bilan fikr yurtganda ham shu natijaning o'zi kelib chiqadi.

Shuning bilan, (1.2.15) tenglamalar bilan ifodalangan giperbolaning asimptotalari shunday xususiyatga egaki, giperbolaning nuqtalari, uning boshidan cheksiz uzoqlashib borgan sari, uning tarmoqlari cheksiz ravishda asimptotalarga yaqinlashib boradi.

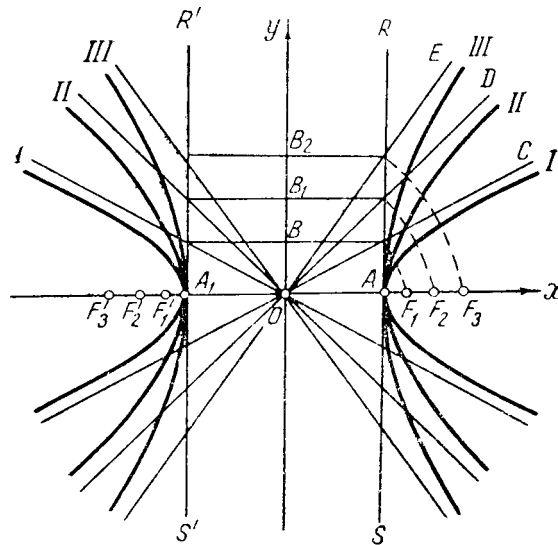
Giperbolaning eksentrisiteti

Giperbolaning fokuslari orasidagi masofaning haqiqiy o'qiga nisbati uning eksentrisiteti deyiladi va u odatda e bilan belgilanadi, ya'ni

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad (1.2.21)$$

$c > a$ bo'lgani uchun giperbola hamma vaqt $e > 1$.

Ekssentrisiteyning geometrik ma'nosini tekshiramiz. Buning uchun eng avval (1.2.21) ifodadagi a ni o'z holicha qoldirib, b ning qiymatini ortirib boramiz. Buning natijasida e ning qiymati ortib boradi. Ikkinchi tomondan $a = OA$ bo'lib, $b = OB, OB_1, OB_2, \dots$ bo'lgan holda, ularning asimptotalari: $OC, OD, OE, \dots$ bo'ladi va bularga qarashli giperbolalar 1.2.6-chizmadagi I, II, III, ... bo'ladi.



1.2.6-chizma.

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ bo'lgani uchun giperbolaning mavhum o'qi o'sgan sari uning fokusi markazidan uzoqlashib boradi va giperbolaning o'zi kengayib RS va $R'S'$ to'g'ri chiziqlarga yaqinlashib keladi; mavhum o'qi cheksiz katta bo'lganda giperbolaning asimptotalari ordinata o'qi bilan va o'zi RS va $R'S'$ to'g'ri chiziqlar bilan birlashib ketadi. Bu holda giperbolaning fokusi markazidan cheksiz uzoqda bo'ladi.

Aksincha giperbolaning mavhum o'qi kichiklashib borgan sari uning fokusi A nuqtaga yaqinlashib keladi (chunki $c = \sqrt{a^2 + b^2}$) va $e = \frac{c}{a}$ kamayadi. Bu holda giperbolaning shakli o'tkirlashib, RS va $R'S'$ to'g'ri chiziqlardan uzoqlashib boradi. Giperbolaning mavhum o'qi cheksiz kamayib limiti nol bo'lganda uning ikkala asimptotalari absissa o'qi bilan va giperbolaning o'zi uning Ox va Ox' tomonlari bilan birlashib ketadi. Bu holda

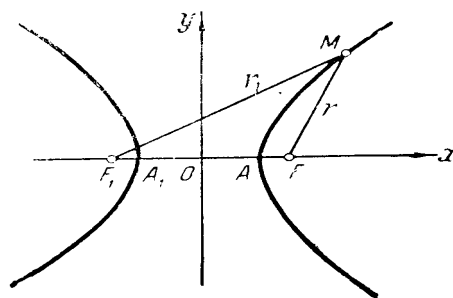
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = a \text{ va } e = \frac{a}{a} = 1.$$

Shuning bilan, natijada: e giperbolaning shaklini tasvir qiladi; e ning qiymati 1 dan ∞ gacha o'zgaradi; e ning qiymati 1 ga yaqinlashgan sari giperbolaning shakli o'tkirlashib boradi va u o'sgan sari giperbolaning shakli kengayib boradi.

Giperbolaning radius-vektorlari

Giperboladagi biror nuqta bilan uning biror fokusigacha bo'lgan masofa u nuqtaning radius-vektori deyiladi.

Faraz qilaylik, giperbolaning biror $M(x, y)$ nuqtasining radius-vektorlari $MF = r$ va $MF_1 = r_1$ bo'lsin (1.2.7-chizma).



1.2.7- chizma.

$M(x, y)$ va $F(c, 0)$, $M(x, y)$ va $F_1(-c, 0)$ nuqtalar orasidagi masofalar (ikki nuqta orasidagi masofaning formulasi bo'yicha) quyidagicha bo'ladi:

$$(1.2.22)$$

Bularning har birini kvadratga ko'tarsak :

$$r^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$r_1^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2.$$

Keyingi tenglamadan avvalgisi ayirib olinsa

$$r_1^2 - r^2 = 4cx,$$

yoki

$$(r_1 + r)(r_1 - r) = 4cx. \quad (1.2.23)$$

Giperbolaning ta'rifi bo'yicha

$$r_1 - r = 2a. \quad (1.2.24)$$

Bu (1.2.23) ga qo'yilsa:

$$2a(r_1 + r) = 4cx \text{ yoki } r_1 + r = 2\frac{c}{a}x. \quad (1.2.25)$$

(1.2.25) dan (1.2.24) ni ayirib olsak

$$2r = 2\frac{c}{a}x - 2a \text{ yoki } r = \frac{c}{a}x - a \quad (1.2.26)$$

(1.2.24) bilan (1.2.25) ni qo'shganda

$$2r_1 = 2\frac{c}{a}x + 2a \text{ yoki } r_1 = \frac{c}{a}x + a \quad (1.2.27)$$

$\frac{c}{a} = e$ bo'lgani uchun (1.2.26) va (1.2.27) ifodalarning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$(1.2.28)$$

Bu formulalar yordami bilan giperbolada berilgan $M(x, y)$ nuqtasining radius-vektorlari a va e orqali aniqlanadi.

Giperbolaning direktrisalari

$$\left. \begin{aligned} r &= ex - a, \\ r_1 &= ex + a. \end{aligned} \right\}$$

Giperbolaning radius-vektor formulalarining o'ng tomonlarini nolga tenglab ularning geometrik ma'nolarini tekshiramiz :

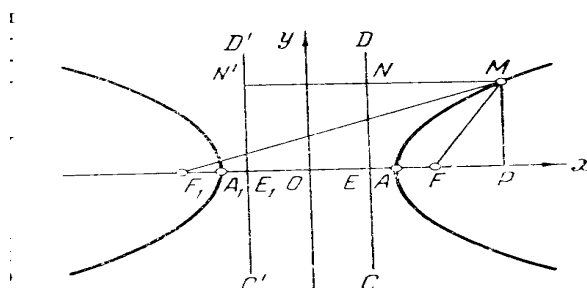
$$\left. \begin{aligned} ex - a &= 0, \\ ex + a &= 0. \end{aligned} \right\} (1.2.29)$$

Bu tenglamalardan har biri ordinata o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqni ifoda qiladi. $e = \frac{c}{a}$ bo'lgani uchun keyingi tenglamalardan :

$$x = +\frac{a^2}{c} \text{ va } x = -\frac{a^2}{c} \quad (1.2.30)$$

(1.2.29) yoki (1.2.30) tenglamalar bilan ifoda qilingan to'g'ri chiziqlar giperbolaning direktrisalari deyiladi. $a < c$ bo'lgani uchun $\frac{a^2}{c} < a$ bo'ladi.

Demak, giperbolaning direktrisalari uni kesmaydi (1.2.8-shakl. CD va $C'D'$ to'g'ri chiziqlar).



1.2.8-shakl.

Endi giperboladagi biror $M(x, y)$ nuqtadan absissa o'qiga parallel chiziq o'tkazamiz. Bu chiziq direktrisalar bilan uchrashgan nuqtalari N va N' bo'lsin ; M nuqta bilan F va F_1 fokuslarni o'zaro tutashtiramiz. $M(x, y)$ nuqta giperbolada bo'lgani uchun radius-vektor formulasi bo'yicha:

$$MF = r = ex - a = \frac{c}{a}x - a = \frac{cx^2 - a^2}{a} ;$$

shaklga muvofiq

$$NM = EP = OP - OE = x - \frac{a^2}{c} = \frac{cx - a^2}{c},$$

shuning uchun:

$$MF : NM = \frac{cx - a^2}{a} : \frac{cx - a^2}{c} = \frac{c}{a} = e.$$

Shunga o'xshash

$$MF' : MN' = e.$$

Demak, giperboladagi biror nuqtadan uning biror fokusigacha masofasining u nuqta bilan shu fokusga qarashli direktrisasi orasidagi masofaga nisbati o'zgarmas miqdorga (e ga) tengdir.

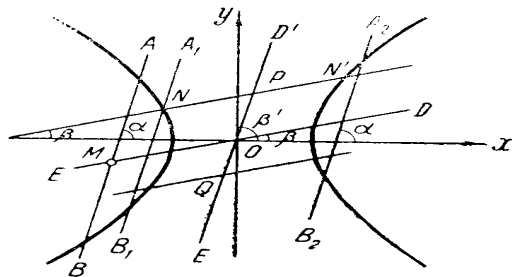
Giperbolaning diametrlari

Egri chiziqning diametri deb, berilgan yo'nalishga parallel bo'lgan vatarlarning o'rta nuqtalaridan iborat bo'lgan geometrik o'ringa aytiladi.

Giperbolaning bir-biriga parallel bo'lgan $AB, A_1B_1, A_2B_2, \dots$ vatarlaridan birortasining, masalan, AB ning o'rtasidagi M nuqtaning koordinatalari x va y faraz qilib, ularning orasidagi munosabatni topamiz. k ni o'zgarmas va l ni o'zgaruvchi parametr faraz qilib, parallel vatarlarning hammasini

$$y = kx + l \quad (1.2.31)$$

tenglama bilan ifoda qilish mumkin (1.2.9-chizma).



1.2.9-chizma.

