

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika – matematika fakulteti

“Matematika” kafedrası

Nurxonova Filura Mexriddin qizining

**“Metrik fazolarda o'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishi”
mavzusida**

**5130100 “Matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**“Ish ko'rildi va himoyaga ruxsat
berildi”**

**Ilmiy rahbar: _____prof. U.A.Rozikov
“ _____ ” _____2016y.**

Kafedra mudiri:

_____dots.R.Muxitdinov

Taqrizchi: _____dots.N.P.Rasulov

“ _____ ” _____2016y.

“ _____ ” _____2016y.

“Himoya qilishga ruxsat berildi

”Fakultet dekani _____prof.Sh. M.Mirzayev

« _____ » _____

Buxoro- 2016 y.

MUNDARIJA

KIRISH	3
I BOB. METRIK FAZOLAR,.....	12
1.1. Umumiy tushunchalar	12
1.2. Metrik fazolardagi o'lchovlar.....	22
1.3. Ba'zi xususiy hollar.....	25
II BOB. METRIK FAZOLARDAGI YAQINLASHISH.....	31
2.1. Metrik fazoda yaqinlashish tushunchasi.....	31
2.2. Kuchsiz yaqinlashish va akslantirishlar.....	35
2.3. Taqsimot bo'yicha yaqinlashish.....	44
XOTIMA	52
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.....	53

*Vatanimizning kelajagi,
xalqimizning ertangi kuni,
mamlakatimizning jahon
hamjamiyatidagi obro'-e'tibori
avvalambor farzandlarimizning
unib-o'sib, ulga'yib, qanday inson
bo'lib hayotga kirib borishiga
bog'liqdir. Biz bunday o'tkir
haqiqatni hech qachon
unutmasligimiz kerak.*

I.A.Karimov.

KIRISH

Mustaqil fikrlaydigan, zamonaviy ilm-fan va kasb- hunarlarni puxta egallagan, o'z yurti, o'z xalqiga fidoyi, biz boshlagan ishlarni davom ettirishga qodir bo'lgan, har tomonlama sog'lom avlodni yengib bo'ladimi? Bugun biz o'z oldimizga qo'ygan yuksak maqsadlarga yetishda ana shu navqiron avlodimiz hal qiluvchi kuch bo'lib maydonga chiqayotgani barchamizga g'urur va iftixor bag'ishlaydi.

Yana bir bor ta'kidlayman, doimo o'rganish, izlanish, yangilikka intilib yashash kerak. Bugungi kunda qaysi davlat yuksak taraqqiyotga erishgan bo'lsa-bu Janubiy Koreya yoki Yaponiya bo'ladimi, yevropa davlatlari bo'ladimi – bularning barchasidan o'rganish kerak. Bu borada biz uchun hech qanday mafkuraviy cheklashlar yo'q. Biz uchun yagona mafkura – bu O'zbekistonning taraqqiyoti, O'zbekistonning ravnaqi, O'zbekistonning dunyoda hech kimdan kam bo'lmasligidir.

Yangi avlodni tarbiyalash- xalqni tarbiyalash deganidir.

2011-2016-yillarda oliy ta'lim muassasalarining moddiy-texnik bazasini modernizatsiya qilish dasturi doirasida 19 ta oliy ta'lim muassasasida qurulish, rekonstruksiya qilish, kapital ta'mirlash va jihozlash bo'yicha qiymati 230 milliard so'mlik ishlar bajarildi. Andijon davlat universiteti, Buxoro muhandislik-

texnologiya instituti, O'zbekiston Milliy universitetida yangi o'quv binolari barpo etildi.

2014-yilda bir qator yangi institut va fakultetlar, o'quv-ilmiy markazlar ochildi.

Men yoshlarimizga, mening bolalarimga qarata, o'rganishdan hech qachon charchamanglar, deb aytmoqchiman. O'rganish, intilish hech qachon ayb sanalmaydi. Nimanidir bilmasang, uni o'rganish zarur. Avvalambor, endi hayotga kirib kelayotgan yoshlarga nima lozim? O'rganish, o'rganish va yana bir bor o'rganish kerak. Kasb o'rgangan, ilm o'rgangan kishi, o'zbekona aytganda, hech qachon kam bo'lmaydi.

Albatta, yoshlarimizning nimalarga qodir ekani, qanday imkoniyatlarga ega ekani, hayotga qanday tayyor bo'layotgani, kerak bo'lsa, qanday bosqichlardan o'tayotganini men yaxshi bilaman. Mana endi turli davlatlarning mutaxasislari bilan, tengdoshlari bilan bahslashishga, bellashuvga tayyor bo'lgan yoshlarimiz dunyoni ko'ryapti. Endi ular boshqalardan o'mak olib, kuchiga kuch qo'shilyapti. Endi ularni to'xtatadigan biron to'siq degan narsani topish qiyin. Faqatgina to'g'ri yo'lni ko'rsatsak, bolalarimiz bosadi. O'zbekcha aytganda, mahalliy shevada aytganda, bosadi. "Bosadi" deganim- yangi-yangi marralarni egallaydi, deganim.

Bugungi kunda hayotimizda tom ma'noda tarixiy ahamiyatga ega bo'lgan, dunyo jamoatchiligi haqli ravishda e'tirof etayotgan ta'lim-tarbiya sohasidagi keng ko'lamli islohotlarimiz qanday katta natijalar berayotgani haqida har qancha faxrlanib, g'ururlanib gapirsak arziydi, albatta.

Haqiqatan ham, bundan 18 yil oldin boshlangan Kadrlar tayyorlash milliy dasturi va 2004-yilda uning tarkibiy qismi sifatida qabul qilingan maktab ta'limini rivojlantirish umummilliy davlat dasturi ijtimoiy hayotimizda tub burulish yasadi.

Bu dasturlar doirasida yurtimizda ming-minglab litsey va kollejlari, maktablar qurish va ularni rekonstruksiya qilish, eng yuksak talablar asosida jihozlashdek keng ko'lamli vazifani qo'yganimizda, bu ishlarning qanday ulkan, aytish mumkinki, beqiyos maqsadlarni ko'zda tutushini kamdan kam odam o'ziga tasavvur qilardi.

Shu nuqtai nazardan qaraganda, biz tanlagan taraqqiyot yo'lining tarkibiy qismiga, aniqroq aytadigan bo'lsak, kelajagimizning mustahkam poydevoriga aylanib borayotgan ta'lim sohasidagi buyuk dasturlarimizni o'z vaqtida, uzoqni ko'zlab ishlab chiqarganimiz va amalga oshirganimiz naqadar to'g'ri bo'lganini bugun mamlakatimiz erishgan yuksak marra va natijalar yaqqol namoyon etmoqda.

Biz, ya'ni xalqimiz va davlatimiz, har qaysi inson nimaki o'z oldimizga maqsad qilib qo'ygan bo'lmaylik, qanday buyuk ishlarni amalga oshirishga intilmaylik, barcha oliyjanob harakatlarimizning negizida nima turadi?

Bu savolga hammamiz, tabiiyki, barcha ezgu niyatlarimizning markazida farzandlarimizni ham jismoniy, ham ma'naviy jihatdan sog'lom qilib o'stirish, ularning baxt-u saodati, farovon kelajagini ko'rish, dunyoda hech kimdan kam bo'lmaydigan avlodni tarbiyalash orzusi turadi, deb javob beramiz.

Haqiqatan ham, hayotimizning ma'no-mazmuni shunda emasmi?

Agar biz vaqtida uzoqni ko'zlab, katta umid bilan hayotda kirib kelayotgan yoshlarimizning chuqur bilim va kasb-hunar egallashi uchun zamin yaratmasak, ularni zamon talab qiladigan mutaxassis kadrlar etib tayyorlamasak, bugungi kunda butun dunyoni qamrab olgan moliyaviy-iqtisodiy inqiroz davrida yurtimizda tinchlikni saqlab, iqtisodiyotimizning barqaror o'sish sur'atlarini ta'minlashga, ayni shunday og'ir sharoitda xalqimiz hayotining tobora yuksalishiga erisha olarmidik?

Yo'q, albatta.

Hammamizga chuqur bir haqiqat ayon bo'lishi kerak- biz yurtimizning ertangi rivoji yo'lida qanday chuqur o'ylangan dasturlarni tuzmaylik, bu rejalarni bajarish uchun qanday moddiy baza va imkoniyatlarni yaratmaylik, buning uchun qancha ko'p sarmoya safarbar etmaylik, ularning barchasini amalga oshiradigan, ro'yobga chiqaradigan qudratli bir omil borki, u ham bo'lsa, yuqori malakali ish kuchi va yurtimizning ertangi kuni, taraqqiyoti uchun mas'uliyatni o'z zimmasiga olishiga qodir bo'lgan yetuk mutaxassis yoshlarimiz, desak, o'ylaymanki, hech qanday xato bo'lmaydi.

Shuning uchun ham bu o'ta muhim masalani doimo davlatimiz, jamiyatimizning asosiy vazifasi sifatida ko'rishimiz darkor.

Bugungi kunda farzandlarimizning ma'naviy olamini yuksaltirish, ularni milliy va umuminsoniy qadriyatlar ruhida tarbiyalash masalasi biz uchun eng dolzarb vazifa bo'lib qolmoqda.

Ayniqsa, hozirgi murakkab va tahlikali zamonda milliy o'zligimiz, azaliy qadriyatlarimizga yot va begona bo'lgan turli xil xurujlar, yoshlarimizning ongi va qalbini egallashga qaratilgan g'arazli intilishlar tobora kuchayib borayotgani barchamizni yanada hushyor va ogoh bo'lishga da'vat etishi tabiiydir.

Shu sababli yoshlar o'rtasida sog'lom turmush tarzi tamoyillarini qaror toptirish, ularni giyohvandlik, axloqsizlik, chetdan kirib kelayotgan har xil zararli ta'sirlardan, "ommaviy madaniyat" niqobi ostidagi tahdid va xatarlardan asrash masalalari bir zum ham e'tiborimizdan chetda qolmasligi darkor.

Bugun hech kimga sir emaski, biz yashayotgan XXI asr- intellektual boylik hukumronlik qiladigan asr.

Kimki bu haqiqatni o'z vaqtida anglab olmasa, intellektual bilim, intellektual boylikka intilish har qaysi millat va davlat uchun kundalik hayot mazmuniga aylanmasa- bunday davlat jahon taraqqiyoti yo'lida chetda qolib ketishi muqarrar. Buni chuqur anglab olgan davlat, bunday xulosani chiqargan, xalqaro hamjamiyat va taraqqiy topgan mamlakatlar qatoriga ko'tarilish uchun harakat qilayotgan jamiyat, birinchi navbatda, bugun unib-o'sib kelayotgan farzandlarining har tomonlama barkamol avlod bo'lib hayotga kirib borishini o'zi uchun eng ulug', kerak bo'lsa, eng muqaddas maqsad, deb biladi.

Bugungi uchrashuvimizda men yoshlarimizga qarab aytmochiman: agarkı qachon biz xohlagan zamon kelsa, ana o'shanda murodimizga yetamiz, degan fikr bilan bemalol yuradigan bo'lsak, bilib qo'yinglar, bunday zamon hech qachon o'z-o'zidan kelmaydi. O'zimiz istagan zamon uchun kurashish, kerak bo'lsa, o'zimizni, butun borlig'imizni berishimiz lozim. Shunday intilish bilan yashasak,

nafaqat o'z hayotimiz, balki kelajak avlodlarimiz hayotini, ularning ertangi yorug' kunini o'zimiz, o'z qo'limiz bilan barpo etgan bo'lamiz.

Haqiqatan ham, hayot hech qachon bir joyda to'xtab turmaydi va hammamiz buni xayolimizdan chiqarmasligimiz kerak. Biz ertangi kun uchun butun kuch-g'ayratimiz bilan harakat qilsak, o'zimiz orzu qilgan hayot shunchalik tez keladi. Bugungi kunda hayotimizning mana shunday tez sur'atlar bilan o'zgarib borayotgani, turmushumiz tobora farovon, odamlarimizning badavlat bo'layotgani bu faktning amaliy tasdig'i emasmi?

Bolalarimizning tarbiyasini mahkam ushlashimiz lozim. Yo'q, bolam, bunday emas, mana bunday, sen kimning, qanday buyuk zotlarning avlodisan, qanday bebaho ma'naviy merosning vorisidan, degan gaplarni ularning qulog'iga quyish kerak. Bugun yaxshi yashayapmiz, deb taltayib ketmasligimiz, oyog'imiz yerdan uzulmasligi zarur. Aslida bu ham jiddiy bir xavf.

Shu bois men hamisha ta'lim-tarbiya sohasida ishlaydigan yurtdoshlarimizni o'zimga yaqin tutaman, ularning mashaqqatli mehnatini qadrlashni hech qachon esimdan chiqarmayman.

Davlatimizning mukofotlarini berishda, avvalombor, o'qituvchi va murabbiylarga e'tibor qarataman. O'zbekiston Qahramoni unvonini olganlar orasida aynan o'qituvchilar ko'pchilikni tashkil qilishi buning tasdig'i emasmi?

Ota-onasi, farzandi uchun, el-yurt, ona vatan uchun o'zini fido qilishga tayyor bo'lgan insonni haqiqiy o'g'lon deydilar. O'g'lon degan so'z bilan o'g'il degan so'zning farqi bor. O'g'lon degan so'zning ma'nosi juda katta. Ya'ni, o'g'illarning eng sarasini, mard yigitlarni xalqimiz o'g'lon deydi. Shu ma'noda, bugun unib-o'sib kelayotgan yoshlarimiz ham o'z yurtini mana shunday sevsa, unga fidoyi bo'lib yashasa, biz bugun ham, kelajakda ham hech qachon, hech kimdan kam bo'lmaymiz, o'z maqsad-muddaolarimizga albatta yetamiz.

Ma'lumki, ota-bobolarimiz qadimdan bebaho boylik bo'lmish ilm-u ma'rifat, ta'lim va tarbiyani inson kamoloti va millat ravnaqining eng asosiy sharti va garovi deb bilgan.

Albatta, ta'lim-tarbiya-ong mahsuli, lekin ayni vaqtda ong darajasi va uning rivojini ham belgilaydigan, ya'ni, xalq ma'naviyatini shakllantiradigan va boyitadigan eng muhim omildir. Binobarin, ta'lim-tarbiya tizimini va shu asosda ongni o'zgartirmasdan turib, ma'naviyatni rivojlantirib bo'lmaydi.

Shu bois bu sohada yuzaki, rasmiy yondashuvlarga, puxta o'ylanmagan ishlarga mutlaqo yo'l qo'yib bo'lmaydi. Maktab, ta'lim-tarbiya masalasi davlat va jamiyat nazoratida bo'lishi asosiy qonunimizda belgilab qo'yilgan. Shu bilan birga, bu keng jamoatchilik, butun xalqimizning ishtiroki va qo'llab-quvvatlashini talab qiladigan umummilliy masaladir. Shuni unutmasligimiz kerakki, kelajagimiz poydevori bilim dargohlarida yaratiladi, boshqacha aytganda, xalqimizning ertangi kuni qanday bo'lishi farzandlarimizning bugun qanday ta'lim va tarbiya olishiga bog'liq.

Buning uchun har qaysi ota-ona, ustoz va murabbiy har bir bola timsolida avvalo shaxsni ko'rishi zarur. Ana shu oddiy talabdan kelib chiqqan holda, farzandlarimizni mustaqil va keng fikrlash qobiliyatiga ega bo'lgan, ongli yashaydigan komil insonlar etib voyaga yetkazish-ta'lim-tarbiya sohasining asosiy maqsadi va vazifasi bo'lishi lozim, deb qabul qilishimiz kerak. Bu esa ta'lim va tarbiya ishini uyg'un holda olib borishni talab etadi.

