

O'ZBEKISTAN RESPUBLIKASI XALIQ BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

A'JINIYAZ ATINDAG'I NO'KIS MA'MLEKETLIK PEDAGOGIKALIQ
INSTITUTI

Fizika–matematika fakul'teti

Uluwma matematika kafedrası

«Matematikani oqitiw metodikası» ta'lim bag'darının` 4G kurs studenti

SULTANOVA OYNURANIN`

**«DEKART KOORDİNATALAR SİSTEMASINDA BERİLGEN
METRİKALIQ FORMULALARDI MA'SELELER ShESHİWDE
QOLLANIW USILI»**

atamasındag`ı

PİTKERİW QA'NİGELİK JUMISI

Kafedra baslıg`ı:

f.-m.i.k. A. Xodjaniyazov

İlimiy basshısı:

dots. S. A. Tanirbergenov

No'kis – 2015

Reje

Kirisiw	3
1-§. Skalyar ko`beymege baylanisli metrikaliq formulalar ...	5
2-§. Eki vektordın` vektorlıq ko`beymesin onın` koordinataları arqalı an`latıw formulası ha`m onı ma`seleler sheshiwde qollanıw	15
3-§. U`sh vektordın` aralas ko`beymesin tabıwdag`ı metrikaliq formulanı ma`seleler sheshiwde qollanıw.	28
4-§. Eki tochka arasındag`ı aralıqtı tabıw formulasına baylanisli ma`sellerdi sheshiw usılı.	35
Juwmaqlaw	40
A`debiyatlar	42

Kirisiw

Ha'r qanday geometriyalıq figura (sızıq, bet, dene) tochkalardıń jıynag'ı retinde ko'rip o'tiledi. Figuranıń ken'islikte yamasa tegislikte bolıwına baylanıslı onıń elementi bolg'an tochkalarda tegislikte yamasa ken'islikte bolıwı kerek. Tochkanıń tegislikte yamasa ken'isliktegi alıp turg'an ornın, jaylasıw awhalın anıqlaw ushın koordinatalar sisteması qollanıladı. Koordinatalar sisteması arqalı geometriyalıq figuralardıń qa'siyetlerin analitikalıq usılda tekseriw mu'mkinshiligine iye bolamız. Basqasha aytqanda geometriyanı algebra menen baylanıstıramız[1]-[3]. Ma'selen, ken'isliktegi ha'r bir M tochkag'a ta'rтіplengen (x, y, z) sanlar u'shligi sa'ykeslendiriledi. Bul jerdegi tochka geometriyalıq ob'ekt, al sanlar u'shligi algebra bolıp esaplanıladı.

Kesindinin' uzınlıg'ı, figuranıń maydanı, denenin' ko'lemi ha'm mu'yeshтин' shamasına baylanıslı ma'seleler metrikalıq ma'seleler dep aytıladı. Metrikalıq ma'selelerdi sheshiwde affinlik koordinatalar sistemasının' dara jag'dayı bolg'an tuwrı mu'yeshli dekart koordinatalar sisteması qollanıladı[4]-[5]. Mektep ha'm akademiyalıq litseylerde oqıtılatug'ın geometriya kursındag'ı ma'selelerdin' basım ko'pshiligi metrikalıq ma'seleler bolıp tabıladı. Sonlıqtan, tuwrı mu'yeshli dekart koordinatalar sisteması ja'rdeminde kelip shıg'atug'ın formulalar boyınsha sheshiletug'ın ma'seleler u'yreniw u'lken a'hmiyetke iye. Usıladı esapqa alıp bul pitkeriw jumısının' teması «Dekart koordinatalar sistemasında berilgen metrikalıq formulalardı ma'seleler sheshiwde qollanıw usılı» dep tan'lap alındı. Bul jumısta dekart koordinatalar sistemasına tiykarlang'an metrikalıq formulalardı qollanıw usılın oqıwshılarg'a jetkeriw bolıp esaplanıladı.

Bakalavr boyınsha pitkeriw qa'niygelik jumısı to'rt paragraftan du'zilgen bolıp, onıń 1-paragrafi skalyar ko'beymege baylanıslı metrikalıq formulalarg'a arnalg'an. Bul paragrafta eki vektordın' skalyar ko'beymesi ham onıń qa'siyetleri berilgen. Bul jerde skalyar ko'beymeni vektorlardın' dekrт bazistegi koordinataları arqalı an'latıw formulası keltirip shıg'arıladı. Bunnan son', usı formula tiykarında vektordın' uzınlıg'ın ha'm vektorlar arasındag'ı mu'yeshти tabıw formulaları

vektorlardın koordinataları arqalı berilgen. Bul paragrafta birlik vektordın koordinata ko'sherleri menen jasag'an mu'yeshstin kosinuslarının kvadratlarının qosındısı birge ten' ekenligi ko'rsetilgen. Sonın menen birge skalyar ko'beymege baylanıslı ma'selelerdin sheshiliw jolları ko'rsetilgen.

Pitkeriw qa'niygelik jumıstın 2-paragrafinda eki vektordın vektorlıq ko'beymesin olardın koordinatları arqalı an'latıw formulası keltirip shıg'arılǵan. Bul formula vektorlıq ko'beymenin ka'siyetleri tiykarında da'lillenip, tuwrı mu'yeshli dekart-koordinatalar sistemasında ko'rip o'tiledi. Usı formulalardın ha'm vektordın uzınlıǵın tabıw formulasınan paydalanıp eki vektordan jasalg'an parallelogramnıń maydanın tabıw formulası ja'ne to'belerinin dekart koordinataları boyınsha u'shmu'yeshliktin maydanın tabıw formulaları tiykarında geometriyalıq ma'selelerdi sheshiw usılı ko'rsetilgen.

Usı jumıstın 3-paragrafinda u'sh vektordın aralas ko'beymesi haqqındag'ı mag'lıwmatlar keltirilgen. Bul paragrafte u'sh vektordın aralas ko'beymesin olardın koordinataları arqalı an'latıw formulaları da'lillenip, bul formula tiykarında u'sh vektordan du'zilgen parallelepipedtin ko'lemi ha'm tetraedrın ko'lemin tabıw formalaların keltirip shıg'arıladı. Bul jerdede metrikalıq formular qollanılatusın ma'selelerdi sheshiw u'lgisi berilgen.

Pitkeriw qa'niygelik jumıstın 4-paragrafinda dekart koordinataları menen berilgen eki tochka arasındag'ı aralıqtı esaplaw formulası vektorlardı skalyar ko'beytiw a'melinen paydalanıp keltirip shıg'arılǵan. Kesindinin uzınlıǵın anıqlaw formulasınan paydalanıp geometriyalıq ma'selelerdi sheshiw usılı ko'rip o'tilgen.

1-§. Skalyar ko`beymege baylanışlı metrikalıq formulalar

Metrikalıq formulalar tuwrı mu`yeshli dekart koordinatalar sistemasında berilgen. Sebebi, affinlıq koordinatalar sistemasında ma`niske iye bolatug`ın uzınlıq (aralıq), maydan, ko`lem o`lshemi tu`sinikleri bir ma`nisli anıqlanbaydı. Sonday-aq skalyar ko`beyme tu`sinigi boyınsha anıqlanatug`ın formulalardı affinlik koordinatalar sistemasında emes, al tuwrı mu`yeshli dekart koordinatalar sistemasında tekseriwimizge boladı. Sonın` ushın, metrikalıq ma`selelerde ko`pshilik jag`daylarda skalyar ko`beyme tu`sinigi beriledi.

Biz skalyar ko`beymege baylanışlı metrikalıq formulalar menen jumıs islewden aldın usı ko`beyme tu`sinigin ko`rip o`temiz.

Anıqlama. Eki vektordın` uzınlıqlarının` (modul`lerinin`) ko`beymesine usı vektorlar arasındag`ı mu`yeshtin` kosinusın ko`beytiwden kelip shıqqan san olardıń skalyar ko`beymesi dep ataladı.

Berilgen $\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorlardın` skalyar ko`beymesin an`latıwshı san $\vec{a} \cdot \vec{b}$ yamasa $(\vec{a}, \vec{b})$ tu`rinde jazıladı.

Eki $\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorlardın` skalyar ko`beymesinin` anıqlaması boyınsha olardıń skalyar ko`beymesi mına tu`rde jazıladı.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \quad (1)$$

bul jerdegi φ mu`yesh -  $\vec{a}$  ha`m $\vec{b}$ vektorlararasındag`ı mu`yeshti an`latadı.

Eki vektordın` skalyar ko`beymesinin` to`mendegi qa`siyetlerin atap o`temiz:

1⁰. Eki vektordın` skalyar ko`beymesi kommutativlik (orın almasıw) qa`siyetine iye, yag`nıy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Bul qa`siyet skalyar ko`beymenin` anıqlamasınan kelip shıg`adı.

2⁰. Sang`a ko`beytiwde eki vektordın` skalyar ko`beymesi assotsiativlik (teriw) qa`siyetine iye, yag`nıy:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

3⁰. Vektorlardı skalyar ko`beytiw qosıwg`a qarata distributivlik (bo`listiriw) qa`siyetine iye, yag`nıy:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

4⁰. Vektordın skalyar kvadratı onın modulinin kvadratına ten, yag`nıy

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^0 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Endi, eki vektordın skalyar ko`beymesinin ayırım geometriyalıq qa`siyetlerin qarap o`temiz.

1-qa`siyet. Eger hesh birewi nol`lik vektor bolmag`an  $\vec{a}$  ha`m $\vec{b}$ vektorlar o`z-ara su`yir mu`yesh jasasa, onda olardın skalyar ko`beymesi on` san boladı, yag`nıy $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

Durısında da, φ mu`yesh  $0^0$  tan  $90^0$  aralıg`ında o`zgeredi, yag`nıy $0^0 < \varphi < 90^0$. Bul aralıqta $\cos \varphi > 0$. Sonlıqtan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi > 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0.$$

2-qa`siyet. Nol`lik emes eki vektor arasındag`ı mu`yesh dog`al mu`yesh bolsa, onda bul vektorlardın skalyar ko`beymesi teris san boladı, yag`nıy $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

Haqıyqatında da, bul jag`dayda eki vektor arasındag`ı φ mu`yesh ekinshi sherekte o`zgeredi, yag`nıy  $90^0 > \varphi > 180^0$ . Bul aralıqta  $\cos \varphi < 0$  boladı. Sonlıqtan, bul jag`dayda

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi < 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$

boladı.

3-qa`siyet. Eger  $\vec{a}$  ha`m $\vec{b}$ vektorlar o`z-ara perpendikulyar bolsa, onda olardın skalyar ko`beymesi nol`ge ten` boladı, yag`nıy

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Haqıyqatında da, eki vektor o`z-ara perpendikulyar bolsa, olar arasındag`ı φ su`yir mu`yesh 90^0 qa ten` boladı. Bul jag`dayda, $\cos 90^0 = 0$ bolg`anlıqtan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^0 = 0$$

ekenligi kelip shıg`adı.