Vatarlardan birortasining, masalan AB ning giperbola bilan kesishgan nuqtalarini $A(x_1, y_1)$ va $A(x_2, y_2)$ faraz qilamiz. Bularni aniqlash uchun giperbolaning tenglamasi bilan (1.2.31) tenglamani birlashgan holda yechishga to'g'ri keladi. shuning uchun giperbolaning tenglamasini

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad (1.2.5)$$

faraz qilib, (1.2.31) dan y ning ifodasini (1.2.5) ga qo'yamiz:

$$b^2x^2 - a^2(kx+l)^2 = a^2b^2,$$

yoki

$$b^2x^2 - a^2k^2x^2 - 2a^2kxl - a^2l^2 = a^2b^2,$$

yoki

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kxl - a^2(l^2 + b^2) = 0,$$

yoki

$$x^2 - \frac{2a^2kl}{b^2 - a^2k^2}x - \frac{a^2(l^2 + b^2)}{b^2 - a^2k^2} = 0$$

Bu vaqtda tenglamaning ildizlari x_1 va x_2 faraz qilinsa, bu holda (kvadrat tenglama ildizlarining xossasiga muvofiq) :

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2kl}{b^2 - a^2k^2},$$

bundan

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2kl}{b^2 - a^2k^2}. \quad (1.2.32)$$

Qilingan faraz bo'yicha $M(x, y)$ nuqta AB vatarining o'rtasida bo'lgani uchun

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

Yoki (1.2.32) ga asosan

$$x = \frac{a^2kl}{b^2 - a^2k^2}. \quad (1.2.33)$$

x uchun aniqlangan bu ifoda (1.2.31) ga qo'yilsa :

$$y = \frac{a^2k^2l}{b^2 - a^2k^2} + l,$$

Yoki

$$y = \frac{b^2l}{b^2 - a^2k^2}$$

bo'ladi; x va y ni o'zaro bog'lash maqsadida bu tenglamani (1.2.33)ga hadlab bo'lamiz:

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2 k},$$

bundan

$$y = \frac{b^2}{a^2 k} x. \quad (1.2.34)$$

Izlangan diametrning tenglamasi shuning o'zi bo'ladi, chunki u parallel vatarlarning o'rtasidagi M nuqtaning koordinatalari orasidagi munosabatni ifoda qiladi. (1.2.34) tenglama koordinatalar boshidan o'tgan to'g'ri chiziqdan iborat. Giperbolaning diametri ham uning markazidan o'tadi (DE).

Vatarlarning absissa o'qi bilan tashkil qilgan burchagi α va bularga qarashli DE diametrning absissa o'qi bilan tashkil qilgan burchagi β faraz qilinsa :

$$\operatorname{tg} \alpha = k, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2 k},$$

bundan

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2}. \quad (1.2.35)$$

DE diametrga parallel bo'lgan vatarlarning ham absissa o'qi bilan tashkil qilgan burchagi β bo'ladi. Agarda bu vatarlarga qarashli diametr $D'E'$ bo'lsa uning absissa o'qi bilan tashkil qilgan burchagi β' faraz qilinsa, (1.2.35) ga asosan :

$$\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \beta' = \frac{b^2}{a^2}, \quad (1.2.36)$$

demak,

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \beta',$$

yoki

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta'. \quad (1.2.37)$$

Bu esa AB vatarning $D'E'$ diametrga parallel ekanligini ko'rsatadi. Natijada: DE diametr bilan teng ikkiga bo'lingan vatarlar ikkinchi $D'E'$ diametrga parallel bo'ladi, ya'ni DE va $D'E'$ diametrlar bir-biriga qo'shma bo'ladi. Giperbolaning o'qlari ham bu xususiyatga ega. Shuning uchun ularni (o'qlarni) boshqa diametrlardan ajratish uchun boshdiametrlar deyiladi.

Misollar.

Misol 1. Haqiqiy o'qi 10 va fokuslari orasidagi masofa 14 bo'lgan giperbolaning tenglamasi tuzilsin.

$$2a = 10, \quad a = 5 \quad \text{va} \quad a^2 = 25;$$

$$2c = 14, \quad c = 7$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 49 - 25 = 24.$$

Bular giperbolaning umumiy tenglamasiga qo'yilsa, izlangan tenglama

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1 \quad \text{bo'ladi.}$$

Misol 2. Tenglamasi $5x^2 - 9y^2 - 45 = 0$ bo'lgan giperbolaning eksentrisiteti va asimptotalari topilsin.

$$5x^2 - 9y^2 = 45, \quad \text{yoki}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1,$$

Bundan $a^2 = 9, \quad a = 3; \quad b^2 = 5, \quad b = \sqrt{5}.$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

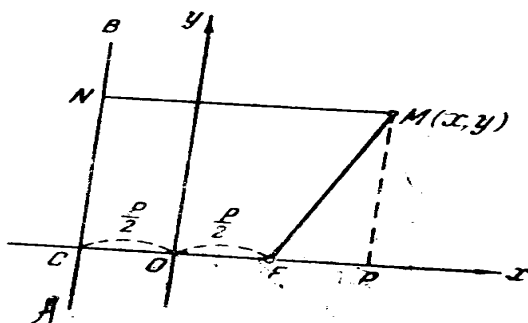
Asimptotalar tenglamasi

$$y = \frac{\sqrt{5}}{3}x \quad \text{va} \quad y = -\frac{\sqrt{5}}{3}x.$$

1.3 Parabola ta'rifi, tenglamasi, eksentrisiteti, diametri, markazi.

Har bir nuqtasidan- berilgan nuqtasigacha va berilgan to'g'ri chiziqqacha masofalari o'zaro teng bo'lgan geometrik o'rin parabola deyiladi.

Bu ta'rifga asoslanib, parabolaning tenglamasini tuzish mumkin. Berilgan nuqta F va berilgan to'g'ri chiziq AB bo'lsin (1.3.1-chizma).



1.3.1-chizma.

F nuqtadan o'tib, AB ga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni absissa o'qi qabul qilamiz. AB ning absissa o'qi bilan uchrashgan nuqtasi C bo'lsin; ordinata o'qini absissa o'qiga perpendikulyar qilib CF ning o'rtasi O nuqtadan o'tkazamiz. $M(x, y)$ parabolaning biror nuqtasi bo'lsin:

$$x = OP, y = MP.$$

Berilgan nuqta bilan berilgan chiziqning orasidagi masofani p faraz qilamiz, ya'ni $CF = p$, bu holda

$$CO = OF = \frac{p}{2}.$$

Parabolaning ta'rifi bo'yicha

$$MN = MF.$$

Shaklga asosan:

$$MN = PC = PO + OC = x + \frac{p}{2};$$

$$MF = \sqrt{MP^2 + PF^2} = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2},$$

demak,

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Bu tenglamani soddalashtirish maqsadi bilan ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

yoki

$$y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

yoki

$$y^2 - px = px$$

yoki

$$y^2 = 2px.$$

x va y parabolaning ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari b'lgani uchun, bu tenglama biz izlagan tenglamaning o'zi, ya'ni parabolaning kanonik tenglamasi bo'ladi.

Berilgan F nuqta parabolaning fokusi; berilgan AB to'g'ri chiziq parabolaning direktrisasi va p esa parabolaning parametri deyiladi.

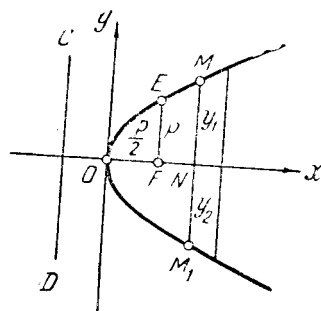
Parabolaning shaklini uning tenglamasi bo'yicha tekshirish

Parabolaning tenglamasi y ga nisbatan yechilsa,

$$y = \pm\sqrt{2px} \quad (1.3.1)$$

bo'ladi. Bunga qaraganda y ning qiymati haqiqiy bo'lishi uchun x ga faqat musbat qiymat berishga to'g'ri keladi ($p > 0$). Agarda $x = 0$ bo'lsa $y = 0$ bo'ladi. Demak, parabola koordinatalar boshidan o'tadi va x ga berilgan har bir musbat qiymatga qarab y uchun hammavaqt ikki haqiqiy qiymat to'g'ri keladi. Bularning absolyut qiymatlari teng bo'lib, faqat ishoralari teskaridir. Masalan, $x = ON$ bo'lganda $y_1 = NM$, $y_2 = NM_1$ va $|y_1| = |y_2|$ bo'ladi. Bu esa parabolaning absissa o'qiga nisbatan simmetrik ekanligini ko'rsatadi.

x ning qiymati 0 dan ∞ ga o'sganda y ning absolyut qiymati $\pm\infty$ gacha o'zgaradi. Bu esa parabolaning cheksiz va ochiq egri chiziqdan iborat ekanligini ko'rsatadi. Parabolaning simmetriya o'qi (Ox) uning o'qi deyiladi va u o'qning parabola bilan uchrashgan O nuqtasi parabolaning boshi deyiladi (1.3.2-chizma).



1.3.2-chizma.

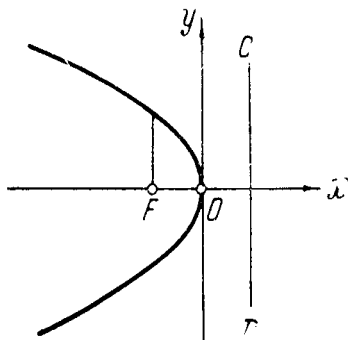
Parabolaning tenglamasini tuzishda biz uning fokusini direktrisasining o'ng tomoniga faraz qilgan edik; shuning uchun $p > 0$ edi. Aksincha uning fokusini direktrisasidan chapda faraz qilganda parabolaning tenglamasi

$$y^2 = -2px$$

bo'ladi va bundan

$$y = \pm \sqrt{-2px} . \quad (1.3.2)$$

Bu holda parabola ordinata o'qidan chapda bo'ladi, chunki x ga faqat manfiy qiymat bergandagina y haqiqiy bo'ladi. Bu absissa o'qining manfiy bo'lagi uning simmetriya o'qi bo'ladi (1.3.3-chizma).

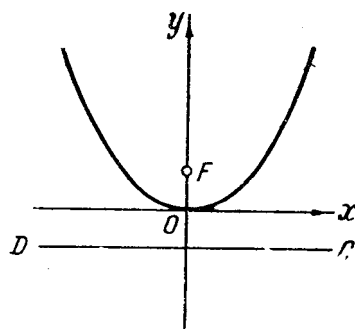


1.3.3-chizma.