Ta'limni tarbiyadan, tarbiyani esa ta'limdan ajratib bo'lmaydi-bu sharqona qarash, sharqona hayot falsafasi.

Bu haqda fikr yuritganda, men Abdulla Avloniyning "tarbiya biz uchun yo hayot-yo mamot, yo najot-yo halokat, yo-saodat-yo falokat masalasidir" degan chuqur ma'noli so'zlarini eslayman. Buyuk ma'rifatparvar bobomizning bu so'zlari o'tgan asr boshida millatimiz uchun qanchalar muhim va dolzarb bo'lgan bo'lsa, hozirgi vaqtda ham biz uchun shunchalik, balki undan ham ko'ra muhim va dolzarb ahamiyat kasb etadi.

Nega deganda, bizga sobiq tuzumdan meros bo'lib qolgan maorif tizimining eng noma'qul tomoni shundan iborat ediki, unda o'quv jarayonida o'quvchi va talabalarning mustaqil va erkin fikrlashiga yo'l qo'yilmas edi. Har qaysi o'quv

yurtini bitiruvchilarning bilimiga qarab emas, aksincha, ularning sobiq sovet tizimiga va soxta g'oyalarga sadoqatini hisobga olib baholash va hayotga yo'llash tamoyili asosiy o'rinni egallar edi. Ko'p hollarda sifat o'rniga son ketidan quvish ustunlik qilardi. Aksariyat yoshlar haqiqiy bilim yoki malaka orttirish maqsadida emas, ko'proq amalda diplomli bo'lib olish ilinjida texnikum yoki institutlarga kirar edi.

Shuning uchun ham mustaqillikning dastlabki yillaridanoq butun mamlakat miqyosida ta'lim va tarbiya, ilm-fan kasb-hunar o'rgatish tizimlarini tubdan isloh qilishga nihoyatda katta zarurat sezila boshladi.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturini ishlab chiqish bilan bog'liq jarayon uzoq yillar mobaynida bu sohada talay muammolar yig'ilib qolganini ko'rsatdi. Men bunga ushbu dastur loyihasi ustida sakkiz oy mobaynida ishlash jarayonida shaxsan amin bo'ldim. Shuning uchun ham bu og'ir, mas'uliyatli, ammo hal qilishni aslo paysalga solib bo'lmaydigan ishni qadambaqadam, izchillik bilan bajarishga bel bog'ladik.

Ta'lim-tarbiya tizimidagi islohotlar boshlangan dastlabki yillarda men jahon tajribasi va hayotda o'zini ko'p bor oqlagan haqiqatdan kelib chiqib, agar bu maqsadlarimizni muvaffaqiyatli ravishda amalga oshira olsak, tez orada hayotimizda ijodiy ma'nodagi "portlash efekti" ga, ya'ni, yangi ta'lim modelining kuchli samarasiga erishamiz, degan fikrni bildirgan edim.

Darhaqiqat, istiqlol davrida barpo etilgan, barcha shart-sharoitlarga ega bo'lgan akademik litsey va kasb-hunar kollejlari, oliy o'quv yurtlarida tahsil olayotgan, zamonaviy kasb-hunar va ilm-ma'rifat sirlarini o'rganayotgan, hozirdanoq ikki-uch tilda bimalol gaplasha oladigan ming-minglab o'quvchilar, katta hayotga kirib kelayotgan, o'z iste'dodi va salohiyatini yorqin namoyon etayotgan yosh kadrlarimiz misolida ana shunday orzu-intilishlarimiz bugunning o'zida o'z hosilini berayotganining guvohi bo'lmoqdamiz. Eng muhimi shundaki, "portlash efekti" ning haqiqiy mohiyati va ahamiyati vaqt o'tishi bilan, biz tarbiya

qilayotgan sog'lom va barkamol avlodning safimizga tobora ildam kirib borishi bilan yanada yaqqolroq seziladi.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturini amalga oshirish jarayonida maktab ta'limi, ayniqsa, umum-ta'lim maktablarining moddiy-texnik bazasini mustahkamlashga e'tiborni kuchaytirish biz uchun kun tartibidagi eng muhim va jiddiy masalaga aylandi.

Shu maqsadda yurtimizda kadrlar tayyorlash milliy dasturining uzviy va mantiqiy davomi bo'lmish 2004-2009- yillarda Maktab ta'limini rivojlantirish ummummilliy davlat dasturi qabul qilindi.

Ushbu dasturga muvofiq, yurtimizda mavjud bo'lgan o'n mingga yaqin umumta'lim maktabining moddiy-texnik bazasini mustahkamlash, ta'lim jarayonining mazmunini tubdan takomillashtirish, o'quvchilarning mehnatini moddiy va ma'naviy rag'batlantirish bo'yicha katta ishlar qilinmoqda.

Muxtasar qilib aytganda, oxirgi yillarda ta'lim-tarbiya sohasida amalga oshirgan, ko'lami va mohiyatiga ko'ra ulkan ishlarimiz biz ko'zlagan ezgu niyatlarimizga erishish, hech kimdan kam bo'lmaydigan hayot barpo etish, yoshlarimiz, butun xalqimizning ma'naviy yuksalishi yo'lida mustahkam zamin yaratdi, desak, hech qanday xato bo'lmaydi.

Masalaning dolzarbligi: Metrik fazolar nazariyasi hozirgi zamon matematikasining muhim va murakkab bo'limlaridan biri hisoblanadi. Metrik fazolarda o'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishini tekshirish orqali bir qator nazariy (ehtimollar nazariyasidagi taqsimotlarning yaqinlashishi, limit teoremlar, funksional analizda o'lchovlarning limitini topish) va amaliy (fizikada sistemalar fazasining almashishlari, Gibbs o'lchovlarining limitik xossalarini o'rganish) masalalar hal qilinadi. Jumladan bakalavryatda ushbu mavzu alohida va to'raligicha o'tilmaydi. Shu sababli bu mavzu zamonaviy ilm fanda keng qo'llaniladi va albatta dolzarb. Metrik fazolarda o'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishiga doir ushbu bitiruv malakaviy ishida bazi tadbiiq va yaqinlashish

xossalari kiritilgan. Bitiruv malakaviy ishida bazi xususiy hollar orqali o'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishiga misollar keltirilgan.

Ishning maqsadi: Ish refereativ xarakterga ega. Unda universitet kursida o'tilmagan mavzulardan o'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishi to'la o'rganilishi maqsad qilingan. Yuqorida ishning dolzarbligi qismida bayon qilingan mulohazalar ishning maqsadini aniqlab beradi va ular quyidagilardan iborat:

- Metrik fazolar xossalarini o'rganish.
- O'lchovlarning asosiy tushunchalarini o'rganish.
- O'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishiga doir bazi xususiy hollar.
- Metrik fazolarda yaqinlashish tushunchasi haqida ma'lumotlar.
- Kuchsiz yaqinlashish va akslantirishlarga doir ta'rif va teoremlar.
- Taqsimot bo'yicha yaqinlashish haqida tushunchalar.

O'rganish obyekti: O'rganish metodikasi (uslub). Metrik fazolarda o'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishini. Funksional va matematik analizning limitlar nazariyasi turli metodlari.

Ilmiy yangiligi: Malakaviy bitiruv ishi **referativ** xarakterdagi ish hisoblanadi. Unda metrik fazolarda o'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishiga doir nazariya keltirilgan.

Olingan natijalarning haqqoniyligi: Metrik fazolarda o'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishiga doir ma'lum natijalar isboti bilan berilgan va bir necha misollar yechib ko'rsatilgan.

Ilmiy va amaliy ahamiyati: Bitiruv malakaviy ishida keltirilgan metrik fazolarda o'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishiga doir xususiy hollardan oliy o'quv yurtlari talabalari metrik fazolarni o'rganishda foydalanish mumkin. Bu nazariya funksional analiz, extimollar nazariyasi, statistik fizikaning masalalarida keng qo'llaniladi.

Bitiruv malakaviy ishi strukturasi: Bitiruv malakaviy ishi 2 bob va 6 qismdan iborat. Birinchi bobda metrik fazolar haqida to'la ma'lumot beriladi. Ikkinchi bobda o'lchovlarning metrik fazolarda kuchsiz yaqinlashishi to'liq berilgan.

I BOB METRIK FAZOLAR.

1.1 Umumiy tushunchalar.

Matematik analizning asosiy amallaridan biri limitga o'tish tushunchasidir. Bu amalni to'g'ri chiziq nuqtalaridan iborat to'plamda joriy etishda biz ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasidan doimo foydalanib kelgan edik. Ammo limitga o'tish masalasi kengroq qaraladigan bo'lsa, asosiy mazmun olingan to'plam elementlarining tabiiy tuzulishida emas, balki uning ikki elementi orasida masofa tushunchasini kirita bilishdadir. Bu mulohaza fransuz matematigi **M. Fresheni 1906 yilda metrik fazo** tushunchasiga olib keldi.

1.1.1. Ta'rif. Agar biror X to'plamning o'zini o'ziga to'g'ri (Dekart) ko'paytmasi $X \times X$ ni $R_+ = [0, \infty)$ to'plamga aks ettiruvchi $\rho(x, y)$ funksiya berilgan bo'lib, u quyidagi shartlarni (metrika aksiomalarini) qanoatlantirsa, X to'plam **metrik** fazo deyiladi.

1⁰. $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ munosabat $x = y$ bo'lgandagina bajariladi.

2⁰. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simmetriklik aksiomasi).

3⁰. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (uchburchak aksiomasi).

$\rho(x, y)$ funksiya **metrika** deyiladi. Odatda, ρ metrikali X metrik fazo (X, ρ) bilan belgilanadi.

Misollar. 1.1.1. X ixtiyoriy to'plam bo'lsin; ushbu

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \neq y \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = y \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya metrik fazo aksiomalarini qanoatlantiradi.

Hayotdan bunday metrikaga misol keltiramiz. X to'plam sifatida biror tramvay marshrutining bekatlari to'plamini olamiz. $\rho(x, y)$ orqali x bekatdan y bekatgacha borish uchun to'lanadigan haqni belgilaymiz. U holda

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 3\text{tiyin,} & \text{agar } x \neq y \text{ bo'lsa,} \\ 0\text{tiyin,} & \text{agar } x = y \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

1.1 .2. n o'lchamli R^n vektor fazoda ikki $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

vektor orasidagi masofa ushbu

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ko'rinishda kiritilsa, u holda R^n metrik fazoni tashkil etadi. 1^0 va 2^0 aksiomalarning bajarilishi o'z-o'zidan ravshan. Biz bu masofa uchun uchburchak aksiomasini isbotlaymiz. Bu aksiomadagi tengsizlik

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

elementlar uchun quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} \quad (1.1.1)$$

Ushbu belgilashlarni kiritamiz:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

U holda (1.1.1) tengsizlik quyidagi tengsizlikka keltiriladi:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad (1.1.2)$$

Ushbu

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - b_i a_j)^2$$

ayniyatdan quyidagi **Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi** kelib chiqadi:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$$

Bu tengsizlikdan:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Bundan esa kerak bo'lgan (1.1.2) tengsizlik, demak, (1.1.1) tengsizlik kelib chiqadi.

1.1.3. ℓ_2 haqiqiy fazo. $1 \times x = x$ dagi ℓ_2 fazoning elementlari

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonli ketma-ketliklar edi. Bu fazoda masofa quyidagicha kiritiladi:

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

Metrikaning birinchi va ikkinchi aksiomalarining o'rinligini ravshan, uchburchak aksiomasining bajarilishini ko'rsatamiz. Darhaqiqat, ixtiyoriy n natural son va $\{a_i\} \in \ell_2, \{b_i\} \in \ell_2$ uchun

$$\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right]^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2}$$

tengsizlik o'rinlidir [1.1.2-misoldagi (1.1.2) tengsizlik]. Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi hadlarning har biri $n \rightarrow \infty$ da limitga ega, chunki $\{a_i\} \in \ell_2$ va $\{b_i\} \in \ell_2$. Demak, chap tomondagi ifoda kamaymaydigan va chegaralangan bo'lgani uchun limitga ega va

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \quad (1.1.3)$$

Endi ℓ_2 fazodan uchta

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots), z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots)$$

nuqtalarni olamiz va 1.1.2-misoldagi kabi quyidagi belgilarni kiritamiz:

$$a_k = x_k - z_k, b_k = z_k - y_k;$$

ravshanki,

$$x_k - y_k = a_k + b_k$$

Yuqoridagi (1.1.3) tengsizlikdan foydalanib, quyidagi tengsizlikni keltirib chiqaramiz:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2 \right]^{1/2} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2 \right]^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right)^{1/2} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - z_k)^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - y_k)^2 \right]^{1/2} = \rho(x, z) + \rho(z, y) \end{aligned}$$

1.1.4. m fazo. Bu fazo hamma chegaralangan haqiqiy sonli ketma-ketliklardan iborat edi. Agar uning ikkita $x = (a_1, a_2, \dots, a_n \dots), y = (b_1, b_2, \dots, b_n \dots)$ nuqtasi uchun masofa

$$\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i|$$

tenglik bilan aniqlansa, m fazo metrik fazoga aylanadi. Darhaqiqat, uchburchak aksiomasi quyidagicha tekshiriladi:

$$|a_i - c_i| \leq |a_i - b_i| + |b_i - c_i| \leq \sup_i |a_i - b_i| + \sup_i |b_i - c_i| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

bu yerda $z = (c_1, c_2, \dots)$. Bundan

$$\sup_i |a_i - c_i| = \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Qolgan aksiomalarining o'rinaliligi ravshan.

1.1.5. X to'plam hamma yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklardan iborat bo'lsin, ya'ni

$$X = \{x : x = (a_1, a_2, \dots); \exists \lim a_n\}$$

Ravshanki, $X \subset m$, ya'ni X ning har bir elementi m uchun ham element. Demak, X da m dagi masofa kiritilsa, u ham metrik fazoni hosil etadi. Bu fazo c bilan belgilanadi.

1.1.6. s fazo. X elementlari haqiqiy sonli ketma-ketliklardan iborat to'plam bo'lsin, ya'ni

$$X = \{x : x = (a_1, a_2, \dots)\}$$

Bu to'plamda ikki $x = (a_1, a_2, \dots)$ va $y = (b_1, b_2, \dots)$ nuqta orasidagi masofani quyidagicha kiritamiz:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} \quad (1.1.4)$$

Uchburchak aksiomasi ushbu

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|} \quad (1.1.5)$$

Tengsizlikdan kelib chiqadi, shuning uchun (1.1.5) ni isbot etamiz. a va b ning ishoralari bir xil deb faraz qilaylik, masalan $a > 0, b > 0$ bo'lsin, u holda

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

Endi a bilan b ning ishoralari turlicha va, masalan, $|a| \geq |b|$ bo'lsin. U holda $|a+b| \leq |a|$.

Endi $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ($x \neq -1$) funksiyani qarasak, u o'suvchi bo'ladi, chunki

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

Demak,

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

Yana bir $z = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ elementni olsak, (1.1.5) ga muvofiq,

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{|a_k - c_k|}{1+|a_k - c_k|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - b_k + b_k - c_k|}{1+|a_k - b_k + b_k - c_k|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \\ &\times \frac{|a_k - b_k|}{1+|a_k - b_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{|b_k - c_k|}{1+|b_k - c_k|} = \rho(x, y) + \rho(y, z) \end{aligned}$$

ya'ni uchburchak aksiomasi isbotlandi.