4-qa'siyet. Eger eki $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlardın skalyar ko'beymesı nol'ge ten' bolsa, onda bul vektorlar o'z-ara perpendikulyar boladı.

Durısında da $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlardın birewi nol'ge ten' bolsa, onda bul jag'dayda usı nol'lik vektorg'a qa'legen bag'ıt beriwge boladı. Sonlıqtan nol'lik vektordın bag'ıtın ekinshi vektordın bag'ıtına perpendikulyar etip qa'bıllap alıwg'a boladı.

Eger eki $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlardın ekewi de nol'lik emes vektorlar bolıp $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bolsa, onda

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{0}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 0$$

Ten'lik orınlı boladı. Bunnan $\cos \varphi = 0$ ekenligi kelip shıg'adı. Bul jag'dayda $\varphi = \frac{\pi}{2}$ boladı. Demek, eki $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorları o'z-ara perpendikulyar bolıp tabıladı.

5-qa'siyet. Eger eki $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorları kollinear bolsa, onda olardıń skalyar ko'beymesı, usı vektorlardın bag'ıtlarının birdey yamasa qarama-qarsı bolıwına baylanıslı, on' belgi yamasa teris belgi menen alıng'an berilgen vektorlardın modul'lerinin ko'beymesine ten' boladı, yag'nıy

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}||\vec{b}|$$

Durısında da $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlar birdey bag'ıtlang'an bolsa, bul vektorlar arasındag'ı φ mu'yesh 0^0 qa, al qarama-qarsı bag'ıtlang'an bolsa $\varphi = 180^0$ boladı. Onda $\cos \varphi = \pm 1$ boladı. Bul jag'dayda

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi = \pm |\vec{a}||\vec{b}|$$

Eskertiw: Skalyar ko'beymesı u'sh ha'm onnan artıq vektorlar ushın qollanıwg'a bolmaydı, sebebi joqarıda qabıl etilgen anıqlamag'a muwapıq eki $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlardın skalyar ko'beymesı sannan ibarat boladı. Demek, eger biz

onı tag`da u`shinshi vektorg`a, aytayıq  $\vec{c}$  vektorg`a ko`beytsek, onda na`tiyjede vektordı payda etemiz:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda, \quad (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \lambda \vec{c}$$

Bul vektor $\vec{c}$ vektorg`a kollinear boladı.

Endi, eki vektordın` skalyar ko`beymesin ko`beyiwshi vektorlardın` dekart bazistegi koordinataları arqalı an`latıwshı formulanı keltirip shıg`aramız.

Meyli bizge ken`islikte  $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  dekart koordinatalar sisteması berilgen bolsın. Biz  $\vec{a}$  ha`m $\vec{b}$ vektorlardı alamız.

Bul jerde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar koordinata vektorları bolg`anlıqtan olar sıızıqlı baylanıssız bolıp, u`sh o`lshemli vektorlıq ken`isликтin` bazisin du`zedi. Bul jag`dayda vektorlıq ken`isликтin` ha`r qanday $\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorları usı vektorlar arqalı sıızıqlı an`latıladı.

$$\begin{cases} \vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \\ \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \end{cases} \quad (2)$$

Onda (2) en`liktegi  $x_1, y_1, z_1$  ha`m x_2, y_2, z_2 koeffitsientler $\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorlardın` sa`ykes  $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  baziske qarata koordinataları dep ataladı. Biz  $\vec{a}$  ha`m $\vec{b}$ vektorlardın` berilgen  $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  baziske qarata koordinataların ko`rsetiw ushın $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ ha`m $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ jazıwları qollanamız.

Endi (2) ten`lik boyınsha koordinataları menen berilgen  $\vec{a}$  ha`m $\vec{b}$ vektorlardın` skalyar ko`beymesin tabamız:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})$$

Bul ten`ликтin` on` jag`m ko`p ag`zalılardı ko`beytiw qag`ıydası boyınsha qawsırmanı ashıp shıg`amız. Sebebi, eki vektordın` skalyar ko`beymesin sang`a ko`beytiwde asotsiativlik qa`siyetine ha`m qosıwg`a qarata distributivlik qa`siyetine iye. Olay bolsa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 \vec{i}^2 + x_1 y_2 (\vec{i} \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i} \vec{k}) + y_1 x_2 (\vec{j} \vec{i}) + y_1 y_2 \vec{j}^2 + y_1 z_2 (\vec{j} \vec{k}) + z_1 x_2 (\vec{k} \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k} \vec{j}) + z_1 z_2 \vec{k}^2 \quad (3)$$

Dekart koordinatalar sistemasındagı $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ koordinata vektorları jup-juptan perpendikulyar, yag`nıy

$$\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}$$

Bul jag`dayda eki vektordın` skalyar ko`beymesinin` 3-qa`siyeti boyınsha  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  vektorlardın` bir-biri menen skalyar ko`beymesi nol`ge ten` boladı.

$$\begin{aligned} (\vec{i} \cdot \vec{j}) &= 0, (\vec{i} \cdot \vec{k}) = 0, (\vec{j} \cdot \vec{k}) = 0, (\vec{j} \cdot \vec{i}) = 0, \\ (\vec{k} \cdot \vec{i}) &= 0, (\vec{k} \cdot \vec{j}) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Sonın` menen birge koordinata vektorları birlik vektorlar bolg`anlıqtan skalyar ko`beymenin` 4⁰ qa`siyeti boyınsha

$$\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1, \quad \vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1, \quad \vec{k}^2 = |\vec{k}|^2 = 1 \quad (5)$$

ten`likler orınlı. Tabılğ`an (4) ha`m (5) sha`rtleri (3) ten`likke aparıp qoysaq, onda

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (6)$$

formulag`a iye bolamız.

Solay etip, koordinataları menen berilgen eki vektordın` skalyar ko`beymesi olardın` sa`ykes koordinatalarının` ko`beymelerinin` qosındısına ten` boladı.

Endi biz, koordinataları menen berilgen vektordın` uzınlıg`ın anıqlaw formulasın keltirip shıg`aramız.

Meyli bizge (2) ten`liktegi  $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$  vektor berilgen bolsın. Biz, mına skalyar ko`beymeni esaplaymız.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1 x_1 + y_1 y_1 + z_1 z_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

Bul jerde (6) formuladan paydalandıq.

Ekinshi jaqtan $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ bolg`anlıqtan, joqarıdag`ı ten`likti esapqa alıp mınag`an iye bolamız.

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

yamasa

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad (7)$$

Demek, vektordın` uzınlıg`ı onın` koordinataları arqalı (7) formula boyınsha tabıladı.

Koordinatalar menen berilgen $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ ha`m  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$  vektorları arasındag`ı mu`yeshti olardıń berilgen baziske qarata koordinataları boyınsha an`latıw formulasın keltirip shıg`aramız. Bunın` ushın eki vektordın` skalyar ko`beymesin tabıw formulası qollanıladı. Haqıyqatında da (1) formulanı esapqa alıp mına ten`lik jazıladı:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Bul ten`liktegi skalyar ko`beyme ha`m vektorlardın` uzınlıqlarına (6), (7) formulalardı qollanıwımızdın` na`tiyjesinde mına ten`likke iye bolamız.

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (8)$$

(8)- formula arqalı eki vektor arasındag`ı  $\varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b})$  mu`yeshtin` kosinusı tabıladı.

Joqarıda, eki vektordın` o`z-ara perpendikulyar bolıwı ushın olardıń skalyar ko`beymesinin` nol`ge ten`bolıwı za`ru`rli ha`m jetkilikli ekenligin ko`rip o`tken edik. Olar eki vektordın` skalyar ko`beymesinin` u`shinshi ha`m to`rtinshi qa`siyetleri arqalı berilgen. Usılarg`a tiykarlanıp ha`m (7) formulanı esapqa alıwımızdın` na`tiyjesinde mına ten`lik kelip shıg`adı:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (9)$$

Usılayınsha berilgen (9) ten`lik eki vektordın` perpendikulyarlıq sha`rti dep ju`rgiziledi.

Uzunlğı birge ten` bolg`an $\vec{e}$ vektor ($|\vec{e}|=1$) koordinata ko`shleri menen  $\alpha, \beta, \gamma$  mu`yesh jasadın. Anıqrag`ı  $OX$ ,  $OY$  ha`m OZ ko`sherlerinin` on` bag`ıtı menen sa`ykes  $\alpha, \beta, \gamma$  mu`yesh jasadın. Onda, mına sha`rtler orınlı boladı.

$$(\vec{e} \wedge \vec{i})=\alpha, (\vec{e} \wedge \vec{j})=\beta, (\vec{e} \wedge \vec{k})=\gamma$$

Birlik $\vec{e}$ vektorının`  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  koordinata vektorları arqalı sızıqlı an`latılıwın jazamız.

$$\vec{e} = \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j} + \lambda_3 \vec{k}$$

Bul ten`liktin` eki jag`ın  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  vektorlarg`a gezekpe-gezek skalyar ko`beytemiz. Sonda

$$\vec{e} \cdot \vec{i} = \lambda_1 (\vec{i} \cdot \vec{i}) + \lambda_2 (\vec{j} \cdot \vec{i}) + \lambda_3 (\vec{k} \cdot \vec{i})$$

Bul jerge (4) ha`m (5) ten`liklerdi qollansaq,

$$\lambda_1 = (\vec{e} \cdot \vec{i}) = |\vec{e}| |\vec{i}| \cos(\vec{e} \wedge \vec{i}) = \cos \alpha$$

ten`likke iye bolamız.

Usıg`an uqsas

$$\lambda_2 = (\vec{e} \cdot \vec{j}) = |\vec{e}| |\vec{j}| \cos(\vec{e} \wedge \vec{j}) = \cos \beta,$$

$$\lambda_3 = (\vec{e} \cdot \vec{k}) = |\vec{e}| |\vec{k}| \cos(\vec{e} \wedge \vec{k}) = \cos \gamma.$$

Demek, birlik $\vec{e}$ vektor o`zinin` koordinataları arqalı $\vec{e}(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ tu`rinde ko`rsetiledi.

Bizin` jag`dayımızda $\vec{e}$ - birlik vektor bolg`anı ushın (7) formulag`a tiykarlanıp mına qatnasqa iye bolamız.

$$1 = |\vec{e}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}$$

yamasa

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (10)$$

Ha'r qanday vektor bag'itti anıqlaydı. Sonın' ushın $\vec{e}$ vektor arqalı anıqlang'an bag'ıt koordinata ko'sherleri menen α, β, γ mu'yesh jasasa, onda usı mu'yeshlerdin' kosinuslarının' kvadratlarının' qosındısı birge ten' boladı. Sonlıqtan (10) formula bag'ıtlawshı kosinuslar dep ataladı.

