

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

Fizika- matematika fakulteti

“Matematika” kafedrası

Hamroyeva Muqaddas Bozorovnaning

“Karrali qatorlarning yaqinlashish to'plamlarini o'rganish”

mavzusida

5130100-“Matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr

darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**“Ish ko'rildi va himoyaga ruxsat
berildi”**

Ilmiy rahbar: o'qit. Dilmurodov

“___” _____ 2015 y.

Kafedra mudiri:

_____ dots. R.T. Muxitdinov

Taqrizchi _____ o'qit. Sh. M. Ahmedov

“___” _____ 2015 y.

“___” _____ 2015 y.

“Himoya qilishga ruxsat berildi”

Fakultet dekani:

prof. Sh. M. Mirzayev

“___” _____ 2015 y

Buxoro – 2015

Mundarija:

Kirish.....	3
Qatorlar haqida tushunchalar	
1.1 Sonli qatorlar va ularning yaqinlashuvchanligi.....	8
1.2 Funksional qatorlar.....	14
1.3 Darajali qatorlar	17
II. bob Karrali qatorlarning yaqinlashish to'plamlari haqida	
2.1 Karrali qator tushunchasi.....	31
2.2 Karrali qatorlarning yaqinlashish to'plamlari.....	38
Xotima.....	51
Adabiyotlar.....	52

Kirish

Ta'limni tarbiyadan, tarbiyani
esa ta'limdan ajratib bo'lmaydi
bu sharqona qarash, sharqona
hayot "falsafasi"

I.A.Karimov

Prezidentimizning bu so'zlari haqida fikr yuritganimizda esa buyuk ma'rifatparvar bobomiz A.Avloniyning "Tarbiya biz uchun yo hayot, yo momot, yo najot, yo halovat, yo saodat, yo falokat masalasidir" degan chuqur ma'noli so'zlarni istaymiz.

Haqiqatdan ham ertangi kunimizning qanday bo'lishi tinch va osoyishta mustaqil O'zbekistonimizning buyuk kelajagi qanday ravnaq topishi biz yoshlarni va biz kelajakda ta'lim-tarbiya beradigan yosh avlodning qo'lidadir.

Davlatimiz rahbari tashabbusi bilan mamlakatimizda 1999 yildan buyon Xotira va qadrlash kuni keng nishonlab kelinmoqda. Mustaqillik yillarida diyorimizda inson manfaatlari eng oliy qadriyat sifatida qadr topib, urush va mehnat faxriylari, boy hayotiy tajribaga ega insonlarga e'zoz ko'rsatish, keksalarni qadrlash hamda o'tganlarni xotirlash, ularning xayrli ishlarini yod etib, ehtirom ko'rsatish ishlari ibratli an'anaga aylandi.

Mazkur yo'nalishdagi ezgu ishlarga munosib hissa qo'shish maqsadida O'zbekiston kasaba uyushmalari Federatsiyasi Kengashi tomonidan mamlakat miqyosida "Kasaba uyushmalari — faxriylarga" aktsiyasi o'tkazilmoqda. Aktsiya doirasida barcha mehnat jamoalarida "Jasorat, burch, matonat" shiori ostida turli ma'naviy-ma'rifiy tadbirlar, uchrashuv va davra suhbatlari tashkil etilmoqda. Jumladan, davlatimiz rahbarining 2015 yil 6 martdagi "1941-1945 yillardagi urush qatnashchilarini rag'batlantirish to'g'risida"gi Farmonidan kelib chiqqan holda respublikamizning turli hududlarida istiqomat qilayotgan 3 mingdan ortiq faxriylarning har biriga manzilli yordam ko'rsatildi. Jannatmonand yurtdagina mana shunday mehr-oqibat og'ushida yashash mumkin, — deydi Toshkent shahrining Mirobod tumanida yashovchi Ikkinchi jahon urushi qatnashchisi Xazir

Ergashev. — Davlat va nodavlat tashkilotlari sovg'a-salomlar bilan yo'qlab kelishayapti. Kasaba uyushmalari Federatsiyasi Kengashi tomonidan ham pul mukofoti berildi. Bunday e'tibor ko'ngilni ko'tarish bilan birga, kishini yashartiradi ham. Bizni qadrlagan, ezgu ishga qo'l urganlar aslo kam bo'lmasin.

Yurtimiz tinchligi, osmonimiz musaffoligiga ko'z tegmasin. Shuningdek, tizimdagi sanatoriylarga 100 nafarga yaqin urush va mehnat fronti faxriysiga, 34 nafar ishlaydigan pensionerlarga bepul, 121 nafar mehnat faxriylariga farzandlarining ish joyidan imtiyozli yo'llanmalar taqdim etildi. Hozirda kasaba uyushma tizimidagi sanatoriylar tomonidan mazkur sihatgohlar joylashgan hududlardagi mahallalarda istiqomat qilayotgan otaxon va onaxonlar chuqurlashtirilgan tibbiy ko'riqdan o'tkazilib, ambulator davolash ishlari olib borilmoqda. Bundan tashqari, Xotira va qadrlash kuni arafasida kasaba uyushmalari Federatsiyasi Kengashi tomonidan 700 nafardan ortiq keksalar, urush va mehnat faxriylarining Samarqand, Buxoro, Xiva, Qo'qon va Toshkent shaharlariga sayohatlari uyushtirildi.

Bundan tashqari, 1997-yilda qabul qilingan "Ta'lim to'g'risidagi" qonun va "Kadrlar tayyorlash milliy dastur"ini ham aytish mumkin.

"Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" haqida hukumat darajasidagi quyidagi fikrlarni O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Karimov Vazirlar Mahkamasining "O'zbekistonning 1996-yildagi ijtimoiy-iqtisodiy taraqqiyoti yakunlari hamda 1997-yildagi iqtisodiy islohotlarning ustuvor yo'nalishlari" ga bag'ishlangan majlisidagi nutqida bayon etilgan:

1997-yilda biz yaxshi, zamonaviy talablarga javob beradigan kadrlar tayyorlash masalasiga alohida etibor berishimiz kerak.

Ta'lim tizimini tubdan qayta ko'rish vaqti yetdi, professional bilimlarni egallash imkoniyatlarini kengaytish, ma'mur-menejerlarni tayyorlashni yo'lga qo'yish, yangi sharoitlarda, yangi zamonaviy texnologiyalarda ishlashga qobil ishchi va mutaxassislarni tayyorlashni yo'lga qo'yish lozim.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A.Karimov Oliy Majlisning 9-sessiyasida kadrlar tayyorlash milliy dasturi butun ta'lim tizimining islohoti haqida hayotimizni hal etuvchi muhim masalalar qatorida ta'lim-tarbiya tizimini tubdan o'zgartirish, uni yangi zamon talabi darajasiga ko'tarish, barkamol avlodimiz kelajagiga dahldor qonun loyihalari ham bor degan edi. Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi inson omiliga juda katta ma'no, buyuk ma'no beradi: maqsad va vazifalar strategiyasidan tartib, to ta'lim-tarbiya jarayonini hamma qirralarga oid aniq dasturlar majmuasicha har bir negizida inson asosiy omil hisoblanadi.

Kadrlar tayyorlash tizimida shaxs bosh subyekti sifatiga ko'riladi.

Shaxsning o'qimishliligi va uning yaratuvchanlik malakasi milliy dasturni amalga oshirishning asosiy natijasi bo'lmog'i darkor. Prezident I.A.Karimov milliy dastur to'g'risidagi o'z nutqida: "Faqatgina chinakam ma'rifatli odam inson qadrini, millat qadriyatlarini, bir so'z bilan aytganda, o'zligini anglash erkin va ozod jamiyatda yashash, mustaqil davlatimizning jahon jamiyatidagi o'ziga munosib obro'li o'rin egallashi uchun fidoiylilik bilan kurashish mumkin" deb ta'kidlangandi.

Barchamizga ayonki, inson qalbiga yo'l ta'lim-tarbiyadan boshlanadi. Shuning uchun qachonki bu haqda gap ketsa, ajdodlarimiz qoldirgan bebaho merosini eslash bilan birga, ota-onalarimiz qatori biz uchun eng yaqin bo'lgan yana bir buyuk zot ustoz va murabbiylarning oliyjanob mehnatini hurmat bilan tilga olamiz.

Biz yurtimizda yangi avlod, yangi tafakkur sohiblarini tarbiyalashdek mas'uliyatli vazifani ado etishda birinchi galda ana shu kasb egalariga suyanamiz va tayanamiz, ertaga o'rnimizga keladigan yoshlarning ma'naviy dunyosini shakllantirishda ularning xizmati naqadar beqiyos ekanini o'zimizga yaxshi tasavvur qilamiz.

Agar bolalar erkin fikrlashni o'rganmasa, berilgan ta'lim samarasi past bo'lishi muqarrar. Jamiyatning har bir sohasi kabi ta'limda ham islohotlar amalga oshirildi.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturi-orzuyimizga erishishning qonun bilan himoyalangan hujjatidir.

Yurtimizda “Barkamol avlod-O‘zbekiston taraqqiyotining poydevori” asarlarida quyidagi shartlarni o‘qishimiz mumkin.

“Mamlakatimizni istiqlol yo‘lidagi birinchi qadamlaridanoq buyuk mamlakatimizni tiklash va yanada yuksaltirish, milliy ta‘lim-tarbiya tizimini takomillashtirish, uning milliy zamirini mustahkamlash, zamon talablari bilan uyg‘unlashtirish asosida jahon andozalari va ko‘nikmalari darajasiga chiqish maqsadida katta ahamiyat berib kelinmoqda.

Davlat va jamiyat kadrlar tayyorlash tizimini uzluksiz rivojlantirish va takomillashtirishning kafili bo‘lishi zarur. Ular yuqori malakali raqobatga qodir mutaxassislar tayyorlash bo‘yicha ta‘lim muassasalarning faoliyati uyg‘unlashtirishi lozim. Faqat shundagina ko‘zlangan maqsadlarga erishish mumkin.

Bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi.Karrali qatorlar tushunchasi “Matematik analiz” kursida muhim tushunchalaridan biri hisoblanib, kurs davomida bu mavzu talabalarga mustaqil o‘rganish uchun taqdim etiladi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishida karrali qatorlar tushunchasi va ularning yaqinlashish to‘plamlari o‘rganilganligi oily o‘quv yurtlari talabalarining bu boradagi bilimlarini mustahkamlashda muhim rol o‘ynaydi.

Ishning maqsadi. Yuqorida ishning dolzarbligi qismida bayon qilingan mulohazalar ishning maqsadini aniqlab beradi va ular quyidagilardan iborat:

- sonli qatorlar tushunchasini o‘rganish
- funksional qatorlar va ularning yaqinlashish to‘plamlarini o‘rganish
- Karrali qator tushunchasini kiritish va uning yaqinlashish to‘plamlarini o‘rganish.

Bitiruv malakaviy ishining vazifasi. Karrali qatorlar va ularning yaqinlashish to‘plamlarini o'rganish. Ulardan amaliyotda foydalana olish.

Bitiruv malakaviy ishining o'rganganlik darajasi.Qo'yilgan mavzu to'la o'rganilib,chuqur tahlil qilingan. Olingan natija va masalalar to'la yoritilgan.