1.1.7. $C[a, b]$ fazo. $[a, b]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz haqiqiy funksiyalar to'plami $C[a, b]$ da metrikani quyidagicha kiritamiz:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

Metrika aksiomalarining bajarilishini ko'rsatish qiyin emas. Masalan, uchburchak aksiomasini isbotlaylik. Ixtiyoriy $t \in [a, b]$ nuqta va $x(t), y(t), z(t)$ funksiyalar uchun ushbu munosabat bajariladi:

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= |[x(t) - z(t)] + [z(t) - y(t)]| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leq \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |z(t) - y(t)| = \rho(x, z) + \rho(z, y) \end{aligned}$$

Bundan

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

1.1.8. X to'plam $[a, b]$ segmentda aniqlangan hamma o'lchovli funksiyalardan iborat bo'lsin. Agar ikki funksiya farq qiladigan nuqtalardan iborat to'planning o'lchovi nolga teng bo'lsa, bu funksiyalar teng hisoblanadi.

Ikki $x(t)$ va $y(t)$ funksiya orasidagi masofani ushbu formula bilan aniqlaymiz:

$$\rho(x, y) = \int_a^b \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt \quad (1.1.6)$$

Bu hol uchun ham uchburchak aksiomasining bajarilishi 1.1.6-misoldagi kabi isbotlanadi; qolgan ikki aksiomaning o'rinligi ravshan. Bu fazo $S[a, b]$ orqali belgilanadi.

Shuni ham aytish kerakki, berilgan to'plamda metrikani turlicha kiritish kerak.

Separabel metrik fazolar.

1.1.2. Ta'rif. (X, ρ) metrik fazoda M, N to'plamlar uchun $\overline{M} \supset N$ bo'lsa, M to'plam N to'plamda **zich** deyiladi. Xususan, M to'plam X da zich bo'lsa, u holda M to'plam **hamma yerda zich to'plam** deyiladi.

1.1.3. Ta'rif. Agar M to'plam hech bir sharda zich bo'lmasa, u holda M to'plam **hech qayerda zich** emas deyiladi. Ya'ni agar ixtiyoriy S sharning ichida M to'plam bilan kesishmaydigan S_1 shar topilsa, M to'plam hech qayerda zich emas.

1.1.4. Ta'rif. Agar (X, ρ) metrik fazoning hamma yerida zich bo'lgan sanoqli yoki chekli to'plam mavjud bo'lsa, u holda X **separabel fazo** deyiladi.

Separabellik xossasi nuqtai nazaridan metrik fazodagi misollarimizga qaytamiz.

Masalan, 1.1.2-misoldagi R^n separabel fazodir. Darhaqiqat, R^n fazoda koordinatalari rasional sonlardan iborat bo'lgan nuqtalar to'plami sanoqli bo'lib, R^n ning hamma yerida zich.

$C[a, b]$ fazo ham separabeldir. Darhaqiqat, koefisientlar rasional sonlardan iborat hamma ko'phadlar to'plami P_r sanoqli bo'lib, u hamma ko'phadlar to'plami P da zich, P esa matematik analizdagi ma'lum Veyershtass teoremasiga asosan $C[a, b]$ ning hamma yerida zich bo'ladi. Demak $\overline{P_r} = C[a, b]$.

m fazo separabel emas. Bu fazoda quyidagi to'plamni olamiz:

$$Q = \{x : x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots), a_i = 0 \text{ yoki } 1\}.$$

Ravshanki, Q kontinuum quvvatga ega. Agar Q dan ikkita turli x va y element olinsa, ular orasidagi masofa

$$\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i| = 1.$$

Bundan foydalanib, m separabel emasligini isbot etamiz. Buning uchun teskarisini, ya'ni m ning hamma yerida zich bo'lgan sanoqli A to'plam mavjud deb faraz qilamiz. A ning har bir elementi atrofida radiusi $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ga teng sharni olamiz. U holda bu sharlarning yig'indisida m fazoning hamma elementlari joylashgan bo'ladi. Ammo sharlarning soni ko'pi bilan sanoqli bo'lgani uchun ularning hech bo'lmaganda bittasining ichida Q ning kamida ikkita turli x, y elementi joylashgan bo'ladi. Shu ikki x va y element kirgan sharning markazi x_0 nuqtada bo'lsin. Bundan ushbu

$$1 = \left[\rho(x, y) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \right]$$

ziddiyat kelib chiqadi. Bu ziddiyat esa qilgan farazimiz natijasida hosil bo'ladi. Demak, m separabel fazo emas.

1.1.1.-teorema. (X, ρ) separabel metrik fazoning ixtiyoriy X_0 qism to'plami ham ρ metrikaga nisbatan separabel metrik fazodir.

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad (1)$$

sanoqli to'plam X fazoning hamma yerida zich bo'lsin. Ushbu belgilash kiritamiz:

$$a_n = \inf_{x \in X_0} \rho(\xi_n, x), n = 1, 2, 3, \dots$$

Ixtiyoriy n, m natural sonlar uchun $\inf$ ning xossalriga asosan shunday $x_{n,m} \in X_0$ nuqta topiladiki, $\rho(\xi_n, x_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m}$. Biror $\varepsilon > 0$ sonni olaylik va m son $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$ shartni qanoatlantirsin. (1) to'plam X ning hamma yerida zich bo'lgani sababli ixtiyoriy $x_0 \in X_0$ uchun shunday n topiladiki,

$$\rho(\xi_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Demak,

$$\rho(\xi_n, x_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m} \leq \rho(\xi_n, x_0) + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

U holda

$$\rho(x_0, x_{n,m}) \leq \rho(x_0, \xi_n) + \rho(\xi_n, x_{n,m}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Shunday qilib, ixtiyoriy $x_0 \in X_0$ nuqtaning ixtiyoriy ε atrofida $x_{n,m} \in X_0$ ko'rinishdagi nuqta mavjud, ya'ni $\{x_{n,m}\}_{n,m} \subseteq N$ to'plam X_0 fazoning hamma yerida zich va, ravshanki, sanoqli to'plam. Demak, X_0 separabel metrik fazodir.

To'la metrik fazolar.

Matematik analizning umumiy kursidan ma'lumki, sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun **Koshi** shartini qanoatlantirishi zarur va kifoya. Bu xossa matematik analizda katta ahamiyatga ega bo'lib, haqiqiy sonlar to'plamining **to'laligini** ko'rsatadi.

Endi haqiqiy sonlar to'plamining metrik fazo uchun ham o'rinligimi degan savol qo'yish mumkin. Masalani aniqroq ifoda qilish uchun quyidagi ta'rifni kiritamiz.

1.1.5. Ta'rif. Agar (X, ρ) metrik fazodan olingan $\{x_n\}$ ketma-ketlik **Koshi** shartini qanoatlantirsa, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n , natural son mavjud bo'lib, $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ tengsizlik n va m sonlarning n_ε dan katta bo'lgan hamma qiymatlari uchun bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ **fundamental ketma-ketlik** deyiladi.

Agar X fazoda har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u fazo **to'la** deyiladi.

Ravshanki, har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental. Yuqoridagi savolni endi quyidagicha ifoda qilish mumkin: har qanday metrik fazo to'lam. Bu savolga beriladigan javob har doim ijobiy emas.

1.1.2.-teorema. (X, ρ) to'la metrik fazoda $\{\bar{S}_n = \bar{S}_n(a_n, \varepsilon_n)\}$ yopiq sharlar ketma-ketligi berilgan bo'lib, bular uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

$$\bar{S}_{n+1} \subset \bar{S}_n (n=1,2,\dots) \forall a \quad n \rightarrow \infty \text{ da } \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

U holda bu sharlarning umumiy qismi birgina nuqtadan iborat bo'ladi.

Isbot. $\bar{S}_i$ sharlarning markazlaridan iborat bo'lgan quyidagi ketma-ketlikni tuzamiz:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (2)$$

Teorema shartiga ko'ra $a_{n+p} \in \bar{S}_n (p=1,2,\dots)$. Shuning uchun

$$\rho(a_{n+p}, a_n) \leq \varepsilon_n \text{ yoki } \rho(a_{n+p}, a_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Demak, (2) ketma-ketlik fundamental. X to'la fazo bo'lganligi uchun bu ketma-ketlik biror $a \in X$ elementga yaqinlashuvchi bo'ladi.

So'ngra, ixtiyoriy $\bar{S}_m$ yopiq sharni olamiz (m -tayin natural son); u holda $a \in \bar{S}_m$, chunki $\{a_m, a_{m+1}, \dots\}$ nuqtalar ketma-ketligi (2) ning qism ketma-ketligi bo'lgani uchun a ga yaqinlashuvchi, bu ketma-ketlikning har bir elementi $\bar{S}_m$ ga kiradi va $\bar{S}_m$ yopiq bo'lganligi uchun

$$a \in \bar{S}_m, m=1,2,\dots$$

Demak, $a \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bar{S}_m$.

Endi $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bar{S}_m$ ga a nuqtadan boshqa yana biror b element ham tegishli bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda, bir tomondan, har qanday n uchun

$$0 < \rho(a, b) \leq \rho(a, a_n) + \rho(a_n, b) \leq 2\varepsilon_n$$

Munosabat o'rinli, ikki tomondan, $n \rightarrow \infty$ da $\varepsilon_n \rightarrow 0$ bo'lgani uchun $\rho(a, b) = 0$, ya'ni $a = b$.

1.1.3.-teorema. Agar (X, ρ) metrik fazoda 1-teoremaning shartlarini qanoatlantiradigan har qanday yopiq sharlar ketma-ketligi bo'sh bo'lmagan umumiy qismga ega bo'lsa, u holda X fazo to'la bo'ladi.

Isbot. $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikni olib, n_k natural sonni shunday tanlab olamizki, ixtiyoriy p natural son uchun quyidagi tengsizlik o'rinli bo'lsin:

$$\rho(x_{n_k+p}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}.$$

Ushbu $\bar{S}_k = \bar{S}\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$ yopiq sharlarni ko'ramiz. Agar $x \in \bar{S}_{k+1}$ bo'lsa, u holda

$$\rho(x, x_{n_k}) \leq \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

ya'ni $x \in \bar{S}_k$. Demak, $\bar{S}_{k+1} \subset \bar{S}_k$. Teorema shartiga ko'ra bu yopiq sharlar ularning hammasiga tegishli x_0 elementga ega. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlikning x_0 ga yaqinlashishi ko'rsatilsa, iborimiz isbot etilgan bo'ladi. (x_{n_k}) qism ketma-ketlik x_0 ga yaqinlashadi, chunki

$$\rho(x_{n_k}, x_0) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0.$$

u holda butun $\{x_n\}$ ketma- ketlik ham x_0 ga yaqinlashadi, chunki ushbu

$$\rho(x_n, x_0) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$$

tengsizlikning o'ng tomoni n va n_k yetarli katta bo'lganda istalgancha kichik qilinishi mumkin.

To'la metrik fazolar nazariyasida quyidagi teorema katta ahamiyatga ega.

1.1.4.-teorema (Ber teoremasi). (X, ρ) to'la metrik fazoni hadlarining soni sanoqli va hech qayerda zich bo'lmagan to'plamlarning yig'indisini ko'rishida ifodalab bo'lmaydi.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ va M_n lar hech qayerda zich bo'lmagan to'plamlar bo'lsin. S_0 radiusi 1 ga teng bo'lgan ixtiyoriy yopiq shar bo'lsin. M_1 hech qayerda zich emas, xususan S_0 da ham zich bo'lmagani uchun radiusi $\frac{1}{3}$ dan kichik S_1 yopiq shar topiladiki, $S_1 \subset S_0$ va $S_1 \cap M_1 = \emptyset$. M_2 to'plam S_1 da zich bo'lmagani uchun S_1 ning ichida shunday S_2 shar topiladiki uning

radiusi $\frac{1}{3}$ dan kichik va $S_2 \cap M_2 = \emptyset$ va hokazo. Shu tarzda davom etib, quyidagi sharlarni qanoatlantiruvchi $\{S_n\}$ yopiq sharlar sistemasini hosil qilamiz:

- 1) $S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$,
- 2) $S_n \cap M_n = \emptyset$,
- 3) S_n ning radiusi $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi.

1.1.1.-teorema binoan $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ ga tegishli $x \in X$ nuqta mavjuddir. S_n larning (2)

xossasiga ko'ra $x \in M_n, n=1,2,\dots$, ya'ni $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = X$. Bu ziddiyatdan

$X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ kelib chiqadi.

1.2. Metrik fazolardagi o'lchovlar.

Faraz qilaylik S metrik fazo bo'lsin. S fazoning Borel to'plamlari sinfi Y da aniqlangan ehtimollik o'lchovlarini o'rganamiz. Y sinf metrik fazodagi ochiq to'plamlardan qurilgan. Y dagi ehtimollik o'lchovi P nomanfiy sanoqli additiv va $P(S)=1$ shartni qanoatlantiruvchi to'plam funksiyasi bo'ladi.

1.2.1.Ta'rif. Agar P_n va P ehtimollik o'lchovlari S dagi har bir haqiqiy qiymatli chegaralangan uzluksiz f funksiya uchun $\int_s f dP_n \rightarrow \int_s f dP$ munosabatni qanoatlantirsa, u holda P_n o'lchovlar ketmaketligi P ga kuchsiz yaqinlashuvchi deyiladi va $P_n \Rightarrow P$ kabi belgilanadi.

(S,Y) dagi ehtimollik o'lchovi xossalari o'rganamiz.

O'lchov va integrallar. 1.2.1.- teorema: (S,Y) dagi har bir o'lchov regulyardir: Agar $A \in Y$ va $\varepsilon > 0$ bo'lsa, u holda shunday F yopiq to'plam va G ochiq to'plam topilib, $F \subset A \subset G$ va $P(G-F) < \varepsilon$ bo'ladi.

Isboti: S dagi metrikani $\rho(x,y)$ orqali va x dan A gacha masofani $\rho(x,A)$ orqali belgilaymiz. Agar A yopiq bo'lsa, u holda $F = A$ va biror δ uchun

$G = \{x : \rho(x, A) < \delta\}$ deb olamiz, oxirgi to'plam $\delta \downarrow 0$ da kamayuvchi va kesishmasi A ni beradi. Shu sababli qayt qilingan xossalarga ega borel to'plamlar sinfi Y δ -maydon bo'lishini ko'rsatish yetarli. Y dan A_n to'plamlar berilgan bo'lsin; F_n yopiq to'plamlarni va G_n ochiq to'plamlarni shunday tanlaymizki, $F_n \subset A_n \subset G_n$ va $P(G_n - F_n) < \varepsilon / 2^{n+1}$ bo'ladi. Agar $G = \bigcup_n G_n$ va $F = \bigcup_{n \leq n_0} F_n$ bo'lsa, u holda $F \subset \bigcup_n A_n \subset G$ va $P(G - F) < \varepsilon$ bo'ladi, bu yerda n_0 soni $P\left(\bigcup_n F_n - F\right) < \varepsilon / 2$ shartdan tanlangan.

Shunday qilib, Y to'plamlar sinfi sanoqlita birlashma amaliga nisbatan yopiq ekan. Ko'rinib turibdiki to'ldiruvchi amaliga nisbatan ham yopiqdir. Teorema isbotlandi.

1.2.2.-teorema ko'ra P o'lchov F yopiq to'plamlar uchun $P(F)$ qiymat bilan bir qiymatli aniqlangan.