Jokarıda keltirilgen (6), (7), (8), (9) ha'm (10) formulalar skalyar ko'beymege baylanışlı dekart koordinatalar sistemasındag'ı metrikalıq formulalar boladı. Usı metrikalıq formulalar qollanılğ'an ma'selelerdi sheshiw usılın ko'rip o'temiz.

1-ma'sele: $\vec{a}(3; -4; 1)$ ha'm $\vec{a}(2; -2; 1)$ vektorlar arasındag'ı mu'yeshiti tabın'.

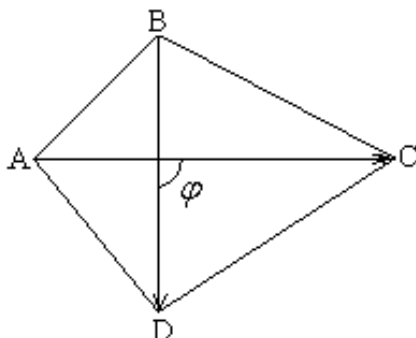
Sheshiliwi: Bul vektorlar arasındag'ı mu'yeshiti tabıw ushın (8) formuladan paydalanamız:

$$\cos \varphi = \frac{6 + 8 + 1}{\sqrt{9 + 16 + 1} \sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{15}{\sqrt{26} \sqrt{9}} = \frac{15}{\sqrt{26} \cdot 3} = \frac{5}{\sqrt{26}}.$$

$$\text{Bunnan } \varphi = \arccos \frac{5}{\sqrt{26}}$$

2-ma'sele. To'belerinin' koordinataları $A(-4; -4; -4)$, $B(-3; 2; 2)$, $C(2; 5; 1)$ ha'm $D(3; -2; 2)$ bolg'an to'rtmu'yeshliktin' diaganalları o'z-ara perpendikulyar ekenligin da'liyllen'.

Sheshiliwi: ABCD to'rtmu'yeshliktin' AS ha'm BD diaganalları arasındag'ı mu'yeshiti anıqlawımız kerek. Bunın' ushın $\vec{AC}$ ha'm $\vec{BD}$ vektorları arasındag'ı mu'yeshiti tabamız (1-sızılma).



1-sızılma.

Ma'seleni sheshiw ushın ABCD to'rtmu'yeshliktin' diaganalların suwretlewshi $\vec{AC}$ ha'm $\vec{BD}$ vektorları koordinataların anıqlaymız.

$$\vec{AC} = (2 + 4; 5 + 4; 1 + 4) = (6; 9; 5)$$

$$\vec{BD} = (3 + 3; -2 - 2; 2 - 2) = (6; -4; 0)$$

Usı vektorlar arasındag`ı mu`yeshti (8) formuladan paydalanıp tabamız.

$$\cos \varphi = \frac{36 - 36}{\sqrt{36 + 81 + 25} \cdot \sqrt{36 + 16}} = \frac{0}{\sqrt{142} \cdot \sqrt{52}} = 0$$

$$\text{Bunnan } \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}. \text{ Demek, } AC \perp BD$$

3-ma`sele.  $\vec{a}(2; -3; 1)$ ,  $\vec{b}(1; 2; 3)$  ha`m $\vec{c}(1; 2; -7)$ vektorları berilgen. Usı $\vec{a}(2; -3; 1)$, $\vec{b}(1; 2; 3)$ vektorlardın` ekewinede perpendikulyar ha`m $\vec{c}$ vektor menen skalyar ko`beymesi 10 g`a ten` bolatug`ın $\vec{x}$ vektordı anıqlan`. Sheshiliwi: Meyli,  $\vec{x}$  vektordın` koordinataları $(x_1; x_2; x_3)$ bolsın. Ma`selenin` sha`rti boyınsha vektorı  $\vec{a}$  ha`m $\vec{b}$ vektorlardın` ekewine de  $\vec{x}$  vektorg`a perpendikulyar bolg`anı ushın, olardın` (9) formuladag`ı perpendikulyarlıq sha`rtin qollanıp mına qatnaslardı jazamız:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

Ma`seledegi  $\vec{c} \cdot \vec{x} = 10$  sha`rtten mına ten`lik kelip shıg`adı:

$$x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 10$$

Biz $\vec{x}$ vektordın` koordinataların anıqlaw ushın joqarıdag`ı ten`lemelerdi sistema etip sheshemiz. Bunın` ushın $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ ten`lemeden  $x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 10$  ten`lemenı ag`zama-ag`za alsaq, mınag`an iye bolamız.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - (x_1 + 2x_2 - 7x_3) = -10 \Rightarrow x_3 = -1$$

Bunnan x_1, x_2 ge baylanıslı ten`lemeler sisteması kelip shıg`adı.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Usı ten`lemeler sistemasının` sheshimi $x_1 = \frac{11}{7}$, $x_2 = \frac{5}{7}$ ekenligin anıqlaymız.

Demek $\vec{x}$ vektordın` koordinataları $\vec{x}(\frac{11}{7}; \frac{5}{7}; -1)$ boladı eken.

2-§. Eki vektordın vektorlıq ko`beymesin onın koordinataları arqalı an`latıw formulası ha`m onı ma`seleler sheshiwde qollanıw

Biz, da`slep eki vektordın vektorlıq ko`beymesi tu`sinigine qısqasha toqtap o`temiz.

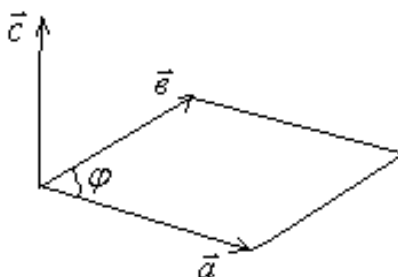
Meyli bizge $\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorları berilgen bolsa. Usı vektorlardın vektorlıq ko`beymesi vektor bolıp onı $\vec{c}$ arqalı belgileymiz ha`m ol to`mendegishe anıqlanadı:

1. Usı $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorlardın ekewinede perpendikulyar, basqasha aytqanda  $\vec{a}$  ha`m $\vec{b}$ vektorlardan du`zilgen parallelogramm tegisligine perpendikulyar.

2. $\vec{c}$ vektorının moduli $\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorlarınan jasalg`an parallelogrammnın maydanına ten`.

3. $\vec{c}$ vektordın bag`ıtı  $\vec{a}$  vektorınan  $\vec{b}$  vektorına qaray  $\vec{c}$  vektor do`gereginde en` jaqın burıw usı  $\vec{c}$  vektorının ushınan turıp qarag`anımızda saat tili burılıw bag`ıtına keri bag`ıtta bolıwı kerek.

Eki $\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorlardın vektorlıq ko`beymesi bolg`an  $\vec{c}$  vektordı joqarıda ko`rsetilgen u`sh sha`rtke tiykarlanıp suwretleybiz (2-sızılma).



2-sızılma.

$\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorlardın vektorlıq ko`beymesi $\vec{a} \times \vec{b}$ yamasa $[\vec{a}, \vec{b}]$ tu`rinde belgilew qabıl etilgen. Sonda  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$  boladı. Usı  $\vec{c}$  ( $[\vec{a}, \vec{b}]$ ) vektordın uzınlıg`ı mına formula boyınsha tabıladı.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi, \quad \varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Bul formula vektorlıq ko`beymenin` anıqlamasındag`ı 2-sha`rtten kelip shıg`adı.

Endi eki vektordın` vektorlıq ko`beymesinin` ayırım qa`siyetlerine toqtap o`temiz.

1⁰. Eki vektordın` vektorlıq ko`beymesi kommutativlik qa`siyetine iye emes. Atap aytqanda, ko`beytiwshi vektorlardın` orınların almasırg`anda vektorlıq ko`beymenin` belgisi o`zgeredi, yag`nıy

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$$

2⁰. Vektorlıq ko`beyme sang`a ko`beytiwge qarata assotsiativlik (teriw) qa`siyetine iye, yag`nıy

$$[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$$

3⁰. Vektorlıq ko`beyme qosıwg`a qarata distributivlik (bo`listiriw) qa`siyetine iye, yag`nıy

$$[(\vec{a}_1 + \vec{a}_2), \vec{b}] = [\vec{a}_1, \vec{b}] + [\vec{a}_2, \vec{b}]$$

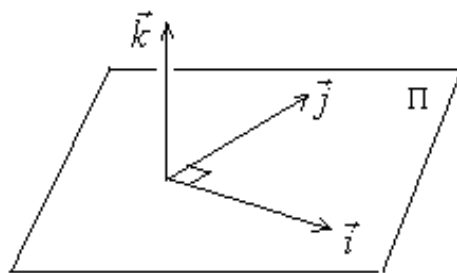
4⁰. Eger $\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorlar kollinear bolsa, onda bul vektorlardın` vektorlıq ko`beymesi nol`ge ten` boladı.

Bul qa`siyetlerdin` durısılg`ı «Analitikalıq geometriya» kursı boyınsha jazılğ`an barlıq a`debiyatlarda da`liyllep ko`rsetilgen. Sonlıqtan, bug`an ken`irek toqtap otırmaymız. Bizin` tiykarg`ı maqsetimiz vektorlıq ko`beymege baylanıslı metrikalıq formulalardı keltirip shıg`arıw bolg`anı ushın eki vektordın` ko`beymesin onın` koordinataları arqalı anıqlawg`a arnalg`an formulag`a ken`irek toqtap o`temiz.

Meyli $\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorlardın` $R=(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dekart renerge qarata koordinataları berilgen bolsın, yag`nıy

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \quad (1)$$

Endi dekart reperdegi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ koordinata vektorlardın` vektorlıq ko`beymesin anıqlaymız(3-sızılma).



3-sızılma

Vektorlıq ko`beymenin` anıqlaması boyınsha

$$1. [\vec{i}, \vec{j}] = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \sin 90^\circ = 1 = |\vec{k}|$$

$$2. \vec{k} \perp \vec{i}, \vec{k} \perp \vec{j}$$

3. $\vec{k}$ vektordın` ushınan turıp  $\Pi$  tegislikke qarag`anımızda $\vec{i}$ vektorının`  $\vec{j}$  vektorına  $\vec{k}$  vektrdın` do`gereginde en` jaqın aralıqqa burılıw saat tili burılıw bag`ıtına qarama-qarsı.

Demek, vektorlıq ko`beymenin` u`sh sha`rtine boysınıwshı $\vec{k}$ vektor ushın $\vec{k} = [\vec{i}, \vec{j}]$ ten`lik orınlı.

Usıg`an uqsas

$$\vec{i} = [\vec{j}, \vec{k}], \vec{j} = [\vec{k}, \vec{i}] \quad (2)$$

ten`liklerdin` orınlı ekenligin ko`rsetiwge boladı.