Agar parabola tenglamasidagi o'zgaruvchi koordinatalarning rollari almashtirilsa, tenglamaning ko'rinishi

$$x^2 = 2py \quad (p > 0) \quad (1.3.3)$$

bo'ladi. Bu holda parabolaning fokusi ordinata o'qining musbat tomonida, direktrisasi bo'lsa absissa o'qiga parallel va uning ostida bo'ladi. Shuning bilan, bu holda parabolaning o'zi absissa o'qidan yuqorida bo'lib, ordinata o'qi esa parabolaning o'qi bo'ladi (1.3.4-chizma).

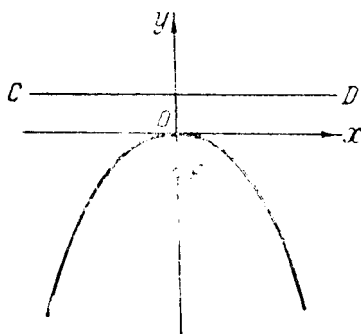


1.3.4-chizma.

Aksincha, parabolaning fokusi ordinata o'qining manfiy tomonida bo'lsa, keyingi tenglamaning ko'rinishi

$$x^2 = -2py \quad (p > 0) \quad (1.3.4)$$

bo'ladi. Bu holda parabola absissa o'qidan pastda bo'ladi, chunki y ga manfiy qiymat bergan vaqtdagina x ning qiymati haqiqiy bo'ladi (1.3.5-chizma).



1.3.5-chizma.

1. Agar $x = \frac{p}{2} = OF$ faraz qilinsa, (1) dan $y = \pm p$ bo'ladi. Demak, parabolaning fokusiga tegishli ordinatasi uning parametri p ga teng (1.3.2-chizma). parabolaning biror nuqtasi bilan uning fokusi orasidagi masofaning y nuqta bilan direktrisasi orasidagi masofasiga nisbati parabolaning eksentrisiteti deyiladi va u odatda e bilan belgilanadi. Parabolaning ta'rifiga muvofiq bu nisbat 1 ga teng: $e = 1$. $y^2 = 2px$ parabolaning direktrisasi ordinata o'qiga parallel bo'lib, undan masofasi $-\frac{p}{2}$ bo'lgani uchun uning tenglamasi

$$x + \frac{p}{2} = 0$$

bo'ladi. Parabolaning biror $M(x, y)$ nuqtasi bilan fokusi orasidagi masofasi (1.3.1-chizma)

$$MF = MN = PC = x + \frac{p}{2}$$

bo'ladi. Shuning uchun parabolaning biror $M(x, y)$ nuqtasining radius-vektori quyidagicha ifoda qilinadi.

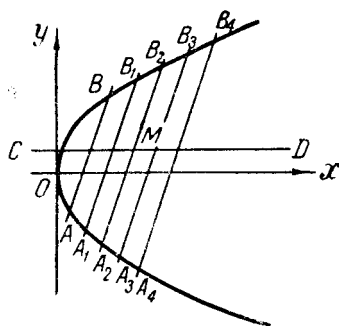
$$r = x + \frac{p}{2} . \quad (1.3.5)$$

Parabolaning diametri va markazi to'g'risida

Parabolaning tenglamasi

$$y^2 = 2px \quad (1.3.6)$$

faraz qilib, berilgan yo'nalishga parallel bo'lgan $AB, A_1B_1, A_2B_2, \dots$ vatarlar o'rta nuqtalarining geometrik o'rnini topamiz (1.3.6-chizma).



1.3.6-chizma.

Faraz qilaylik, bu vatarlarning umumiy tenglamasi

$$y = kx + l \quad (1.3.7)$$

bo'lsin. Vatarlardan birining, masalan A_2B_2 ning o'rtasidagi M nuqtaning koordinatalarini x va y faraz qilamiz. $M(x, y)$ nuqtaning koordinatalari orasidagi munosabatni aniqlash uchun A_2B_2 vatarning parabola bilan kesishgan $A_2(x_1, y_1)$ va $B_2(x_2, y_2)$ nuqtalarini topamiz. Buning uchun (1.3.6) va (1.3.7) ni birlashgan holda to'g'ri keladi. (1.3.6) ni x ga nisbatan yechganda

$$x = \frac{y^2}{2p}$$

bo'ladi. Bu (1.3.7) ga qo'yilsa

$$y = \frac{ky^2}{2p} + l,$$

yoki

$$2py = ky^2 + 2pl,$$

yoki

$$ky^2 - 2py + 2pl = 0,$$

yoki

$$y^2 - \frac{2p}{k}y + \frac{2pl}{k} = 0.$$

Bu kvadrat tenglamaning ildizlari y_1 va y_2 faraz qilinsa, ildizlarning xossasiga muvofiq:

$$y_1 + y_2 = \frac{2p}{k},$$

yoki

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{k}. \quad (1.3.8)$$

$M(x, y)$ nuqta A_2B_2 vatarining o'rtasida bo'lgani uchun

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

demak,

$$y = \frac{p}{k}. \quad (1.3.9)$$

Izlangan geometrik o'rinning, ya'ni parabola diametrining tenglamasi shundan iborat. Bu tenglamada p va k (CD) to'g'ri chiziqni ifoda qiladi.

Parallel vatarlar parabolaning o'qiga ($Oxga$) perpendikulyar bo'lganda $k = \infty$ bo'ladi va bu holda

$$y = \frac{p}{\infty} = 0,$$

Ya'ni parabolaning diametri o'z o'qi (Ox) bilan birlashadi.

Ellipsning va giperbolaning diametrlari egri chiziqlarning markazida kesishgan holda parabolaning diametri uning o'qiga parallel bo'ladi, ya'ni parabolaning o'qining cheksiz uzoqlashgan nuqtada kesadi. Shuning uchun parabolaning markazsiz chiziq deb aytish mumkin yoki markazi cheksiz uzoqda deb faraz qilish mumkin.

Misollar.

Misol 1. Parabolaning tenglamasi $y^2 = 20x$. buning parametri, direktrisasi va absissasa 7 bo'lgan nuqtaning radius- vektori aniqlansin.

$$2p = 20, \quad p = 10$$

$$x + \frac{p}{2} = x + 5 = 0 \text{ - direktrisasining tenglamasi bo'ladi.}$$

$$\text{Radius-vektori } r = x + \frac{p}{2} = 7 + 5 = 12 \text{ bo'ladi.}$$

Xulosa

Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida umumiy mulohazalar bobi 3ta paragrafdan iborat bo'lib, bu bobning birinchi paragrafida ellips haqida ma'lumotlar ya'ni uning ta'rifi, ta'rifi orqali eng sodda tenglamasi keltirib chiqarilgan. Ellips tenglamasi orqali uning shakli tuzilgan. Bu paragrafda ellipsning eksentrisiteti, direktrisasi, radius-vektor, diametr formulalari keltirib chiqarilgan.

2-paragrafda giperbola haqida umumiy mulohazalar berilgan. Bunda giperbola ta'rifidan eng sodda tenglamasi keltirib chiqarilgan. Giperbola tenglamasi orqali uning shakli tasvirlangan. Giperbolaning asimptota, eksentrisiteti, direktrisasi, diametr formulalari keltirib chiqarilgan.

3-paragrafda parabola ta'rifi aks ettirilgan bo'lib, ta'rifdan tenglamasi tuzilgan va parabola diametri, markazi haqida ma'lumotlar berilgan.

II BOB. Umumiy tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqlarni kanonik holga keltirib aniqlash.

2.1 Parallel ko'chirish va burish yordamida umumiy tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqlarni kanonik holga keltirish.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar ellips, giperbola, parabola shulardan iborat, yoki bulardan boshqa yana ikkinchi tartibli egri chiziqlar ham borligini bilish uchun ikkinchi darajali eng umumiy ko'rinishdagi algebraik tenglamani olib, uni tekshirishga to'g'ri keladi. Algebradan ma'lumki, ikki noma'lumli ikkinchi darajali algebraik tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (2.1.1)$$

Bunda A, B, C, D, E, F---haqiqiy o'zgarmas sonlardan iborat.

Bu bobda dekart koordinatalariga nisbatan (2.1.1) tenglamaning yo ellips (aylana), yo giperbola, yo parabola (yo xususiy hollarda ikkita to'g'ri chiziq) ifoda qilishini isbot qilamiz.

Ba'zi vaqt (2.1.1) tenglamani birjinsli koordinatalarida ifodalash birmuncha qulaylik keltiradi. Buning uchun (2.1.1) tenglamadagi x va y ning o'rniga $\frac{x}{t}$ va $\frac{y}{t}$ qo'yib, so'ngra tenglamaning ikkala tomonini t^2 ga ko'paytiramiz. Natijada bunday tenglama hosil bo'ladi.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxt + 2Eyt + Ft^2 = 0 \quad (2.1.2)$$

Bu tenglama x, y, t ga nisbatan birjinsli bo'lib, qaytib dekart koordinatalarga o'tish uchun $t=1$ faraz qilinsa kifoya qiladi. Tenglamaning chap tomonini $2f(x, y, t)$ yoki qisqacha $2f$ bilan belgilaymiz, ya'ni:

$$2f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxt + 2Eyt + Ft^2 \quad (2.1.3)$$

Agar bu funksiyadan x, y va t ga nisbatan xususiy hosila olinsa, 2 ga qisqartgandan keyin :

$$f'_x = Ax + By + Dt,$$

$$f'_y = Bx + Cy + Et,$$

$$f'_t = Dx + Ey + Ft$$

bo'ladi. Endi bu tenglamalardan birinchisini x ga, ikkinchisini y ga va uchinchisini t ga ko'paytirib qo'shamiz:

$$xf'_x + yf'_y + tf'_t = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxt + 2Eyt + Ft^2$$

yoki

$$xf'_x + yf'_y + tf'_t = 2f$$

ya'ni ikkinchi darajali birjinsli funksiyadan olingan xususiy hosilalar yarmining mos o'zgaruvchilarga ko'paytmasining yig'indisi funksiyaning o'ziga teng.

Ikkinchi darajali birjinsli funksiyaning bu xossasi, birjinsli funksiyaning umumiy xossasi to'g'risidagi Eyler teoremasining xususiy holidan iborat.

Ikkinchi tartibli egri chiziqning ikkita to'g'ri chiziqqa ajralishi.