1.2.3-teorema ko'ra P o'lchov S da aniqlangan haqiqiy chegaralangan uzluksiz f funksiya uchun $\int f dP$ qiymat bilan bir qiymatli aniqlanadi. Bunday f funksiyalar sinfini $C(S)$ orqali belgilaymiz. $C(S)$ dagi har bir f funksiya Y -o'lchovlidir.

1.2.4.- teorema isbotida quyidagi teoremadan foydalaniladi.

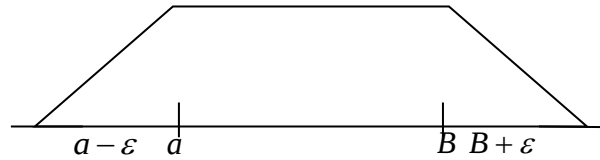
1.2.5.-teorema. Agar F yopiq, ε musbat bo'lsa, u holda $C(S)$ da shunday f funksiya mavjud bo'lib, $x \in F$ da $f(x) = 1, \rho(x, F) \geq \varepsilon$ da $f(x) = 0$ va barcha x larda $0 \leq f(x) \leq 1$ bo'ladi.

Isboti: Haqiqiy qiymatli uzluksiz φ funksiyaning quyidagicha aniqlaymiz:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ 1-t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Agar
$$f(x) = \varphi\left(\frac{1}{\varepsilon} \rho(x, F)\right) \quad (1.2.2)$$

bo'lsa, u holda f funksiya talab qilingan shartlarni qanoatlantiradi va tekis uzluksiz bo'ladi.



1 – rasm

1- rasmda $F = [a, b]$ dagi f funksiya tasvirlangan.

1.2.6.- teorema: Agar $C(S)$ dagi har bir f funksiya uchun.

$$\int f dP = \int f dQ \quad (1.2.3)$$

bajarilsa, (S, Y) dagi P va Q ehtimollik o'lchovlari ustma- ust tushadi.

Isbot. F yopiq to'plam bo'lsin. (1.2.1) tarifdan kelib chiqib ixtiyoriy musbat butun u , soni uchun

$$\varphi_u(t) = \varphi(u, t) \quad (1.2.4)$$

va

$$f_u(x) = \varphi_u(\rho(x, F)) \quad (1.2.5)$$

ni aniqlaymiz. U holda $\{f_u\} - C(S)$ elementlaridan tuzilgan I_F ga nuqtali yaqinlashuvchi o'smaydigan ketma-ketlik bo'ladi. Chegaralangan yaqinlashish haqidagi teorema ko'ra $P(F) = \lim_u \int f_u dP$ va $Q(F) = \lim_u \int f_u dQ$ bo'ladi, agar (1.2.3) tenglik $C(S)$ dagi barcha f lar uchun o'rinli bo'lsa, $Q(F) = P(F)$ bo'ladi. P va Q o'lchovlar barcha yopiq to'plamlarda ustma-ust tushgani uchun 1.2.1- teorema ko'ra P va Q lar aynan tengdir.

Shunday qilib, $C(S)$ dagi f uchun $\int f dP$ qiymat Y dagi A uchun $P(A)$ ni aniqlaydi.

Zichlik. Agar har bir $\varepsilon > 0$ son uchun shunday K kompakt to'plam topilib, $P(K) > 1 - \varepsilon$ bo'lsa, P ehtimollik o'lchov (S, Y) ga zich deyiladi. P o'lchov zich bo'lishi uchun u δ – kompakt tashuvchiga ega bo'lishi zarur va yetarlidir. 1.2.1- teorema ko'ra P o'lchov zich bo'lishi uchun Y dagi A uchun $P(A)$ soni A to'plamning K kompakt qism to'plamlari bo'yicha $P(K)$ aniq yuqori chegara bo'lishi zarur va yetarlidir. δ – kompakt fazoda har bir ehtimollik o'lchovi zichdir.

1.2.7.-teorema. Agar S separabel va to'la bo'lsa u holda (S,Y) dagi har bir ehtimollik o'lchovi zich.

Isbot. S separabel bo'lgani uchun har bir n uchun S ni qoplovchi $A_{n1}, A_{n2}, \dots, A_{ni}, \dots, A_{nn} - 1/n$ sferalar mavjud bo'ladi. i_n ni shunday tanlaymizki, $P\left(\bigcup_{i \leq i_n} A_{ni}\right) > 1 - \varepsilon / 2^n$ bo'lsin. Zichlik haqidagi farazimizga ko'ra $\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{i \leq i_n} A_{ni}$ to'la chegaralangan to'plam K ning kompakt yopig'i bo'ladi. $P(K) > 1 - \varepsilon$ bo'lgani uchun uchun teorema isbotlandi.

1.3. Ba'zi xususiy hollar.

Evklid fazosi. R^k orqali k - o'lchamli Evklid fazoni belgilaymiz, unda metrika

$$\rho(x, y) = |x - y| = \left[\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

quyidagicha kiritilgan. R^k daagi borel to'plamlari sinfini $\mathfrak{R}^k$ bilan, belgilaymiz: $\mathfrak{R}^k$ ning elementlarini k - o'lchamli borel to'plamlari deb, $k=1$ da esa chiziqli borel to'plamlari deb ataymiz. $y \leq x[y < x]$ yozuv barcha $i=1, 2, \dots, k$ uchun $y_i \leq x_i[y_i < x_i]$ ni bildiradi. Interval.

$$(a, b] = \{x : a < x \leq b\} \quad (1.3.1)$$

ko'rinishdagi to'plam. $e = (1, \dots, 1)$ bu koordinatalari 1 ga teng vektor.

$(R^k, \mathfrak{R}^k)$ dagi $\forall P$ ehtimollik o'lchovi

$$F(x) = P\{y : y \leq x\}, x \in \mathfrak{R}^k \quad (1.3.2)$$

tenglik bilan aniqlangan F taqsimot funksiyaga ega. $P_n \Rightarrow P$ kuchsiz yaqinlashishni F_n taqsimot funksiyalari ketma-ketlikligi F ga yaqinlashishi bilan taqqoslaymiz.

1.3.1.teorema. F funksiyaga x nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun har bir $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ soni topilib, $x \leq y < x + \delta e$ dan $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$ kelib chiqishi zarur va yetarli. (1.3.2) ta'rifga ko'ra F istalgan o'zgaruvchi bo'yicha kamaymaydi. Shu sababli F funksiya x nuqtada yuqoridan uzluksiz bo'lishi

uchun $F(x)$ funksiya $\inf_{\delta>0} \inf_{\delta>0} F(x+\delta e) = \inf_{\delta>0} P\{y: y \leq x+\delta e\}$ bilan ustma-ust tushishi zarur va yetarli. Bu infimum $\bigcap_{\delta>0} \{y: y \leq x+\delta e\} = \{y: y \leq x\}$ kesishmaning P – o'lchovi bo'ladi. Shunga ko'ra F funksiya har bir x nuqtada yuqoridan uzluksiz.

F funksiya har bir o'zgaruvchi bo'yicha kamaymaydi va hamma yerda yuqoridan uzluksiz bo'lgani uchun u x nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun u shu nuqtada quyidan uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

Boshqacha aytganda, har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilib, $x-\delta e < y \leq x$ dan $|F(y)-F(x)| < \varepsilon$ kelib chiqishi zarur va etarli. Monotonlik xossasiga ko'ra bu shart $F(x) = \sup_{\delta>0} F(x-\delta e)$ tenglikka ekvivalent. Supremum $\bigcup_{\delta>0} \{y: y \leq x-\delta e\} = \{y: y < x\}$

birlashmaning P – o'lchovi uchun F funksiya x nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun $F(x) = \{y: y < x\}$ bo'lishi zarur va yetarli. $\{y: y \leq x\} - \{y: y < x\}$ to'plam $\{y: y \leq x\}$ ning chegarasi bo'lgani uchun F funksiya x nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun $\{y: y \leq x\}$ to'plam P o'lchovning uzluksizlik to'plami bo'lishi zarur va yetarli.

F_n va F taqsimot funksiyalari uchun yaqinlashish tushunchasini kiritamiz. U $F = x$ uzluksizlik nuqtasida $F_n(x) \rightarrow F(x)$ ekanligini bildiradi.

Isbot qilinganga ko'ra agar $P_n \Rightarrow P$ bo'lsa, mos taqsimot funksiyalari uchun $F_n \Rightarrow F$ bo'ladi. $(a,b]$ interval o'zining chegaralarini saqlovchi $k-1$ o'lchamli $2k$ gipertekislik yordamida aniqlanadi. U oraliq bu gipertekisliklar 0 ga teng P – o'lchovga ega. U elementining har bir qirasi F ning uzluksizlik nuqtasi va U sinf intervallar sinfi belgilangan chekli kesishmalarga nisbatan yopiq. Faqat sanoqli sondagi parallel gipertekisliklar musbat P – o'lchovga ega bo'lgani uchun **1.3.1.-teoremaning** 1- natijasiga ko'ra agar U dagi har bir A uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$ bo'lsa, $P_n \Rightarrow P$ bo'ladi. $P(a,b]$ ehtimollik $\sum \pm F(x)$ ga teng, bunda $x-(a,b]$ intervalning 2^k ta qirralar to'plamidan olingan. Shu sababli $F_n \Rightarrow F$ dan U dagi har bir A uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$ kelib chiqadi. Demak, $P_n \Rightarrow P$ va $F_n \Rightarrow F$ lar ekvivalent ekan.

Shunday qilib, kuchsiz yaqinlashish tushunchasi R^k dagi taqsimot funksiyalarning odatdagi yaqinlashish tushunchasiga kelarkan.

Boshqacha aytganda, $\{y: y \leq x\}$ sinf aniqlovchi yaqinlashish sinfini tashkil qiladi.

Aylana. Agar S kompleks tekislikdagi birlik aylana bo'lsa ham shunga o'xshash natija o'rinli: $P_n \Rightarrow P$ bo'lishi uchun chekkalari 0 ga teng P – o'lchovga ega har bir A yoy uchun 0 ga teng P – o'lchovga ega har bir A yoy uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$ bo'lishi zarur va yetarli. S ning $\{x_1, x_2, \dots\}$ nuqtalari ketma-ketligi tekis taqsimlangan deyiladi, agar har bir yoydagi nuqtalar ulushi uning uzunligiga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_A(X_j) = P(A) \quad (1.3.3)$$

ma'noda proporsional bo'lsa, bu yerda I_A – indikator yoki A ning xarakteristik funksiyasi, P esa aylanadagi Lebeg o'lchovi bo'lib $P(S)$ Agar dastlabki n ta nuqta empirik taqsimoti P_n bo'lsa u holda bu A yoy uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$ yaqinlashishga keltiriladi. Shunday qilib, ketma-ketlik tekis yaqinlashishi uchun $P_n \Rightarrow P$ bo'lishi zarur va yetarli. Shu sababli, har bir yoy (1.3.3) ma'noda nuqtaning mos ulushini saqlasa, u holda chegarasi 0 ga teng Lebeg o'lchoviga ega istalgan boshqa borel to'plami uchun ham o'rinli. Veyl teoremasiga ko'ra $\{x_1, x_2, \dots\}$ tekis taqsimlangan bo'lishi uchun noldan farqli butun n soni uchun

$$n^{-1} \sum_{j=1}^n (x_j)^4 \rightarrow 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

R^∞ fazo. R^∞ fazodagi topologiya x nuqta atrofi sifatida

$$N_{k,\varepsilon}(x) = \{y: |x_i - y_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, k\} \quad (1.3.4)$$

ko'rinishidagi to'plamga ega, bu yerda $\varepsilon > 0$ va $K = 1, 2, \dots$. Bu topologiya R^∞ to'la separabel metrik fazo bo'ladi.

π_k orqali R^∞ ning R^∞ ga tabiiy proyeksiyasini belgilaymiz. Ta'rifga ko'ra $k \geq 1$ da $\pi_k^{-1}H$ ko'rinishdagi to'plam chekli o'lchamli to'plam bo'lib, $H \in R^k$. Har bir π_k proeksiya uzluksiz va shu sababli o'lchovli. Demak, chekli to'plam R^∞ dagi borel

to'plamlar δ – maydoni $\mathfrak{R}^\infty$ ga tegishli bo'ladi. Chekli o'lchamli to'plamlar sinfini F bilan belgilaymiz. Har bir (1.3.4) to'plam F ga tegishli va R^∞ separabel bo'lgani uchun $F - \mathfrak{R}^\infty$ ga tortilgan bo'ladi. F – maydon, u holda F – aniqlovchi sinfdir.

Fiksirlangan k va x uchun (1.3.4) to'plam ε ning turli qiymatlarida kesishmaydigan chegaraga ega F dagi P – uzluksizlik to'plamlari sinfiga **1.3.1. teorema** 1-natijasini qo'llab F aniqlovchi yaqinlashish sinfi bo'lishini hosil qilamiz. Shunday qilib, $P_n \Rightarrow P$ bo'lishi uchun barcha chekli o'lchamli P – uzluksizlik to'plamlari uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$ bo'lishi zarur va etarli.

C fazo. $[0,1]$ kesmadagi uzluksiz funksiyalar fazosi $C = C[0,1]$ da $\rho(x, y) = \sup_t |x(t) - y(t)|$ metrika bo'lib, R dagi holdan ancha farq qiladi. $[0,1]$ dan $t_1, \dots, t_k$ nuqtalarni tanlaymiz. $\pi_{t_1} \dots \pi_{t_k} - C$ dagi x nuqtaga $(x(t_1), \dots, x(t_k))$ nuqtaga mos qo'yuvchi akslantirish bo'lsin. Bunda chekli o'lchamli to'plamlar $H \in \mathfrak{R}^k$ uchun $\pi_{t_1}^{-1} \dots \pi_{t_k} H$ ko'rinishda aniqlanadi. $\pi_{t_1} \dots \pi_{t_k}$ uzluksiz bo'lgani uchun bu to'plamlar C dagi borel to'plamlari sinfi e da yotadi. C separabel bo'lgani uchun har bir ochiq to'plam ochiq sferalarning sanoqlita birlashmasidir. Demak yopiq sferalarning ham chekli o'lchashni to'plamlar e ga tortilgan. Ular maydonni tashkil qilgani uchun chekli o'lcham to'plamlar sinfi aniqlovchi sinf bo'ladi.

Chekli o'lchamli to'plamlar aniqlovchi yaqinlashish sinfi bo'lmaydigan misol keltiramiz. Faraz qilaylik P – birlik massani O nuqtaga qo'ysin, P_n esa x_n ga bu yerda.

$$X_n(t) = \begin{cases} nt, 0 \leq t \leq 1/n \\ 2 - nt, 1/n \leq t \leq 2/n \\ 0, 2/n \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.3.5)$$

X_n ketma-ketlik 0 ga tekis yaqinlashuvchi emas, shu sababli P_n o'lchov P_k ga kuchsiz yaqinlashuvchi emas. Lekin P ning chekli o'lchamni uzluksizlik to'plami

uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$. Agar $A = \pi_{t_1}^{-1} \dots \pi_{t_k}^{-1} H$ va $\frac{2}{n}$ soni nolmas t_i larning eng kichigidan ham kichik bo'lsa, u holda $P_n(A) = P(A)$ bo'ladi.

Shunday qilib, chekli o'lchamli to'plamlar C dagi aniqlovchi sinf bo'ladi, lekin aniqlovchi yaqinlashish sinfi bo'lmaydi.