Vektorlıq ko`bemenin` 1^0 ha`m  $4^0$ -qasiyetlerinen mına ten`liklerge iye bolamız.

$$\begin{aligned} [\vec{j}, \vec{i}] &= -\vec{k}, \quad [\vec{k}, \vec{j}] = -\vec{i}, \quad [\vec{i}, \vec{k}] = -\vec{j} \\ [\vec{i}, \vec{i}] &= 0, \quad [\vec{j}, \vec{j}] = 0, \quad [\vec{k}, \vec{k}] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Koordinataları menen berilgen $\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorlardın` vektorlıq ko`beymesin tabamız. Bunın` ushın $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektorlıq ko`beymedegi  $\vec{a}$  ha`m $\vec{b}$ vektorlardın` ornına (1) ten`liktegi ma`nisin a`kelip qoyamız. Sonda mına ten`lik kelip shıg`adı:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}), (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})] \quad (4)$$

Vektorlıq ko`beymenin` 2^0 ha`m  $3^0$  qa`siyetlerinen paydalanıp, (4) ten`likтин` on` jag`ındag`ı an`latpadag`ı qawsırmalardı ashıp shıg`amız. Biraq, bul jerde

ko`beymelerdin` ta`rtibin saqlawımız kerek. Sebebi, vektorlıq ko`beyme kommutativlik qa`siyetke iye emes.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = x_1 x_2 [\vec{i}, \vec{i}] + x_1 y_2 [\vec{i}, \vec{j}] + x_1 z_2 [\vec{i}, \vec{k}] + y_1 x_2 [\vec{j}, \vec{i}] + y_1 y_2 [\vec{j}, \vec{j}] + y_1 z_2 [\vec{j}, \vec{k}] + z_1 x_2 [\vec{k}, \vec{i}] + z_1 y_2 [\vec{k}, \vec{j}] + z_1 z_2 [\vec{k}, \vec{k}].$$

Bul jerdegi bazislik vektorlardın` vektorlıq ko`beymesine (2) ha`m (3) ten`liklerdegi ma`nislerin jazamız:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = x_1 y_2 \vec{k} - x_1 z_2 \vec{j} - y_1 x_2 \vec{k} + y_1 z_2 \vec{i} + z_1 x_2 \vec{j} - z_1 y_2 \vec{i}.$$

Bul an`latpanı birdey koordinata vektorlarına qarata ta`rtip penen gruppalsaq

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}$$

ten`ligine iye bolamız. Bul ten`lik determinantlar arqalı to`mendegishe an`latıladı.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (5)$$

(5)- ten`likti qisqasha mına tu`rde jazıwg`a da boladı.

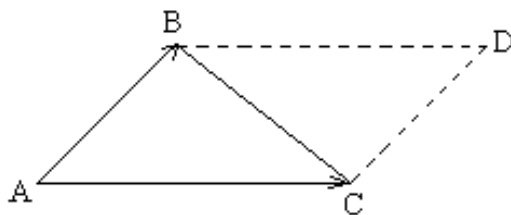
$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (6)$$

Sebebi, (6) ten`liktin` on` jag`ındag`ı u`shinshi ta`rtipli determinanttı birinshi qatardın` elementleri boyınsha jiklesek (5) ten`liktin` on` jag`ındag`ı an`latpa kelip shıg`adı. Sonlıqtan, (5) ha`m (6) ten`likler o`z-ara ekvivalent bolıp tabıladı.

Vektorlıq ko`beyme ushın kelip shıqqan (5) formula  $[\vec{a}, \vec{b}]$  vektorın koordinata bazislerine qarata jiklew formulası bolıp esaplanıladı. Sonlıqtan, jiklewdin` koeffitsientleri $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektorının` koordinatalarınan ibarat boladı. Solay etip, vektorlıq ko`beymeni koordinatalar formasında jazg`anda biz to`mendegi an`latpag`a iye bolamız.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\} \quad (7)$$

Endi biz, to'belarining koordinatalari belgili bolg'an $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ u'shu'yeshligining maydanin tabiw formulasin keltirip shig'aramiz (4-sizilma).



4-sizilma.

Buning ushin $\vec{AB}$ ha'm $\vec{AC}$ vektorlarin sizilmadan belgilep alamiz. Onda ABC u'shu'yeshligining maydan $\vec{AB}$ ha'm $\vec{AC}$ vektorlardan jasalg'an ABCD parallelogramm maydaninin yarimiga ten' boladi.

Vektor ko'beymenin' aniqqlaması boyınsha ABCD parallelogramnıń S maydanı mına formula arqalı tabıladı.

$$S = \left| \left[\vec{AB}, \vec{AC} \right] \right|.$$

Bul jerde ABC u'shu'yeshliktin' maydanin S_{Δ} arqalı belgilesek, onda

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{2} \cdot \left| \left[\vec{AB}, \vec{AC} \right] \right|$$

boladı. Endi $\vec{AB}$ ha'm $\vec{AC}$ vektorlarinin' koordinatalarin tabamiz.

$$\vec{AB} = \{b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3\},$$

$$\vec{AC} = \{c_1 - a_1; c_2 - a_2; c_3 - a_3\}.$$

Bul jerde (7) formuladan paydalanıp $\left[\vec{AB}, \vec{AC} \right]$ vektordın' koordinatalarin tabamiz.

$$\left[\vec{AB}, \vec{AC} \right] = \left\{ \begin{vmatrix} b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 - a_3 & b_1 - a_1 \\ c_3 - a_3 & c_1 - a_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Eger

$$\begin{aligned}b_1 - a_1 &= m_1, \quad b_2 - a_2 = n_1, \quad b_3 - a_3 = p_1 \\c_1 - a_1 &= m_2, \quad c_2 - a_2 = n_2, \quad c_3 - a_3 = p_2\end{aligned}$$

belgilerin kirgizsek, onda

$$\left[\vec{AB}, \vec{AC} \right] = \left\{ \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Demek,

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2} \quad (8)$$

Joqarıda keltirip shıg`arılğ`an (5) ha`m (8) formulalar dekart koordinatalar sistemasındag`ı vektorlıq ko`beymege tiykarlang`an metrikalıq formulalar dep ataladı.

Usı metrikalıq formulalar qatnasqan ma`selelerdin` sheshiliw u`lgisi menen tanısıp o`temiz.

1-ma`sele.  $\vec{a} = \{1; 1; 0\}$ ,  $\vec{b} = \{0; 3; 1\}$ ,  $\vec{c} = \{2; 0; 1\}$  vektorları berilgen.  $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$  vektordın` koordinataların tabın`.

Sheshiliwi: Joqarıda keltirilgen (7) formula boyınsha da`slep  $[\vec{b}, \vec{c}]$  vektordın` koordinataların tabamız. Bunnan son`  $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$  vektordın` koordinataları anıqlanadı.

$$[\vec{b}, \vec{c}] = \left\{ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right\} = \{3; 2; -6\}.$$

Onda

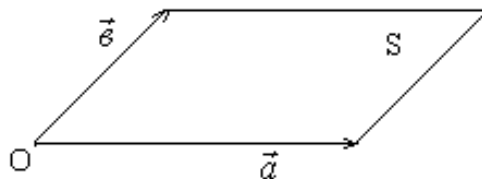
$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{-6; 6; -1\}$$

Demek,

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \{-6; 6; -1\}$$

2-ma`sele.  $\vec{a} = \{8; 4; 1\}$  ha`m $\vec{b} = \{2; -2; 1\}$ vektorlarg`a jasalgan parallelogrammanın` maydanın tabın`.

Sheshiliwi: Meyli bizge $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlari berilgen bolsin. Bul vektorlardi O tochkag'a parallel ko'shiremiz(5-sizilma).



5-sizilma.

Usi vektorlarga jasalg'an parallelogrammnin maydani S orqali belgileyemiz. Vektor ko'beymenin aniqqlaması boyınsha S maydan

$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$$

formula orqali tabiladi. Sonin ushin $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektordın koordinatalarin aniqqlaymız:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right\} = \{6; -6; -24\}.$$

Onda

$$S = \sqrt{6^2 + 6^2 + 24^2} = \sqrt{72 + 24^2} = \sqrt{24(3 + 24)} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3^3} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3^3} = 18\sqrt{2}$$

3-ma'sele. To'beleri $A(4; 2; 3)$, $B(5; 7; 0)$ ha'm $C(2; 8; -1)$ tochkalarda joylasqan ABC u'shmu'yeshliktin maydanın tabın.

Sheshiliwi: U'shmu'sheshliktin ta'replari orqali su'wretleniwshi $\vec{AB}$ ha'm $\vec{AC}$ vektorlardin koordinatalarin tabamız(4-sizilma):

$$\vec{AB} = \{5 - 4; 7 - 2; 0 - 3\} = \{1; 5; -3\},$$

$$\vec{AC} = \{2 - 4; 8 - 2; -1 - 3\} = \{-2; 6; -4\}.$$

Onda $[\vec{AB}, \vec{AC}]$ vektordın koordinatalari to'mendegishe aniqqlanadi.

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \left\{ \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \right\} = \{-2; 10; 16\}.$$

Bul jerde (8) formulani qollanıp u'shmu'yeshliktin maydanın tabamız.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 10^2 + 16^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 100 + 256} = \frac{1}{2} \sqrt{360} = 3\sqrt{10}$$

4-ma'sele. $\vec{a} = \{3; 0; -1\}$, $\vec{b} = \{2; 4; 3\}$, $\vec{c} = \{-1; 3; 2\}$, $\vec{d} = \{2; 0; 1\}$ vektorlar berilgen. $[\vec{a}, \vec{c}] \cdot [\vec{b}, \vec{d}]$ skalyar ko'beymeni tabın'.

Sheshiliwi. Da'slep $[\vec{a}, \vec{c}]$ ha'm $[\vec{b}, \vec{d}]$

$$[\vec{a}, \vec{c}] = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right\} = \{3; -5; 9\}$$

$$[\vec{b}, \vec{d}] = \left\{ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right\} = \{4; 4; -8\}$$

Ma'selede soralg'an $[\vec{a}, \vec{c}]$ ha'm $[\vec{b}, \vec{d}]$ vektorlardın' skalyar ko'beymesi birinshi paragraftegi (6) formula boyınsha tabıladı, yag'nıy

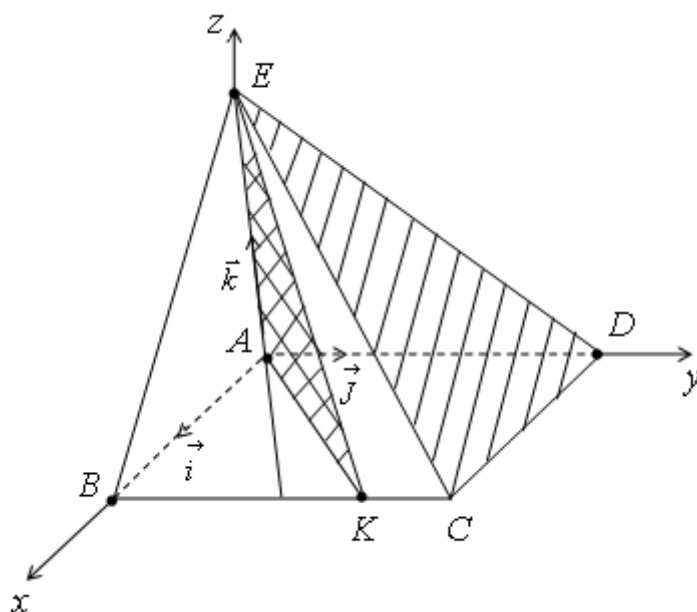
$$[\vec{a}, \vec{c}] \cdot [\vec{b}, \vec{d}] = 3 \cdot 4 + (-5) \cdot 4 + 9(-8) = 12 - 20 - 72 = -80$$

Demek, $[\vec{a}, \vec{c}] \cdot [\vec{b}, \vec{d}] = -80$.