Faraz qilaylik, ikkinchi darajali algebraik tenglama berilgan bo'lsin:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (2.1.1)$$

Umuman bu tenglama egri chiziq ifoda qilsada, lekin ba'zi xususiy hollarda u ikkita to'g'ri chiziq ifoda qilishi mumkin. Bunday hollarda (2.1.1) egri chiziq ikkita to'g'ri chiziqqa ajraladi deyiladi.

Bu masalani tekshirish maqsadi bilan (1) tenglamani y ning darajasiga nisbatan ushbu ko'rinishda yozib olamiz:

$$Cy^2 + 2(Bx+E)y + Ax^2 + 2Dx + F = 0$$

va bunda $C \neq 0$ faraz qilib, tenglamani y ga nisbatan yechamiz:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(Bx+E) \pm \sqrt{(Bx+E)^2 - C(Ax^2 + 2Dx + F)}}{C} = \\ &= \frac{-(Bx+E) \pm \sqrt{B^2x^2 + 2BEx + E^2 - ACx^2 - 2CDx - CF}}{C} = \\ &= \frac{-(Bx+E) \pm \sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - DC)x + E^2 - CF}}{C}. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Agarda

$$\left. \begin{aligned} B^2 - AC &= M \\ BE - DC &= N \\ E^2 - CF &= P \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

Faraz qilinsa, (2.1.4) ning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$y = \frac{-(Bx+E) \pm \sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}}{C} \quad (2.1.6)$$

Bu tenglamaning to'g'ri chiziq ifoda qilishi uchun x va y ga nisbatan uning birinchi darajali bo'lishi lozim. Bu esa radikal ostidagi ifoda to'la kvadrat bo'lganda mumkin. U ifodaning to'la kvadrat bo'lishi uchun

$$4N^2 = 4MP$$

yoki

$$N^2 = MP \quad (2.1.7)$$

bo'lishi kerak. Bunga asosan

$$Mx^2 + 2Nx + P = Mx^2 \pm 2x\sqrt{MP} + P = (x\sqrt{M} \pm \sqrt{P})^2, \text{ chunki } N = \sqrt{MP}.$$

Shuning bilan (2.1.6) ning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$y = \frac{-(Bx+E) \pm (x\sqrt{M} \pm \sqrt{P})}{C} \quad (2.1.8)$$

Yoki bundan ikki tenglama hosil bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{-B + \sqrt{M}}{C}x + \frac{\sqrt{P} - E}{C}, \\ y &= \frac{-B - \sqrt{M}}{C}x - \frac{\sqrt{P} + E}{C} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.9)$$

Bu tenglamalardan har biri x va y ga nisbatan birinchi darajalli bo'lgani uchun, ular to'g'ri chiziq ifoda qiladi. Bularning haqiqiy yoki mavhum bo'lishi mumkin. Bu esa radikal ostidagi M va P miqdorlarining ishoralariga bog'liq. (2.1.7) ga muvofiq M va P ning ishoralari bir xil bo'ladi, chunki hammavaqt

$$N^2 = MP > 0. \text{ Shuning uchun:}$$

- 1) $M = B^2 - AC > 0$ bo'lgan holda (2.1.9) bilan ifoda qilingan ikkala to'g'ri chiziq haqiqiy bo'ladi va bir-birini kesadi,
- 2) $M = B^2 - AC < 0$ bo'lgan holda ular mavhum bo'ladi va

3) $M=B-AC=0$ bo'lgan holda ular o'zaro parallel bo'ladi.

Demak, $C \neq 0$ va (2.1.7) tenglik mavjud bo'lgan holda (2.1.1) tenglama umuman ikki to'g'ri chiziqni ifoda qiladi. Lekin (2.1.7) shartni yana boshqacharoq tasvir qilish mumkin. Buning uchun (2.1.7) ga (2.1.5) dan M, N, P ning ifodalarini qo'yamiz:

$$(BE-DC)^2 = (B^2 - AC)(E^2 - CF)$$

yoki

$$B^2 E^2 - 2BCDE + D^2 C^2 - B^2 E^2 + B^2 CF + ACE^2 - AC^2 F = 0$$

yoki

$$-2BCDE + D^2 C^2 + B^2 CF + ACE^2 - AC^2 F = 0$$

yoki

$$-C(2BDE - D^2 C - B^2 F - AE^2 + ACF) = 0$$

Yuqorida qilingan farazga muvofiq $C \neq 0$ edi. Shuning uchun :

$$2BDE - D^2 C - B^2 F - AE^2 + ACF = 0,$$

yoki

$$A(CF - E^2) - B(BF - DE) + D(BE - DC) = 0,$$

yoki

$$A \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} - B \begin{vmatrix} B & E \\ D & F \end{vmatrix} + D \begin{vmatrix} B & C \\ D & E \end{vmatrix} = 0,$$

yoki

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

Bu tenglikning chap tomonidagi determinantning (2.1.1) tenglamaning diskriminanti deyiladi va u odatda Δ bilan ifoda qilinadi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1.10)$$

Biz yuqorida $C \neq 0$ deb faraz qilgan edik. Agarda $C=0$ va $A \neq 0$ bo'lgan holda (2.1.1) tenglamani x ga nisbatan yechib, haligi yo'l bilan davom qilinsa, hamon shu natijaning o'zi kelib chiqadi; ya'ni $\Delta=0$ bo'ladi.

Agar $A=C=0$ va $B \neq 0$ bo'lsa, u holda tenglamaning ko'rinishi

$$2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

yoki

$$xy + \frac{D}{B}x + \frac{E}{B}y + \frac{F}{2B} = 0,$$

yoki

$$x(y + \frac{D}{B}) + \frac{E}{B}(y + \frac{D}{B}) + \frac{F}{2B} - \frac{DE}{B^2} = 0,$$

yoki

$$(y + \frac{D}{B})(x + \frac{E}{B}) = \frac{2DE - BF}{2B^2}.$$

Bu tenglama ikkita to'g'ri chiziq ifoda qilishi uchun $2DE - BF = 0$ bo'lishi shart. Bu holda

$$y + \frac{D}{B} = 0, \quad x + \frac{E}{B} = 0 \quad \text{va}$$

$$\Delta = -B(BF - DE) + DBE = +B(2DE - BF).$$

Agar $2DE - BF = 0$ bo'lsa $\Delta = 0$ bo'ladi; aksincha $\Delta = 0$ va $B \neq 0$ bo'lsa, $2DE - BF = 0$ bo'ladi. Agar $A = B = C = 0$ bo'lsa, (2.1.1) tenglama to'g'ri chiziq ifoda qilishi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. Bu holda ham

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

Shuning bilan, har holda, (2.1.1) tenglamaning ikkita to'g'ri chiziq ifoda qilishi uchun $\Delta = 0$ bo'lishi lozim. Aksincha bu shart yoki (2.1.7) bajarilgan holda (2.1.1) tenglamaning chap tomoni ikkita birinchi darajali ko'paytuvchiga ajraladi, ya'ni tenglama hamon ikkita to'g'ri chiziq ifoda qiladi.

Koordinatalar boshini ko'chirish.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (2.1.1)$$

Tenglamaning diskriminanti $\Delta \neq 0$ deb faraz qilamiz, demak, bu holda (2.1.1) tenglama umuman biror egri chiziq ifoda qiladi. Bu holni tekshirishda (2.1.1) tenglamani birmuncha soddalashtiramiz. Buning uchun eng avval koordinata o'qlarining yo'nalishlarini saqlab, uning boshini biror (a, b) nuqtaga ko'chiramiz va bunday koordinatalar almashtirishdan tenglama shaklining qanday o'zgarishiga diqqat qilamiz. Bu holda koordinata almashtirish formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$x = x_1 + a,$$

$$y = y_1 + b.$$

Bularni (1) tenglamaga qo'yamiz:

$$A(x_1 + a)^2 + 2B(x_1 + a)(y_1 + b) + C(y_1 + b)^2 + 2D(x_1 + a) + 2E(y_1 + b) + F = 0, \quad (2.1.11)$$

Bundagi qavslarni ochib, so'gra x_1, y_1 ga nisbatan teng darajali bo'lgan hadlari to'plansa, uning ko'rinishi bunday bo'ladi:

$$\begin{aligned} & Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2(Aa + Bb + D)x_1 + 2(Ba + Cb + E)y_1 + \\ & + Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F = 0 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Ikkinchi tomondan, agarda (2.1.1) tenglamaning chap tomonini $2f(x, y)$ faraz qilsak,

$$2f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F, \quad (2.1.13)$$

Bundan x va y ga nisbatan xususiy hosilalari olinsa:

$$\left. \begin{aligned} f'_x(x, y) &= Ax + By + D, \\ f'_y(x, y) &= Bx + Cy + E, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.14)$$

yoki (2.1.13) va (2.1.14) dan:

$$\begin{aligned} 2f(a, b) &= Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F, \\ f'_x(a, b) &= Aa + Bb + D, \end{aligned}$$

$$f'_y(a,b) = Ba + Cb + E . \quad (2.1.15)$$

Bularga asosan (3) tenglamaning ko'rinishi bunday bo'ladi :

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2f'_x(a,b)x_1 + 2f'_y(a,b)y_1 + 2f(a,b) = 0 . \quad (2.1.16)$$

Bu tenglamani (1) tenglama bilan solishtirib qaraganda, ko'ramizki :

- 1) uning ikkinchi darajali hadlarining koeffisientlari o'zgarmay qolgan ;
- 2) birinchi darajali hadlarining koeffisientlari (2.1.1) tenglamaning chap tomonidan x va y ga nisbatan olingan xususiy hosilalarning $x=a$, $y=b$ bo'lgan xususiy qiymatlaridan iborat va ;
- 3) tenglamaning ozod hadi (2.1.1) tenglamaning chap tomonida x ning o'rniga a va y ning o'rniga b qo'yishdan chiqqan natijadan iborat ;
- 4) tenglamaning diskriminanti ham xuddi avvalgi (2.1.1) tenglamaning diskriminantiga teng bo'ladi, ya'ni parallel almashtirishdan ikkinchi tartibli chiziqning diskriminanti o'zgarmaydi. Haqiqatda (2.1.1) tenglamaning diskriminanti bunday bo'ladi :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \quad (2.1.17)$$

Koordinatalar boshini ko'chirish natijasida hosil bo'lgan (2.1.16) tenglamaning diskriminanti

$$\Delta^3 = \begin{vmatrix} A & B & f'_x \\ B & C & f'_y \\ f'_x & f'_y & 2f \end{vmatrix} \quad (2.1.18)$$