Fazolar ko'paytmasi. $S = S' \times S' - S'$ va S'' metrik fazolarning ko'paytmasi bo'lsin. Agar S separabel bo'lsa, u holda bu fazodagi Y, Y', Y'' δ - maydonlar $Y = Y' \times Y''$ kabi bog'langan. (S, Y) dagi 2 ta marginal taqsimot ehtimollik P o'lchovi $P'(A') = P(A' \times S'')$, $A' \in Y'$ va $P''(A'') = P(S' \times A'')$, $A'' \in Y''$ kabi aniqlanadi.

1.3.2.-teorema. Agar S separabel bo'lsa, u holda $P_n \Rightarrow P$ yaqinlashish uchun P' o'lchovning A' uzluksizlik to'plami va P'' o'lchovning A'' uzluksizlik to'plami uchun $P_n(A' \times A'') \rightarrow P(A' \times A'')$ bo'lishi zarur va yetarli, bu yerda P' va $P'' + P$ o'lchovning marginal taqsimotlaridir.

Isbot. ∂, ∂' va ∂'' orqali mos ravishda S, S' va S'' dagi chegaraviy operatorlarni belgilaymiz.

$$\partial(A' \times A'') \subset ((\partial'A') \times S'') \cup (S' \times (\partial''A'')) \quad (1.3.6)$$

ga ko'ra teorema sharti zarurdir.

Yetarliligini isbotlash uchun $A' \times A''$ to'plamlarning U sinfi uchun **1.3.1.** – teoremaning 1- natijasini qo'llaymiz, bu yerda A' va A'' lar mos ravishda P' va P'' larning uzluksizlik to'plamlari. U sinf chekli kesishmalarga nisbatan yopiq va farazga ko'ra U dagi A uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$. S dagi (x, x'') nuqtani va $\varepsilon > 0$ sonni olib,

$$A_\delta = \{y' : \rho'(x', y') < \delta\} \times \{y'' : \rho''(x'', y'') < \delta\} \quad (1.3.7)$$

to'plamni qaraymiz. Turli δ larda $\partial'\{y' : \rho'(x', y') < \delta\}$ kesishmaydi va $\partial''\{y'' : \rho''(x'', y'') < \delta\}$ kesishmaydi. Shu sababli biror δ da $A_\delta - U$ ga tegishli, bu yerda $0 < \delta < \varepsilon$. Agar S da

$$\rho((x', x''), (y', y'')) = \max\{\rho'(x', y'), \rho''(x'', y'')\} \quad (1.3.8)$$

kabi metrika kiritilsa, u holda A_δ – markazi (x', x'') da radiusi δ bo'lgan sfera bo'ladi. Shu sababli U – **1.3.1.-teoremaning** 1-natijasi shartlarini qanoatlantiradi. Shuni isbotlash kerak edi.

1.3.2.-teoremaning yetarliligi shuni ko'rsatadiki, o'lchovli to'g'ri to'rtburchaklar aniqlovchi yaqinlashish sinfini tashkil qiladi.

(S', Y') va (S'', Y'') da mos ravishda aniqlangan P' va P'' ehtimollik o'lchovlari uchun ularning $P' \times P''$ ko'paymasi $Y' \times Y''$ dagi ehtimollik o'lchovi bo'ladi, agar S separabel bo'lsa, Y dagi o'lchov bo'ladi.

Quyidagi teorema 1.3.1-teoremadan kelib chiqadi.

1.3.3-teorema. Agar S separabel bo'lsa, u holda $P'_n \times P''_n \Rightarrow P' \times P''$ bo'lishi uchun $P'_n \Rightarrow P'$ va $P''_n \Rightarrow P''$ bo'lishi zarur va etarlidir.

Xulosa. I bob. Metrik fazolar deb nomlanadi. Bobning 1-paragrafida metrik fazolar haqida umumiy tushunchalar berilgan 2-paragrafda metrik fazolarda o'lchovlar ta'rifi keltirilgan bo'lib mavzuni yoritish davomida umumiy tushunchalar berilgan. 3-paragrafda esa metrik fazolarda o'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishiga doir bazi xususiy hollar keltirilgan bo'lib, unda **Yevklid** fazosi, aylana, R^∞ fazo, C fazo va fazolar ko'paytmasi haqida tushuncha, ta'rif va teoremlar keltirilgan.

II BOB. METRIK FAZOLARDA YAQINLASHISH.

2.1 Metrik fazoda yaqinlashish tushunchasi.

2.1.1-Ta'rif. (X, ρ) metrik fazoda biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar $n \rightarrow \infty$ da $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ bo'lsa, bu ketma-ketlik X fazoning x elementiga yaqinlashadi deyiladi va $x_n \rightarrow x$ yoki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ orqali belgilanadi.

Bu x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikni **limiti** deyiladi.

2.1.1-teorema. Har bir yaqinlashuvchi ketma-ketlik birgina limitga ega.

Isbot. Darhaqiqat, $x_n \rightarrow x$ va $x_n \rightarrow y$ bo'lsin. U holda uchburchak aksiomasiga muvofiq,

$$0 \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y).$$

Ammo bu tengsizlikning o'ng tomoni $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi, demak, $\rho(x, y) = 0$, ya'ni $x = y$.

2.1.2-teorema. $\rho(x, y)$ masofa x va y elementlarning uzluksiz funksiyasi, ya'ni agar $x_n \rightarrow x$ va $y_n \rightarrow y$ bo'lsa, u holda

$$\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y).$$

Isbot. Ixtiyoriy to'rtta $x, y, z, u \in X$ nuqta uchun

$$|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, u) \quad (2.1.1)$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham, uchburchak aksiomasidan foydalanib,

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, u) + \rho(u, y) \quad (2.1.2)$$

tengsizlikni yozishimiz mumkin. Bundan

$$\rho(x, y) - \rho(z, u) \leq \rho(x, z) + \rho(y, u).$$

Bu tengsizlikda x, y bilan mos ravishda z, u ning o'rinlarini almashtirilsa,

$$\rho(z, u) - \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, u) \quad (2.1.3)$$

tengsizlik hosil bo'ladi. (2.1.2) va (2.1.3) dan (2.1.1) kelib chiqadi. (2.1.1) dan (z va u ni mos ravishda x_n va y_n bilan almashtirilsa) teoremaning shartiga ko'ra

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \rightarrow 0.$$

Bundan

$$\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y).$$

Quyidagi da'vo o'z-o'zidan ravshan.

2.1.3–teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, u holda ketma-ketlikning ixtiyoriy $\{x_{n_k}\}$ qism ketma-ketligi ham shu nuqtaga yaqinlashadi.

2.1.4–teorema. $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa va $x_0 \in X$ aniq bir nuqta bo'lsa, u holda $\{\rho(x_n, x_0)\}$ sonlar to'plami chegaralangan bo'ladi.

Isbot. $\{\rho(x_n, x)\}$ yaqinlashuvchi sonli ketma-ketlik bo'lganligi uchun u chegaralangan bo'ladi; uning yuqori chegarasini M bilan belgilasak, u holda uchburchak aksiomasiga ko'ra

$$\rho(x_n, x_0) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_0) \leq M + \rho(x, x_0) = M_1$$

Endi ba'zi metrik fazolarda yaqinlashish tushunchasining ma'nosini ko'rib chiqamiz.

1. 1.1.1-misoldagi fazodan olingan biror ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun biror nomerdan boshlab bu ketma-ketlikning hamma elementlari bir biriga teng bo'lishi kerak.
2. R^n fazodan olingan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x elementga yaqinlashishi uchun x_n vektor koordinatorlarining mos ravishda x vektor koordinatalariga yaqinlashishi zarur va kifoya. Darhaqiqat, agar R^n da

$\rho(x_k, x) = \left(\sum_{i=1}^n (a_i^{(k)} - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ bo'lsa, u holda $a_i^{(k)} \rightarrow a_i$ $i = 1, 2, \dots, n (k \rightarrow \infty)$ va, aksincha.

3. $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $C[a, b]$ fazoning elementlaridan tuzilgan va $x_n(t) \rightarrow x(t) \in C[a, b]$ bo'lsin ya'ni

$$\rho(x_n, x) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Bundan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ natural son mavjudki, $t \in [a, b]$ bo'lganda

$$\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Demak, $t \in [a, b]$ ning hamma qiymatlari uchun $n > n_0$ bo'lganda

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Bu esa $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlikning $x(t)$ ga tekis yaqinlashishining xuddi o'zi. Ravshanki, aksincha, $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $[a, b]$ segmentda $x(t)$ ga tekis yaqinlashsa, u holda $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$. Demak, $C[a, b]$ fazoda metrika ma'nosida yaqinlashish ma'lum tekis yaqinlashish tushunchasi bilan ekvivalent ekan.

4. $L_p[a, b]$ fazoda yaqinlashishni p -darajali o'rta ma'noda yaqinlashish deyiladi, ya'ni

$$\rho(x_n, x) = \left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), p > 1$$

$p = 2$ bo'lganda kvadratik o'rta ma'noda yaqinlashish deb gapiriladi.

5. $\{x_k\}$ ketma-ketlik m fazoning elementlaridan tuzilgan va $x_k \rightarrow x \in m (k \rightarrow \infty)$ bo'lsin, ya'ni $\rho(x_k, x) = \sup_i |a_i^{(k)} - a_i| \rightarrow 0$, bu yerda

$$x_k = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)} \dots), x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots).$$

Demak, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ natural son mavjudki, $k > n_0$ bo'lganda

$$\rho(x_k, x) = \sup_i |a_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon.$$

Bundan, i ning hamma qiymatlari uchun $k > n_0$ bo'lganda

$$|a_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon.$$

Aksincha, $k > n_0$ bo'lganda i ning hamma qiymatlari uchun

$$|a_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon$$

bo'lsa, u holda ravshanki, $k \rightarrow \infty$ da $\rho(x_k, x) \rightarrow 0$. Demak, m fazoda metrika ma'nosida yaqinlashish koordinatalar bo'yicha tekis yaqinlashish bilan ekvivalent ekan.

6. s fazoda metrika ma'nosida yaqinlashish koordinatalar bo'yicha yaqinlashishga (umuman aytganda, tekis emas!) ekvivalent. Darhaqiqat, $x_k = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots)$, $x = (a_1, a_2, \dots)$ va $x_k \rightarrow x (k \rightarrow \infty)$ bo'lsin. U holda

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i^{(k)} - a_i|}{1 + |a_i^{(k)} - a_i|} < \varepsilon, k > n_0(\varepsilon).$$

Bundan har qanday i uchun ham $k > n_0(\varepsilon)$ bo'lganda

$$\frac{1}{2^i} \times \frac{|a_i^{(k)} - a_i|}{1 + |a_i^{(k)} - a_i|} < \varepsilon.$$

Lekin bu tengsizlikning chap tomonida i ni tayinlab qo'yib, k bo'yicha limitga o'tilsa, quyidagi munosabat hosil bo'ladi:

$$|a_i^{(k)} - a_i| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Aksincha, i ning har bir qiymati uchun $k \rightarrow \infty$ da $|a_i^{(k)} - a_i| \rightarrow 0$ bo'lsin. $\varepsilon > 0$ ni ixtiyoriy qilib olib, k natural sonni shunday tanlab olamizki,

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i^{(n)} - a_i|}{1 + |a_i^{(n)} - a_i|} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \times \frac{|a_i^{(n)} - a_i|}{1 + |a_i^{(n)} - a_i|} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \times \\ &\times \frac{|a_i^{(n)} - a_i|}{1 + |a_i^{(n)} - a_i|} < \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \frac{|a_i^{(n)} - a_i|}{1 + |a_i^{(n)} - a_i|} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

O'ng tomondagi yigindida hadlarning soni chekli bo'lganligi uchun k ni tayinlab qo'yib, $n_0 = n_0(\varepsilon)$ shu qadar katta qilib olamizki, $n > n_0$ bo'lganda

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \times \frac{|a_i^{(n)} - a_i|}{1 + |a_i^{(n)} - a_i|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajarilsin. Natijada $n > n_0$ bo'lganda

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

2.2. Kuchsiz yaqinlashish va akslantirishlar.

Uzluksiz akslantirishlar. Agar h akslantirish S ni boshqa metrik fazo S' ga o'tkazuvchi o'lchovli akslantirish bo'lsa, (S, Y) dagi har bir P ehtimollik o'lchovi (S', Y') da $A \in Y'$ uchun $Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A)$ tenglik bilan aniqlanuvchi yagona Ph^{-1} ehtimollik o'lchovini aniqlaydi. Bizni $P_n \Rightarrow P$ dan $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$ bo'ladigan shart qiziqtiradi. Bunday shartdan biri h akslantirishning uzluksizligidir, bu holda $f(y) - S$ da chegaralangan va uzluksiz bo'lganda $f(h(x)) - S$ da chegaralangan va uzluksiz bo'ladi. Shu sababli $P_n \Rightarrow P$ dan $\int f(h(x)P_n(dx)) \rightarrow \int f(h(x))P(dx)$ kelib chiqadi. Yoki integrallarni almashtirishdan kelib chiqadi.

$$\int f(y)PR^{-1}(dy) \rightarrow \int f(y)PR^{-1}(dy) \quad (2.2.1)$$

Masalan, R^∞ ni R^k ga proeksiyolovchi π_k uzluksizdir, shu sababli har bir k da $P_n \Rightarrow P$ dan $P_n \pi_k^{-1} \Rightarrow P \pi_k^{-1}$ kelib chiqadi. Teskarisini isbotlaymiz, ya'ni agar har bir k da $P_n \pi_k^{-1} \Rightarrow P \pi_k^{-1}$ bo'lsin. U holda $P_n \Rightarrow P$. π_k uzluksiz bo'lgani uchun $H \subset R^k$ da $\partial \pi_k^{-1}H \subset \pi_k^{-1}\partial H$. π_k maxsus xossasidan foydalanib, munosabat ikkala yo'qolishda o'rinli bo'lishini isbotlaymiz. Agar $x \in \pi_k^{-1}\partial H$ uchun $\pi_k x \in \partial H$ bo'lsa, u holda H da $\alpha^{(u)}$ nuqta va H^c da $\beta^{(u)}$ nuqta topilib, $u \rightarrow \infty$ da $\alpha^{(u)} \rightarrow \pi_k x$ va $\beta^{(u)} \rightarrow \pi_k x$. $\alpha_1^{(u)}, \dots, \alpha_k^{(u)}, \alpha_{k+1}^{(u)}, \dots$ nuqtalar $\pi_k^{-1}H$ ga tegishli va x ga yaqinlashuvchi, $(\beta_1^{(u)}, \dots, \beta_k^{(u)}, \beta_{k+1}^{(u)}, \dots)$ nuqtalar $(\pi_k^{-1}H)^c$ ga tegishli va x ga yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $x \in \partial(\pi_k^{-1}H)$ bo'ladi. Shunday qilib, $\partial \pi_k^{-1}H = \pi_k^{-1}(\partial H)$. Agar $P_n \pi_k^{-1} \Rightarrow P \pi_k^{-1}$ bo'lsa, u holda $H \in R^k$ uchun $A = \pi_k^{-1}H$ to'plam uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$ bo'ladi va $P(\pi_k^{-1}\partial H) = 0$. $P(\pi_k^{-1}\partial H) = 0$ tenglik $P(\partial \pi_k^{-1}H) = 0$ ga ekvivalent bo'lgani uchun P uzluksiz bo'lgan barcha chekli o'lchamli to'plamlar uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$. Chekli o'lchamli to'plamlar aniqlovchi yaqinlashish sinfini tashkil qilgani uchun $P_n \Rightarrow P$.