Bitiruv malakaviy ishining obykti.Karrali qatorlar va ularning yaqinlashish to'plamlari.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti. Ikki o'zgaruvchili karrali qatorlarning yaqinlashish to'plamlarini aniqlash.

Olingan asosiy natijalar.Malakaviy bitiruv ishi referativ xarakterga ega bo'lib, unda ba'zi karrali qatorlarning yaqinlashish to'plamlari o'rganilgan.Bitiruv malakaviy ishidan oliy o'quv yurtlari talabalari matematik analiz fanini o'rganishda foydalanishlari mumkin.

Bitiruv malakaviy ishining ilmiy yangiligi. Ishda ilmiy yangilik qilinmagan,u referativ uslubiy xarakterga ega bo'lib, unda ba'zi karrali qatorlarning yaqinlashish to'plamlari o'rganilgan.

Olingan asosiy natijalar. Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega bo'lib unda ba'zi karrali qatorlarning yaqinlashish to'plamlari o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishining metodologik asosi. Ushbu bitiruv malakaviy ishi uchun karrali qatorlarning yaqinlashish to'plamlarini aniqlashni o'rganish metodologik asos bo'lib xizmat qiladi.

Bitiruv malakaviy ishining metodlari. Bitiruv malakaviy ishi matematik analiz va ularning yaqinlashish to'plamlari asosida o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishining hajmi va tuzilishi. Bitiruv makaviy ishi kirish qismidan, ikkita bob, 5 ta paragraf, har bir bobga xulosa, xotima hamda foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat bo'lib, ishning hajmi betni tashkil etadi.

I. Qatorlar haqida tushunchalar

1.1 Sonli qatorlar.

Sonlarning biror cheksiz ketma-ketligi $\{a_n\}$ berilgan bo'lsin. Bu sonlar ketma-ketligi elementlaridan tuzilgan

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1.1.1)$$

yig'indini tuzamiz va uni sonli (cheksiz sonli) qator deb ataymiz, bunda $a_1, a_2, \dots$ sonlar (1.1.1) qatorning hadlari, a_n esa qatorning umumiy hadi deyiladi.

(1.1.1) qatorning hadlaridan ushbu yig'indilar ketma-ketligini tuzamiz:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Bu $\{S_n\}$ yig'indilar ketma-ketligi (1.1.1) qatorning qisman yig'indilari ketma-ketligi deyiladi.

1.1.1 ta'rif. Agar $n \rightarrow \infty$ da (1.1.1) qatorning qisman yig'indilari $\{S_n\}$ ketma-ketligi chekli limitga ega, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (1.1.2)$$

bo'lsa, u holda (1.1.1) qator yaqinlashuvchi deyiladi. Bu limitning qiymati S soni esa (1.1.1) qatorning yig'indisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

1.1.2 ta'rif. Agar $n \rightarrow \infty$ da (1.1.1) qatorning $\{S_n\}$ qisman yig'indilari ketma-ketligining limiti cheksiz bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, u holda (1.1.1) qator uzoqlashuvchi deyiladi va uning yig'indisi bo'lmaydi.

1.1.3 ta'rif.

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{K=n+1}^{\infty} a_K \quad (1.1.3)$$

qator (1.1.2) qatorning n hadidan keyingi qoldig'i deyiladi.

Har bir qatorning berilishi ikkita ketma-ketligining berilishiga ekvivalent bo`lib, birinchisi ixtiyoriy olingan (qatorning hadlaridan tuzilgan ketma-ketlik) bo`lib, ikkinchisi esa (qatorning xususiy yig`indilar ketma-ketligi) birinchisining hadlaridan maxsus tuzilgan bo`ladi.

Qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo`lishini aniqlash uning qisman yig`indilar ketma-ketligining limitini topishga ekvivalent ekan.

Endi qator haqidagi sodda teoremlarni keltiramiz.

1.1.1 teorema. Agar (1.1.1) qator yaqinlashuvchi bo`lsa, (1.1.3) qator yaqinlashuvchi bo`ladi va aksincha.

Boshqacha aytganda: qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish uning yaqinlashishiga ta`sir etmaydi.

1.1.2 teorema. Agar $a_1 + a_2 + \dots$ (1.1.1) qator yaqinlashsa va yig`indisi "S" ga teng bo`lsa, $ca_1 + ca_2 + \dots$ (1.1.4) qator ham yaqinlashadi va yig`indisi " $C \cdot S$ " ga teng bo`ladi, bunda "C" biror belgilangan o`zgarmas son.

Isbot

Demak (1.1.1) qator yaqinlashuvchiligidan $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ kelib chiqadi endi biz quyidagi qatorni

$$S * C = (a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots) * C = \sum_{n=1}^{\infty} C * a_n$$

yaqinlashuvchanligini ko'rsatishimiz kerak. Bu qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun qator yaqinlashuvchanligi ta'rifidan foydalanamiz bundan $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n * C = S * C$ kelib chiqadi demak (1.1.1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa (1.1.4) qator ham yaqinlashuvchi bo'lar ekan teorema isbotlandi.

1.1.3 teorema. Agar $a_1 + a_2 + \dots$ (1.1.4) va $b_1 + b_2 + \dots$ (1.1.5) qatorlar yaqinlashsa va ularning yig`indilari mos ravishda  $\bar{S}$  va  $\bar{\bar{S}}$  ga teng bo`lsa, u holda $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots$ (1.1.6) va $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots$ (1.1.7) qatorlar ham yaqinlashadi va yig`indilari mos ravishda  $\bar{S} + \bar{\bar{S}}$  va  $\bar{S} - \bar{\bar{S}}$  ga teng bo`ladi.

Isboti.

Biz (1.1.4) va (1.1.5) qator yaqinlashuvchanligidan $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = \bar{S}$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\bar{S}}_n = \overline{\bar{S}}$ ushbu tengliklar kelib chiqadi endi biz (1.1.6) va (1.1.7) qatorlarni yaqinlashuvchiligini ko'rsatishimiz kerak biz qator yaqinlashuvchanligi ta'rifidan foydalanib quydagi tengliklarni hosil qilamiz.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((a_1 + a_2 + a_3 + \dots) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + b_3 + \dots) = \bar{S} + \bar{S} \end{aligned} \quad (1.1.6)'$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((a_1 + a_2 + a_3 + \dots) - (b_1 + b_2 + b_3 + \dots)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) - \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + b_3 + \dots) = \bar{S} - \bar{S} \end{aligned} \quad (1.1.7)'$$

bulardan ko'rinib turibdiki teorema isbotlandi.

1.1.4 teorema. (Qator yaqinlashining zaruriy alomati).

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots \quad (1.1.1)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (1.1.8) bo'lishi zarur.

Isboti:

Berilgan qator $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bo'lib, u yaqinlashuvchi hamda uning yig'in-disi S ga teng bo'lsin. U holda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = S,$$

ya'ni, chekli S limitga ega. U holda, $(n-1) \rightarrow \infty$ bo'lganda ham quyidagi o'rinli bo'ladi:

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ \underline{S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} \\ S_n - S_{n-1} = a_n \end{array}$$

Teoremaga ko'ra $a_n = 0$, shuning uchun $S_n - S_{n-1} = 0$ bo'ladi. U holda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0$$

Teorema isbot bo'ldi.

1.1.1 natija. Agar $n \rightarrow \infty$ da qatorning n -hadi nolga intilmasa, qator uzoqlashadi

1.1.1-misol:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{n}{2n+1} + \dots$$

qator uzoqlashadi, chunki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Qaralgan alomat faqat zaruriy, lekin yetarli emasligini (qatorlarni tekshirishdagi asosiy masalalardan biri berilgan qatorning yaqinlashish yoki uzoqlashish maslasidir), ya'ni n-hadning nolga intilishidan, qatorning yaqinlashishi kelib chiqmasligi, qator uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkinligini ta'kidlaymiz.

Masalan, garmonik qator deb ataladigan ushbu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (1.1.9)$$

qator $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ bo'lsa ham uzoqlashadi.

1.1.2-misol:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

qator yaqinlashuvchidir, chunki

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

bo'lib, limit chekli sonidir.

1.1.3 -misol:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

qator yaqinlashuvchidir, chunki $S_n = (1 - \frac{1}{n+1})$ bo'lib,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

chekli sonidir.

1.1.4 -misol:

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots$$

qator uzoqlashuvchidir. Chunki bu qator cheksiz o'suvchi geometric progressiyani

tashkil qilib, uning n ta hadi yig'indisi $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ bo'lib,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = \infty$$

1.1.5-misol:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

qator yaqinlashuvchi, chunki

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Yaqinlashuvchi sonli qatorlarning asosiy xossalari

Yaqinlashuvchi sonli qatorlarning quyidagi asosiy xossalarini keltiramiz:

1.1.1-xossa: Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda istalgan chekli sonlardagi hadlarni tashlab yuborish yoki unga chekli sondagi hadlarni qo'shish natijasida hosil bo'lgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

1.1.2-xossa: Yaqinlashuvchi sonli qatorning har bir hadi, bir xil λ soniga ko'paytirilsa, u holda yig'indi λ soniga ko'paytiriladi; ya'ni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda \cdot S$$

1.1.3-xossa. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indilari mos

ravishda A va B ga teng bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ sonli yig'indisi ham

yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi $A \pm B$ ga teng.

1.1.4-xossa: (Yaqinlashuvchanlikning zaruriy alomati)

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning umumiy hadi uchun

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ shart bajariladi. Lekin bu alomat yetarli alomat bo'la olmaydi.

Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ bo'lsa, u holda berilgan sonli qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

1.1.6-misol:

Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n+3}$ sonli qator uzoqlashuvchidir, chunki

$$S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{5n+3} = \frac{2}{5} \neq 0$$

1.1.7-misol:

Quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + \dots$$

sonli qator uzoqlashuvchi qator bo'ladi, chunki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1}$$

mavjud emas.

1.1.8-misol:

Quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

Qator uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki,

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ uchun } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty.$$

1.1.9-misol:

Ushbu

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

qator uchun

$$s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} = 0, \text{ agar } n\text{-juft son,}$$

$$s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} = 1, \text{ agar } n\text{-toq son}$$

bo'lib, u $n \rightarrow \infty$ da limitga ega emas. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

1.1.10-misol:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots, (a \in R, q \in R)$$

qator yaqinlashuvchiligini tekshiramiz.

Odatda bu geometrik qator deb yuritiladi. Berilgan qator uchun

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}, (q \neq 1)$$

bo'lib, $|q| < 1$ bo'lganda $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$ bo'ladi.

Demak, bu holda geometrik qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $\frac{a}{1 - q}$ ga teng.

Agar $q > 1$ bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

$q = 1$ bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty$ bo'lib, bu hollarda berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

$q \leq -1$ bo'lganda esa $\{S_n\}$ ketma-ketlik limitga ega emas. Demak, bu holda ham qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, geometrik qator $|q| < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $|q| > 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

1.2 Funksional qatorlar

Funksional qatorlar haqida tushuncha. Yaqinlashuvchi funksional qatorlar.

Ushbu

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

ifodaga funksional qator deb ataladi. Bu yerda

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (1.2.1)$$

D to'plamda aniqlangan funksiyalar. x ning (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladigan barcha qiymatlar to'plamami Ω ($\Omega \subseteq D$) funksional qatorning yaqinlashish sohasi deb ataladi.

