

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS  
TA'LIM VAZIRLIGI  
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

**Fizika- matematika fakulteti**

**“Matematika” kafedrası**

5130100-“Matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr  
darajasini olish uchun

**Qayumova Dilnoza Olimjon qizining**

**“Noarximed normalar va ularning qo'llanilishi”  
mavzusida**

**BITIRUV MALAKAVIY ISHI**

**“Ish ko'rildi va himoyaga ruxsat  
berildi”**

**Ilmiy rahbar: \_\_\_\_ Prof. U.A. Rozikov  
“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_ 2016 y.**

**Kafedra mudiri:**

\_\_\_\_ dots. R.T.Muxitdinov

**Taqrizchi \_\_\_\_ A.B.Atoev**

**“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_ 2016 y.**

**“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_ 2016 y.**

**“Himoya qilishga ruxsat berildi”**

**Fakultet dekani: prof. Sh. M. Mirzayev**

**“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_ 2016 y.**

**Buxoro – 2016**

## **Mundarija.**

|                                                 |           |
|-------------------------------------------------|-----------|
| <b>Kirish.....</b>                              | <b>3</b>  |
| <b>I. Bob Haqiqiy normalangan fazolar.</b>      |           |
| 1.1. No-Arximed sonlar maydoni.....             | 9         |
| 1.2. Ultrametrikalar.....                       | 19        |
| 1.3.p-adik sonlar maydoni .....                 | 22        |
| Xulosa.....                                     | 35        |
| <b>II. Bob No-Arximed normalangan fazolar .</b> |           |
| 2.1. No-Arximed normalangan fazo .....          | 36        |
| 2.2. No-Arximed fazolarning ba'zi tadbiqu.....  | 42        |
| Xulosa.....                                     | 48        |
| <b>Xotima.....</b>                              | <b>49</b> |
| <b>Adabiyotlar ro'yxati.....</b>                | <b>50</b> |

## **Kirish.**

“O‘z oldimizga qo‘yilgan yuksak vazifa va marralarga erishishda zamonaviy bilim va tarbiya sohibi bo‘lgan, yangicha fikrlaydigan yoshlarimiz siz u bizning asosiy tayanchimiz va suyanchimiz.”

### **Islom Abdug‘aniyevich Karimov**

Prezident I.A.Karimov Milliy dastur to‘g‘risidagi o‘z nutqida hayotimizni hal etuvchi muhim masalalar qatorida ta‘lim – tarbiya tizimini tubdan o‘zgartirish uni yangi zamon talabi darajasiga ko‘tarish, barkamol avlodimiz kelajagiga daxldor qonun loyihalari ham bor”, - degan edi.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturi inson omiliga juda katta ma‘no beradi. Maqsad va vazifalar strategiyasidan tortib to ta‘lim –tarbiya jarayonining hamma qirralariga oid aniq dasturlar majmuasigacha har biri negizida inson asosiy omili hisoblanadi.

Shaxsning o‘qimishliligi va uning yaratuvchanlik malakasi Milliy dasturni amalga oshirishning asosiy natijasi bo‘lmog‘i darkor.

Prezident I.A.Karimov “faqatgina chinakkam ma‘rifatli odam inson qadrini, millat qadriyatlarini bir so‘z bilan aytganda o‘zligini anglash, erkin va ozod jamiyatda yashash, mustaqil davlatimizning jahon hamjamiyatida o‘ziga munosib obro‘li o‘rin egallashi uchun fidoiylilik bilan kurashishi mumkin“, -deb ta‘kidlagan edi.

Kelajak avlod haqida qayg‘urish, sog‘lom, barkamol naslning tarbiyalab yetishtirishga intilish bizning milliy xususiyatimizdir.

Siz, aziz farzandlarimiz, biz boshlagan ishlarning davomchisi sifatida oldimizga qo‘ygan maqsad – hech kimdan kam bo‘lmaydigan, ozod va obod demokratik jamiyat qurishda ertaga asosiy hal qiluvchi kuch bo‘lib maydonga chiqayotganingizni chuqur his etib, zamonaviy taraqqiyot, zamonaviy bilim sirlarini egallashga albatta qodir bo‘lishingiz kerak.

Ma`naviyatni shakllantirishga bevosita ta`sir qiladigan yana bir muhim hayotiy omil – bu ta`lim – tarbiya tizimi bilan chambarchas bog`liqdir.

Ma`lumki, ota-bobolarimiz qadimdan bebaho boylik bo`lmish ilmu ma`rifat, ta`lim va tarbiyani inson kamoloti va millat ravnaqining eng asosiy sharti va garovi deb bilgan.

Albatta, ta`lim – tarbiya – ong mahsuli, lekin ayni vaqtda ong darajasi va uning rivojini ham belgilaydigan, ya`ni, xalq ma`naviyatini shakllantiradigan va boyitadigan eng muhim omildir. Binobarin, ta`lim-tarbiya tizimini va shu asosda ongni o`zgartirmasdan turib, ma`naviyatni rivojlantirib bo`lmaydi.