5 – ma'sele. To'rtmu'yeshli $ABCDE$ piramidanın' ultanı $ABCD$ tuwrı mu'yeshlik bolıp, to'besi E tochkada jaylasqan ha'm ultanının' ta'repleri $AB = a$, $BC = b$ berilgen. Piramidanın' AE qabırg'ası onın' ultan tegisligine perpendikulyar bolıp uzınlıg'ı h qa ten'. Piramidanın' BC ta'repindegi K tochka ushın $BK = c$ bolsın. AKE ha'm CDE tegislikleri arasındag'ı mu'yeshiti tabın'.

Sheshiliwi. Tuwrı mu'yeshli dekart koordinatalar sisteması sonday etip tan'lap alınadı, na'tiyjede koordinata bası A tochkada, al koordinata ko'sherleri

$\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$ vektorlar boyınsha bag'ıtlansın (6 – sıızılma).



6-сызılма.

Tan`lap alıng`an tuwrı mu`yeshli dekart koordinatalar sistemasına qarata piramidanın` to`belerinin` koordinataları mına tu`rde boladı:

$$A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), C(a, b, 0), D(0, b, 0), E(0, 0, h), K(a, c, 0)$$

Ma`selenin` sha`rtinde ko`rsetilgen AKE ha`m  $CDE$  tegislikleri arasındag`ı mu`yeshti tabıw ushın usı tegisliklerdin` normal vektorları arasındag`ı mu`yeshti tabamız. Normal vektor arasındag`ı mu`yesh tegislikler arasındag`ı mu`yeshke ten` boladı.

Mına $\vec{p} = \left[\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{ED} \right]$ vektor CDE tegisliktin` normal vektorı, al

$\vec{q} = \left[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AK} \right]$ vektor AKE tegisliktin` normal vektorı boladı(6– sıızılма). Usı

vektorlardın` koordinataların anıqlawımız ushın da`slep $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AK}$ vektorlardın` koordinataların anıqlaymız.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} &= a \vec{i} + 0 \vec{j} + 0 \vec{k}, \quad \overrightarrow{DE} = -b \vec{j} + h \vec{k}, \\ \overrightarrow{AE} &= 0 \vec{i} + 0 \vec{j} + h \vec{k}, \quad \overrightarrow{AK} = a \vec{i} + c \vec{j} + 0 \vec{k} \end{aligned}$$

yamasa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} &= \{a; 0; 0\}, \quad \overrightarrow{DE} = \{0; -b; h\} \Rightarrow \overrightarrow{ED} = \{0; b; -h\} \\ \overrightarrow{AE} &= \{0; 0; h\}, \quad \overrightarrow{AK} = \{a; c; 0\} \end{aligned}$$

Joqarida ko`rsetilgen (6) formuladan paydalanıp  $\vec{p}$  ha`m $\vec{q}$ vektorlardın koordinataların anıqlaymız.

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & -h \end{vmatrix} = ab\vec{k} + ah\vec{j} = ah\vec{j} + ab\vec{k},$$

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & h \\ a & c & 0 \end{vmatrix} = ah\vec{j} - ch\vec{i} = -ch\vec{i} + ah\vec{j}.$$

Biz $\vec{p}$ ha`m  $\vec{q}$  vektorları arasındag`ı mu`yeshti  $\varphi$  dep belgilesek, onda usı mu`yesh AKE ha`m  $CDE$  tegislikleri arasındag`ı mu`yesh boladı. Onda eki vektor arasındag`ı mu`yeshti tabıw formulası boyınsha mınag`an iye bolamız.

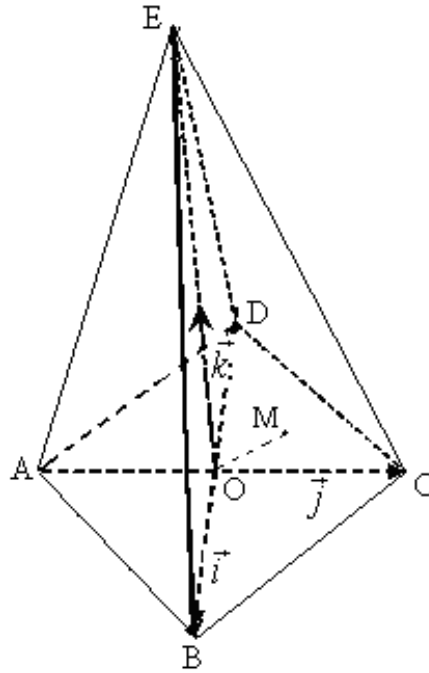
$$\cos \varphi = \frac{a^2 h^2}{\sqrt{a^2 h^2 + a^2 b^2} \sqrt{c^2 h^2 + a^2 h^2}} = \frac{a^2 h^2}{ah\sqrt{b^2 + h^2} \sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + h^2}}$$

Sonlıqtan AKE ha`m  $CDE$  tegislikleri arasındag`ı mu`yesh mınag`an ten` boladı:

$$\varphi = \arccos \frac{ah}{\sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{b^2 + h^2}}.$$

6-ma`sele. Durıs to`rtmu`yeshli piramidanın` ultanının` ishki oblastındag`ı qa`legen tochkadan qaptal jaqlarına deyingi aralıqlarının` qosındısı usı tochkanın` tan`lap alınıwına baylanıslı emes ekenligin da`liyllen`.

Sheshiliwi. Meyli $ABCDE$ durıs to`rtmu`yeshli pirimadanın` ultanı  $ABCD$  to`rtmu`yeshlik bolsın (7-sızılam). Bul jerde $ABCD$ kvadrat



7-sizilma.

Tuwrımu'yeshli dekart koordinatalar sistemasın sonday etip tan'lap alayıq, na'tiyjede koordinata bası $ABCD$ kvadrattın' dioganallarının' kesilisiw tochkasında jaylasıp, koordinata vektorları

$$\vec{OB} = \vec{i}, \vec{OC} = \vec{j}, \vec{k} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{bmatrix}$$

bolsın. Piramidanın' biyikligi h dep belgilep alsaq, onda $\vec{OE} = h\vec{k}$ boladı. Tan'lap alıng'an koordinatalar sistemasında piramidanın' to'belerinin' koordinataları mına tu'rde boladı:

$$B(1,0,0), C(0,1,0), A(0,-1,0), D(-1,0,0), E(0,0,h)$$

Usı tochkalardıń koordinatalarınan paydalanıp piramidanın' qaptal jaqlarının' ten'lemelerin du'zemiz. Bul ten'lemeler u'sh tochkadan o'tiwshi tegisliktin' ten'lemelerin tabıw formulasına boyınsha anıqlanıdı.

$$ABE: \begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow hx + z - h(y+1) = 0.$$

Bunnan

$$hx - hy + z - h = 0.$$

Usıg`an uqsas, piramidanın` qalg`an BCE, CDE ha`m ADE qaptal jaqlarının` ten`lemelerin anıqlaymız:

$$\text{BCE : } \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & h \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow hx + hy + z - h = 0 ,$$

$$\text{CDE : } \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & h \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -hx + hy + z - h = 0 ,$$

$$\text{ADE : } \begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow hx + hy - z + h = 0 .$$

Biz $ABCD$ kvadrattın` ishinde jaylasqan tochkanın` koordinataların $M(a,b,0)$ dep alamız. Usı tochkadan piramidanın` jaqlarına deyingi aralıqlardı anıqlaymız.

$$\begin{aligned} d_{ABE} &= \frac{|ha - hb - h|}{\sqrt{h^2 + h^2 + 1}} = \frac{h|a - b - 1|}{\sqrt{2h^2 + 1}}, \\ d_{BCE} &= \frac{|ha + hb - h|}{\sqrt{2h^2 + 1}} = \frac{h|a + b - 1|}{\sqrt{2h^2 + 1}}, \\ d_{CDE} &= \frac{|-ha + hb - h|}{\sqrt{2h^2 + 1}} = \frac{h|-a + b - 1|}{\sqrt{2h^2 + 1}}, \\ d_{ADE} &= \frac{|ha + hb + h|}{\sqrt{2h^2 + 1}} = \frac{h|a + b + 1|}{\sqrt{2h^2 + 1}} \end{aligned} \quad (8)$$

Tegisliktin` ulıwma ten`lemesi

$$Ax + By + Cz + D = 0 , (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \quad (9)$$

tu`rde beriledi.

Meyli, bizge $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ha`m  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  tochkalar berilgen bolsın. Mına an`latpalardı alamız.

$$\delta_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

$$\delta_2 = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$$

Eger (9) ten'leme menen aniqlang'an P tegisliktin' bir ta'repinde M_1 ha'm M_2 tochkalar jaylasqan bolsa, onda δ_1 ha'm δ_2 birdey belgige iye boladi, yag'nuy

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} > 0.$$

Usi sha'rtti paydalansaq, onda mina qatnaslardi jazıwg'a boladi.

$$ha + hb + h > 0,$$

$$ha - hb - h < 0,$$

$$ha + hb - h < 0,$$

$$-ha + hb - h < 0.$$

Sebebi tetraedrдин' ultanının' O orayı, M tochka onın' qaptal jaqlarınan bir ta'repte jatadı. Onda (8) ten'likler mina tu'rge keledi.

$$d_{ABE} = \frac{-h(a - b - 1)}{\sqrt{2h^2 + 1}},$$

$$d_{BCE} = \frac{-h(a + b - 1)}{\sqrt{2h^2 + 1}},$$

$$d_{CDE} = \frac{-h(-a + b - 1)}{\sqrt{2h^2 + 1}},$$

$$d_{ADE} = \frac{h(a + b + 1)}{\sqrt{2h^2 + 1}}.$$

Bul jerdegi ten'liklerdi ag'zama-ag'za qosıw arqalı mina qatnastı keltirip shıg'aramız:

$$\begin{aligned} & d_{ABE} + d_{BCE} + d_{CDE} + d_{ADE} = \\ & = \frac{h(-a + b + 1 - a - b + 1 + a - b + 1 + a + b + 1)}{\sqrt{2h^2 + 1}} = \frac{4h}{\sqrt{2h^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Bunnan, piramidanın' ultanındag'ı tochkadan qaptal jaqlarına deyingi aralıqlardın' qosındısı usı tochkanın' koordinatalarına baylanıslı emes. Sonlıqtan ma'sele tolıq sheshildi.