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

yig`indi funktsional qatorning n-qismiy yig`indisi deb ataladi. Agar

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad x \in \Omega,$$

bo`lsa,  $S(x)$  (1.2.1) qator yig`indisi, $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ ayirma esa qator qoldig`i deyiladi.

Agar $S(x)$, $x \in L$, ($L \subseteq \Omega$) funksiya (1.2.1) qatorning yig`indisi bo`lsa, u holda (1) funktsional qator L to`plamda $S(x)$ funksiyaga yaqinlashadi deyiladi.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday N nomer topilsaki, $n \geq N$ bo`lganda barcha $x \in L$ uchun

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

bajarilsa, (1.2.1) funktsional qator L to`plamda $S(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi.

Agar funktsional qator L to`plamda yaqinlashuvchi bo`lsa, u holda qator bu to`plamda tekis yaqinlashuvchi bo`lishi shart emas, ammo L to`plamning biror bir to`plam ostida yaqinlashishi tekis bo`lishi mumkin.

Funktsional qatorning tekis yaqinlashuvchi bo`lishining Veyersht-rass alomati.

Agar (1.2.1) funktsional qator uchun hadlari musbat shunday yaqinlashuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$

qator mavjud bo`lib,  $L$  to`plamda

$$|f_n(x)| \leq c_n$$

bo`lsa, u holda funktsional kator  $L$  to`plamda tekis yaqinlashadi.

1.2.1-misol: Ushbu

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots$$

funktsional qator $L = (-\infty; +\infty)$ to`plamda tekis yaqinlashadi, chunki

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ va } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ yaqinlashuvchidir.}$$

1.2.2-misol:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots \quad (-\infty < x < \infty)$$

qator funksional qatordir.

1.2.3-misol: Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n-1)(x+1)(nx+1)} = \frac{x}{1 \cdot (x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} + \dots$$

$$0 < x < \infty$$

Qator ham funksional qatordir.

Funksional qator yig'indisining funksional xossalari. Funksional qator yig'indisining quyidagi funksional xossalarini keltiramiz:

1.2.1-xossa: Agar $f_n(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz bo'lib, bu funksiyalardan tuzilgan ushbu

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

funksional qator bu oraliqda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashsa:

a) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz;

b) $[a,b]$ oraliqda funksional qatorni hadma-had integrallash mumkin bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)dx + \dots$$

1.2.3-misol : Ushbu

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

funksional qator $[0, \frac{1}{2}]$ oraliqda $\frac{1}{1-x}$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. Demak,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x dx + \dots + \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1} dx + \dots = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x}$$

yoki

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2^n \cdot n} + \dots = \ln 2$$

1.2.2-xossa: Agar $f_n(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda uzluksiz hosilalarga ega va bu oraliqda:

a) ushbu

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

funktsional qator $f(x)$ funksiyaga yaqinlashsa;

b) ushbu

$$f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots$$

funktsional qator tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $[a, b]$ intervalda $f(x)$ funksiya uzluksiz hosilaga ega bo'ladi:

$$f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots$$

1.3. Darajali qatorlar

Ushbu

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad (1.3.1)$$

ko'rinishdagi funktsional qator markazi c nuqtada bo'lgan darajali qator deyiladi.

Bu yerda $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ va c — o'zgarmas sonlar bo'lib, darajali qatorning koeffitsientlari va markazi deyiladi.

Quyidagi uchta hol bo'lishi mumkin:

- 1) (1.3.1) darajali qator faqat $x = c$ da yaqinlashadi. Bunday qatorni barcha nuqtalarda uzoqlashuvchi deyiladi.
- 2) (1.3.1) darajali qator x ning har bir qiymatida yaqinlashadi. Bunday qatorni barcha nuqtalarda yaqinlashuvchi deyiladi va u absolut yaqinlashadi.
- 3) Shunday $R > 0$ soni mavjudki, (1.3.1) qator $|x-c| < R$ da absolut yaqinlashuvchi va $|x-c| > R$ da esa uzoqlashuvchi bo'ladi. R qatorning yaqinlashish radiusi deyiladi. $R = 0$ barcha nuqtalarda uzoqlashuvchi va $R = \infty$ barcha nuqtalarda yaqinlashuvchi qatorning yaqinlashish radiusini ifodalaydi. $R > 0$ da $(c - R, c + R)$ intervalni (1.3.1) qatorning yaqinlashish intervali deyiladi. Shuning bilan birga intervalning chetki nuqtalarida darajali qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.

1.3.1-misol: Quyidagi

$$\frac{x^1}{1 \cdot 3^1} + \frac{x^2}{2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot 3^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$$

darajali qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. Dalamber alomatiga ko`ra tekshiramiz:

$$|u_{n+1}(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \right|, \quad |u_n(x)| = \left| \frac{x^n}{n \cdot 3^n} \right|$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{|x|^n}{n \cdot 3^n}} = \frac{|x|}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{3}$$

$d < 1$ bo`lganda qator yaqinlashadi :

$$\frac{|x|}{3} < 1, \quad |x| < 3, \quad x \in (-3; 3) \quad \text{va} \quad \text{demak } R = 3.$$

Qator yaqinlashishini intervalning chetki nuqtalarida tekshiramiz:

1) $x = -3$ bo`lganda qator

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$$

yaqinlashuvchi sonli qatorga aylanadi. Aniqrog`i shartli yaqinlashadi.

2) $x = 3$ da

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

uzoqlashadi. Demak, yaqinlashish sohasi $[-3; 3)$ ni tashkil etadi.

1.3.2-misol:

$$\text{Ushbu } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (0! = 1)$$

1.3.3-misol:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

qatorlar darajali qatorlardir.

Koshi-Adamar teoremasi. Darajali qatorlarning yaqinlashish sohasi sodda strukturaga ega bo`lar ekan yoki interval, yoki yarim interval, yoki segment.

Hamma hollardaham bu soha yaqinlashish radiusi r orqali ifodalanadi.

Malumki, har qanday darajali qator

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1.3.2)$$

o'zining koefisientlari ketma-ketligi $\{a_n\}$ bilan aniqlanadi.

Binobarin, uning yaqinlashish radiusi ham shu koefisientlar ketma-ketligi orqali qandaydir topilishi kerak. Berilgan (1.3.2) darajali qator koefisientlari yordamida $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$

$$|a_0|, |a_1|, \sqrt{|a_2|}, \dots, \sqrt[n]{|a_n|}, \dots \quad (1.3.3)$$

sonlar ketma-ketligini tuzamiz. Malumki har qanday sonlar ketma-ketligining yuqori limiti mavjud. Demak (1.3.3) ketma-ketlik ham yuqori limitga ega uni b bilan belgilaylik

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (0 \leq b \leq +\infty)$$

1.3.1-teorema:(Koshi-Adamar)

Berilgan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi

$$r = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (1.3.4) \quad \text{bo'ladi.}$$

Eslatma:

Yuqoridagi (1.3.4) formulada $b=0$ bo'lganda $r = +\infty$ $b = +\infty$ deb olinadi.

Teorema isboti (Koshi-Adamar):

(1.3.4) formulaning to'g'riligini ko'rsatishda quyidagi

- 1) $b = +\infty$ ($r=0$)
- 2) $b=0$ ($r = +\infty$)
- 3) $0 \leq b \leq +\infty$ ($r = \frac{1}{b}$)

hollarni alohida-alohida qaraymiz.

1) $b = \infty$ bo'lsin. Bu holda $\sqrt[n]{|a_n|}$ ketma-ketlik chegaralanmagandir. Ixtiyoriy $x_0 (x_0 \neq 0)$ nuqtani olib bu nuqtada (1.3.2) darajali qatorning uzoqlashuvchi ekanini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylikn, yani shu x_0 nuqtada (1.3.2) darajali qator yaqinlashuvchi bo'lsin demak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ qator yaqinlashuvchi. Unda qator yaqinlashuvchanligining zaruriy shartiga asosan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$$

bo'ladi. Demak, $\{a_n x_0^n\}$ ketma-ketlik chegaralangan, ya'ni shunday o'zgarmas M son mavjudki (uni 1 dan katta qilib olish mumkun),
 $\forall n \in N$ uchun

$$|a_n x_0^n| \leq \sqrt[n]{M} (M > 1)$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikdan

$$\sqrt[n]{|a_n|} |x_0^n| \leq \sqrt[n]{M} < M,$$

ya'ni

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{M}{|x_0|}$$

bo'lishi kelib chiqadi. SHunday qilib $\sqrt[n]{|a_n|}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lib qoldi. Natijada ziddiyatlik yuzaga keldi. Ziddiyatlikning kelib chiqishiga sabab ($x_0 \neq 0$) nuqtada (1.3.2) qatorning yaqinlashuvchi bo'lsin deb olinishidir. Demak (1.3.2) darajali qator ixtiyoriy $x_0 (x_0 \neq 0)$ nuqtada uzoqlashuvchi.

2) $b=0$ bo'lsin. Bu xolda ixtiyoriy $x_0 (x_0 \neq 0)$, nuqtada (1.3.2) darajali qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rsatamiz. Modomiki, $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ ketma-ketlikning yuqori limiti nolga teng ekan, bundan uning limiti ham mavjud va nolga tengligi kelib chiqadi. Ta'rifga asosan $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham, jumladan $\varepsilon = \frac{1}{2|x_0|}$ ga ko'ra shunday $n_0 \in N$ topiladiki, barcha $n > n_0$ uchun

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x_0|}$$

bo'ladi. Keyingi tengsizlikdan esa

$$|a_n x_0^n| < \frac{1}{2^n}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

qator yaqinlashuvchi. Taqqoslash teoremasiga ko'ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$$

qator absolut yaqinlashuvchi.

3) $0 < b < +\infty$ bo'lsin. Bu xolda (1.3.2) darajali qator ixtiyoriy x_0 ($|x_0| < \frac{1}{b}$) nuqtada

yaqinlashuvchi, ixtiyoriy x_1 ($|x_1| > \frac{1}{b}$) nuqtada uzoqlashuvchi bo'lishini ko'rsatamiz.

$|x_0| < \frac{1}{b}$ bo'lsin. U xolda shunday $\delta > 0$ soni topish mumkinki, $|x_0| = \frac{1}{b + \delta}$ bo'ladi.