$P\pi_k^{-1}$ ga P ga mos chekli o'lchamli taqsimot yoki o'lchov deyiladi. $(R^\infty, \mathfrak{R}^\infty)$ dagi ehtimollik o'lchovi kuchsiz yaqinlashuvchi bo'lishi uchun barcha mos chekli o'lchamli taqsimotlar kuchsiz yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va etarli.

(C, e) dagi P ehtimollik o'lchovining chekli o'lchamli taqsimoti $P\pi_{t_1}^{-1} \dots t_k$ ko'rinishdagi mumkin bo'lgan o'lchovlar sifatida aniqlaymiz, bunda $\pi_{t_1} \dots t_k$ -1.3 mavzuda aniqlangan proeksiyalar. Bu proeksiyalar uzluksiz bo'lgani uchun (C, e) dagi ehtimollik o'lchovining kuchsiz yaqinlashishidan mos chekli o'lchamli taqsimotlarning kuchsiz yaqinlashishi kelib chiqadi. Biroq teskari tasdiq umuman olganda o'rinli emas. Haqiqatan ham, agar $P[P]$ aynan nolga teng birlik massali funksiyani ifodalasa, P_n ketma- ketlik P ga kuchsiz yaqinlashmaydi, bunda barcha $(t_1 \dots t_k)$ to'plamlar uchun $P_n \pi_{t_1}^{-1} \dots t_k \Rightarrow P\pi_{t_1}^{-1} \dots t_k$. U ikkinchi tomondan, chekli o'lchamli to'plamlar aniqlovchi sinfni tashkil qilgani uchun (C, e) dagi ehtimollik o'lchovi o'zining chekli o'lchamli taqsimoti orqali bir qiymatli aniqlanadi.

2.2.1. Asosiy teorema. Agar $h-S$ ni S' ga uzluksiz akslantirish bo'lsa, $P_n \Rightarrow P$ dan $P_n h^{-1} \rightarrow Ph^{-1}$ kelib chiqadi. Biroq uzluksizlik shartini biroz kuchsizlantirish mumkin. h ni o'lchovli deb olib, D_h orqali h ning uzluksiz nuqtalari to'plamini belgilaymiz. U holda $D_h \in S$.

2.2.2.-teorema. Agar $P_h \Rightarrow P$ va $P(D_h) = 0$ bo'lsa, u holda $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$.

Isbot. Agar $F-S'$ ning yopiq qism to'plami bo'lsa, u holda

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P h^{-1}(F) \leq P h^{-1}(F) \quad (2.2.2)$$

$P_n \Rightarrow P$ bo'lgani uchun

$$\limsup_n P_n(h^{-1}F) \leq \limsup_n h_n((h^{-1}F)^-) \leq P((h^{-1}F)^-) \quad (2.2.3)$$

o'rinli. Shu sababli, $P((h^{-1}F)^-) = P(h^{-1}F)$. Oxirgi tenglik $P(D_h) = 0$ va $(h^{-1}F)^- \subset D_h \cup (h^{-1}F)$ dan kelib chiqadi.

2.2.1-natija: Agar $X_n \xrightarrow{D} X$ va $P\{X \in D_h\}$ bo'lsa, u holda $h(X_n) \xrightarrow{D} h(X)$.

2.2.2-natija. Agar $X_n \xrightarrow{P} a$ va $h - a$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, $h(X_n)^p \rightarrow h(a)$.

Masalan, odatdagi tasodifiy miqdorlar uchun $(X_n, Y_n) \xrightarrow{D} (X, Y)$ dan $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + Y$ kelib chiqadi.

2.2.3-teorema. (i) Agar $P_n \Rightarrow P$ bo'lsa, u holda $P(D_h) = 0$ bo'ladigan ixtiyoriy haqiqiy o'lchovli h funksiya uchun $P_n h^{-1} \Rightarrow P h^{-1}$.

(ii) Agar barcha chegaralangan uzluksiz o'lchovli h funksiyalar uchun $P_n h^{-1} \Rightarrow P h^{-1}$ bo'lsa, u holda $P_n \Rightarrow P$.

(iii) Agar $P_n \Rightarrow P$ va h - haqiqiy chegaralangan $P(D_h) = 0$ bo'ladigan funksiya bo'lsa, $\int h dP_n \rightarrow \int h dP$ bo'ladi.

Isbot. Teoremaning (i) qismi 2.2.1-teoremadan kelib chiqadi. Agar $P_n h^{-1} \Rightarrow P h^{-1}$ bo'lsa, o'zgaruvchilarni almashtirib, $C(R^1)$ dagi har bir f uchun $\int f(h(x)) P_n(dx) \rightarrow \int f(h(x)) P(dx)$ o'rinli. Agar h funksiya M bilan chegaralangan bo'lsa,

$$f(t) = \begin{cases} -M, & t \leq -M, \\ t, & -M \leq t \leq M, \\ M, & M \leq t \end{cases} \quad (2.2.4)$$

funksiyani olib $\int h dP_n \rightarrow \int h dP$ ga ega bo'lamiz. Shu sababli (iii) – qism (i) ning natijasi, (ii) esa kuchsiz yaqinlashish ta'rifidan kelib chiqadi.

Integral belgisi ostida limitga o'tish. 2.2.2- teoremaning (iii) qismida chegaralanganlik shartini kuchsizlantirish mumkin.

2.2.4. -teorema. Agar $X_n \xrightarrow{D} X$ bo'lsa, $E\{|X|\} \leq \liminf_n E\{|X_n|\}$.

Isbot. 2.2.2-teoremaning (iii) qismida

$$h(x) = \begin{cases} |X|, & |X| \leq \alpha \\ 0, & |X| > \alpha \end{cases} \quad (2.2.5)$$

deb olamiz. Agar $P\{|X| = \alpha\} = 0$ bo'lsa, u holda

$$\int_{\{|X| \leq \alpha\}} |X| dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|X_n| \leq \alpha\}} |X_n| dP \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E\{|X_n|\} \quad (2.2.6)$$

Agar α ni $P\{|X| = \alpha\} = 0$ shartni qanoatlantiruvchi qiymatlari bo'yicha ∞ ga intiltirsak, kerak bo'lgan natija hosil bo'ladi.

Kuchsiz yaqinlashish xossasi.

$P_n \Rightarrow P$ kuchsiz yaqinlashishni S dagi haqiqiy chegaralangan uzluksiz funksiyalar sinfi $C(S)$ dan olingan ixtiyoriy f uchun $\int f dP_n \rightarrow \int f dP$ integrallar yaqinlashishi sifatida aniqlaymiz. $\int f dP$ integrallar P ni to'liq aniqlagani uchun $\{P_n\}$ kerak bir vaqtda ikkita turli limitga kuchsiz yaqinlasha olmaydi. Kuchsiz yaqinlashish faqat S dagi topologiyadan bog'liq, lekin metrika ko'rinishidan bog'liq emas. Bitta topologiyaga qurilgan 2 ta metrika bitta Y va $C(S)$ sinfga olib keladi.

Kuchsiz yaqinlashish shartlari haqidagi teorema.

Ta'rif. Y dagi biror A top'lamning ∂A chegarasi uchun $P(\partial A) = 0$ shart qanoatlantirilsa A to'plamga P ning uzluksizlik to'plami yoki P – uzluksiz to'plam deyiladi.

2.2.5.- teorema. P_n va P lar (S, Y) dagi ehtimollik o'lchovlari bo'lsin. Quyidagi 5 ta shartlar ekvivalent:

(i) $P_n \Rightarrow P$

(ii) Har bir chegaralangan tekis uzluksiz haqiqiy f funksiyalar uchun.

$$\lim_n \int f dP_n = \int f dP$$

(iii) Barcha F yopiq to'plamlar uchun $\limsup_n P_n(F) \leq P(F)$.

(iv) Barcha G ochiq to'plamlar uchun $\liminf_n P_n(G) \geq P(G)$.

(v) Barcha P – uzluksiz A to'plamlar uchun $\lim_n P_n(A) = P(A)$.

Quyidagi 2 ta misol bu shartlarni tushuntiradi. $P - x$ nuqtadagi birlik massa va $P_n - x_n$ nuqtadagi birlik massa bo'lsin. Agar $x_n \rightarrow x$ bo'lsa $C(S)$ dagi barcha f lar

uchun $\int f dP_n = f(x_n) \rightarrow f(x) = \int f dP$ bo'lib, $P_n \Rightarrow P$ bo'ladi. Agar x_n ketma-ketlik x ga yaqinlashmasa, biror $\varepsilon > 0$ soni va cheksiz ko'p n sonlari uchun $\rho(x_n, x) > \varepsilon$ bo'ladi. Agar (1.1) orqali aniqlangan φ funksiya uchun $f(y) = \varphi(\varepsilon^{-1} \rho(x, y))$ bo'lsa, u holda $f \in C(S)$, $f(x) = 1$ va cheksiz ko'p n uchun $f(x_n) = 0$. Shu sababli P_n ketma-ketlik P ga kuchsiz yaqinlashuvchi emas. Shunday qilib, $P_n \Rightarrow P$ bo'lishi uchun $x_n \rightarrow x$ bo'lishi zarur va yetarli. A to'plam P ning uzluksizlik to'plami bo'lishi uchun $x \in \partial A$ bo'lishi zarur va yetarli bo'lgani uchun (i) va (v) larning ekvivalentligi oson tekshiriladi. Agar $x_n \rightarrow x$ va barcha x_n lar x dan farq qilsa, (iii) ga $F = \{x\}$ uchun qat'iy tengsizlik va (iv) ga $G = F^c$ uchun qat'iy tengsizlik bajariladi. Bundan tashqari, x_n lar turlicha va $A = \{x_2, x_4, \dots\}$ bo'lsa, $P_n(A)$ ketma-ketlik $P(A)$ ga ham, boshqa limitga ham intilmaydi.

Sonlar o'qidagi odatdagi metrika bo'yicha Muavr-Laplas teoremasi ham teorema shartlarini tafsiflaydi. Muhim lekin sodda misol sifatida $i/n, i = 1, 2, \dots, n$ nuqtaga $1/n$ massani mos qo'yuvchi P_n o'lchovni qaraymiz. U holda P_n ketma-ketlik birlik intervaldagi P Lebeg o'lchoviga kuchsiz yaqinlashuvchi bo'ladi. Agar A rasional nuqtalardan tashkil topgan bo'lsa, $P_n(A) = 1$ ketma-ketlik $P(A) = 0$ ga yaqinlashuvchi emas, agar G – rasional nuqtalarni saqllovchi va 0 ga yaqin **Lebeg** o'lchoviga ega ochiq to'plam bo'lsa, u holda (iv) ga qat'iy tengsizlik o'rinli bo'ladi. 2.2.5.- teoremani

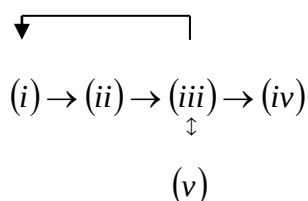


diagramma bo'yicha isbotlaymiz

$(i) \rightarrow (ii)$ trivialdir.

(ii) $\rightarrow$ (iii) ni isbotlaymiz. Faraz qilamiz (iii) o'rinli, F yopiq to'plam va $\delta > 0$ bo'lsin. Yetarlicha kichik ε ga $G = \{x: \rho(x, P) < \varepsilon\}$ to'plam $P(G) < P(F) + \delta$ shartni qanoatlantiradi, chunki $\varepsilon \downarrow 0$ da bunday to'plamlar F ga kamayadi. Agar $f(x)$ funksiya (2.2.10) bilan aniqlangan bo'lsa, u holda u S da tekis uzluksiz, F da $F(x) = 1$, G ning G to'ldiruvchisida $f(x) = 0$ va barcha x da $0 \leq f(x) \leq 1$ bo'ladi. (ii) bajarilgani uchun $\lim_n \int f dP_n = \int f dP$ va

$$P_n(P) = \int_F f dP_n \leq \int f P_n \quad (2.2.7)$$

va

$$\int f dP = \int_G f dP \leq P(G) < P(F) + \delta \quad (2.2.8)$$

Bular esa

$$\limsup_n P_n(F) \leq \lim_n \int f dP_n = \int f dP < P(F) + \delta \quad (2.2.9)$$

ni beradi. δ ixtiyoriy bo'lgani uchun (iii) kelib chiqadi. (iii) $\rightarrow$ (i) ni isbotlaymiz. (iii) o'rinli bo'lib, $f \in C(S)$ bo'lsin.

Avval

$$\limsup_n \int f dP_n \leq \int f dP \quad (2.2.10)$$

ni isbotlaymiz. f ni chiziqli almashtirib, masalani barcha x lar uchun $0 < f(x) < 1$ holga keltiramiz. Butun k son uchun F_i yopiq to'plam :
 $F_i = \left\{x: \frac{i-1}{k} \leq f(x)\right\}, i = 0, 1, \dots, k. 0 < f(x) < 1$ bo'lgani uchun

$$\sum_{i=1}^k \frac{i-1}{k} P\left\{x: \frac{i-1}{k} \leq f(x) < \frac{i}{k}\right\} \leq \int f dP < \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} P\left\{x: \frac{i-1}{k} \leq f(x) < \frac{i}{k}\right\} \quad (2.2.11)$$

hosil bo'ladi. O'ng tomondagi yig'indi

$$\sum_{i=1}^k \frac{i}{k} [P(F_{i-1}) - P(F_i)] = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(F_i) \quad (2.2.12)$$

ga teng. Bu va chap qismdagi yig'indini shunga o'xshab almashtirib

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(F_i) \leq \int f dP < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(F_i) \quad (2.2.13)$$

ni hosil qilamiz. Agar (iii) o'rinli bo'lsa, u holda har bir i ga $\limsup_n P_n(F_i) \leq P(F_i)$ va shu sababli

$$\limsup_n \int f P_n \leq \frac{1}{k} + \int f dP. \quad (2.2.14)$$

$k \rightarrow \infty$ da (2.2.10) ga ega bo'lamiz.

(2.2.10) ni $-f$ ga qo'llab, $\liminf_n \int f dP_n \geq \int f dP$ ni hosil qilamiz, va (2.2.10) bilan birga kuchsiz yaqinlashishni isbotlaydi.

(iii) va (iv) larning ekvivalentligi oson isbotlanadi.

(iii) $\rightarrow$ (v) ni isbotlaymiz. A to'plamning ichki qismini A° bilan, to'ldiruvchini A^- bilan belgilaymiz. Agar (iii) o'rinli bo'lsa. U holda (iv) ham o'rinli bo'ladi, shu sababli, istalgan A uchun

$$P(A^-) \geq \limsup_n P_n(A^-) \geq \limsup_n P_n(A) \geq \liminf_n P_n(A) \geq \liminf_n P_n(A) \geq P(A^\circ) \quad (2.2.15)$$

o'rinli. Agar $P(\partial A) = 0$ bo'lsa, bu tengsizlikning chetki hadlari $P(A)$ ga teng va $\lim_n P_n(A) = P(A)$.

(v) $\rightarrow$ (iii) ning isboti. $\partial\{x: \rho(x, F) \leq \delta\}$ to'plam $\{x: \rho(x, F)\}$ da yotadi, turli δ larga bu kesishmaydi va shu sababli, Y ning sanoqlidan ko'p bo'lmagan to'plami musbat P - o'lchovga ega. Shu sababli, O ga yaqinlashuvchi δ_k musbat ketma-ketlik uchun $F_k = \{x: \rho(x, F) \leq \delta_k\}$ to'plam P ning uzluksizlik to'plami bo'ladi. Agar (v) bajarilsa, u holda har bir k uchun $\limsup_n P_n(F) \leq \lim_n P_n(F_k)$. Agar F yopiq bo'lsa, $F_k \downarrow F$ bo'lib, (iii) bajariladi. Shu bilan 2.2.5- teorema isbotlandi.