3-§. U`sh vektordın` aralas ko`beymesin tabıwdag`ı metrikalıq formulanı ma`seleler sheshiwde qollanıw

Eger, bizge u`sh  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorları berilgen bolsa, onda olardı o`z-ara ko`beytiwde bir-birinen o`zgeshelenetug`ın u`sh jag`daydın` bolıwı mu`mkin.

**1-jag`day.** Eger  $\vec{a}$  ha`m $\vec{b}$ vektorların skalyar ko`beymesin, onda  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda$  skalyar shama boladı. Bul skalyar shamag`a (vektordı sang`a ko`beytiw a`meli boyınsha) u`shinshi $\vec{c}$ vektorın ko`beytsek, onda usı  $\vec{c}$  vektorına kollinear bolg`an vektorg`a iye bolamız, yag`nıy

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \lambda \vec{c}, \quad \lambda - \text{san.}$$

**2-jag`day.** Eki  $\vec{a}$  ha`m $\vec{b}$ vektorlarının` vektorlıq ko`beymesin alamız. Bunnan keyin payda bolg`an  $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{f}$  vektordı  $\vec{c}$  vektorına skalyar ko`beytemiz. Sonda $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \vec{f} \cdot \vec{c} = \lambda$ san kelip shıg`adı. Vektorlardı bunday ko`beytiw u`sh vektordın` aralas ko`beymesi dep ataladı. Usı  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorlardın` aralas ko`beymesin to`mendegi tu`rde jazıw qabıl etilgen.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} \text{ yamasa } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

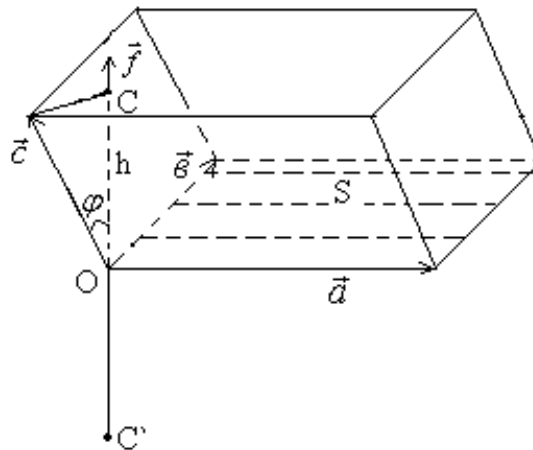
**3-jag`day.** Eki  $\vec{a}$  ha`m $\vec{b}$ vektorlardın` vektorlıq ko`beymesin alamız. Usının` na`tiyjesinde payda bolg`an  $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{f}$  vektorına  $\vec{c}$  vektordı vektorlıq ko`beytiw na`tiyjesinde kelip shıqqan an`latpa qos vektorlıq ko`beymesi dep ataladı. Onı  $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]$  tu`rinde jazıw qabıl etilgen.

Biz ekinshi jag`daydı qarap o`temiz. Sebebi, bul jag`dayda ko`birek geometriya bar. Sonın` ushın kollinear bolg`an u`sh  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorlardın` aralas ko`beymesinin` geometriyalıq ma`nisin ko`rip o`temiz.

Eki vektordın` ( $\vec{a}$  ha`m $\vec{b}$ vektordın`) vektorlıq ko`beymesi bazı bir $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{f}$ vektorın an`latatug`ının bilemiz. Al, usı $\vec{f}$ ha`m berilgen  $\vec{c}$  vektorlarının` skalyar ko`beymesin alsaq, ol bazı bir sang`a ten` boladı. Endi, bul

sannın` moduli berilgen  $\vec{a}, \vec{b}$  ha`m $\vec{c}$ vektorlarının jasalg`an paralelepipedin` ko`lemine ten` ekenligin da`liyleyemiz.

Meyli, $\vec{a}, \vec{b}$ ha`m  $\vec{c}$  vektorlarının jasalg`an paralelepipedin` ko`lemi V bolsın. Eki vektordın` vektorlıq ko`beymesinin` anıqlamasına muvafıq  $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{f}$  vektorının` moduli usı $\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorlarının` jasalg`an paralleogrammnın` maydanına ten` boladı. Usı  $\vec{f}$  vektordın` o`zi payda etilgen parallelogramm tegisligine perpendikulyar jaylasadı(8-sızılma).



8- sızılma.

Biz $\vec{a}$ ha`m  $\vec{b}$  vektorlardan jasalg`an parallelogrammnın` maydanı  $S$  arqalı belgileyemiz. Bul parallelogramm  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorlarga`a jasalg`an paralelepipedin` ultanı boladı. Onda

$$\begin{aligned} \vec{a} \vec{b} \vec{c} &= [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \vec{f} \cdot \vec{c} = |\vec{f}| |\vec{c}| \cos \varphi = |[\vec{a} \vec{b}]| |\vec{c}| \cos \varphi = \\ &= S \cdot |\vec{c}| \cos \varphi = \pm S \cdot OC = \pm S \cdot h = \pm V \end{aligned}$$

Bul jerde $0 < \varphi < 90^\circ$ bolg`anda  $|\vec{c}| \cos \varphi = h$  al  $90^\circ < \varphi < 180^\circ$  bolg`anda $|\vec{c}| \cos \varphi = -h$ boladı. Sonlıqtan

$$V = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$$

Eger, berilgen vektorlar komplanar bolsa, onda $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$ boladı. Haqıyqatında da, bul jag`dayda  $[\vec{a} \vec{b}]$  ha`m $\vec{c}$ vektorları o`z-ara perpendikulyar boladı. Sonlıqtan da, olardıń skalyar ko`beymesi nol`ge ten` boladı.

Kerisinshe, eger $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$ bolsa, onda $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{c}$ bolıp, $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlardan du'zilgen parallelogramm tegisliginde jatadı. Sonlıqtan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar boladı.

Meyli, dekart $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ reperde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar o'zlerinin koordinataları menen berilgen bolsın.

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}, \quad \vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\},$$

Usı vektorlardın' aralas ko'beymesin olardıń koordinataları arqalı an'latıw formulasın keltirip shıg'aramız.

Ekinshi paragraftegi (7) formula boyınsha

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}$$

boladı. Bunnan keyin payda etilgen bul vektordı u'shinshi $\vec{c}$ vektorına skalyar ko'beytemiz. Sonda biz

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 \quad (1)$$

formulasına iye bolamız. Bul ten'likтин' on' jag'ın mına tu'rde o'zgartip jazıwg'a boladı.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

Sonlıqtan

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

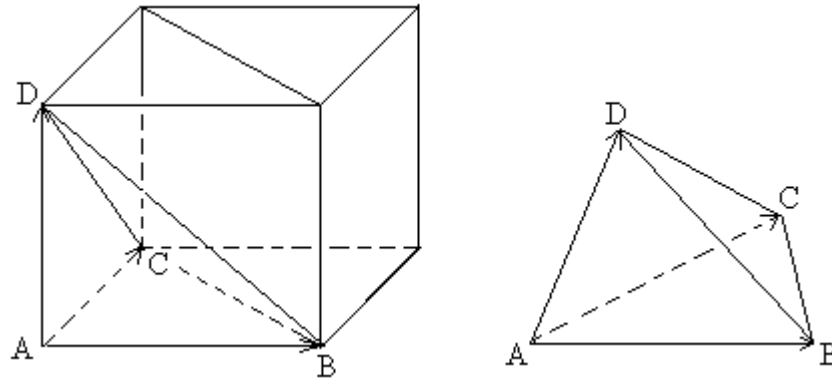
Eger

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

bolsa, berilgen $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ vektorlar komplanar vektorlar boladı. Demek, (3) formula $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarının komplanar bolıwının zu'ru'rlı ha'm jetkilikli sha'rtı bolıp tabıladı.

Eger vektorlardın aralas ko'beymesinin geometriyalıq talqılanıwınan paydalansaq, onda to'belerinin koordinataları boyınsha tetraedrın ko'lemin esaplaw formulasın shıg'arıw mu'mkinshiligine iye bolamız. Bul jerde usı ma'seleni qarap o'teyik.

Meyli, bizge bir tegislikte jatpaytug'ın to'rt $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ ha'm $D(x_4, y_4, z_4)$ tochkaları berilgen bolsın. Olar ken'islikte qandayda bir tetraedrın to'beleri xızmetin atqaradı (9-sızılma).



9-sızılma.

Eger $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ha'm $\vec{AD}$ vektorlarınan parallelepiped jasasaq, onda usı vektorlar arkalı su'wretleniwshi tetraedrın ko'lemi bul vektorlar arkalı jasalg'an parallelepipedtin ko'leminin $\frac{1}{6}$ bo'legine ten boladı. Bul jerdegi parallelepipedtin ko'lemi $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ha'm $\vec{AD}$ vektorlarının aralas ko'beymesinin absalyut ma'nisine ten bolıwı joqarıda ko'rsetildi. Sonlıqtan,

to'belari A, B, C, D tochkalarda joylasqan tetraedrning ko'lemi ushın mına formulani jazıwımızg'a boladı:

$$V_t = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\vec{AB}, \vec{AC} \right] \cdot \vec{AD} \right|. \quad (4)$$

Tetraedrning ko'lemin onıń to'belerinin koordinataları arkalı an'latıw ushın $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ha'm $\vec{AD}$ vektordın koordinataların anıqlaymız:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \\ \vec{AC} &= \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}, \\ \vec{AD} &= \{x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1\}. \end{aligned}$$

U'sh vektordın aralas ko'beymesin olardıń koordinataları arqalı an'latıwshı (2) formuladan paydalanıp (4) formulani mına tu'rde o'zgartip jazamız:

$$V_t = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Demek, tetraedrning to'belerinin koordinataları berilgen bolsa, onda onıń ko'lemi (5) formula boyınsha tabıladı.

Dekart reperde keltirip shıg'arılğan (1), (2) ha'm (5) formulalar aralas ko'beymege qarata metrikalıq formulalar dep ataladı.

U'sh vektordın aralas ko'beymesine baylanışlı metrikalıq formulalarg'a mısallar sheshemiz.

1-mısal. Berilgen $\vec{a} = \{2; 3; 5\}$, $\vec{b} = \{3; 0; 0\}$, $\vec{c} = \{1; -1; 2\}$ vektorlardın aralas ko'beymesin tabın.

Sheshiliwi: Joqarıda keltirilgen (2) formulada tiykarlanıp $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlardın aralas ko'beymesin esaplaymız:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -15 - 18 = -33$$

Demek, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -33$.

2-mısal. Berilgen $\vec{OA} = \{5; -3; 2\}$, $\vec{OB} = \{-6; 3; 4\}$, $\vec{OC} = \{-3; 6; -5\}$ vektorlarınan jasalg'an parallelepipedtin' ko'lemin tabın'.