Endi δ_1 ($0 < \delta_1 < \delta$) sonni olaylik. Bu $0 < \delta_1$ songa ko'ra shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ topiladiki,

barcha $n > n_0$ uchun $\sqrt[n]{|a_n|} < b + \delta_1$, ya'ni $|a_n| < (b + \delta_1)^n$ bo'ladi. Demak, barcha $n > n_0$ uchun

$$|a_n x_0^n| = |a_n| |x_0|^n < (b + \delta_1)^n \frac{1}{(b + \delta)^n} = \left(\frac{b + \delta_1}{b + \delta}\right)^n \quad (1.3.5)$$

bo'lishi kelib chiqadi, bunda

$$\frac{b + \delta_1}{b + \delta} = \frac{(b + \delta) - (\delta - \delta_1)}{b + \delta} = 1 - \frac{\delta - \delta_1}{b + \delta} < 1,$$

Endi ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| = |a_0| + |a_1 x_0| + |a_2 x_0^2| + \dots + |a_n x_0^n| + \dots \quad (1.3.6)$$

qator bilan quyidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b + \delta_1}{b + \delta} \right)^n = 1 + \frac{b + \delta_1}{b + \delta} + \dots + \left(\frac{b + \delta_1}{b + \delta} \right)^n + \dots \quad (1.3.7)$$

qatorni solishtiraylik. Bunda, birinchidan (1.3.7) qator yaqinlashuvchi, ikkinchidan n ning biror qiymatidan boshlab ($n > n_0$) (1.3.5) munosabatga ko'ra (1.3.6) qatorning har bir hadi (1.3.7) qatorning mos hadidan katta emas. Unda qatorlar nazaryasida keltirilgan taqqoslash teoremasiga ko'ra (1.3.6) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

$|x_1| > \frac{1}{b}$, bo'lsin. Unda shunday $\delta' > 0$ soni topish mumkinki,

$$|x_1| = \frac{1}{b - \delta'}$$

bo'ladi. Endi $\delta_1' (0 < \delta_1' < \delta_1)$ sonni olaylik. Yuqori limitning xossasiga asosan $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ ketma-ketlikning ushbu

$$\sqrt[n]{|a_n|} > b - \delta_1', \text{ ya'ni } |a_n| > (b - \delta_1')^n$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan hadlarining soni cheksiz ko'p bo'ladi. Demak bu holda

$$|a_n x_1^n| = |a_n| |x_1|^n > (b - \delta_1')^n \cdot \frac{1}{(b - \delta')^n} = \left(\frac{b - \delta_1'}{b - \delta'} \right)^n \quad (1.3.8)$$

bo'lib, bunda

$$\frac{b - \delta_1'}{b - \delta'} = \frac{(b - \delta') + (\delta' - \delta_1')}{b - \delta'} = 1 + \frac{\delta' - \delta_1'}{b - \delta'} > 1$$

bo'ladi.

Yuqoridagi (1.3.8) munosabatdan $n \rightarrow \infty$ da $\{a_n x_1^n\}$ ketma-ketlikning limiti nolga teng emasligini topamiz. Demak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

qator uzoqlashuvchi (qator yaqinlashuvchanligining zaruriy sharti bajarilmaydi).

SHunday qilib har bir $x_0 (|x_0| < \frac{1}{b})$ nuqtada (1.3.2) darajali qator yaqinlashuvchi, har

bir $x_1 (|x_1| < \frac{1}{b})$ nuqtada esa shu darajali qator uzoqlashuvchi bo'lar ekan.

Darajali qatorning yaqinlashish radiusi ta'rifini etiborga olib, $\frac{1}{b}$ berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi ekanini topamiz. Teorema isbotlandi.

1.3.4-misol:

Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^{\sqrt{2}}} + \dots + \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} + \dots$$

darajali qatorni qaraylik. Bu darajali qatorning yaqinlashish radiusini

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = 1$$

Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=1$, yaqinlashish intervali esa $(-1, +1)$ dan iborat. Bu darajali qator yaqinlashish intervalining chekkalarida mos ravishda quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

sonli qatorlarga aylanib, ularni Raabe alomatidan foydalanib yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaymiz.

Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlashish sohasi $[-1, +1]$ segmentdan iborat.

Abel teoremasi. Funktsional qatorlar orasida ularning xususiy holi bo'lgan ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1.3.9)$$

yoki umumiyroq

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \quad (1.3.10)$$

qatorlar matematikada va uning tadbirlarida muxim rol o'ynaydi. Bu yerda $U_n(x)$ sifatida

$$U_n(x) = a_n x^n \text{ (yoki } U_n(x) = a_n (x - x_0)^n \text{)}$$

ya'ni x (yoki $(x - x_0)$) o'zgaruvchining darajalari qaralyapti. Shu sababli (1.3.9) va (1.3.10) qatorlar darajali qatorlar deb ataladi.

Agar (1.3.10) qatorda $x - x_0 = t$ deb olinsam, u holda bu qator t o'zgaruvchiga nisbatan (1.3.9) qator ko'rinishiga keladi. Demak (1.3.9) qatorni o'rganish kifoyadir.

(1.3.9) ifodadagi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ haqiqiy sonlar (1.3.9) darajali qatorning koefitsientlari deb ataladi.

Darajali qatorning tuzilishidan, darajali qatorlar bir-biridan faqat koefitsientlari bilan farq qilishini ko'ramiz. Demak darajali qator berilgan deganda uning koefitsientlari berilgan deb tushinamiz.

Shunday qilib, darajali qatorlarning har bir hadi $(-\infty, +\infty)$ da berilgan funksiyadir. Binobarin, darajali qatorni, formal nuqtai nazardan, $(-\infty, +\infty)$ da qarash mumkin. Ammo, tabiiyki, ularni ixtiyoriy nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi deya olmaymiz.

Albatta ixtiyoriy darajali qator $x=0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, darajali qatorning yaqinlashish soxasi albatta $x=0$ nuqtani o'z ichiga oladi.

Darajali qatorning yaqinlashish soxasi strukturasi aniqlashda quyidagi Abel teoremasiga asoslaniladi.

1.3.2-teorema(Abel):

Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1.3.9)$$

darajali qator x ning $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) qiymatida yaqinlashuvchi bo'lsa, x ning

$$|x| < |x_0| \quad (1.3.11)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida (1.3.9) darajali qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isboti:(Abel teoremasi) Shartga ko'ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

qator (sonli qator) yaqinlashuvchi. U holda qator yaqinlashuvchanligining zaruriy shartiga asosan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$$

bo'ladi. Demak, $\{a_n x_0^n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi, yani shunday o'zgarmas M soni mavjudki, $\forall n \in N$ uchun

$$|a_n x_0^n| \leq M$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikni etiborga olib quyidagini topamiz:

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

endi ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \quad (1.3.12)$$

qator bilan birga quyidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (1.3.13)$$

qatorni qaraylik. Bunda, birinchidan (1.3.13) qator yaqinlashuvchi, ikkinchidan (1.3.12) qatorning har bir hadi (1.3.12) qatorning mos hadidan katta emas. U holda (1.3.12) qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, berilgan (1.3.9) darajali qator absolyut yaqinlashuvchi. Teorema isbotlandi.

1.3.1-natija: Agar

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \quad (1.3.12)$$

darajali qator x ning $x = x_0$ qiymatida uzoqlashuvchi bo'lsa, x ning $|x| > |x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isbot (Natija): Berilgan (1.3.12) darajali qator x_0 nuqtada uzoqlashuvchi bo'lsin.

Unda bu qator x ning $|x| > |x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida ham

uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki (1.3.9) qator x ning $|x| > |x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi biror $x = x_1$ qiymatida yaqinlashuvchi bo'ladigan bo'lsa, unda Abel teoremasiga ko'ra bu qator $x = x_0$ ($|x_0| < |x_1|$) nuqtada ham yaqinlashuvchi bo'lib qoladi. Bu esa (1.3.9) qatorning $x = x_0$ nuqtada uzoqlashuvchi deyilishiga ziddir.

Natija isbotlandi.

Darajali qator quyidagi xossalarga ega:

1.3.1-xossa : Agar darajali qator oraliqning barcha nuqtalarida uzoqlashuvchi bo'lmasa, u holda uning yig'indisi $f(x)$ yaqinlashish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz bo'ladi.

1.3.2-xossa: Agar $x \in \Omega$ da

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots = f(x),$$

bo'lsa, darajali qatorni yaqinlashish sohasining ichki nuqtalarida hadma-had integrallash mumkin:

$$a_0(x-c) + a_1 \frac{(x-c)^2}{2} + \dots + a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + \dots = \int_c^x f(x) dx$$

1.3.3-xossa: Agar $x \in (c - R, c + R)$, $R > 0$ da

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots = f(x),$$

bo'lsa, darajali qatorni yaqinlashish sohasining ichki nuqtalarida hadma-had differensiallash mumkin, ya'ni

$$a_1 + 2a_2(x-c) + \dots + na_n(x-c)^{n-1} + \dots = f'(x), x \in (c - R, c + R)$$

1.3.4-xossa: Agar ushbu

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots$$

darajali qator oraliqning barcha nuqtalarida uzoqlashuvchi bo'lmasa, u holda buning yig'indisi $f(x)$ yaqinlashish sohasining ichki nuqtalarida barcha yuqori tartibli hosilalarga ega bo'ladi. Shu bilan birga:

$$a_0 = f(c), \quad a_1 = f'(c), \quad a_2 = \frac{f''(c)}{2!}, \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \dots \quad \text{bo'ladi.}$$

Funktsiyani darajali qatorga yoyish. Teylor qatori.

Agar (1.3.18)- qatordagi $a_0, a_1, \dots, a_n$ larning qiymatlari (1.3.13)- qatorga qo'yilsa, $f(x)$ funktsiyaning x_0 nuqtadagi *Teylor qatori* hosil bo'ladi:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (1.3.20)$$

$f(x)$ funktsiyaning x_0 nuqtadagi integral ko'rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasi quyidagidan iborat:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots + R_n(x)$$

$R_n(x)$ – qoldiq had.

Bunda,

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Makloren qatori. Faraz qilaylik, berilgan $f(x)$ funktsiya quyidagi darajali qatorga yoyilgan bo'lsin:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (1.3.21)$$

Bundagi $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ lar aniqmas koeffitsiyentlardan iborat. Shu koeffitsiyentlarni berilgan $f(x)$ funktsiya orqali ifodalaymiz. Darajali qatorni uning yaqinlashish oraligi $|x| < R$ da hadlab differentsiallaymiz:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots,$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots,$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \dots,$$

$$f^{IV}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 + \dots + n(n-1)(n-2)(n-3)a_nx^{n-4} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot na_n + 2 \cdot 3 \dots n(n+1)a_{n+1}x + \dots$$

Hosil bo'lgan tengliklar va (1.3.3.1) tenglikda $x=0$ deb, quyidagi $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ larga ega bo'lamiz:

$$a_0 = f(0), a_1 = f'(0), a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, a_n = \frac{f^{IV}(0)}{4!},$$

Bu qiymatlarni (1.3.1) qatorga qo'yamiz:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (1.3.22)$$

Hosil bo`lgan (1.3.2) qatorga *Makloren qatori* deyiladi.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

formula esa *qoldiq hadli Makloren formulasidir*.

Teylor va Makloren qatorlaridan ko`rinadiki, Makloren qatori Teylor qatorining xususiy holidan iborat bo`lib, Teylor qatoridagi $x = 0$ bo`lganda ikkala qator ham bir xil ko`rinishga ega bo`ladi.

I bob xulosasi.

I bob 3 qismdan iborat bo'lib, sonli qatorlar va ularning yaqinlashuvchanligi, funksional qatorlar, darajali qator tushunchalari o'rganilgan. Funktsiyalarni Teylor qatoriga yoyishga doir misollar o'rganilgan. Darajali qatorlar uchun Abel va Koshi-Adamar teoremlari isboti bilan berilgan. Qatorlarning yaqinlashuvchi bo'lishi va yaqinlashish to'plamlari to'la o'rganilgan ularga doir misollar keltirilgan.

II . KARRALI QATORLARNING YAQINLASHISH TO'PLAMLARI HAQIDA

2.1 Karrali qator tushunchasi

Dastlab karrali kettma-ketlik tushunchasini kiritamiz.