Boshqa kriteriyalar. Ba'zida kuchsiz yaqinlashishni isbotlashda biror maxsus A to'plamlar sinfi uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$ yaqinlashishni tekshirish qulaydir.

2.2.6-teorema: Faraz qilaylik $U - Y$ sinfnig shunday qism sinfi bo'lib,

(i) U - chekli sondagi kesmaga nisbatan yopiq

va

(ii) S dagi har bir ochiq to'plam U dagi elementlarning chekli yoki sanoqli birlashmasi bo'lsin.

Agar U dagi har bir A uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$ bo'lsa, u holda $P_n \Rightarrow P$.

Isbot: Agar $A_1, \dots, A_m + U$ lar U ga tegishli bo'lsa, u holda ularning kesishmasi U ga tegishli bo'ladi; Shu sababli,

$$P_n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_i P_n(A_i) - \sum_{ij} P_n(A_i A_j) + \sum_{ijk} P_n(A_i A_j A_k) - \dots = P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \quad (2.2.16)$$

ni hosil bo'ladi. Agar G – ochiq to'plam bo'lsa u holda U dagi biror $\{A_i\}$ ketma-ketlik uchun $G = \bigcup_i A_i$ bo'ladi. Berilgan ε ga ko'ra m ni shunday

tanlaymizki, $P\left(\bigcup_{i \leq m} A_i\right) > P(G) - \varepsilon$ bo'lsin. Yuqorida isbotlangan tenglikka ko'ra

$$P(G) - \varepsilon < P\left(\bigcup_{i \leq m} A_i\right) = \lim_n P_n\left(\bigcup_{i \leq m} A_i\right) \leq \liminf_n P_n(G) \quad (2.2.17)$$

o'rinli. ε ixtiyoriy bo'lgani uchun avvalgi teoremaning (iv) sharti bajariladi.

Markazi x nuqtada bo'lgan ε – sferani $S(x, \varepsilon)$ bilan belgilaymiz.

2.2.3-natija. Faraz qilaylik U – shunday to'plamlar sinfi bo'lib, (i) U – chekli sondagi kesishmalarga nisbatan yopiq; (ii) S ning har bir x elementi va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun U da shunday A to'plam topilib, $x \in A^\circ \subset A \subset S(x, \varepsilon)$ bo'lsin. Agar S separabel va U dagi ixtiyoriy A uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$ bo'lsa u holda $P_n \Rightarrow P$ bo'ladi.

Isboti : (ii) shartga ko'ra G ochiq to'plamning ixtiyoriy $\forall x$ nuqtasi uchun U dagi biror A uchun $x \in A^\circ \subset A \subset G$ o'rinli bo'ladi. S separabel bo'lgani uchun U da shunday chekli yoki cheksiz $\{A_i\}$ ketma-ketlik topilib, $G \subset \bigcup_i A_i^\circ$ va $A_i \subset G$ o'rinli bo'ladi. Bundan $G \subset \bigcup_i A_i$ kelib chiqadi. Shunday qilib, U sinfi 2.2.6- teorema shartlarini qanoatlantiradi.

2.2.4- natija. Faraz qilaylik A to'plam P ning uzluksizlik to'plami bo'lib, ochiq sferalarning chekli sondagi A kesishmasi uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$ bo'lsin. Agar S separabel bo'lsa, $P_n \Rightarrow P$ bo'ladi.

Isbot. $\{y: \rho(x, y) = \varepsilon\}$ ga tegishli $\partial S(x, \varepsilon)$ chegaralar kesishmaydi va chekli yoki sanoqli sondan tashqari barcha ε larga 0 ga teng P – o'lchovga ega bo'ladi. $\partial(A \cap B) \subset (\partial A) \cup (\partial B)$ munosabatga ko'ra P ning uzluksizlik to'plamlari sinfi U chekli sondagi sferalar kesishmasi bo'lib, 2.2.1- natija shartlarini qanoatlantiradi. Bundan kerakli natija kelib chiqadi.

Agar V dagi P – uzluksizlik A to'plamlari uchun $P_n(A) \rightarrow P(A)$ yaqinlashish P_n ning P ga kuchsiz yaqinlashishini ta'minlasa Y sinfining V qism sinfi aniqlovchi yaqinlashish sinfi deyiladi. Shu sababli 2.2.2-natijani quyidagicha bayon qilish mumkin: separabel fazoda sferalar kesishmasi aniqlovchi yaqinlashish sinfini tashkil qiladi.

Agar P va Q lar V ga teng bo'lsa, V ga aniqlovchi sinf deyiladi. Yopiq to'plamlar sinfi aniqlovchi sinf bo'ladi va Y ga tortilgan istalgan maydon ham aniqlovchi sinf bo'ladi. Aniqlovchi yaqinlashish sinfi hamisha aniqlovchi sinf bo'ladi. Quyidagi misolga ko'ra teskari tasdiq o'rinli emas. S orqali odatdagi metrikali yarim ochiq $[0, 1)$ ni belgilaymiz. V esa $[a, b), 0 < a < b < 1$ lar sinfi bo'lsin. U holda V aniqlovchi sinf bo'ladi, lekin aniqlovchi yaqinlashish sinf bo'lmaydi.

Haqiqiy sonlarning $\{x_n\}$ ketma- ketligi x ga yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\{x_n\}$ ketma- ketlik x ga yaqinlashuvchi boshqa $\{x_n \dots\}$ qism ketma- ketlikni saqlashi zarur va yetarli.

2.2.7-teorema. $P_{n^*} \Rightarrow P$ bo'lishi uchun ixtiyoriy $\{P_{n^*}\}$ qisman ketma-ketlik $P_{n^*} \Rightarrow P$ bo'ladigan boshqa $\{P_{n^*}\}$ qisman ketma-ketlikni saqlashi zarur va yetarli.

Ba'zida P_t ning P ga kuchsiz yaqinlashishi bilan ishlaymiz, bu yerda $t \rightarrow \infty$ ga intiluvchi uzluksiz parametr. Ta'rifga ko'ra bu $C(S)$ dagi ixtiyoriy f funksiya uchun

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int f dP_t = \int f dP \quad (2.2.18)$$

ekanligini bildiradi. Agar f funksiya fiksirlangan bo'lsa, (2.4) bajarilishi uchun ∞ ga intiluvchi $\forall \{t_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f dP_n = \int f dP \quad (2.2.19)$$

bo'lishi zarur va yetarli. Shunday qilib, $t \rightarrow \infty$ da $P_t \Rightarrow P$ bo'lishi uchun ∞ ga intiluvchi $\{t_n\}$ uchun $P_n \Rightarrow P$ bo'lishi zarur va yetarli.

2.3. Taqsimot bo'yicha yaqinlashish.

Tasodifiy elementlar. Faraz qilaylik $X - (\Omega, \beta, P)$ ehtimollik fazosini S metrik fazoga o'tkazsin. Agar X o'lchovli bo'lsa, X ga tasodifiy element deyiladi. X tasodifiy element o'zining Ω aniqlanish sohasida berilgan va S qiymatlar sohasi, $X - S$ ning tasodifiy elementi deyiladi. Agar $S = R^1$ bo'lsa, X ga tasodifiy miqdor deyiladi, agar $S = R^k$ bo'lsa, X ga tasodifiy vektor, $S = C$ bo'lsa, X ga tasodifiy funksiya deyiladi.

Tasodifiy miqdor va tasodifiy vektorlar o'rganishning dastlabki ob'yektlaridir.

(S, Y) dagi $P = PX^{-1}$ ehtimollik o'lchovi X elementning ehtimollik taqsimotidir:

$$P(A) = P(X^{-1}A) = P\{\omega : X(\omega) \in A\} = P\{X \in A\} \quad A \in Y \quad (2.3.1)$$

Bundan tashqari, $S = R^k$ bo'lganda

$$F(x) = P\{y : y \leq x\} = P\{X \leq x\}, \quad x \in R^k \quad (2.3.2)$$

X da taqsimot funksiyani aniqlaymiz.

P ehtimollik o'lchovi istalgan tabiatli fazoda aniqlanadi. Bir vaqtning o'zida P taqsimot hamisha metrik fazoda aniqlangan. Qoida bo'yicha P taqsimot X tasodifiy element haqidagi barcha muhim ma'lumotlarni saqlaydi. Agar $h - S$ dagi o'lchovli funksiya bo'lsa, o'zgaruvchilarni almashtirish yordamida

$$\int h(X) dP = \int h dP \quad (2.3.3)$$

tenglikni hosil qilamiz. Matematik kutilma uchun odatdagi belgilashni ishlatib (2.3.3) o'rniga

$$E\{h(X)\} = \int h dP \quad (2.3.4)$$

ni hosil qilamiz.

Istalangan metrik fazodagi istalangan ehtimollik o'lchovi biror ehtimollik fazodagi biror ehtimollik elementning taqsimot bo'ladi. (S, Y) da P o'lchov berilgan bo'lsin, agar (Ω, β, P) ning (S, Y, P) deb olsak va

$$X(\omega) = \omega, \omega \in \Omega = S \quad (2.3.5)$$

bo'lsa, u holda $X - \Omega$ da aniqlangan, S da qiymat qabul qiluvchi tasodifiy elementdir va o'zining taqsimoti sifatida P o'lchovga ega.

Taqsimot bo'yicha yaqinlashish. Agar X_n elementning P_n taqsimoti X elementning P taqsimotiga yaqinlashuvchi bo'lsa, X_n tasodifiy elementlar ketma-ketligi X elementga taqsimot bo'yicha yaqinlashuvchi deyiladi va

$$X_n \xrightarrow{D} X \quad (2.3.6)$$

kabi yoziladi, bunda

$$P_n \Rightarrow P \quad (2.3.7)$$

Agar S obrazlar fazosi va undagi topologiya $X_1, \dots, X_n, \dots$ lar uchun bir xil bo'lmasa, bu ta'rif ma'noga ega emas $P_n\{X_n \in A\}$ o'rniga $P\{X_n \in A\}$ deb yozamiz va $\int f(X_n) dP_n$ yoki $E_n\{f(X_n)\}$ o'rniga $E\{f(X_n)\}$ deb yozamiz. (2.3.3) o'zgaruvchilarni almashtirish formulasiga ko'ra

$$\int_S f(x) P(dx) = \int_{\Omega} f(X) dP,$$

$X_n \xrightarrow{D} X$ bo'lishi uchun har bir $f \in C(S)$ uchun $E\{f(X_n)\} \rightarrow E\{f(x)\}$ bo'lishi zarur va etarli.

2.3.1- teorema quyidagi 5 ta tasdiqlarning ekvivalentligini bildiradi. Agar $P\{X \in \partial A\} = 0$ bo'lsa, Y dan olingan A to'plam X - uzluksiz to'plami deyiladi.

(i). $X_n \xrightarrow{D} X$.

(ii). Barcha chegaralangan tekis uzluksiz haqiqiy f funksiyalar uchun

$$\lim_n E\{f(X_n)\} = E\{f(x)\}.$$

(iii) Barcha yopiq F lar uchun $\limsup_n P\{X_n \in F\} \leq P\{X \in F\}$.

(iv) Barcha ochiq G lar uchun $\liminf_n P\{X_n \in G\} \geq P\{X \in G\}$.

(v) Barcha X – uzluksiz A to'plamlar uchun $\lim_n P\{X_n \in A\} = P\{X \in A\}$.

Kuchsiz yaqinlashish haqidagi har bir teoremani shunga o'xshash qayta bayon qilish mumkin.

Agar X_n lar S ning tasodifiy elementlari, P_n – mos taqsimotlar va $P - (S, Y)$ dagi ehtimollik o'lchovi bo'lsa, X_n ketma- ketlik P ga taqsimot bo'yicha yaqinlashuvchi deyiladi va $P_n \Rightarrow P$ holda

$$X_n \xrightarrow{D} P \quad (2.3.8)$$

kabi yoziladi.

(2.3.6), (2.3.7) va (2.3.8) dan ularga ekvivalent tushunchaga o'tish mumkin. Agar X_n tasodifiy miqdorlar μ o'rtachali asimtotik normal taqsimotga va δ^2 dispersiyaga ega bo'lsa, uni

$$X_n \xrightarrow{D} N(\mu, \delta^2) \quad (2.3.9)$$

kabi yozish mumkin. Bunda $N(\mu, \delta^2)$ ni $(R^1, \mathfrak{R}^1)$ dagi $(2\pi\delta^2)^{1/2} e^{-(u-\mu)^2/2\delta^2}$ zichlikka ega o'lchov sifatida olishdan va (2.3.9) ni (2.3.8) ma'noda tushunishdan yoki $N(\mu, \delta^2)$ ni

$$P\{N(\mu, \delta^2) \in A\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \int_A e^{-(u-\mu)^2/2\delta^2} du, A \in \mathfrak{R}^1 \quad (2.3.10)$$

taqsimotli tasodifiy miqdor sifatida olishdan, (2.3.9) ni (2.3.6) ma'noda tushunishdan bog'liq. Ko'plab ehtimollik fazolarida istalgan sonda $N(\mu, \delta^2)$ tasodifiy miqdorlar mavjud. Ulardan bittasi (2.3.5) dir. Biz $N(\mu, \delta^2)$ lar bu qiymati bilan cheklanamiz va N uchun $N(0.1)$ yozuvdan foydalanamiz:

$$P\{N \in A\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-u^2/2} du, A \in R' \quad (2.3.11)$$

Ehtimol bo'yicha yaqinlashish. Taqsimot bo'yicha yaqinlashishga oid ko'plab standart tushuncha va natijalar umumlashtiriladi. Agar S dagi a element uchun istalgan $\varepsilon > 0$ da

$$P\{\rho(X_n, a) \geq \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad (2.3.12)$$

o'rinli bo'lsa, X_n ketma-ketlik a ga ehtimol bo'yicha yaqinlashuvchi deyiladi va

$$X_n \xrightarrow{P} a \quad (2.3.13)$$

kabi yoziladi. Agar a ni o'zgarmas qiymatli tasodifiy element sifatida qarasak, u holda $X_n \xrightarrow{P} a$ bo'lishi uchun $X_n \xrightarrow{D} a$ bo'lishi zarur va etarli ekanligini isbotlash mumkin. Boshqacha aytganda $X_n \xrightarrow{P} a$ bo'lishi uchun X_n taqsimot a nuqtada 1 ga teng massaga ega ehtimollik o'lchovga yaqinlashishi zarur va yetarli. (2.3.13) dagi X_n tasodifiy elementlar turli ehtimollik fazolarda aniqlanishi mumkin, biroq S qiymatlar sohasi barchasi uchun bir xil bo'lishi kerak.

Agar X_n va Y_n lar umumiy aniqlanish sohaga ega bo'lsa, $\rho(X_n, Y_n)$ ma'noga ega, ya'ni funksiyaning ω nuqtadagi $\rho(X_n(\omega), Y_n(\omega))$ ma'noga ega. S separabel bo'lsa, $\rho(X_n, Y_n)$ tasodifiy miqdor bo'ladi. Quyidagi teoremda istalgan n uchun X_n va Y_n lar umumiy aniqlanish sohasiga ega va S separabel deb olinadi.

2.3.2- teorema. Agar $X_n \xrightarrow{D} X$ va $\rho(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0$ bo'lsa, $Y_n \xrightarrow{D} Y$ bo'ladi.