Bu determinantning birinchi ustun elementlari a ga va ikkinchi ustun elementlari b ga ko'paytirilib , so'ngra ularning yig'indisini uchinchi ustunning mos elementlaridan ayirib olamiz . Bi holda uchinchi ustun elementlari quyidagicha bo'ladi :

$$f'_x - Aa - Bb$$

$$f'_y - Ba - Cb$$

$$2f - af'_x - bf'_y$$

(2.1.15) tengliklarga asosan bu ifodalardan birinchisi D ga, ikkinchisi E ga va uchinchisi f_1 ga teng.(t=1 bo'lganda) . Demak

$$\Delta^3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ f'_x & f'_y & f_t \end{vmatrix} \quad (2.1.18)$$

Bu determinant ustida ham haligi kabi amallarni bajaramiz : birinchi yo'l elementlarini a ga va ikkinchisini b ga ko'paytirib, so'ngra ularning yig'indisini uchinchi yo'lning mos elementlaridan ayirib olamiz. Bu holda

$$\Delta^3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} ,$$

Bu esa (2.1.1) tenglamaning diskriminantidan iborat, ya'ni

$$\Delta = \Delta^0. \quad (2.1.19)$$

Shuning bilan , bajarilgan koordinatalar almashtirish natijasida (1) tenglamaning diskriminanti o'zgarmay , o'zini saqlab qoldi . Diskriminantning bu xususiyati odatda invariant deyiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqning markazi

Egri chiziqning markazi deb, shunday nuqtaga aytiladiki, egri chiziqning undan o'tgan har bir vatari shu nuqtaga teng ikkiga bo'linadi .

Bu ta'rifni e'tiborga olib, qanday shart bilan koordinatalar boshi egri chiziqning markazi bo'lishligini tekshiramiz. Buning uchun faraz qilaylik , koordinatalar boshidan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y = kx \quad (2.1.20)$$

va egri chiziqning tenglamasi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (2.1.1)$$

bo'lsin. (2.1.20) va (2.1.1) ning o'zaro uchrashgan nuqtalarini aniqlash uchun ikkala tenglamani birlikda yechishga to'g'ri keladi .Buning uchun (2.1.20)dan y ning ifodasini (2.1.1) ga qo'yamiz.

$$Ax^2 + 2Bkx^2 + Ck^2x^2 + 2Dx + 2Ekx + F = 0 ,$$

yoki

$$(A + 2Bk + Ck^2)x^2 + 2(D + Ek)x + F = 0 \quad (2.1.21)$$

Bu tenglamaning x_1 va x_2 ildizlari (2.1.20) va (2.1.1) ga chiziqning o'zaro kesishgan nuqtalarining absissalari bo'ladi. Kvadrat tenglamaning asosiy xossasiga muvofiq

$$x_1 + x_2 = -\frac{2(D + Ek)}{A + 2Bk + Ck^2} . \quad (2.1.22)$$

Agar vatarning o'rtasidagi nuqtaning koordinatalari x_0, y_0 faraz qilinsa, u holda

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{D + Ek}{A + 2Bk + Ck^2} ,$$

$$y_0 = kx_0 = -\frac{(D + Ek)k}{A + 2Bk + Ck^2}$$

bo'ladi. Koordinatalar boshi vatarning o'rtasida bo'lgan holda $x_0 = y_0 = 0$ bo'ladi.

Bu esa

$$D + Ek = 0 \quad (2.1.23)$$

bo'lgan holda bo'ladi.

Agarda koordinatalar boshi turgan nuqtada har qanday vatar teng ikkiga bo'linsa, u holda (2.1.23) tenglama k ning har qanday qiymatida qanoatlantirishi lozim, bu esa

$$D = 0 \text{ va } E = 0 \quad (2.1.24)$$

bo'lgan holdagina mumkin, ya'ni (2.1.1) tenglamaning ko'rinishi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0 \quad (2.1.25)$$

bo'lgan holdagina mumkin. Bu holning teskarisi ham to'g'ri, chunki $D = 0$ va $E = 0$ bo'lgandagina k ning har qanday qiymatida (2.1.23) shart bajarilishi mumkin.

Shuning bilan, koordinatalar boshi ikkinchi tartibli chiziqning markazi bo'lishi uchun uning tenglamasida birinchi darajali hadlar bo'lmasligi zarur va kifoyadir.

Koordinatalar boshini ko'chirishda chiqarilgan natijaga asosan, koordinatalar boshini (a, b) nuqtaga ko'chirilganda (2.1.1) tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'lgan edi :

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2f'_x(a, b)x_1 + 2f'_y(a, b)y_1 + 2f(a, b) = 0$$

Agar egri chiziqning markazi mavjud bo'lib, u koordinatalar boshida bo'lgan holda, tenglamaning birinchi darajali hadlari yo'qolar edi. Demak, (a, b) nuqta haligi egri chiziqning markazi bo'lishi uchun a va b quyidagi tenglamalarni qanoatlantirishi zarur va kifoyadir:

$$\left. \begin{aligned} f'_x(a, b) &= Aa + Bb + D = 0 \\ f'_y(a, b) &= Ba + Cb + E = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.26)$$

Agar a va b o'zgaruvchi koordinatalar deb faraz qilinsa, bu holda (2.1.26) tenglamalardan har biri tekislikda to'g'ri chiziq ifoda qiladi va izlangan (a, b) nuqta ularning kesishgan nuqtasidan iborat bo'ladi. SHuning uchun :

- 1) Agar (2.1.26) to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lmasa, ya'ni

$$\frac{A}{B} \neq \frac{B}{C}$$

yoki

$$AC - B^2 \neq 0 \quad (2.1.27)$$

bo'lgan holda egri chiziq cheklangan masofada birgina aniq markazga ega bo'ladi va bu holda egri chiziqning o'zi markazli egri chiziq deyiladi.

- 2) Agar $AC - B^2 = 0$ bo'lsa, (2.1.28) to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lib, ikki hol bo'lishi mumkin : a) to'g'ri chiziqlar bir-biri bilan birlashib ketmagan holda egri chiziqning markazi bo'lmaydi yoki to'g'risi uning markazi cheksiz uzoqda bo'ladi va b) to'g'ri chiziqlar birlashib ketgan holda egri chiziqning sanoqsiz ko'p markazlari bo'ladi va ular (2.1.26) to'g'ri chiziqlardan istalganini tashkil qiladi. Bu hol ya'ni (2.1.26) chiziqlar birlashib ketganda

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E} \quad (2.1.28)$$

Yoki

$$BE - DC = 0, BD - AE = 0, AC - B^2 = 0 \quad (2.1.29)$$

Bu esa (2.1.1) tenglamaning diskriminanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

ning uchinchi yo'l elementlariga nisbatan minorlaridan iborat, demak,

$$\Delta = 0.$$

Demak, bu holda (2.1.1) egri chiziq ikkita parallel (masalan, AB va A'B') to'g'ri chiziqlarga ajraladi va ulardan teng masofada bo'lib, ularning orasidan o'tgan CD to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi markaz rolini o'ynaydi. Haqiqatda, CD ning ixtiyoriy biror O nuqtasidan o'tgan har bir vatar teng ikkiga bo'linadi.

Natijada, (2.1.20) egri chiziqning markazi mavjud bo'lgan holda, ya'ni $AC - B^2 \neq 0$ bo'lganda uning koordinatalari (2.1.26) sistemani yechish bilan topiladi va u quyidagicha bo'ladi :

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{BE - DC}{AC - B^2} \\ b &= \frac{BD - AE}{AC - B^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.30)$$

Shuning bilan, (2.1.25) ga asosan ikkinchi tartibli egri chiziqning markazi koordinatalar boshida bo'lgan holda uning tenglamasi bunday bo'ladi:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2f(a, b) = 0,$$

Bunda

$$2f(a, b) = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F.$$

Ikkinchi tartibli egri chiziqning diametrlari

Egri chiziqning diametri deb, berilgan yo'nalishdagi parallel vatarlarning o'rta nuqtalaridan hosil bo'lgan geometrik o'ringa aytiladi. Bu ta'rifga asosan, ikkinchi tartibli egri chiziqning diametrini topamiz. Faraz qilaylik, egri chiziqning tenglamasi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (2.1.1)$$

bo'lsin. Agarda k ni o'zgarimas va l ni o'zgaruvchi parametr deb faraz qilsak, u holda o'zaro parallel bo'lgan va burchak koefitsientlari k bo'lgan hamma vatarlarning tenglamasi

$$y = kx + l \quad (2.1.31)$$

bo'ladi. Faraz qilaylik, bu vatarlardan birortasining o'rtasidagi nuqtaning koordinatalari x_0 va y_0 bo'lsin. Agar o'qlarning yo'nalishlarini saqlab, koordinatalar boshi shu nuqtaga ko'chirilsa, ya'ni $x = x_1 + x_0$ va $y = y_1 + y_0$ faraz qilinsa, (2.1.1) tenglamaning ko'rinishi

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2f'_x(x_0, y_0)x_1 + 2f'_y(x_0, y_0)y_1 + 2f(x_0, y_0) = 0$$

bo'ladi. Koordinatalar boshi (x_0, y_0) nuqtaning o'zida bo'lgan holda

$$k = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C} \quad \text{ga asosan :}$$

$$f'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) = 0,$$

yoki, o'zgaruvchi koordinatalarni hamon x, y faraz qilganda,

$$f'_x(x, y) + kf'_y(x, y) = 0 \quad (2.1.32)$$

bo'ladi. Izlangan geometrik o'rinning, ya'ni diametrning tenglamasi shundan iborat. Bu tenglamada

$$f'_x(x, y) = Ax + By + D,$$

$$f'_y(x, y) = Bx + Cy + E$$

bo'lgani uchun, uni

$$(Ax + By + D) + k(Bx + Cy + E) = 0 \quad (2.1.33)$$

shaklida yozish mumkin. Bu, demak (2.1.32) tenglama x va y ga nisbatan birinchi darajali bo'lgani uchun izlangan geometrik o'rinning, ya'ni diametrning to'g'ri chiziqdan iborat ekanligi ma'lum bo'ladi.

(2.1.33) tenglama $Ax + By + D = 0$ va $Bx + Cy + E = 0$ to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasidan o'tgan, ya'ni egri ghiziqning markazidan o'tgan to'g'ri chiziqni ko'rsatadi. Demak ikkinchi tartibli egri chiziqning diametrlari uning markazidan o'tadi.