2.1.1-ta'rif:

X biror to'plam bo'lsin $F : N \times N \times N \times \dots N \rightarrow X$ akslantrish natijasida hosil bo'lgan $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk}, \dots$ ketma-ketlikka k -karrali ketma-ketlik deyiladi va u $\{x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk}, \dots\}$ kabi belgilanadi.

Biz keyinchalik $k=2$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda ketma-ketlik quyidagi ko'rinishda bo'ladi. $\{x_{mn}\}, m \in N, n \in N. x_{11}, x_{12}, \dots, x_{21}, x_{22}, \dots, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}, \dots$

2.1.1-misol: Ikki karrali ketma-ketlikning hadlari quyidagi formula bilan aniqlangan bo'lsin:

$$x_{mn} = \frac{m^2}{n}$$

$m = 1$ bo'lganda ketma-ketlik hadlari quyidagi qiymatlarni qabul qiladi:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

$m = 2$ bo'lganda ketma-ketlik hadlari quyidagi qiymatlarni qabul qiladi:

$$4, 2, \frac{4}{3}, 1, \frac{4}{5}, \dots$$

. . .

U holda yuqoridagi ketma-ketlik ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, 4, 2, \frac{4}{3}, 1, \frac{4}{5}, \dots, 9, \frac{9}{2}, 3, \frac{9}{4}, \frac{9}{5}, \dots$$

2.1.2-misol:

Ushbu

$$x_{mn} = \frac{(-1)^m}{n}$$

1) $m = 1$ qiymat berib, n ni o'zgartirib boraman. U holda quyidagicha bo'ladi:

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$$

2) $m = 2$ qiymat berib, yana n ni o'zgartirib boraman. uholda quyidagicha bo'ladi.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

2.1.3-misol:

Ushbu

$$a_{xy} = \frac{3^x}{2^y}$$

1) $x = 2$ qiymat berib, y ni o'zgartirib boraman.

$$\frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \frac{9}{8}, \frac{9}{16}, \dots$$

2) $x = 3$ qiymat berib, y ni yana o'zgartiramiz.

$$\frac{27}{2}, \frac{27}{4}, \frac{27}{8}, \frac{27}{16}, \dots$$

2.1.2-ta'rif:

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olgandaham shunday $n_E \in N$ topilsaki, barcha $m \geq n_E, n \geq n_E, m, n \in N$ sonlar uchun $|x_{mn} - a| < \varepsilon$ bo'lsa, a soni $\{x_{mn}\}$ ketma-ketlik limiti deyiladi va $a = \lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn}$ kabi belgilanadi.

2.1.3-ta'rif:

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olgandaham shunday $n_E \in N$ topilsaki, $m \geq n_E, n \geq n_E$ bo'ladigan barcha $m, n \in N$ lar uchun $x_{mn} > \varepsilon$ bo'lsa, $\{x_{mn}\}$ ketma-ketlik $+\infty$ ga intiladi deyiladi.

Xuddi shu kabi $\lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} = -\infty$ va $\lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn} = \infty$ larga ham ta'rif beriladi.

Endi 2 karrali qator tushunchasini kiritamiz.

2.1.4-ta'rif:

Ikki karrali $\{u_{mn}\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. quyidagi ikki karrali sonli ketma-ketlik tuzamiz

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n u_{kl}$$

$\{u_{mn}\}$ va $\{S_{mn}\}$ sonli ketma-ketliklar birgalikda ikki karrali sonli qator deyiladi va quyidagicha belgilanadi.

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} \quad (2.1.1)$$

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n u_{kl} = u_{11} + u_{12} + \dots + u_{1n} + u_{21} + u_{22} + \dots + u_{2n} + \dots + u_{m1} + u_{m2} + \dots + u_{mn}$$

$\{u_{mn}\}$ ketma-ketlikning elementlari (2.1.1) qatorning hadlari deyiladi, $\{S_{mn}\}$ ketma-ketlikning elementlari qatorning qisman yig'indilari deyiladi.

2.1.5-ta'rif:

Agar (2.1.1) qatorning qisman yig'indisi chekli limitga ega ya'ni

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} = S < \infty$$

bo'lsa, qator yaqinlashuvchi, S soni qatorning yig'indisi deyiladi quyidagicha yoziladi

$$S = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$$

Agar qatorning qisman yig'indisi chekli limitga ega bo'lmasa, u holda qator uzoqlashuvchi deyiladi. Agar bu limit cheksiz bo'lsa quyidagicha yoziladi

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = +\infty, \quad \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} = -\infty$$

Ikki karrali qatorlarning xossalari ko'rib o'taylik:

2.1.1-xossa:

Agar

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$$

qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S bo'lsa u holda

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \lambda u_{mn} = \lambda S$$

bu yerda $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.1.2-xossa:

Agar

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}' = S' \text{ va } \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}'' = S''$$

bo'lsa, u holda

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (u_{mn}' + u_{mn}'') = S' + S'' \text{ bo'ladi.}$$

2.1.1-teorema:

Agar (2.1.1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa u holda $\lim_{m,n \rightarrow \infty} u_{mn} = 0$ bo'ladi.

2.1.2-teorema:

Agar (2.1.1) qatorning barcha hadlari nomanfiy ya'ni $u_{mn} \geq 0, m, n \in N$ bo'lsa u holda S_{mn} qismaniy yig'indilarining chekli yoki cheksiz limiti mavjud ya'ni $\lim_{m,n \rightarrow \infty} u_{mn} = \sup_{m,n \in N} S_{mn}$ bo'ladi.

Isbot:

$u_{mn} \geq 0$ ixtiyoriy $m, n \in N$ uchun bajarilsin, u holda $m' \geq m, n' \geq n$ bo'lganda $S_{m'n'} \geq S_{mn}$ Agar $S = \sup_{m,n \in N} S_{mn}$ va $S' < S$ bo'lsin, u holda aniq yuqori chegara ta'rifiga

ko'ra shunday $m_0, n_0 \in N$ mavjudki, $S_{m_0 n_0} > S'$ bo'ladi $\sup\{S_{mn}\} = S$.

$N = \max\{m_0, n_0\}$, u holda $m \geq N, n \geq N$ lar uchun $S_{mn} \geq S_{NN} \geq S_{m_0 n_0} > S'$ va $S_{mn} < S$ bo'lganligi uchun $\lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} = S$ bo'ladi.

2.2.1-natija: Teorema shartlari bajarilganda (2.1.1) qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning qismaniy yig'indilari chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot: (zaruriyligi)

$u_{mn} \geq 0$ ixtiyoriy $m, n \in N$ shart bajariladi, u holda teorema ko'ra

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn} = \sup_{m,n \in N} S_{mn} \text{ va } \{S_{mn}\}$$

chegaralangan, ya'ni shunday $M \in R$ uchun ixtiyoriy $S' \in \{S_{mn}\}$ $S' \leq M < \infty$.

Demak, $S = \sup_{m,n \in N} S_{mn} < \infty$ u holda (2.1.1)

qator yaqinlashuvchi.

Yetarliligi

(2.1.1) ikki karrali qatorni qatorni ikkita takroriy qator orqali ifodalash mumkin. Ya'ni dastlab bir indeks bo'yicha yig'indi hisoblab, so'ngra ikkinchi indeks bo'yicha yig'indini hisoblaymiz.

2.1.3-teorema:

Agar (2.1.1) qator yaqinlashuvchi va barcha $n=1,2,3,\dots$ larda $\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}$ qator

yaqinlashuvchi bo'lsa u holda $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}$ takroriy qator yaqinlashuvchi bo'ladi va

uning yig'indisi (2.1.1) qatorning yig'indisiga teng.

2.1.6-ta'rif:

(2.1.1) qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |u_{mn}| \quad (2.1.2)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (2.1.1) qator absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

2.1.4-teorema:

Agar (2.1.1) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning hadlaridan tuzilgan ixtiyoriy oddiy ikki karrali yoki takroriy qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Hosil qilingan qatorning yig'indisi dastlabki (2.1.1) qator yig'indisiga teng bo'ladi.

Isbot:

(2.1.1) qatorning hadlarini cheksiz to'rtburchak matrissaga joylashtirib chiqamiz. m-qatorga (2.1.1) qatorning dastlabki indeksi m bo'lgan hadlarini ikkinchi indeksning o'sishi bo'yicha joylashtiramiz.

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \dots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Bu jadvalning elementlarini quyidagi sxemada ko'rsatilgan tartibda nomerlaymiz

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & . \\ 4 & 3 & 6 & . \\ 9 & 8 & 7 & . \\ . & . & . & . \end{array}$$

$$v_1 = u_{11}, v_2 = u_{12}, v_3 = u_{22}, v_4 = u_{21}, v_5 = u_{13}$$

u holda (2.1.1) qatorning hadlaridan tuzilgan oddiy $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ (2.1.3) sonli qator hosil bo'ladi. Bu qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligini, ya'ni

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k| \quad (2.1.4)$$

qatorning yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz.

(2.1.1) qatorning qisman yig'indisini S_{mn}^* bilan, yig'indisini esa v^* bilan belgilaymiz. (2.1.1) qatorning qisman yig'indisini S_k^* bilan belgilaymiz.

Ixtiyoriy $k \in N$ uchun shunday $m, n \in N$ topiladiki, $S_k^* \leq S_{mn}^* \leq S^*$ o'rinli bo'ladi. U holda (2.1.4) qator yaqinlashuvchi.

Quyidagicha belgilash kiritamiz $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = S$. Endi (2.1.1) qator hadlaridan tuzilgan ixtiyoriy $\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ (2.1.5) qatorning absolyut yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S ga teng ekanligini ko'rsatamiz.

(2.1.5) qatorning absolyut yaqinlashuvchanligi (2.1.1) qatorning absolyut yaqinlashuvchanligidan kelib chiqadi.

(2.1.5) qatorning yig'indisi S ga teng bo'lishini ko'rsatamiz. Uning qisman yig'indisini S_{mn} bilan, (2.1.3) qatorning qisman yig'indisini S_k bilan belgilaymiz. Tayin ε musbat son olaylik. (2.1.4) qatorning yaqinlashuvchanligidan shunday $K_E \in N$ son topiladiki.

$$\sum_{k=K_E+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.1.6) \quad \text{u holda}$$

$$|S - S_{K_E}| = \left| \sum_{k=K_E+1}^{\infty} v_k \right| < \sum_{k=K_E+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.1.7)$$

Shunday N_E son topamizki (2.1.5) qatorning $S'_{N_E N_E}$ qisman yig'indisi (2.1.3) qatorning S_{k_E} yig'indiga kiruvchi barcha hadlarini o'z ichiga oladigan $m \geq N_E$ dan $n \geq N_E$ bo'lsin.

$S''_{mn} = S'_{mn} - S_{k_E}$ olsak, u holda

$$|S - S'_{mn}| \leq |S - S_{k_E}| + |S''_{mn}| < \varepsilon.$$

Demak, S (2.1.5) qatorning yig'indisi xususan (2.1.1) qatorning ham.

Endi S soni $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}$ takroriy qatorning yig'indisi ekanligini ko'rsatamiz.

Ixtiyoriy tayinlangan n uchun

$$\sum_{m=1}^{m_0} |u_{mn}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| = S^*.$$

Natijada, barcha $\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}, n=1,2,3,\dots$ sonli qator absolyut yaqinlashuvchi.