Shu bois bu sohada yuzaki, rasmiy yondashuvlarga, puxta o`ylanmagan ishlarga mutlaqo yo`l qo`yob bo`lmaydi. Maktab, ta`lim – tarbiya masalasi davlat va jamiyat nazoratida bo`lishi Asosiy qonunimizda belgilab qo`yilgan. Shu bilan birga bu keng jamoatchilik, butun xalqimizning ishtiroki va qo`llab – quvvatlashini talab qiladigan umummilliy masaladir.

Farzandlarimiz bizdan ko`ra kuchli, bilimli, dono va albatta baxtli bo`lishlari shart! Farzandlarimiz – bizning kelajagimiz. Xalqimiz ertasining qanday bo`lishi farzandlarimizning bugun qanday ta`lim va tarbiya olishiga bog`liq. Mening eng katta ishonchim va umidim - bugun zamonaviy bilim va tarbiya olishiga bog`liq. Yoshlarning ma`naviy uyg`oqligi millatni g`aflatdan asraydigan asosiy omillardan biridir. Biz yoshlarimizni hech kimning qo`liga bermaymiz! Ularni o`zimiz tarbiya qilamiz! Jondan aziz vatanimizning taqdiri, kelajagimiz bugun unib-o`sib kelayotgan yosh avlodga, uning jismoniy va ma`naviy kamolotiga bog`liq. Bizning eng katta ishonchimiz, madad – tayanchimiz - bu o`sib kelayotgan yosh avlodimizdir. Sog`lom avlodni tarbiyalash - buyuk davlat poydevorini, farovon hayot asosini qurish, demakdir. Bizning ishlarimizga kimki baho bermoqchi bo`lsa, bugungi yoshlarimizga, ularning ongi va dunyoqarashiga boqsin. Bizning ishonchimiz va tayanchimiz bo`lmish yoshlarimizga yanada keng yo`l ochib berish, farzandlarimizni zamonaviy bilim va tajribaga, o`z mustaqil fikriga ega bo`lgan, ma`naviy yuksak komil insonlar etib tarbiyalash, ularning jamiyatimizda

mustahkam va munosib joy olishi yo`lida zarur shart – sharoitlarni yaratib berish barchamizga ham qarz, ham farz. Farzandlarimiz, yoshlarimiz bizning nafaqat ishonchimiz va kelajagimiz, yoshlarimiz bugungi va ertangi kunimizning hal qiluvchi kuchidir. Farzandlarimizga nafaqat ishonch bildirish, balki ularga o`zini namoyon etishi uchun maydonni kengaytirish kerak. Biz iste`dodli, fidoyi bolalarimizga bilim va kasb cho`qqilarini zabt etishi uchun qanot berishimiz kerak. Yoshlar tarbiyasi, barkamol avlod deganda, biz O`zbekistonning buyuk kelajagini nazarda tutamiz. Bolalarimizning qalbida go`zallik va ezgulikka intilishni kuchaytirish va shu asosda jamiyatimizning madaniy saviyasini oshirish – biz uchun ustuvor vazifa. O`z aql – zakovatingiz, bilim va tafakkuringiz, kuch – g`ayratingizga, tog`dek tayanchingiz – buyuk Vataningizga suyanib, marrani katta oling, aziz farzandlarim! Marrani doimo baland olib yashang, ertangi kun bizniki, sizdek shijoatli yoshlarimizniki! Shuni unutmangki, kelgusida erishadigan har bir g`alabangiz – yurtimiz g`alabasi, O`zbekiston g`alabasidir! Toki yuragingizda o`t, bilagingizda kuch – qudrat bor ekan, O`zbekiston jahon hamjamiyatida o`z o`rnini egallab borayotgan bugungi kunda “ Biz kimmiz, kimlarning avlodimiz?” degan da`vatga hamisha munosib bo`ling.

Shuni unutmashimiz kerakki, kelajagimiz poydevori bilim dargohlarida yaratiladi, boshqacha aytganda, xalqimizning ertangi kuni qanday bo`lishi farzandlarimizning bugun qanday ta`lim va tarbiya olishiga bog`liq. Buning uchun har qaysi ota – ona, ustoz va murabbiy har bir bola timsolida avvalo shaxsni ko`rishi zarur. Anashu oddiy talabdan kelib chiqqan holda, farzandlarimizni mustaqil va keng fikrlash qobiliyatiga ega bo`lgan, ongli yashaydigan komil insonlar etib voyaga yetkazish – ta`lim – tarbiya sohasining asosiy maqsadi va vazifasi bo`lishi lozim, deb qabul qilishimiz kerak. Bu esa ta`lim va tarbiya ishini uyg`un holda olib borishni talab etadi.