Sheshiliwi: Da'slep $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ vektorlardın' aralas ko'beymesin tabamız.

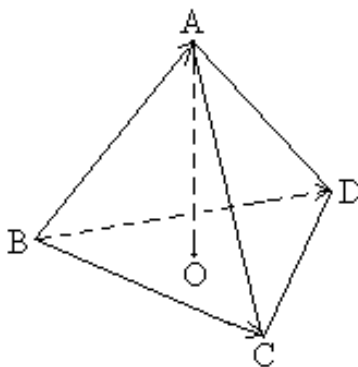
$$\begin{aligned} \left[\vec{OA}, \vec{OB} \right] \cdot \vec{OC} &= \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -6 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -75 - 72 + 36 + 18 - 120 + 90 = \\ &= -75 - 36 + 18 - 30 = -105 - 18 = -123. \end{aligned}$$

U'sh vektordın' aralas ko'beymesinin' geometriyalıq ma'nisi boyınsha aralas ko'beymenin' moduli ko'beymege qatnasqan u'sh vektordan jasalg'an parallelepipedtin' ko'lemine ten'. Biz, usını qollanıp $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ vektorlardan du'zilgen parallelepipedtin' ko'lemin tabamız:

$$V = \left| \left[\vec{OA}, \vec{OB} \right] \cdot \vec{OC} \right| = |-123| = 123.$$

3-mısal. To'beleri $A(2; -4; 5)$, $B(-1; -3; 4)$, $C(5; 5; -1)$ ha'm $D(1; -2; 2)$ tochkalarında bolgan tetraedrđın' AH biyikliginin' uzınlıg'ın tabın'.

Sheshiliwi: Meyli bizge $ABCD$ tetraedr berilgen bolsın. Bul tetraedrđın' ultanın BCD u'shmu'yeshlik dep alamız(10-sızılma).



10-sızılma.

Ma'seledegi berilgen tetraedrđın' ko'lemi (5) formula boyınsha tabıladı.

Bunın' ushın $\vec{BA}$, $\vec{BC}$, $\vec{BD}$ vektorlarınan' koordinataların tabamız.

$$\vec{BA} = \{2+1; -4+3; 5-4\} = \{3; -1; 1\},$$

$$\vec{BC} = \{5+1; 5+3; -1-4\} = \{6; 8; -5\},$$

$$\vec{BD} = \{1+1; -2+3; 2-4\} = \{2; 1; -2\}.$$

Onda

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot |-48 - 6 + 10 - 16 + 15 - 12| = \\ &= \frac{1}{6} \cdot |-82 + 25| = \frac{1}{6} \cdot |-57| = \frac{57}{6} = \frac{19}{2} = 9,5. \end{aligned}$$

Ekinshi jaqdan $ABCD$ tetraedrindin ko'lemi

$$V_t = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot h$$

formula menen tabiladi. Sonliqtan BCD u'shmu'yeshlikdin maydanin tabiwimiz kerek. Buni ekinshi paragraftegi (8) formula boyinsha tabamiz.

$$\begin{aligned} S_{BCD} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-16+5)^2 + (-10+12)^2 + (6-16)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{121+4+100} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{225} = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

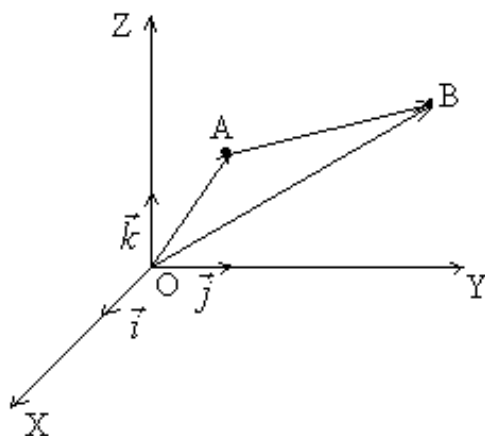
Onda

$$h = \frac{3V_t}{S_{BCD}} = \frac{\frac{3 \cdot 19}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{3 \cdot 19}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{19}{5} = 3,8$$

Demek, tetraedrindin A to'besi tu'sirilgen biyikligi 3,8 ge ten'.

4-§. Eki tochka arasındag`ı aralıqtı tabıw formulasına baylanışlı ma`sellerdi sheshiw usılı

Meyli $R = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dekart reperge qarata koordinataları belgili bolg`an  $A(x_1, y_1, z_1)$  ha`m $B(x_2, y_2, z_2)$ tochkalar berilgen bolsın. Usı tochkalar arasındag`ı aralıqtı tabıw ma`selesin ko`rip o`temiz. Biz A ha`m  $B$  tochkalardıń radius vektorların  $\vec{OA}$  ha`m $\vec{OB}$ arqalı belgileyik(11-sızılma).



11- sızılma.

Sızılmadan mına ten`likke iye bolamız.

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \text{ yamasa } \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}. \quad (1)$$

Tochkanın` dekart koordinatalarının` anıqlaması boyınsha

$$\vec{OB} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}, \quad \vec{OA} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

bolg`anlıqtan,

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) = \\ &= (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k} \end{aligned}$$

ten`lik orınlanadı. Sonlıqtan  $\vec{AB}$  vektordın` $R = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ reperge qarata koordinataları

$$\vec{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

tu`rinde boladı.

Biz $\vec{AB}$ vektordın` uzınlıg`ın (modulin) A ha`m B tochkaları arasındag`ı aralıq dep qabıl alamız. Sonda

$$\rho(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{\vec{AB}^2} = \sqrt{(\vec{AB} \cdot \vec{AB})}$$

bolg`anlıqtan, eki vektordın` skalyar ko`beymesin olardın` koordinataları arqalı anıqlaw formulasına tiykarlanıp mınag`an iye bolamız:

$$\begin{aligned} (\vec{AB} \cdot \vec{AB}) &= (x_2 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_2 - z_1) = \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \end{aligned}$$

Bunnan

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2)$$

Kelip shıqqan (2) an`latpa A ha`m B tochkaları arasındag`ı aralıqtı tabıw formulası dep ataladı. Bul formula aralıqtı tabıwg`a baylanıslı metrikalıq formulada dep te aytılaı.

Endi biz aralıqtı esaplaw formulası qollanılatug`ın ma`selelerdi sheshiw u`lgileri menen tanısamız.

1-ma`sele. To`belerinin` koordinataları  $A(3; 4; 3)$ ,  $B(-7; -6; -2)$  ha`m $C(-1; 4; 3)$ bolg`an u`shmu`yeshliktin` perimetrin tabın`.

Sheshiliwi: Meyli bizge ABC u`shmu`yeshligi berilgen bolsın. Usı u`shmu`yeshliktin` perimetrin tabıw ushın onın` AB , AC ha`m  $BC$  ta`replerinin` uzınlıqların esaplawımız kerek. Bunın` ushın u`shmu`yeshliktin` to`belerinin` koordinataları boyınsha (2) formulanı qollanıp ta`replerinin` uzınlıqların tabamız.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-7 - 3)^2 + (-6 - 4)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{100 + 100 + 25} = 15, \\ AC &= \sqrt{(-1 - 3)^2 + (4 - 4)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{16 + 0 + 0} = \sqrt{16} = 4, \\ BC &= \sqrt{(-1 + 7)^2 + (4 - +6)^2 + (3 + 2)^2} = \sqrt{36 + 100 + 25} = \sqrt{161}. \end{aligned}$$

Onda ABC u`shmu`yeshliktin` P perimetri mınag`an ten` boladı:

$$P = 15 + 4 + \sqrt{161} = 19 + \sqrt{161}.$$

2-ma'sele. Berilgen $A(3; -2; 5)$, $B(-2; 1; -3)$, $C(5; 1; -1)$ u'shmu'yeshligi qanday u'shmu'yeshlik ekenin aniqlan'. U'shmu'yeshliktin' mu'yeshleri boyınsha klassifikatsiyalan'.

Sheshiliwi: Ma'selede berilgen ABC u'shmu'yeshliktin' ta'replerinin' uzınlıqların aniqlaymız.

$$AB = \sqrt{(-2-3)^2 + (1+2)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} ,$$

$$AC = \sqrt{(5-3)^2 + (1-2)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7 ,$$

$$BC = \sqrt{(5+2)^2 + (1-1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53} .$$

Bul u'shmu'yeshliktin' ta'replerinin' uzınlıqları ha'r qıylı, yag'nıy $AB > BC > AC$. Sonın' menen birge ABC u'shmu'yeshliktin' qa'legen eki ta'repinin' uzınlıqlarının' kvadratlarının' qosındısı u'shinshi ta'repinin' uzınlıg'ının' kvadratınan u'lken bolg'anı ushın usı u'shmu'yeshliktin' barlıq ishki mu'yeshleri su'yir mu'yesh boladı.

3-ma'sele. OY ko'sherinen sonday tochkanı tabın', ol $A(3;1;0)$ ha'm $B(-2;4;1)$ tochkalardan birdey uzaqlıqta jaylasın.

Sheshiliwi: Meyli OY ko'sherindegi C tochka ma'selenin' sha'rtin qanatlandırısn. Onda C tochkanın' abtsissası ha'm applikatası nol'ge ten' boladı, yag'nıy $C(0; y; 0)$ boladı. Ekinshi jaqtan

$$AC = \sqrt{(0-3)^2 + (y-1)^2 + 0} = \sqrt{9 + (y-1)^2} ,$$

$$BC = \sqrt{(0+2)^2 + (y-4)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4 + (y-4)^2 + 1}$$

bolıp $AC = BC$ ten'lik orınlanıwı kerek. Sonda

$$\sqrt{9 + (y-1)^2} = \sqrt{5 + (y-4)^2}$$

ten'likke iye bolamız. Biz, bul ten'liktin' eki ta'repin kvadratqa ko'terip, qawsırmalardı ashıp shıqsaq, belgisiz y ke qarata ten'leme kelip shıg'adı.

$$9 + y^2 - 2y + 1 = 5 + y^2 - 8y + 16$$

yamasa

$$6y = 21 - 10 = 11 \Rightarrow y = \frac{11}{6}$$

Demek, biz izlegen tochkа $C(0; \frac{11}{6}; 0)$ boladı eken.

4-ma`sele. Koordinataları arqalı  $A(1; 2; 3), B(5; 2; 3), C(2; 5; 3)$  ha`m $D(1; 2; -1)$ tochkaları berilgen. Usı tochkalardan o`tiwshi sferanın` orayın ha`m radiusın tabın`.