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} \quad (2.1.8) \text{ belgilash kiritamiz.}$$

Ixtiyoriy ε musbat son olamiz. (2.1.6) shartni qanoatlantiruvchi k_E son tanlaymiz.

U holda ixtiyoriy $m \geq N_E$ dan $n \geq N_E$ uchun

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m u_{ij} - S_{k_E} \right| \leq \sum_{k=k_E+1}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$m \rightarrow \infty$ da bu tengsizlik quyidagicha bo'ladi: $\left| \sum_{i=1}^{\infty} u_i - S_{k_E} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

(2.1.7) ga ko'ra ixtiyoriy $n \geq N_{\varepsilon}$ uchun quyidagi tengsizlik o'rinli.

$$\left| \sum_{i=1}^n u_i - S \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n u_i - S_{k_E} \right| + |S_{k_E} - S| < \varepsilon,$$

Demak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

teorema isbotlandi.

2.2 Karrali qatorlarning yaqinlashish to'plamlari.

Quyidagi ikki o'zgaruvchili darajali qatorni qaraylik.

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{i,k} x^i y^k \quad (2.2.1)$$

2.2.1-teorema:

Agar (2.2.1) qator (x_0, y_0) nuqtada yaqinlashuvchi va

$$R^{(1)} = \inf_{0 \leq k < \infty} R_k^{(1)}, R_k^{(1)} = \frac{1}{\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|a_{ik}|}}, \quad (2.2.2)$$

$$R^{(2)} = \inf_{0 \leq i < \infty} R_i^{(2)}, R_i^{(2)} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{i,k}|}} \quad (2.2.3.)$$

$$x_1 = \min\{R^{(1)}, |x_0|\}, \quad y_1 = \min\{R^{(2)}, |y_0|\}$$

bo'lsa, u holda (2.2.1) qator $\{|x| < x_1, |y| < y_1\}$ to'g'ri to'rtburchakda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

$E = \{|x| < x_1, |y| < y_1\} \cup (x_0, y_0)$ to'plamdan tashqarida qator uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin.

Isbot. Agar $x_1 = 0$ yoki $y_1 = 0$ bo'lsa teorema o'rinli. Bu holatda E to'plam faqatgina (x_0, y_0) nuqtadan iborat bo'lib qoladi, teorema shartiga ko'ra qator yaqinlashuvchi.

$x_1 > 0, y_1 > 0$ holatni qarash yetarli. Bu holda $R^{(1)} > 0, R^{(2)} > 0, |x_0| > 0, |y_0| > 0$. (2.2.1) qatorning (x_0, y_0) nuqtada yaqinlashuvchanligidan qator umumiy hadining bu nuqtadagi qiymati nolga intiladi, ya'ni $\lim_{i,k \rightarrow \infty} a_{i,k} x_0^i y_0^k = 0$.

Natijada, shunday i_0 va k_0 natural sonlar topiladiki, barcha $i > i_0$ va $k > k_0$ sonlar uchun

$$|a_{i,k} x_0^i y_0^k| \leq M_1 < \infty \quad (2.2.4)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$|x_2| < x_1, |y_2| < y_1$ (2.2.5) shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy (x_2, y_2) nuqta olamiz.

$|x_2| < R^{(1)}$ va $|y_2| < R^{(2)}$ tengsizliklar o'rinli bo'lganligi uchun

$$y_2^n \sum_{i=0}^{\infty} a_{in} x_2^i, 0 \leq k \leq k_0; x_2^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{in} y_2^k, 0 \leq i \leq i_0$$

qatorlar yaqinlashuvchi, shuning uchun

$$|a_{ik} x_2^i y_2^k| \leq M_2 < \infty, 0 \leq k \leq k_0, 0 \leq i < \infty;$$

$$|a_{ik} x_2^i y_2^k| \leq M_3 < \infty, 0 \leq i \leq i_0, 0 \leq k < \infty;$$

shartlarni qanoatlantiruvchi M_2 va M_3 sonlar topiladi.

Oxirgi tengsizlikdan va (2.2.4) tengsizlikdan $|a_{ik} x_2^i y_2^k| \leq M$ kelib chiqadi, bu yerda $M = \max\{M_1, M_2, M_3\}$.

(2.2.1) qatorning barcha hadlari chegaralangan $\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{i,k}^* x_m^i y_m^k$ qator

yaqinlashuvchi, u holda shunday i_m va k_m natural sonlar topiladiki, barcha $i > i_m, k > k_m$ sonlar uchun

$$|a_{i,k}^* x_m^i y_m^k| \leq M_m < \infty \quad (2.2.7)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Shuning uchun

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|a_{i,k}^* x_m^i y_m^k|} = |x_m|, \lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|a_{i,k}^*|} \leq 1$$

xususan, $m > m_0$ va $k > k_m$ uchun

$$|x_m| \leq \frac{1}{\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{|a_{i,k}^*|}} \quad (2.2.8)$$

Bundan va (2.2.6) tenglikdan $R^{(1)} = \inf_{0 \leq k < \infty} R_k^{(1)} = \inf_{0 \leq k < k_m} R_k^{(1)}$ o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

$k_0 \rightarrow R^{(1)} = R_{k_0}^{(1)}$ tenglik o'rinli bo'ladigan eng kichik indeks bo'lsin.

$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{i,k}^* x_m^i y_m^k$ qatorning yaqinlashuvchanligidan bu qatorning xususiy yig'indilari

ketma-ketligi

$$S_{p,p}(x_m, y_m), S_{p-1,p}(x_m, y_m)$$

teng chekli limitga ega bo'ladi. Shuning uchun

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \{S_{p,p}(x_m, y_m) - S_{p-1,p}(x_m, y_m)\}, \text{ ya'ni}$$

$$x_m^p \{a_{p,0}^* + a_{p,1}^* y_m + m + a_{p,p}^* y_m^0\} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \quad (2.2.9)$$

$\{a_{i_0, k_0}^*\}$ ketma-ketlik $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} i \sqrt{|a_{i_0, k_0}^*|} = \lim_{i \rightarrow \infty} i \sqrt{|a_{i_0, k_0}^*|}$ shartni qanoatlantiruvchi ketma-ketlik

bo'lsin. $a_{i_v, k_0}^* \neq 0$ deb hisoblash mumkin, (2.2.6) tenglikdan $R_{k_0}^{(1)} = R^{(1)} < \infty$ bo'lishi kelib chiqadi.

(2.2.9) da mos ravishda $i_v = p$ deyilsa, u holda

$$x_m^{i_v} a_{i_v, k_0}^* \left\{ \frac{a_{i_v, 0}^*}{a_{i_v, k_0}^*} + \frac{a_{i_v, 1}^*}{a_{i_v, k_0}^*} y_m + \dots + \frac{a_{i_v, i_v}^*}{a_{i_v, k_0}^*} y_m^{i_v} \right\} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0 \quad (2.2.10)$$

$m > m_0$ uchun (2.2.6) tengsizlik bajariladi, ya'ni $|x_m| > R^{(1)} = R^{(1)}_{k_0}$, shuning uchun

$$|x_m| \lim_{v \rightarrow \infty} i_v \sqrt{|a_{i_v, k_0}^*|} > 1, \text{ va } \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} i \sqrt{|a_{i_0, k_0}^*|} = \lim_{i \rightarrow \infty} i \sqrt{|a_{i_0, k_0}^*|}.$$

Natijada

$$|x_m^{i_v} a_{i_v, k_0}^*| \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0 \quad (2.2.11)$$

(2.2.10) va (2.2.11) munosabatlardan $m > m_0$ lar uchun

$$\sum_{k=0}^{i_v} \frac{a_{i_v, k}^*}{a_{i_v, k_0}^*} y_m^k \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0 \quad (2.2.12)$$

munosabat bajariladi.

Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:

$$A_{i_v} = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{a_{i_v, k}^*}{a_{i_v, k_0}^*} y_m^k; B_{i_v} = \sum_{k=k_0+1}^{k_m} \frac{a_{i_v, k}^*}{a_{i_v, k_0}^*} y_m^k; C_{i_v} = \sum_{k=k_m+1}^{i_v} \frac{a_{i_v, k}^*}{a_{i_v, k_0}^*} y_m^k$$

(2.2.12) munosabatni yangi belgilashga ko'ra quyidagicha yozamiz:

$$A_{i_v} + B_{i_v} + C_{i_v} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0 \quad (2.2.12^*)$$

Endi, $B_{i_v} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0, C_{i_v} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0$ bo'lishini isbotlaymiz.

$$|B_{i_v}| \leq \sum_{k=k_0+1}^{k_m} \left| \frac{a_{i_v k}^*}{a_{i_v k_0}^*} y_m^k \right|.$$

$k > k_0$ lar uchun $R_k^{(1)} > R_{k_0}^{(1)}$ tengsizlik o'rinli, u holda

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[i_v]{\left| \frac{a_{i_v k}^*}{a_{i_v k_0}^*} y_m^k \right|} = \frac{\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[i_v]{|a_{i_v k}^*|}}{\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[i_v]{|a_{i_v k_0}^*|}} \leq \frac{R_{k_0}^{(1)}}{R_k} < 1$$

shuning uchun $\left| \frac{a_{i_v k}^*}{a_{i_v k_0}^*} y_m^k \right| \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0, k_0 + 1 \leq k \leq k_m$

bo'lganligi uchun

$$|B_{i_v}| \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0 \quad (2.2.13)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

(2.2.7) tengsizlikni qo'llab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|C_{i_v}| \leq \sum_{k=k_0+1}^{k_m} \left| \frac{a_{i_v k}^*}{a_{i_v k_0}^*} y_m^k \right| = \sum_{k=k_0+1}^{k_m} \left| \frac{a_{i_v k}^* x_m^{i_v} y_m^k}{a_{i_v k_0}^* x_m^{i_v}} \right| y_m^k \leq \sum_{k=k_0+1}^{k_m} \frac{M}{|a_{i_v k_0}^* x_m^{i_v}|} \leq \frac{i_v M}{|a_{i_v k_0}^* x_m^{i_v}|}.$$

(2.2.6) tengsizlikdan foydalansak:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[i_v]{\frac{i_v M}{|a_{i_v k_0}^* x_m^{i_v}|}} = \frac{R_{k_0}^{(1)}}{|x_m|} < 1,$$

hamda $R_{k_0}^{(1)} = R^{(1)}$. Bundan

$$|C_{i_v}| \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0 \quad (2.2.14)$$

$m > m_0$ uchun (2.2.12), (2.2.13), (2.2.14) munosabatlardan

$$A_{i_v} = \sum_{k=0}^{i_v} \frac{a_{i_v k}^*}{a_{i_v k_0}^*} y_m^k \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Oxirgi munosabatdan tayin $k_0, k_0 + 1$ darajali polinomlar ketma-ketligi

$y_m, m = m_0 + 1, m_0 + 2, m, m_0 + k_0 + 1$, nuqtalarda nolga intiladi. Bundan polinomlar

ketma-ketligi koefisientlari nolga intiladi, ya'ni $\frac{a_{i_v k}^*}{a_{i_v k_0}^*} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0, 0 \leq k \leq k_0$ xususan

$$\frac{a_{i_v k}^*}{a_{i_v k_0}^*} \equiv 1 \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0.$$

Oxirgi munosabatdagi ziddiyatdan lemma isboti kelib chiqadi.