(2.1.33) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$(A + Bk)x + (B + Ck)y + D + kE = 0, \quad (2.1.34)$$

bundan, diametrning burchak koeffisienti k' faraz qilinsa

$$k' = -\frac{A + Bk}{B + Ck} \quad (2.1.35)$$

bo'ladi. Bunga qaraganda k' ning qiymati umuman k ga bog'liq bo'lib, k o'zgarganda k' ham o'zgaradi. Biroq $B^2 - AC = 0$ bo'lgan holda, ya'ni egri chiziqning markazi bo'lmagan holda k' ning qiymati k ga bog'liq bo'lmaydi. Haqiqatda bu holda

$$C = \frac{B^2}{A}$$

bo'lgani uchun, bu (2.1.35) qo'yilsa

$$k' = -\frac{A}{B} \quad (2.1.35')$$

bo'ladi va k' ning qiymati k ga bog'liq bo'lmaydi. Demak, bu holda, ya'ni egri hiziqlarning markazi bo'lmagan holda uning hamma diametrlari o'zaro parallel bo'ladi.

(2.1.35) ni maxrajdan qutqazib, quyidagicha yozish mumkin :

$$A + B(k + k') + Ckk' = 0 \quad (2.1.36)$$

Bu tenglamaning chap tomonini k va k' ga nisbatan simmetrik ya'ni uning qiymati k va k' ni o'zaro almashtirishdan o'zgarmaydi. Demak, burchak koeffisienti k' bo'lgan diametr, burchak koeffisienti k bo'lgan vatarlarga nisbatan qo'shma bo'lsa, aksincha, burchak koeffisienti k bo'lgan diametr, burchak koeffisienti k' bo'lgan vatarlarga qo'shma bo'ladi. Boshqacha qilib ifoda qilganda :bir diametr, ikkinchi diametrga parallel bo'lgan vatarlarga nisbatan qo'shma bo'lsa, u holda ikkinchi diametr birinchi diametrga parallel bo'lgan vatarlarga nisbatan qo'shma bo'ladi. Bu xususiyatga ega bo'lgan ikki diametr o'zaro qo'shma deyiladi. O'zaro perpendikulyar bo'lgan qo'shma diametrlar egri chiziqning bosh diametrlari yoki uning o'qlari deyiladi. Bu holda $kk' + 1 = 0$ (perpendikulyarlik sharti) va bundan

$$kk' = -1, \quad (2.1.37)$$

yoki bu (2.1.36) ga qo'yilsa,

$$A + B(k + k') - C = 0,$$

bundan

$$k + k' = -\frac{A-C}{B}. \quad (2.1.38)$$

(2.1.37) va (2.1.38) ga muvofiq k va k' ushbu

$$k^2 + \frac{A-C}{B}k - 1 = 0 \quad (2.1.39)$$

yoki

$$Bk^2 + (A-C)k - B = 0 \quad (2.1.40)$$

kvadrat tenglamaning ildizlari bo'ladi.

Bu tenglamada

$$(A-C)^2 + 4B^2$$

Hammavaqt noldan katta bo'lgani uchun, (2.1.39) tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil bo'ladi. Bu esa markazli egri chiziqlarning ikkita haqiqiy o'qi borligini ko'rsatadi.

Markazi bo'lmagan egri chiziqlarning hamma diametrlari o'zaro parallel bo'lgani uchun, bunday egri chiziqlarning qo'shma diametrlari bo'lmaydi. Bunday egri chiziqlarning yolg'iz birgina o'qi bo'ladi va u tegishli parallel vatarlarga perpendikulyar bo'ladi. Perpendikulyarlik sharti bo'yicha $1 + kk' = 0$ yoki bundan

$$k = -\frac{1}{k'},$$

Yoki (2.1.35) ga asosan

$$k = \frac{B}{A}.$$

Bu (2.1.33)ga qo'yilsa, markazsiz egri chiziqlarning o'qi uchun tenglama hosil bo'ladi.

Misollar

Misol 1. Ushbu tenglamaning ikkita to'g'ri chiziq ifoda qilishi isbot qilinsin:

$$y^2 - 4xy - 5x^2 + 5x - y = 0$$

Berilgan tenglamani ikkinchi darajali umumiy tenglama bilan solishtirib qaraganda :

$$A = -5, \quad B = -2, \quad C = 1, \quad D = 2\frac{1}{2}, \quad E = -\frac{1}{2}, \quad F = 0.$$

Demak,

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 2\frac{1}{2} \\ -2 & +1 & -\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Bu esa berilgan tenglamaning ikkita to'g'ri chiziq ifoda qilishini isbot qiladi.

$B^2 - AC = (-2)^2 - (-5) = 4 + 5 > 0$ bo'lgani uchun ikkala chiziq haqiqiy va bir-birini kesuvchi bo'ladi. Ularning tenglamalarini topish uchun berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz:

$$y^2 - (4x+1)y - 5x^2 + 5x = 0,$$

$$y = \frac{4x+1 \pm \sqrt{(4x+1)^2 - 4(-5x^2 + 5x)}}{2},$$

$$y = \frac{4x+1 \pm \sqrt{36x^2 - 12x + 1}}{2},$$

$$y = \frac{4x+1 \pm \sqrt{(6x-1)^2}}{2},$$

$$y = \frac{4x+1 \pm (6x-1)}{2},$$

$$y = 5x, \quad y = -x + 1$$

Ikkala to'g'ri chiziq tenglamalari bo'ladi.

Misol 2. Quyidagi tenglamaning ikkita to'g'ri chiziq ifoda qilishi isbot qilinsin :

Berilgan misolda :

$$x^2 - 2xy + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Demak, berilgan tenglama ikkita to'g'ri chiziq ifoda qiladi. $B^2 - AC = (-1)^2 - 1 = 0$ bo'lgani uchun ular o'zaro parallel bo'ladi. Buni sinab ko'rish uchiun berilgan tenglamani y ga nisbatan yechib ko'ramiz:

$$y^2 - (2x-3)y + x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$y = \frac{2x-3 \pm \sqrt{(2x-3)^2 - 4(x^2 - 3x + 2)}}{2},$$

$$y = \frac{2x-3 \pm 1}{2}$$

$$y = x - 1, \quad y = x - 2$$

Haqiqatda bular ikkita parallel to'g'ri chiziqdan iborat.

Misol 3. Egri chiziq tenglamasi berilgan:

$$x^2 - 2xy + y^2 + y - 1 = 0$$

Buning $x + 2y = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan vatarlarga nisbatan qo'shma diametrining tenglamasi topilsin. Vatarlarning burchak koeffitsiyenti $k = -\frac{1}{2}$ bo'lgani uchun bularga qo'shma diametr tenglamasi

$$f'_x(x, y) - \frac{1}{2} f'_y(x, y) = 0$$

bo'ladi. Berilgan misolda :

$$f'_x(x, y) = x - y, \quad$$

$$f'_y(x, y) = -x + y + \frac{1}{2}$$

yoki

$$6x - 6y - 1 = 0.$$

Misol 4. Ushbu egri chiziqning bosh diametrlari topilsin :

$$5x^2 - 4xy + y^2 - 2 = 0.$$

$$f'_x(x, y) = 5x - 2y; \quad f'_y(x, y) = -2x + y;$$

$$5x - 2y + k(-2x + y) = 0 \quad (A)$$

Buning burchak koeffitsiyenti

$$k' = \frac{5 - 2k}{2 - k}.$$

Egri chiziqning bosh diametri o'zini ikkiga bo'ladigan vatarlarga perpendikulyar bo'lgani uchun

$$1 + kk' = 0 \text{ yoki } 1 + \frac{5 - 2k}{2 - k} \cdot k = 0 \text{ yoki } k^2 - 2k - 1 = 0, \text{ bundan}$$

$$k_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad k_2 = 1 - \sqrt{2},$$

demak bosh diametrning tenglamalari (bular (A) ga qo'yilsa) :

$$(3 - 2\sqrt{2})x - (1 - \sqrt{2})y = 0,$$

$$(3 + 2\sqrt{2})x - (1 + \sqrt{2})y = 0$$

2.2 Invariantlar usuli

Ikkinchi tartibli egri chiziqning markazi koordinatalar boshida bo'lgan holda uning tenglamasi

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2f(a, b) = 0 \quad (2.2.1)$$

Bunda

$$2f(a, b) = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F. \quad (2.2.2)$$

Shuning bilan birga $f'_x(x, y) + kf'_y(x, y) = 0$ ga asosan markazli egri chiziqning a va b koordinatalari ushbu sistema bilan aniqlangan edi:

$$\left. \begin{aligned} Ab + Bb + D &= 0, \\ Ba + Cb + E &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

Bulardan birinchisi a ga va ikkinchisi b ga ko'paytirib, so'ngra ularni qo'shamiz. Bu paytda

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + Da + Eb = 0$$

bo'ladi. Buning ikkala tomoniga $Da + Eb + F$ ni qo'shib, (2.2.2) ni e'tiborga olsak,

$$f(a, b) = Da + Eb + F \quad (2.2.4)$$

bo'ladi. Agar bundagi a va b ning o'rniga ikkinchi tartibli egri chiziqning markazidagi ularning ifodalari qo'yilsa :

$$\begin{aligned} 2f(a, b) &= \frac{D^2C - BED + AE^2 - BDE}{B^2 - AC} + F = \\ &= \frac{D^2C - 2BDE + AE^2 + B^2F - ACF}{B^2 - AC}, \end{aligned}$$

yoki

$$2f(a, b) = -\frac{\Delta}{B^2 - AC}. \quad (2.2.5)$$

Shuning uchun (2.2.1) tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 = -\frac{\Delta}{B^2 - AC}. \quad (2.2.6)$$

Bu tenglamani yana soddalashtirish maqsadi bilan koordinata o'qlarining yo'nalishlarini o'zgartiramiz, ya'ni biror, hozircha ma'lum bo'lmagan, ixtiyoriy burchakka aylantiramiz. Aylantirilgan burchak, ya'ni koordinata o'qlarining yangi va eski yo'nalishlari orasidagi burchak α faraz qilinsa va egri chiziqning yangi sistemaga nisbatan o'zgaruvchi koordinatalari x va y faraz qilinsa, u holda almashtirish formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y_1 &= x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.7)$$

Bularni (2.2.6) ga qo'yamiz :

$$\begin{aligned} A(x \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 + 2B(x \cos \alpha - y \sin \alpha)(x \sin \alpha + y \cos \alpha) + C(x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 = \\ = \frac{\Delta}{B^2 - AC}, \end{aligned}$$