Sheshiliwi: Ma`seledegi berilgen  $A, B, C, D$  tochkalardan o`tiwshi sferalıq orayı $N(a, \vartheta, c)$ tochkada bolıp, radiusı R bolsın. Onda sferanın` anıqlaması boyınsha

$$AN = BN = CN = DN = R$$

ten`likleri orınlı boladı. Bizin` jag`dayımızda

$$AN = \sqrt{(a-1)^2 + (\vartheta-2)^2 + (c-3)^2},$$

$$BN = \sqrt{(a-5)^2 + (\vartheta-2)^2 + (c-3)^2},$$

$$CN = \sqrt{(a-2)^2 + (\vartheta-5)^2 + (c-3)^2},$$

$$DN = \sqrt{(a-1)^2 + (\vartheta-2)^2 + (c+1)^2}$$

bolg`anı ushın bulardı bir-birine ten`lestirip a, ϑ, c larg`a baylanıslı ten`lemelerdi keltirip shıg`aramız.

1) $AN = BN$ ten`likten:

$$(a-1)^2 + (\vartheta-2)^2 + (c-3)^2 = (a-5)^2 + (\vartheta-2)^2 + (c-3)^2$$

yamasa

$$a^2 - 2a + 1 + c^2 - 6c + 9 = a^2 - 10a + 25 + c^2 - 6c + 9$$

bunnan

$$10a - 2a = 25 - 1 \Rightarrow 8a = 24 \Rightarrow a = 3$$

2) $AN = CN$ ten`likten:

$$(a-1)^2 + (\vartheta-2)^2 + (c-3)^2 = (a-2)^2 + (\vartheta-5)^2 + (c-3)^2$$

Usı ten`likte  $a=3$  degen sha`rt penen qawsırmalardı ashıp shıg`amız:

$$(3-1)^2 + (\vartheta-2)^2 = (3-2)^2 + (\vartheta-5)^2$$

$$\vartheta^2 - 4\vartheta + 4 + 4 = \vartheta^2 - 10\vartheta + 25 + 1$$

$$10\vartheta - 4\vartheta = 26 - 8 \Rightarrow 6\vartheta = 18 \Rightarrow \vartheta = 3$$

3) $AN = DN$ ten`likten:

$$(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c+1)^2$$

ten'likke iye bolamız. Onda

$$c^2 - 6c + 9 = c^2 + 2c + 1 \Rightarrow 8c = 8 \Rightarrow c = 1.$$

Demek, sferanın' orayının' koordinataları anıqlandı, yag'nıy $N(3;3;1)$. Usı sferanın' radiusı $R = AN$ ten'likten anıqlanadı.

$$R = AN = \sqrt{(3-1)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

5-ma'sele. To'belerinin' koordinataları $A(1;-2;1), B(3;-3;-1), C(4;0;3)$ bolg'an u'shmu'yeshliktin' tuwrı mu'yeshli u'shmu'yeshlik ekenligin da'liyllen'.

Sheshiliwi: Bul u'shmu'yeshliktin' ta'replerinin' uzınlıqların tabamız:

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (-3+2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9}$$

$$BC = \sqrt{(4-3)^2 + (0+3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$$

$$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (0+2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

Bunnan

$$AB^2 + AC^2 = 9 + 17 = 26 = BC^2$$

orınlanıp Pifagor teoremasın qanaatlandıradı. Demek, ABC u'shmu'yeshlik tuwrımu'yeshli u'shmu'yeshlik eken.

J u w m a q l a w

Vektorlar algebrasında vektorlardı o`zar ko`beytiw a`melinin` eki tu`ri ko`rip o`tileti. Bulardın` birewi vektorlardın` skalyar ko`beymesi degen atama menen aytilatug`ın bolsa, al ekinshisi vektorlıq ko`beyme dep ataladı. Eki vektordın` skalyar ko`beymesi na`tiyjesinde skalyar sang`a, yag`nıy skalyar shamag`a iye bolamız. Eki vektordın` skalyar ko`beymesin qollanıp bir-qansha geometriyalıq teoremlar da`liyllenip, ma`seleler sheshildi. Mısalı, skalyar ko`beyme tiykarında mektep kursınan belgili bolg`an Pifagor teoreması, u`shmu`yeshlikler ushın kosinuslar teoreması da`liyllenip, u`shmu`yeshliktin` ta`replerinin` uzınlıqları boyınsha ishki mu`yeshinin` bissekrriyasaların` uzınlıqları tabıldı.

Sonın` ushın, usı pitkeriw qa`niygelik jumıstın` 1-paragrafindegi mag`lıwmatlar menen mektep ha`m akademiyalıq litsey oqıwshıları tanısıwı na`tiyjesinde, tegisliktegi ko`pmu`yeshliklerge arnalg`an metrikalıq ma`selelerdi skalyar ko`beyme tiykarında sheshiw uqıplılıg`ına iye boladı. Sebebi, skalyar ko`beyme tiykarında eki tuwrı sızıq arasındag`ı mu`yesh, aralıq tu`siniklerin geometriyalıq ma`selelerge tez qollanıw mu`mkinshiliklerine iye bolamız.

Eki vektordın` vektor ko`beymesi na`tiyjesinde (skalyar ko`beymeden o`zgeshe) vektorg`a iye bolamız. Skalyar ko`beymege uqsas, vektor ko`beymedede, geometriyalıq ma`selelerdi sheshiwde qollanıladı. Mısalı, eki vektordın` vektor ko`beymesin qollanıp parallelogramnın` maydanın, u`shmu`yeshliktin` maydanın anıqlawg`a boladı. Sonlıqtan pitkeriw qa`niygelik jumıstın` 2-paragrafindegi berilgen mag`lıwmatlar tiykarında mektep ha`m akademiyalıq litsey oqıwshıları u`shmu`yeshlik ha`m parallelogramnın` maydanları qatnasatug`ın geometriyalıq ma`selelerdi sheshiwi mektep ha`m akademiyalıq litsey oqıwshıları mu`mkin dep oylaymız. Sonın` menen birge, ko`p jaqlılardıń aqları arasındag`ı mu`yesh qatnasatug`ın ma`selelerde vektor ko`beyme tiykarında sheshiledi. Sebebi, vektor ko`beymeden kelip shıqqan vektor ko`beymede qatnasıwshı vektorlarg`a jasalg`an parallelogramm tegisligine perpendikulyar boladı.

U'sh vektordın aralas ko'beymesinin anıqlanıwı boyınsha olardıń da'slepki ekewin vektor ko'beytirip, shıqqan na'tiyjege u'shinshi vektor skalyar ko'beytiriledi. Sonda skalyar san kelip shıg`adı. Usı skalyar sannın moduli aralas ko'beymede qatnasıwshı u'sh vektordan du`zilgen parallelepipedtin ko`lemine ten boladı. Sonlıqtan pitkeriw qa`niygelik jumıstın 3-paragrafinde vektorlardın aralas ko'beymesin tabıwg`a arnalg`an formulalardı qollanıp ken`isliktegi ko`p jaqlılardıń (parallelepiped yamasa tetraedrın) ko`lemlerine tiykarlang`an geometriyalıq ma`selelerdi sheshiw mu`mkinshiliklerine iye bolınadı. Ko`pshilik jag`daylarg`a parallelepipedtin yamasa tetraedrın ko`lemine baylanıslı ma`seleler vektorlardın aralas ko'beymesi arqalı an`sat sheshiledi.

Geometriyalıq figuralardıń ka`siyetlerin u`yrengenimizde aralıq tu`sinigi ko`p qollanıladı. Ma`selen, u'shmu`yeshliktin yamasa ko`pmu`yeshliktin perimetri, biyiklik tu`sinigi ha`m tag`ı basqalar. Sonlıqtan 4-paragraftegi materiallar aralıq tu`sinigine baylanıslı ma`selelerdi sheshiwde mektep ha`m akademiyalıq litsey oqıwshılarına bir-qansha metodikalıq ja`rdem beredi.

Usı pitkeriw qa`nigelik jumıstın materiallar klassta, klasstan tıs jumıslarda (fakul`tetiv ha`m matematikalık krujoklarda) paydalanıwlarına boladı. Sonın menen birge bul jerdegi ko`rsetilgen misal ha`m ma`seleler arqalı oqıwshılardı geometriyalık materiallardı teren`irek u`yretiwge, pa`nge ha`r ta`repleme qızıqtırıwg`a alıp keliwimizge boladı. Sonın ushın bul jerdegi materiallar mektep ha`m akademiyalıq litsey oqıwshılarına paydalı dep oylayman.

A` d e b i y a t l a r

1. Dodajonov N.D., Jo`raeva M.Sh.. Geometriya. 1-qism, Toshkent. «O`qituvchi», 1996 y.
2. Yunusmetov R. va boshqalar. Geometriya-1 (ma'ruzalar matni), 2005.
3. Narmanov A.Ya. Analitik geometriya. Toshkent. «O`zbekiston Faylasuflari Milliy jamiyati nashriyoti». 2008 y.
4. Aleksandrov A.D. , Netsvetaev N.Yu. Geometriya. M. «Nauka» 1990g. 671s.
5. Atanasyan L.S., Bazilev V.T., Geometriya ch.1 M. «Prosvehenie» 1986 g.
6. To`laganov T. Matematika o`qitish metodikasi (ma`ruzalar to`plami), TDPU, 2001 y.
7. Bakirova A.Yu., Saydalieva F.X. “Metodika prepodovaniya matematiki”, Toshkent 2008
8. Sayidaxmedov N. Yangi pedagogik texnologiya Toshkent. “Moliya” 2004 yil.
9. X.X.Nazarov, X.O.Ochilova, E.G.Podgornova. Geometriyadan masalalar to`plami. 1 va (2) qism. Toshkent «O`qituvchi» 1993, 1997.
10. A`zamov A. ”Yosh matematika qomusiy lug`at”- Toshkent.: Qomuslar bosh tahririyati, 1991y.
11. Bortakovskiy, A.S. Analiticheskaya geometriya v primerax i zadachax: Ucheb. posobie/A.S. Bortakovskiy, A.V. Panteleev. — M.: Vıssh. shk., 2005. — 496 s: il. — (Seriya «Prikladnaya matematika»).
12. Gusyatnikov P. B., Reznichenko S. V. Vektornaya algebra v primerax i zadachax: Ucheb. posobie dlya studentov inj.-tex. spets. vuzov. — M.: Vıssh. shk., 1985. — 232 s.
13. Reznichenko S.V. Analiticheskaya geometriya v primerax i zadachax (Algebraicheskie glavı). - M., İzd. MFTİ, 2001. - 576 s.

14. Kim G.D., Kritskov L.V. Algebra i analiticheskaya geometriya: Teoremi i zadachi. Tom I. M.: "Planeta znaniy", 2007. — 469 s. ISBN 978-5-903242-01-6
15. Mayorov V.M., Skopets Z.A. Zadachnik-praktikum po vektornoy algebre (s prilozheniyami k analiticheskoy geometrii, elementarnoy geometrii i statike) - M.: Uchedpedgiz, 1961. - 152 c.
16. <http://www.pedagog.uz/>
17. <http://www.ziyonet.uz/>
18. <http://window.edu.ru/window/>