Isbot. Agar $F_\varepsilon = \{x: \rho(x, F) < \varepsilon\}$ bo'lsa. U holda

$$P\{Y_n \in F\} \leq P\{\rho(X_n, Y_n) \geq \varepsilon\} + P\{X_n \in F_\varepsilon\} \quad (2.3.14)$$

F_ε yopiq to'plam bo'lgani uchun, u holda teorema shartiga ko'ra

$$\limsup_n P\{Y_n \in F\} \leq \limsup_n P\{X_n \in F_\varepsilon\} \leq P\{X \in F_\varepsilon\} \quad (2.3.15)$$

Agar F yopiq bo'lsa, u holda $\varepsilon \downarrow 0$ da $F_\varepsilon \downarrow F$ bo'ladi va natija 2.3.1-teoremdan kelib chiqadi.

Quyidagi teoremda har bir n uchun $Y_n, X_{1n}, \dots$, tasodifiy elementlar umumiy aniqlanish sohaga ega va S separabel deb olinadi.

2.3.3-teorema. Har bir u uchun $n \rightarrow \infty$ da $X_{un} \xrightarrow{D} X_u$ va $u \rightarrow \infty$ da $X_u \rightarrow X$.

Har bir $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P\{\rho(X_{un}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0 \quad (2.3.16)$$

bo'lsin. U holda $n \rightarrow \infty$ $Y_n \xrightarrow{D} X$ bo'ladi.

Isbot. F_ε ni avvalgidek aniqlab, $F_\varepsilon = \{x: \rho(x, F) \leq \varepsilon\}$ kabi

$$P\{Y_n \in F\} \leq P\{X_{un} \in F_\varepsilon\} + P\{\rho(X_{un}, Y_n) \geq \varepsilon\} \quad (2.3.17)$$

ni hosil qilamiz. $n \rightarrow \infty$ da $X_{un} \xrightarrow{D} X_u$ farazga ko'ra

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\{Y_n \in F\} \leq P\{X_u \in F_\varepsilon\} + \limsup_{n \rightarrow \infty} P\{\rho(X_{un}, Y_n) \geq \varepsilon\} \quad (2.3.18)$$

o'rinli. (2.3.16) ga va $u \rightarrow \infty$ da $X_u \xrightarrow{D} X$ farazdan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\{Y_n \in F\} \leq P\{X \in F_\varepsilon\} \quad (2.3.19)$$

kelib chiqadi. Endi teorema natijasida xuddi avvalgi teoremadagi kabi hosil qilinadi.

Faraz qilaylik barcha $X, X_1, X_2, \dots$ lar umumiy aniqlanish sohasiga ega bo'lib. S separabel bo'lsin. Agar $\forall \varepsilon > 0$ uchun

$$P\{\rho(X_n, X) \geq \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad (2.3.20)$$

bo'lsa, X_n ketma-ketlik X ga ehtimollik bo'yicha yaqinlashuvchi deyiladi va

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad (2.3.21)$$

kabi belgilanadi.

2.3.4-teorema. Agar $X_n \xrightarrow{P} X$ bo'lsa, u holda har bir X uzluksiz A to'plam

$$P(\{X_n \in A\} + \{X \in A\}) \rightarrow \quad (2.3.22)$$

bo'ladi.

Isbot. Har bir $\varepsilon > 0$ uchun

$$P\{X_n \in A, X \notin A\} \leq P\{\rho(X_n, X) \geq \varepsilon\} + P\{\rho(X, A) < \varepsilon, X \notin A\} \quad (2.3.23)$$

Bu tengsizlikdan va A ni A^c ga almashtirishdan hosil bo'lgan tengsizlikga va $X_n \xrightarrow{P} X$ tasdiqga ko'ra

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\{X_n \in A\} + \{X \in A\}) \leq P\{P(X, A) < \varepsilon, X \notin A\} + P\{\rho(X, A^c) < \varepsilon, X \in A\} \quad (2.3.24)$$

ni hosil qilamiz. $\varepsilon > 0$ da bu tengsizlikning o'ng tomoni $P\{X \in \partial A\} = 0$ ga intiladi.

(2.3.22) dan $P\{X_n \in A\} \rightarrow P\{X \in A\}$ kelib chiqqani uchun **2.3.4-teoremaga** ko'ra

$X_n \xrightarrow{P} X$ yaqinlashishdan $X_n \xrightarrow{D} X$ yaqinlashish kelib chiqadi.

Fazolar ko'paytmasi. X' va $X'' + S'$ ning tasodifiy elementlari bo'lsin, X'' va X''_n lar esa S'' ning tasodifiy elementlari bo'lsin, X' va X'' lar umumiy aniqlanish

sohaga, X'_n va X''_n lar esa har bir n da umumiy aniqlanish sohaga ega bo'lib, S' va S'' lar separabel, (X', X'') va (X'_n, X''_n) lar $S' \times S''$ lar tasodifiy elementlari bo'lsin.

$$(X'_n, X''_n) \xrightarrow{D} (X', X'') \quad (2.3.25)$$

bo'ladigan shartlarni izlaymiz.

Agar $P\{X' \in A', X'' \in A''\} = P\{X' \in A'\} \times P\{X'' \in A''\}$ bo'lsa, X' va X'' lar ta'rifga ko'ra chiziqli bog'lanmagan. Agar X' va X'' lar chiziqli bog'lanmagan, har bir n da X'_n va X''_n lar chiziqli bog'lanmagan bo'lsa, u holda 2.3.2- teorema ko'ra (2.3.25) munosabat

$$X'_n \xrightarrow{D} X', X''_n \xrightarrow{D} X'' \quad (2.3.26)$$

ga ekvivalent. (2.3.25) munosabatdan (2.3.26) formula yordamida qurilgan fakt chiziqli bog'lanmaganlik sharti bo'lmasa ham o'rinli, lekin teskari tasdiq o'rinli emas. X' va X'' lar chiziqli bog'lanmagan, X'_n va X''_n lar esa chiziqli bog'lanmaganlikdan kuchsiz shartda o'rganamiz. Agar X' va X'' lar chiziqli bog'lanmagan bo'lib, X'_n va X''_n lar (2.3.25) shartni qanoatlantirsa, X'_n va X''_n larni asimptotik chiziqli bog'lanmagan miqdorlar sifatida qaraladi.

2.3.5-teorema ko'ra (2.3.25) munosabat faqat va faqat barcha X' - uzluksizlik A' to'plam va X'' - uzluksizlik A'' to'plami uchun

$$P\{X'_n \in A', X''_n \in A''\} \rightarrow P\{X' \in A', X'' \in A''\} \quad (2.3.27)$$

bajarilganda o'rinli bo'ladi.

2.3.6-teorema. Agar $X'_n \xrightarrow{D} X'$ va $X''_n \xrightarrow{P} a''$ bo'lsa, u holda $(X'_n, X''_n) \xrightarrow{D} (X', a'')$.

Isbot. X'' da aynan a'' ga teng (2.3.27) munosabatni tekshiramiz. Faraz qilaylik A' bu X' - uzluksizlik to'plami va $A'' - X''$ - uzluksizlik to'plami bo'lsin. Agar $a'' \in X''$ bo'lsa, u holda $P\{X''_n \notin A''\} \rightarrow 0$ va $X'_n \xrightarrow{D} X'$ hamda

$$P\{X'_n \in A'\} - P\{X''_n \notin A''\} \leq P\{X'_n \in A', X''_n \in A''\} \leq P\{X'_n \in A'\} \quad (2.3.28)$$

tengsizlikdan (2.3.27) kelib chiqadi.

Agar $a'' \notin A''$ bo'lsa, u holda

$$P\{X'_n \in A', X''_n \in A''\} \leq P\{X''_n \in A''\} \rightarrow 0 \quad (2.3.29)$$

munosabatdan (2.3.27) kelib chiqadi.

Quyidagi teoremda X''_n ketma- ketlik Y'' tasodifiy elementga ehtimollik bo'yicha yaqinlashuvchi bo'lib, Y'' o'zgarmas bo'lishi shart emas deb faraz qilamiz; bunda Y'' va barcha (X'_n, X''_n) lar umumiy (Ω, B, P) aniqlanish sohasiga ega bo'lsin. $\beta_o - \beta$ ni saqlovchi maydon, β_o ga tortilgan δ - maydonni $\delta(B_o)$ bilan belgilaymiz.

2.3.7-teorema. X' va X'' lar chiziqli bog'lanmagan bo'lib, X'' va Y'' lar bir xil taqsimotga ega bo'lsin. Agar $X'' \xrightarrow{P} Y''$, har bir X' - uzluksizlik A' to'plami va β_o maydondagi $\in$ to'plam uchun

$$P(\{X'_n \in A'\} \cap E) \rightarrow P\{X' \in A'\}P(E) \quad (2.3.30)$$

har bir X'_n element $\delta(\beta_o)$ - o'lchamli bo'lsa, u holda $(X'_n, X''_n) \xrightarrow{D} (X', X')$ bo'ladi.

Ta'kidlab o'tamizki, (2.3.30) shartdan $X'_n \xrightarrow{D} X'$ kelib chiqadi. (X', X'') ning aniqlanish sohasi Y'' niki bilan ustma-ust tushadi. Agar Y'' ning aniqlanish sohasi Y' niki bilan ustma-ust tushsa, u holda 2.3.1-teoremda (X', X'') ni (Y', Y'') ga almashtirish kerak.

Isbot. X' - uzluksizlik to'plami A' va X'' - uzluksizlik to'plami A'' ni fiksirlaymiz. (2.3.27) ni yoki

$$P\{X'_n \in A', X''_n \in A''\} \rightarrow P\{X' \in A'\}P\{Y'' \in A''\} \quad (2.3.31)$$

ni isbotlash kerak. $X''_n \xrightarrow{P} Y''$ bo'lgani uchun 2.3.4-teoremdan (2.3.31) va

$$P\{X'_n \in A', Y'' \in A''\} \rightarrow P\{X' \in A'\}P\{Y'' \in A''\} \quad (2.3.32)$$

kelib chiqadi. $E_n = \{X'_n \in A'\}$ va $\alpha = P\{X' \in A'\}$ belgilash olamiz. $\{Y'' \in A''\}$ ning indikatorini d bo'lsin. U holda (2.3.32) munosabat

$$\int_{E_n} gdP \rightarrow \alpha \int gdP \quad (2.3.33)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Har bir X'_n element $\delta(\beta_o)$ - ga tegishli.

(2.3.33) limitik munosabat $\forall$ intiluvchi g funksiya uchun o'rinli bo'lishini isbotlaymiz. Agar $g - \beta_o$ ga tegishli to'plamning indikatori bo'lsa, (2.3.33) va (2.3.30) lar ustma-ust tushgani uchun o'rinli. Agar g intiluvchi va $\delta(\beta_o)$ -o'lchamli bo'lsa, u holda $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun shunday sodda β_o -o'lchovli g_ε funksiya topilib, $E\{g - g_\varepsilon\} < \varepsilon$, biroq bu holda bunday g funksiyalar uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \int_{E_n} g dP - \alpha dP \right| \leq (1 + |\alpha|) E\{g - g_\varepsilon\} \quad (2.3.34)$$

va (2.3.33) lar bajariladi.

Nihoyat g funksiya β - o'lchovli va intiluvchi bo'lib, $\delta(\beta_o)$ - o'lchovli bo'lishi shart bo'lmasin. Shartli matematik kutilma xossasidan foydalanib $E_n \in \delta(\beta_o)$ dan

$$\int_{E_n} g dP = \int_{E_n} E\{g | \delta(\beta_o)\} dP \rightarrow \alpha \int E\{g | \delta(\beta_o)\} dP = \alpha \int g dP \quad (2.3.35)$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib, barcha intiluvchi g lar uchun (2.3.33) bajariladi.

Isbot tugadi.

Xulosa. II bob metrik fazolarda yaqinlashish deb nomlanadi. Dastlab yaqinlashish tushunchasi haqida ma'lumot berilgan bo'lib 1-paragrafda metrik fazolarda yaqinlashish tushunchasi bo'yicha ta'rif, teoremlar keltirilgan. 2-paragrafda esa uzluksiz akslantirishlar haqida bir qancha teoremlar natijalari bilan ko'rsatilgan. Kuchsiz yaqinlashish shartlari haqidagi teoremlar aytib o'tilgan. 3-paragrafda taqsimot bo'yicha yaqinlashish haqida yozilgan bo'lib, tasodifiy elementlar haqida tushunchalar berilgan. Taqsimot bo'yicha yaqinlashish va ehtimol bo'yicha yaqinlashishga oid ta'rif teoremlar aytib o'tilgan.

XOTIMA

va tushunarli qilib bayon etilgan.

Mazkur bitiruv malakaviy ishining mavzusi metrik fazolarda o'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishi deb nomlanadi. Bu bitiruv malakaviy ishi 2 ta bob 6 ta paragraf, 2 ta xulosa xotima va foydalanilgan adabiyotlardan iborat. I bob 3 ta qismdan iborat bo'lib, metrik fazolar deb nomlanadi. I bobning 1-paragrafida mavzuni yoritish davomida foydalaniladigan umumiy tushunchalar haqida ma'lumot berilgan. 2-3- paragraflarda esa metrik fazolarda esa metrik fazolarda o'lchovlar tushunchasi haqida ma'lumot keltirilib bazi xususiy hollar ya'ni aylana, yevklid fazosi, R^∞ fazo, C fazolar haqida umumiy tushunchalar keltirilgan. II bob ham 3 ta paragrafdan iborat bo'lib, II bob metrik fazolarda yaqinlashishlar deb nomlanadi. Metrik fazolarda yaqinlashish tushunchasi haqida ma'lumot berilib ta'riflar keltirilgan. 2-paragrafda kuchsiz yaqinlashish va akslantirishlar haqida so'z yuritilgan. 3-paragrafda esa taqsimot bo'yicha yaqinlashish tushunchasiga bag'ishlangan va II bob yuzasidan xulosa yuritilgan. Yuqoridagi boblarning barchasi ta'rif va teoremlar bilan boyitilgan. Bir qancha isbotlar keltirilgan. Shuningdek ushbu bitiruv malakaviy ishi xotima va foydalanilgan adabiyotlardan iborat bo'lib metrik fazolarda o'lchovlarning kuchsiz yaqinlashishning turli xil usullari o'rganilgan

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Karimov.I.A. Ona yutimiz baxt-u iqboli va buyuk kelajagi yo'lida xizmat qilish-eng oliy saodatdir. T.: "O'zbekiston"- 2015y 235-270 betlar;
2. Karimov.I.A. Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch. T.: "Ma'naviyat" 2010y 60-67 betlar;
3. O'zbekiston Respublikasining "Ta'lim to'g'risida"gi qonuni – T.: 1997 y.
4. O'zbekiston Respublikasining "Kadrlar tayyorlash to'g'risida"gi qonuni – T.:1997 y.
5. П. Билингсли. "Сходимость вероятностных Мер" Москва "Наука" 1977й. 15-81 бетлар.
6. Sh. A. Ayupov, M.A.Berdiqulov, R.M.Turg'unboyev "Funksiyalar nazariyasi" T.: 2004y 27-34 betlar.
7. T.A. Sarimsoqov. "Funksional analiz kursi" T.: "O'qituvchi" 1980y 23-32, 39-47 betlar.
8. *Серр Ж.-П.* Курс арифметики, — М.: Мир, 1972
9. *Rozikov U.A.* What are p -Adic Numbers? What are They Used for?. Asia Pacific Math. Newsletter, 2013.V.3, No.4., p.1-7
10. *Хренников А.Ю.* Неархимедов анализ и его приложения.—М.: Физматлит. 2003.