Yoki bundagi qavslarni ochib, x^2 , xy va y^2 li hadlari to'plab olinsa, uning ko'rinishi bunday bo'ladi:

$$(A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha)x^2 + 2(-A\cos\alpha\sin\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha)xy + (A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)y^2 = \frac{\Delta}{B^2 - AC} \quad (2.2.8)$$

Bu tenglamaning koeffisientlarini quyidagicha ifoda qilamiz:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha, \\ B_1 &= -A\cos\alpha\sin\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha, \\ C_1 &= A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.2.9)$$

Bu holda (2.2.8) ning ko'rinishi bunday bo'ladi :

$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 = \frac{\Delta}{B^2 - AC}. \quad (2.2.10)$$

(2.2.9) dagi ifodalarni birinchisi bilan uchinchisini qo'shsak :

$$A_1 + C_1 = A + C \quad (2.2.11)$$

va birinchisidan uchinchisini ayirsak :

$$\begin{aligned} A_1 - C_1 &= A(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 4B\sin\alpha\cos\alpha - C(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \\ &= (A - C)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 4B\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha &= \cos 2\alpha, \quad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha \end{aligned} ;$$

bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} A_1 - C_1 &= (A - C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha, \\ B_1 &= B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - (A - C)\cos\alpha\sin\alpha, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

yoki

$$B_1 = B\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(A - C)\sin 2\alpha, \quad (2.2.13)$$

yoki

$$4B_1^2 = 4B^2\cos^2 2\alpha - 4B(A - C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha + (A - C)^2\sin^2 2\alpha, \quad (2.2.14)$$

$$(A_1 - C_1)^2 = (A - C)^2\cos^2 2\alpha + 4B(A - C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha + 4B^2\sin^2 2\alpha ; \quad (2.2.15)$$

(14) va (5) ni qo'shganda

$$(A_1 - C_1)^2 + 4B_1^2 = (A - C)^2 + 4B^2 .$$

So'ngi ifodadan (11) ning kvadratini ayirib olamiz:

$$(A_1 - C_1)^2 - (A_1 + C_1)^2 + 4B_1^2 = (A - C)^2 - (A + C)^2 + 4B^2 ,$$

yoki

$$-4A_1C_1 + 4B_1^2 = -4AC + 4B^2 ,$$

yoki

$$B_1^2 - A_1C_1 = B^2 - AC . \quad (2.2.16)$$

Bajarilgan almashtirish muhim xossaga egadir. Haqiqatda, (2.2.6) tenglama, to'g'riburchakli koordinatalarda bajarilgan (2.2.7) almashtirish natijasida (2.2.10) ga kelib, hamon o'z ko'rinishini saqladi ; (2.2.6) tenglamaning chap tomonidagi x_1 va y_1 ga nisbatan tuzilgan bir jinsli ikkinchi darajali ko'p hadli xuddi shunga o'xshash x va y ga nisbatan tuzilgan (10) ning chap tomonidagi ko'phadliga aylandi. Ikkinchi tomondan (2.2.11) va (2.2.16) ga muvofiq.

$$A + C \text{ va } B^2 - AC \quad (2.2.17)$$

Ifodalar forma va miqdor jihatdan o'zini saqlab qoldi; umuman bunday xossaga ega bo'lgan haligi kabi ifodalarni invariant deyiladi. Shuning uchun (2.2.17) ifodalari $Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2$ bir jinsli ko'phadlarning (2.2.7) almashtirish bo'yicha invarianti deyiladi. α burchagi hozircha bizda ixtiyoriy edi. Endi uning qiymatini shunday qilib aniqlaymizki, (2.2.10) tenglamaning (xy) li hadi yo'q bo'lsin. Bu esa (2.2.13)ga asosan

$$B_1 = B \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(A - C) \sin 2\alpha = 0$$

bo'lganda, yoki

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C} \quad (2.2.18)$$

bo'lgan holda mumkin. Bu chog'da (10) tenglamaning ko'rinishi bunday bo'ladi :

$$A_1x^2 + C_1y^2 = \frac{\Delta}{B^2 - AC} \quad (2.2.19)$$

Ikkinchi tomondan $B_1 = 0$ bo'lganda (16) ning ko'rinishi bunday bo'ladi :

$$-A_1C_1 = B^2 - AC ,$$

yoki

$$A_1C_1 = AC - B^2 \quad (2.2.20)$$

(2.2.11) bilan (2.2.20) ga asosan (2.2.19) tenglamaning A_1 va C_1 koefitsientlari ushbu ikkinchi darajali tenglamaning ildizlaridan iborat :

$$t^2 - (A + C)t + (AC - B^2) = 0 ,$$

demak,

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{A + C + \sqrt{(A + C)^2 - 4(AC - B^2)}}{2} = \frac{A + C + \sqrt{A^2 + 2AC + C^2 - 4AC + 4B^2}}{2} = \\ &= \frac{A + C + \sqrt{A^2 - 2AC + C^2 + 4B^2}}{2} = \frac{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2} ; \\ C_1 &= \frac{A + C - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2} . \end{aligned}$$

Shuning bilan natijada markazli egri chiziqning eng soda yoki kanonik tenglamasining koefitsiyentlari ushbu formula bilan aniqlanadi:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}(A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}) \\ C_1 &= \frac{1}{2}(A + C - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.21)$$

Markazli egri kanonik tenglamasini tekshirish chiziqning.

Markazli egri chiziqning kanonik tenglamasi

$$A_1x^2 + C_1y^2 = \frac{\Delta}{M}, \quad (2.2.22)$$

Bunda

$$M = B^2 - AC . \quad (2.2.23)$$

Endi (2.2.22) tenglamaning qanday egri chiziq ifoda qilishini tekshiramiz . U tenglamaning ikkala tomonini $\frac{\Delta}{M}$ ga bo'lganda

$$\frac{A_1 M}{\Delta} x^2 + \frac{C_1 M}{\Delta} y^2 = 1 \quad (2.2.24)$$

Bo'ladi. Bu tenglamaning geometrik ma'nosi uning koeffisientlariga bo'g'liqdir. Shuning uchun ularning ustida turlicha faraz qilishga to'g'ri keladi . $M \neq 0$ bo'lgani uchun uning ustida ikki xil faraz qilish mumkin : 1) $M < 0$ va 2) $M > 0$.

Eng avval birinchi holni tekshiramiz, ya'ni

$$M = B^2 - AC < 0 \quad (2.2.25)$$

bo'lsin. Markazli egri chiziqning tenglamasini soddalashtirishda ushbu ikki munosabat chiqarilgan edi:

$$A_1 + C_1 = A + C , \quad (2.2.11)$$

$$A_1 C_1 = AC - B^2 . \quad (2.2.20)$$

(4) ga asosan

$$AC > B^2 ,$$

bu esa A va C ishoralarining bir xilligini ko'rsatadi.(2.2.25) ga muvofiq (2.2.20) dan

$$A_1 C_1 > 0 ,$$

Bu esa A_1 va C_1 ishoralarining bir xilligini ko'rsatadi .Shuning uchun $A_1 + C_1$ va $A + C$ yig'indilari ham bir xil ishorali bo'ladi. Ikkinchi tomondan (2.2.11) ga asosan bu yig'indilar o'zaro teng bo'lgani uchun : A, C, A_1 va C_1 koeffisiyentlarining ishoralari bir xil bo'ladi. Shuning uchun ulardan birining ishoralariga diqqat qilinsa kifoya. Masalan, A ni olganda, agar :

a) $A \cdot \Delta < 0$ bo'lsa, ya'ni A va Δ ning ishoralari har xil bo'lsa, u holda (2.2.25) ga asosan

$$\frac{A_1 M}{\Delta} > 0 , \quad \frac{C_1 M}{\Delta} > 0 .$$

Shuning uchun

$$\frac{A_1 M}{\Delta} = \frac{1}{a^2} , \quad \frac{C_1 M}{\Delta} = \frac{1}{b^2}$$

faraz qilinsa, (2.2.24) tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (2.2.26)$$

Bu esa yarim o'qlari a va b dan iborat bo'lgan ellipsni ifoda qiladi,

b) $A \cdot \Delta > 0$ bo'lsa, ya'ni A va Δ ning ishoralari bir xil bo'lsa, u holda (2.2.25) ga asosan

$$\frac{A_1 M}{\Delta} < 0 , \quad \frac{C_1 M}{\Delta} < 0 .$$

Shuning uchun bu holda

$$\frac{A_1 M}{\Delta} = -\frac{1}{a^2} , \quad \frac{C_1 M}{\Delta} = -\frac{1}{b^2}$$

Faraz qilinsa, (2.2.24) tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi :

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1. \quad (2.2.27)$$

Bu tenglamada x va y hech qanday haqiqiy qiymatga ega bo'la olmaydi. Shuning uchun mavhum ellipsni ifoda qiladi.

Endi M ni musbat faraz qilamiz :

$$M = B^2 - AC > 0. \quad (2.2.23)$$

Bu holda (2.2.20)ga asosan $A_1 C_1 < 0$, ya'ni A_1 va C_1 ning ishoralari har xil bo'ladi. Shuning uchun bu holda

$$\frac{A_1 M}{\Delta} = \pm \frac{1}{a^2}, \quad \frac{C_1 M}{\Delta} = \mp \frac{1}{b^2}$$

faraz qilish mumkin. Bu holda (2.2.24) tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x^2}{\pm a^2} + \frac{y^2}{\mp b^2} = 1$$

yoki

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

Bu esa yarim o'qlari a va b dan iborat bo'lgan giperbolani ifoda qiladi.

Markazsiz egri chiziqning tenglamasini soddalashtirish.