2.2.1-lemma: Agar (2.2.1) qator

$$\{x_n, y_n\}_1^\infty, x_n \neq x_{n'}, n \neq n'$$

ketma-ketlikning har bir nuqtasida yaqinlashuvchi bo'lsa va $\{y_n\}_1^\infty$ ketma-ketlik

$$a) |y_n| = y_0 > 0, b) |y_n| \downarrow y_0, c) |y_n| \uparrow y_0$$

shartlardan birortasini qanoatlantirsa, u holda $R^{(2)} \geq y_0$ agar $|y_n| = y_0$, yoki $|y_n| \uparrow y_0$ bo'lsa, $R^{(2)} > y_0$, agar $|y_n| \downarrow y_0$ bo'lsa.

2.2.2-teorema: Agar (2.2.1) qator

$$Q = \{x_n, y_n\}_1^\infty, |y_n| \downarrow y_0, |x_n| \uparrow x_0$$

ketma-ketlikning barcha nuqtalarida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator

$$E = \{|x| \leq x_0, |y| \leq y_0\} \cup Q$$

to'plam absolyut yaqinlashuvchi, to'plam tashqarisidagi ixtiyoriy nuqtada qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isboti: (2.2.1) va (2.2.2) lemmalardan $R^{(1)} > x_0$ va $R^{(2)} > y_0$ bo'lishi kelib chiqadi. U holda (2.2.1)-teoremaga ko'ra qator $\{|x| < \bar{x}, |y| < \bar{y}\}$ to'rtburchakda absolyut yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi. Bu yerda, $\bar{x} = \min\{R^{(1)}, |x_1|\}$, $\bar{y} = \min\{R^{(2)}, |y_1|\}$. $R^{(1)}, |x_1| > x_0$ u holda $\bar{x} > x_0$. Xuddi shu kabi $\bar{y} > y_0$. Qatorning E to'plamda yaqinlashuvchi bo'lishidan, uning $\{|x| \leq x_0, |y| \leq y_0\}$ to'plamda absolyut yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

Faqatgina qatorning ixtiyoriy tayinlangan $(x', y') \notin E$ nuqtada uzoqlashuvchi bo'lishi mumkinligini isbotlash qoldi. $(x', y') \notin E$ u holda $|x'| > x_0$ yoki $|y'| > y_0$. Aniqlik uchun $|x'| > x_0$ bo'lsin, u holda shunday m son mavjudki barcha $n \geq m$ lar uchun $|x'| > |x_n|$ munosabat o'rinli.

$$P(y) = \prod_{n=1}^m (y - y_n) = b_0 + b_1 y + \dots + b_m y_m = \sum_{k=0}^m b_k y^k$$

bo'lsin.

(2.2.1) qatorning koefisientlari quyidagicha aniqlangan bo'lsin :

$$a_{i,k} = b_k \frac{1}{x_m^i}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq k < \infty$$

$$a_{i,k} = 0, k > m$$

$q > m$ bo'lganda quyidagiga erishamiz:

$$S_{p,q}(x, y) = \sum_{i,k=0}^{p,q} a_{i,k} x^i y^k = \sum_{i=0}^p x^i \sum_{k=0}^m \frac{1}{x_m^i} b_k y^k = P(y) \sum_{i=0}^p \left(\frac{x}{x_m}\right)^i.$$

Bu tenglikdan $\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{i,k} x^i y^k$ qator $n \leq m$ bo'lganda $P(y_n) = 0$, $n > m$ bo'lganda $\left| \frac{x_n}{x_m} \right| < 1$

bo'lganligi uchun $\{x_n, y_n\}_1^{\infty}$ ketma-ketlikning barcha nuqtalarida yaqinlashuvchi.

Ammo bu qator $P(y') \neq 0$ va $\left| \frac{x'}{x_m} \right| > 1$ bo'ladigan (x', y') nuqtada uzoqlashuvchi

bo'ladi, teorema isbotlandi.

2.2.1-natija: Agar (2.2.1) qator biror ochiq G to'plamda yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda u bu to'plamda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

2.2.3-teorema: Agar (2.2.1) qator $G = \{x_n, y_n\}_1^{\infty}, |x_n| \uparrow x_0, |y_n| \downarrow y_0$ ketma-ketlikning barcha nuqtalarida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator $|x| \leq x_0, |y| \leq y_0$ to'rtburchakda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Qator $E = \{|x| < x_0, |y| \leq y_0\} \cup Q$ to'plam tashqarisida uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin.

2.2.1-misol: $P(x) = \prod_{n=1}^m (x - x_n) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x_m = \sum_{i=0}^m b_i x^i$ bo'lsin, (2.2.1)

qator koefisientlari quyidagicha aniqlangan bo'lsin:

$$a_{i,k} = b_i \frac{1}{y_m^k}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq k < \infty$$

$$a_{i,k} = 0, i > m$$

$p > m$ bo'lganda:

$$S_{p,q}(x, y) = \sum_{i,k=0}^{p,q} a_{i,k} x^i y^k = \sum_{k=0}^q y^k \sum_{i=0}^p \frac{1}{y_m^k} b_i x^i = P(x) \sum_{k=0}^q \left(\frac{y}{y_m}\right)^k.$$

Bu qator $n \leq m$ bo'lganda $P(x_n) = 0, n > m$ bo'lganda $\left| \frac{y_n}{y_m} \right| < 1$ shartni qanoatlantiruvchi sonlardan tuzilgan $G = \{x_n, y_n\}_1^\infty$, ketma-ketlikning barcha nuqtalarida yaqinlashuvchi bo'ladi.

$$P(x') \neq 0 \text{ va } \left| \frac{y'}{y_m} \right| > 1$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha (x', y') nuqtalarda qator yaqinlashuvchi.

2.2.4-teorema: Agar (2.2.1) qator

$$Q = \{x_n, y_n\}_1^\infty, |x_n| \downarrow x_0, |y_n| \uparrow y_0$$

ketma-ketlikning barcha nuqtalarida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator $\{|x| \leq x_0, |y| < y_0\}$ to'rtburchakda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Qator

$$E = \{|x| \leq x_0, |y| < y_0\} + Q$$

to'plam tashqarisidagi nuqtada uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin.

2.2.5-teorema: Agar (2.2.1) qator

$$Q = \{x_n, y_n\}_1^\infty, |x_n| \uparrow x_0, |y_n| \uparrow y_0,$$

ketma-ketlikning barcha nuqtalarida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator $\{|x| \leq x_0, |y| < y_0\}$ to'rtburchakda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Qator $\{|x| < x_0, |y| < y_0\}$ to'rtburchak tashqarisidagi nuqtada uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin.

Isbot:

(2.2.1) va (2.2.2) lemmadan $R^{(1)} \geq x_0$ va $R^{(2)} \geq y_0$ bo'lishi kelib chiqadi. (2.2.1)

teoremani qo'llasak (2.2.1) qator $\{|x| < x_0, |y| < y_0\}$ to'rtburchakda absolyut yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

(2.2.1) qator koeffitsiyentlari quyidagicha aniqlangan bo'lsin:

$$a_{i,0} = \frac{1}{x_0^i}, 0 \leq i < \infty, \quad a_{o,k} = \frac{1}{y_0^k}, 1 \leq k < \infty, \quad a_{i,k} = 0, i, k \geq 1.$$

Bu qatorimiz teorema shartlarini qanoatlantiradi va $(\bar{x}, \bar{y}) \notin \{|x| < x_0, |y| < y_0\}$ nuqtada uzoqlashuvchi bo'ladi.

2.2.6-teorema: Agar (2.2.1) qator 2 ta

$$Q_1 = \{x_n, y_0'\}_1^\infty, \quad |x_n| \downarrow x_0 \text{ yoki } |x_n| \uparrow x_0, |y_0'| > 0$$

$$\text{va } Q_2 = \{x_0', y_n\}_1^\infty \quad |x_0'| > 0, |y_n| \uparrow y_0$$

yoki $|y_n| \uparrow y_0$ ketma-ketliklarning barcha nuqtalarida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator $\{|x| \leq |x_0'|, |y| \leq |y_0'|\}$ to'rtburchakda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Qator $\{|x| \leq |x_0'|, |y| \leq |y_0'|\}$ to'rtburchak tashqarisida uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin.

(2.2.1) qatorda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi, mumkin bo'lgan barcha $\{i_v, k_v\}_v^\infty = 1$ ketma-ketliklarni qaraymiz.

- 1) $i_v \uparrow \infty$ yoki $k_v \uparrow \infty$
- 2) Agar $i_v \rightarrow \infty$, u holda $i_v \uparrow \infty$. Bu shart k_v uchun ham o'rinlidir.
- 3) $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{i_v}{k_v}$ mavjud.

Har bir $\{i_v, k_v\}_v^\infty = 0$ ketma-ketlik uchun

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_{i_v, k_v} x^{i_v} y^{k_v},$$

qator hosil bo'ladi, bu yerda a_{i_v}, k_v - qatorning mos koeffitsiyentlari. 1) va 2) shartlar bajarilganda oxirgi qatorni x o'zgaruvchiga bog'liq oddiy darajali qator sifatida qaraymiz. Agar

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{k_v}{i_v} = \alpha \leq 1 \text{ bo'lsa } (y \neq 0. \text{ tayinlangan})$$

Bu qatorning absolyut yaqinlashish sohasini Koshi-Adamar formulasidan foydalanib topamiz:

$$|x| < \frac{1}{\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[i_v]{|a_{i_v, k_v} y^{k_v}|}} = \frac{1}{\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[i_v]{|a_{i_v, k_v}|}} \cdot \frac{1}{\lim_{v \rightarrow \infty} |y|^{\frac{k_v}{i_v}}} = \frac{R\{i_v, k_v\}_v}{|y|^\alpha},$$

$$R\{i_v, k_v\}_v = \frac{1}{\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[i_v]{|a_{i_v, k_v}|}}.$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz.

$$G\{i_v, k_v\} = \left\{ |x| < \frac{R\{i_v, k_v\}}{|y|^\alpha} \right\}.$$

Agar $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{i_v}{k_v} = \beta < 1$ bo'lsa, u holda

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_{i_v, k_v} x^{i_v} y^{k_v}$$

qatorni y o'zgaruvchining darajali qatori sifatida qaraymiz. Bu qatorning absolyut yaqinlashish sohasi $|y| < \frac{R\{i_v, k_v\}}{|x|^\beta}$

Bu yerda

$$R\{i_v, k_v\} = \frac{1}{\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[k_v]{|a_{i_v, k_v}|}}$$

bu holda quyidagicha belgilash kiritamiz.

$$G\{i_v, k_v\} = \left\{ |y| < \frac{R\{i_v, k_v\}}{|x|^\beta} \right\} \quad (x', y') \notin \overline{G\{i_v, k_v\}}$$

nuqtada $\sum_{v=0}^{\infty} a_{i_v, k_v} x^{i_v} y^{k_v}$ qatorning umumiy hadi nolga intilmasligi uchun u bu nuqtada uzoqlashuvchi.

$G - \cap G\{i_v, k_v\}$ ning ichki nuqtalaridan iborat bo'lsa.