Egri chiziqning markazi cheksiz uzoqda bo'lgan holda

$$M = B^2 - AC = 0 \quad \text{yoki} \quad AC = B^2 \quad (2.2.23)$$

bo'ladi. Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasini olib uning ikkala tomonini A ga ko'paytiramiz:

$$A^2 x^2 + 2ABxy + ACy^2 + A(2Dx + 2Ey + F) = 0$$

yoki (2.2.23) ga asosan :

$$(Ax + By)^2 + A(2Dx + 2Ey + F) = 0. \quad (2.2.28)$$

Tenglamani soddalashtirish maqsadi bilan koordinata o'qlarining yo'nalishlarini o'zgartiramiz, masalan, uni biror α burchakka aylantiramiz. Bu holda almashtirish formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y &= x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.7)$$

Bular (2.2.28)ga qo'yilsa :

$$\begin{aligned} &[A(x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha) + B(x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha)]^2 + \\ &+ A[2D(x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha) + 2E(x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha) + F] = 0 \end{aligned},$$

yoki

$$[(A \cos \alpha + B \sin \alpha)x_1 + (B \cos \alpha - A \sin \alpha)y_1]^2 + A[2(D \cos \alpha + E \sin \alpha)x_1 + 2(E \cos \alpha - D \sin \alpha)y_1 + F] = 0 \quad (2.2.29)$$

Hozirgacha α ixtiyoriy burchak edi. Endi uning qiymatini shunday aniqlaymizki ,

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha = 0$$

yoki

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{B}{A} \quad (2.2.30)$$

bo'lsin. Buni e'tiborga olib,

$$\left. \begin{aligned} N &= (B \cos \alpha - A \sin \alpha)^2 \\ P &= A(D \cos \alpha + E \sin \alpha) \\ Q &= A(E \cos \alpha - D \sin \alpha) \\ R &= AF \end{aligned} \right\} \quad (2.2.31)$$

Faraz qilinsa, (2.2.29) tenglamaning ko'rinishi bunday bo'ladi:

$$Ny_1^2 + 2Px_1 + 2Qy_1 + R = 0 \quad (2.2.32)$$

(2.2.30) ga asosan $\operatorname{tg} \alpha$ ma'lum bo'lgani uchun uning yordami bilan hammavaqt (2.2.31) dagi $\sin \alpha$ va $\cos \alpha$ ni aniqlash mumkin. Demak (2.2.32) hamma koeffitsiyentlari ma'lum bo'ladi.

(2.2.32) tenglamani yana soddalashtirish maqsadi bilan koordinatalar boshini biror (a, b) nuqtaga ko'chiramiz. Bu holda almashtirish formulalari

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + a$$

bo'ladi va (2.2.32) ning ko'rinishi

$$N(y + b)^2 + 2P(x + a) + 2Q(y + b) + R = 0,$$

yoki

$$Ny^2 + 2(Nb + Q)y + 2Px + (Nb^2 + 2Pa + 2Qb + R) = 0 \quad (2.2.33)$$

bo'ladi. Nuqtaning a va b koordinatalariga shunday qiymat tayin qilamizki ,

$$Nb + Q = 0, \quad Nb^2 + 2Pa + 2Qb + R = 0$$

bo'lsin. Bu esa

$$b = -\frac{Q}{N} \quad \text{va} \quad \frac{Q^2}{N} + 2Pa - \frac{2Q^2}{N} + R = 0$$

yoki

$$2PNa - Q^2 + NR = 0 \quad \text{yoki} \quad a = \frac{Q^2 - NR}{2PN}$$

bo'lgan holda mumkin. Bu vaqtda (2.2.33) ning ko'rinishi bunday bo'ladi :

$$Ny^2 + 2Px = 0 \quad \text{yoki} \quad y^2 = -2\frac{P}{N}x, \quad (2.2.34)$$

yoki

$$-\frac{P}{N} = p$$

faraz qilinsa,

$$y^2 = 2px \quad (2.2.35)$$

bo'ladi va bu parabolani ifoda qiladi .

p ning qiymatini aniqlash uchun (2.2.30) dan $\sin \alpha$ va $\cos \alpha$ ning qiymatlarini aniqlashga to'g'ri keladi. Buning uchun (2.2.30) ni

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{A}{B} \quad \text{yoki} \quad \frac{\sin \alpha}{-A} = \frac{\cos \alpha}{B}$$

kabi yozib, undan ushbu hosila proporsiyani tuzamiz :

$$\frac{\sin \alpha}{-A} = \frac{\cos \alpha}{B} = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

Demak

$$\sin \alpha = \frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.2.36)$$

(2.2.31) ga muvofiq

$$P = \frac{ABD - A^2 E}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$N = \left(\frac{A^2 + B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = A^2 + B^2.$$

Demak

$$\begin{aligned}
p &= -\frac{P}{N} = \frac{A(AE - BD)}{(A^2 + B^2)\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{\frac{A^2(AE - BD)^2}{(A^2 + B^2)^3}} = \\
&= \sqrt{\frac{A^2(A^2E^2 - 2ABDE + B^2D^2)}{(A^2 + B^2)^3}} = \sqrt{\frac{A^2(A^2E^2 - 2ABDE + ACD^2)}{(A^2 + AC)^3}} = ; \\
&= \sqrt{-\frac{(-AE^2 + 2BDE - CD^2)}{(A+C)^3}} = \sqrt{-\frac{\Delta}{(A+C)^3}}
\end{aligned}$$

Chunki $B^2 - AC = 0$ bo'lganda $\Delta = -AE^2 + 2BDE - CD^2$ bo'ladi. Natijada

$$p = \sqrt{-\frac{A}{(A+C)^3}} \quad (2.2.37)$$

$B^2 = AC$ bo'lgani uchun A va C ning ishoralari bir xil bo'ladi. A ning ishorasini hammavaqt musbat qilish mumkin. Shuning uchun $(A+C)$ ni musbat faraz qilib bo'ladi. Ikkinchi tomondan

$$\begin{aligned}
\Delta &= -AE^2 + 2BDE - CD^2 = -(AE^2 + CD^2 - 2BDE) = \\
&= -(AE^2 + CD^2 - 2DE\sqrt{AC}) = -(E\sqrt{A} - D\sqrt{C})^2 < 0
\end{aligned}$$

Shuning uchun parabolaning diskriminanti hammavaqt manfiy bo'ladi va radikal ostida musbat son bo'ladi. Demak, p - hammavaqt mavjud va musbat sondan iborat.

Shuning bilan, bu bobgadi tekshirishning natijasini ushbu jadval bilan tasvirlash mumkin.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

$$M = B^2 - AC.$$

Misol. Quyidagi tenglamaning geometrik ma'nosini tekshirib, uning kanonik tenglamasi tuzilsin :

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

Egri chiziqning jinsini aniqlash uchun Δ va M ni hisoblashga to'g'ri keladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -26 \\ -16 & -28 & 80 \end{vmatrix} = -1296 \quad , \quad A \cdot \Delta < 0 \quad .$$

$$M = B^2 - AC = 4 - 5 \cdot 8 = -36 < 0 \quad .$$

Demak, berilgan tenglama haqiqiy ellipsdan iborat. Uning kanonik tenglamasining ko'rinishi :

$$A_1 x^2 + C_1 y^2 = \frac{\Delta}{M} \quad ,$$

$$A_1 = \frac{1}{2}[A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}] = \frac{1}{2}[5 + 8 + \sqrt{(5 - 8)^2 + 4 \cdot 2^2}] = 9 \quad ;$$

$$C_1 = \frac{1}{2}[A + C - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}] = \frac{1}{2}[5 + 8 - \sqrt{(5 - 8)^2 + 4 \cdot 2^2}] = 4 \quad ;$$

$$\frac{\Delta}{M} = \frac{-1296}{-36} = 36 \quad .$$

Demak, ellipsning kanonik tenglamasi

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \quad ,$$

yoki

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad .$$

Xulosa

Bu bob umumiy tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqlarni kanonik holga keltirib aniqlash deb nomlanib 2ta paragrafdan iborat. Birinchi paragrafda ikki noma'lumli ikkinchi darajali algebraik tenglamaning dekart koordinatalarga nisbatan ellips, giperbola, parabola yo xususiy holda ikki to'g'ri chiziq bo'lishi aks ettirilgan.

Ikkinchi paragrafimiz invariantlar usuli bo'lib, bunda ikkinchi tartibli egri chiziqni parallel ko'chirish va burish yordamida o'zini shaklini saqlab qolganligi aks ettirilgan. Markazli va markazsiz egri chiziqlarning tenglamalari ham soddalashtirib ko'rsatilgan.

Xotima

Ushbu bitiruv malakaviy ishining mavzusi “Ikkinchi tartibli egri chiziqlar” bo’lib, u kirish qismi, ikki bob, beshta paragraf, ikki bobning xulosasi va adabiyotlardan iborat. Ushbu bitiruv malakaviy ishining birinchi bobi ya’ni tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida umumiy mulohazalar deb nomlanib, bu bobda tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlarni ta’rifidan foydalanib tenglamasini keltirib chiqarilgan. Ularning eksentrisiteti, direktrisasi va diametr formulalari ham keltirib chiqarilgan.

Mavzuning ikkinchi bobi “Umumiy tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqlarni kanonik holga keltirib aniqlash”dir. Bu bobda ikkinchi tartibli egri chiziqlarni parallel ko’chirish natijasi ifodalar forma va miqdor jihatdan o’zini saqlab qolishini invariant bo’lishini ko’rsatilgan.

Adabiyotlar

1. I.A. Karimov, Vatan sajdagoh kabi muqaddasdir. Asarlar, 3-jild-Toshkent : O'zbekiston, 1997.
2. I.A. Karimov, O'zbekiston buyuk kelajak sari-Toshkent: O'zbekiston, 1998 .
3. I.A. Karimov, Yangicha fikrlash va ishlash davr talabi.Asarlar, 5-jild-Toshkent : O'zbekiston 1998 .
4. I.A. Karimov, Xavfsizlik va barqarorlik taraqqiyot yo'lida. Asarlar, 6-jild-Toshkent : O'zbekiston, 1998.
5. S.V. Baxvalov, P.S. Modenov, A.S. Parxomenko, Analitik geometriyadan masalalar to'plami. Toshkent, O'qituvchi, 2006.
6. A.B. Погорелов, Аналитик геометрия. Тошкент, Укитувчи, 1983.
7. М.М. Постников, Аналитическая геометрия. Москва, Наука, 1979.
8. Д.В. Клетеник, Сборник задач по аналитической геометрии. Москва, Наука. 1998.
9. К. Кравченко, Решения задач по аналитической геометрии. <http://www.a-geometriy.narod.ru>
10. Н.Д. Додажонов, М.Ш. Жураева, Геометрия, I-кисм. Тошкент – “Укитувчи” – 1982.
11. A.Y. Narmanov, Analitik geometriya. O'zbekiston faylasuflar milliy jamiyati nashriyoti, Toshkent, 2008.
12. A.B. Погорелов, Аналитическая геометрия. “ Наука”, Москва, 1978.
13. Кори Ниёзий, Танланган асарлар, I том, Тошкент.1967.
14. [www. ZiyoNet.uz](http://www.ZiyoNet.uz).
15. www.Google.com.