2.2.3-lemma: (2.2.1)qator G to'plamda absolyut yaqinlashuvchi va har bir $(x', y') \notin \overline{G}$ nuqtada absolyut yaqinlashuvchi emas.

2.2.2-misol:

Bizga $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$ polinom berilgan bo'lsin.

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} x^k y^l$$

qatorning koeffitsiyentlari quyidagicha bo'lsin:

$c_{kl} = l! a_k$, agar $k \leq m$ bo'lsa,

$c_{kl} = 0$ agar $k > m$ bo'lsa.

$p > m$ bo'lganda qatorning xususiy yig'indisini qaraymiz.

$$S_{pq}(x, y) = \sum_{k,l=0}^{p,q} c_{kl} x^k y^l = \sum_{k,l=0}^{m,q} l! a_k x^k y^l = P(x) \sum_{l=0}^q l! y^l$$

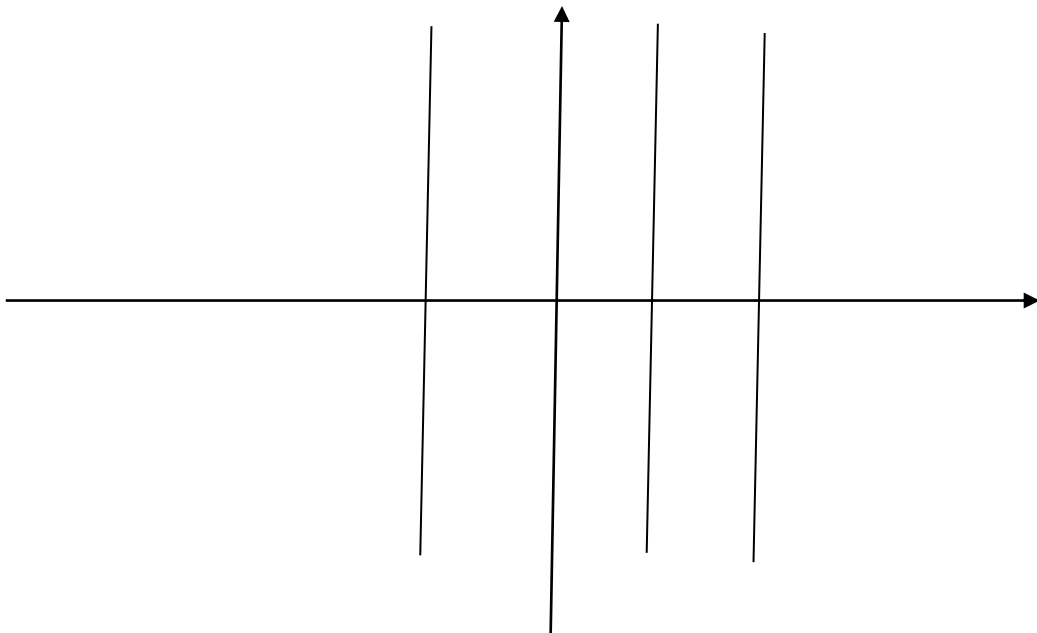
bu qatorning xususiy yig'indisi $x = x_s$ $s = 1, 2, 3, \dots, m$ (bu yerda x_s $p(x)$ polinomning nollari) $P(x) = 0$ bo'lganda va $z = 0$ bo'lganda nolga teng.

Demak, berilgan qator

$$\bigcup_{s=1}^m \{x = x_s\} \cup \{y = 0\}$$

to'plamda yaqinlashuvchi.

Bu misoldan ko'rinadiki ikki o'zgaruvchili darajali qatorlarda oddiy darajali qatorlardagi kabi yaqinlashish to'plamidagi nuqtalarning barchasi ham ichki nuqta bo'la olmaydi.



2.2.3-misol:

Bizga $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$ polinom berilgan bo'lsin.

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} x^k y^l$$

qatorning koeffitsiyentlari quyidagicha bo'lsin:

$$c_{kl} = 1, \quad c_{k,l} = -1 \quad 0 \leq k \leq \infty$$

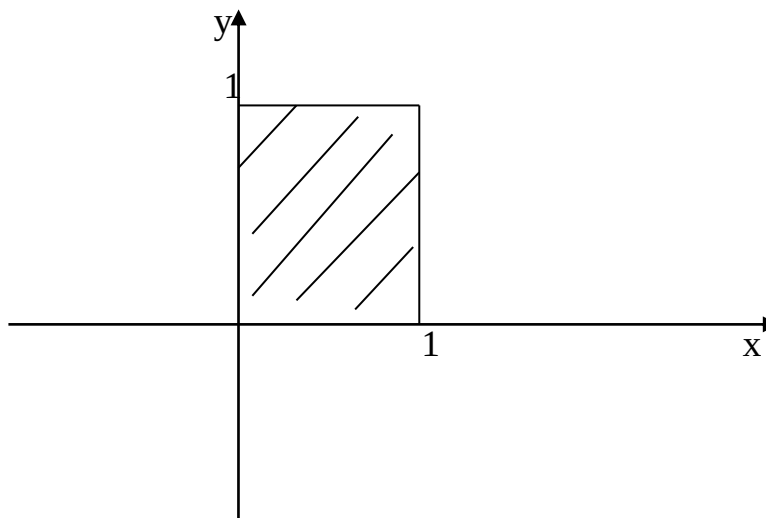
$$\text{va } c_{0,l} = 1, \quad c_{1,l} = -1 \quad 2 \leq l \leq \infty$$

qolgan hollarda $(k, l \geq 2) \quad c_{k,l} = 0$

u holda, bu qatorning xususiy yig'indisi quyidagicha bo'ladi:

$$s_{pq}(x, y) = \sum_{k,l=0}^{p,q} c_{k,l} x^k y^l = \sum_{k=0}^p x^k + \sum_{k=0}^p (-1)x^k y + \sum_{l=2}^q y^l + \sum_{l=2}^q (-1)xy^l = (1-y) \sum_{k=0}^p x^k + (1-x) \sum_{l=2}^q y^l$$

Bu tenglikdan ko'rinib turibdiki, qator $\{x|<1, |y|<1\} \cup (1,1)$ to'plamda yaqinlashuvchi.



2.2.4-misol:

$$\sum_{k,l \geq 1} x^k y^l$$

qatorning yaqinlashish to'plamini qaraylik.

$$\sum_{k,l \geq 1} x^k y^l = 1 + x + x^2 + \dots + xy + x^2 y + \dots + x_m y + \dots + x^2 y^2 + \dots + x^m y^2 + \dots + x^m y^m + \dots =$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(xy + (xy)^2 + (xy)^3 + \dots)$$

$\{x|<1, |xy|<1\}$ to'plamda oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi ifodaning har bir

ko'paytuvchisi geometrik qatorga aylanadi va ular yaqinlashuvchi.

Demak, bu to'plamda bizga berilgan qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi

$$\sum_{k \geq l}^{\infty} x^k y^l = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-xy}$$

2.2.5-misol:

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{y^k}{x^l}$$

qatorning yaqinlashish to'plamini qaraylik.

Xususiyy yig'indisini topamiz: $s_{p,q}(y, x) = \sum_{k,l=0}^{p,q} \frac{y^k}{x^l} = (1 + y + y^2 + \dots + y^p) \times$

$$\times \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^p}\right) = \frac{1-y^{p+1}}{1-y} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^{p+1}}{1-\frac{1}{x}}$$

$(y, x) \in \{ |y| < 1, |x| > 1 \}$ bo'lganda $\lim_{k,l \rightarrow \infty} s_{k,l}$ mavjud.

Demak, $\sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{y^k}{x^l}$ qator $\{ |y| < 1, |x| > 1 \}$ to'plamda yaqinlashadi.

II bob xulosasi.

II bob 2 qismdan iborat bo'lib, ushbu bobda karrali ketma-ketlik va qator tushunchalari to'liq o'rganilgan. Ikki karrali darajali qatorlarning yaqinlashish va absolyut yaqinlashish to'plamlari haqida bir qator mushohadalar yuritilgan.

Ikki karrali qatorlar uchun oddiy darajali qatorlarda o'rinli bo'lgan A'bel teoremasining analogi o'rganilgan. Bunday qatorlarning yaqinlashish to'plamlari haqida to'la tasavvurga ega bo'lish uchun bir qator misollar keltirilgan.

Xotima.

Sonli qatorlar va ularning yaqinlashuvchanligi, funksional qatorlar, darajali qator tushunchalari o'rganilgan. Funksiyalarni Teylor qatoriga yoyishga doir misollar o'rganilgan. Darajali qatorlar uchun Abel va Koshi-Adamar teoremlari isboti bilan berilgan. Qatorlarning yaqinlashuvchi bo'lishi va yaqinlashish to'plamlari to'la o'rganilgan ularga doir misollar keltirilgan.

Ushbu bitiruv malakaviy ish "Karrali qatorlar" mavzusiga bag'ishlangan bo'lib, unda karrali qatorlarning yaqinlashish to'plamlari o'rganilgan.

Bizga ma'lumki bir o'zgaruvchili darajali qator uchun quyidagicha Abel teoremasi o'rinli: Agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qator x_0 nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, $E = \{x \mid |x| < |x_0|\}$ to'plamda absolyut yaqinlashuvchi $\bar{E}$ to'plamdan tashqarida uzoqlashuvchi.

Bu teoremaning umumlashmasi karrali qatorlar uchun o'rinli bo'lmasligi misollarda ko'rsatilgan. Ikki karrali darajali qatorlarning yaqinlashish to'plamlari o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishidan oliy o'quv yurtlari talabalari matematik analiz fanini o'rganishda foydalanishlari mumkin.

Adabiyotlar

1. I.A.Karimov “Yuksak ma’naviyat-yengilmas kuch” Toshkent-2008 yil.
2. I.A.Karimov “O’zbekiston XXI asrga intilmoqda”. Toshkent 1999 .
3. Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz 1-tom. Toshkent, ”O’zbekiston”, 1994,1995.
4. Azlarov T., Mansurov H ”Matematik analiz” 2-tom. ”O’zbekiston”,1995, ”O’qituvchi”,1989.
5. Xudayberganov G., Varisov A., Mansurov H Matematik analiz. 1- va 2-qismlar. Qarshi, ”Nasaf”, 2003.
- to’plami. 1- va 2- tomlar. Toshkent, ”O’zbekiston”, 1993, 1996.
6. Sa’dullayev A.,Mansurov H., Xudayberganov G.,Varisov A., G’ulomov R Matematik analiz kursid
7. Кудрявцев Л. Курс математического анализа. Т. 1.1973.
8. Xudayberganov.G., A.K.Vorisov., X.T. Mansurov., B. A. Shoimqulov Matematik analizdan ma’ruzalar. 1-qism. Toshkent -2010.
9. Sa’dullayev A., Mansurov H., Xudayberganov G., Varisov A., G’ulomov R Matematik analiz kursidan misol va masalalar an misol va masalalarto’plami. 1-va 2-tomlar.Toshkent,"O'zbekiston",1993,1996.
10. Архипов Г.,Садовничий В., Сендов Б. Математический анализ, Москва “Высшая школа”1999.
11. Ильин В.,Садовничий В., Сендов Б. Математический анализ,Москва”Наука”,1979.
12. www.legionr.ru
13. <http://lib.mexmat.ru>.
14. www.ZiyoNet.uz
- 15.www.Google.uz