Ta`limni tarbiyadan, tarbiyani esa ta`limdan ajratib bo`lmaydi – bu sharqona qarash, sharqona hayot falsafasi.

Bu haqda fikr yuritganda, men Abdulla Avloniyning “Tarbiya biz uchun yo hayot – yo mamot, yo najot – yo halokat, yo saodat – yo falokat masalasidir ” degan chuqur ma`noli so`zlarini eslayman. Buyuk ma`rifatparvar bobomizning bu so`zlari o`tgan asr boshida millatimiz uchun qanchalar muhim va dolzarb bo`lgan bo`lsa, hozirgi vaqtda ham biz uchun shunchalik, balki undan ham ko`ra muhim va dolzarb ahamiyat kasb etadi.

Ta`lim – tarbiya tizimidagi islohotlar boshlangan dastlabki yillarda men jahon tajribasi va hayotda o`zini ko`p bor oqlagan haqiqatdan kelib chiqib, agar bu maqsadlarimizni muvaffaqiyatli ravishda amalga oshira olsak, tez orada hayotimizda ijobiy ma`nodagi “portlash effekti” ga, ya`ni, yangi ta`lim modelining kuchli samarasiga erishamiz, degan fikrni bildirgan edim.

Darhaqiqat, istiqlol davrida barpo etilgan, barcha shart-sharoitlarga ega bo`lgan akademik litsey va kasb-hunar kollejlari, oily o`quv yurtlarida tahsil olayotgan, zamonaviy kasb-hunar va ilm-ma`rifat sirlarini o`rganayotgan, hozirdanoq ikki – uch tilda bimalol gaplasha oladigan ming-minglab o`quvchilar katta hayotga kirib kelayotgan, o`z iste`dodi va salohiyatini yorqin namoyon etayotgan yosh kadrlarimiz misolida ana shunday orzu-intilishlarimiz bugunning o`zida o`z hosilini berayotganining guvohi bo`lmoqdamiz.

Muxtasar qilib aytganda, oxirgi yillarda ta`lim-tarbiya sohasida amalga oshirgan, ko`lami va mohiyatiga ko`ra ulkan ishlarimiz biz ko`zlagan ezgu niyatlarimizga erishish, hech kimdan kam bo`lmaydigan hayot barpo etish, yoshlarimiz, butun xalqimizning ma`naviy yuksalishi yo`lida mustahkam zamin yaratdi, desak, hech qanday xato bo`lmaydi.

**Bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligi:** O`tgan asr matematikasi asosan haqiqiy sonlar va ular ustida aniqlangan fazolar (xususan, haqiqiy qiymatli normalar) bilan ishlagan. Zamonaviy ilm fanda esa, no-arximed fazolar bilan ishlash zaruriyati tug`ildi. Bunga sabab, fizik va biologik sistemalarning ko`pchiligini haqiqiy sonlar tilida modellashtirib bo`lmasligidadir. No-Arximed normalangan fazolarda, Arximedning aksiomasi bajarilmaydi, yani

har qanday katta kesmani biror kichik kesmaning bir nechitasi orqali qoplab bo'lmaydi. Bunday fazolarda geometrik shakl ko'proq daraxt ko'rinishga ega. Zamonaviy matematika, bu fazolarni o'rganish dolzarb ekanini isbotladi. Shu sababli, hozirgi kunda no-arximed analiz, no-arximed extimollar nazariyasi, no-arximed matematik fizika va boshqa yo'nalishlar jadal rivojlanmoqda.

**Tadqiqot obyekti va predmeti:** No-Arximed normalar va ularning qo'llanilishi. Bu maydonda berilgan no-arximed fazolar.

**Ishning maqsad va vazifalari:** Ishda ko'zlangan asosiy maqsad talabaning universitet kurslarida o'tilmaydigan yangi mavzuni o'rganishi. Bu mavzu zamonaviy no-arximed normalar nazariyasining bir qismidir. Talabaga qo'yilgan vazifalar: no-arximed sonlar maydoni, no-arximed normalangan fazo mavzusi haqida bilim, ko'nikmalar hosil qilish. Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega, unda oliy o'quv yurtlarida matematika yo'nalishi iqtidorli talabalari va magistrnlarni bilimini tekshirishda foydalanish mumkin.

**Tadqiqoy usuli va uslubi:** Ish referativ xarakterga ega bo'lgani sababli unda no-arximed normadagi ma'lum metodlar va usullar o'raniladi.

**Olingan asosiy natijalar:** No-Arximed sonlar maydoni, no-arximed normalangan fazolar o'rganildi. Asosiy natijalar shuki no-arximed normalangan fazolar kiritilishidan oldin biz no-arximed sonlar maydoni, normalangan fazo ta'rif va uning ba'zi xossalari, ultrametrikalarni kiritib, so'ngra bu asosiy tushunchalar orqali no-arximed normalangan fazo qurildi. No-Arximed sonlar maydonini o'rganish uchun ta'rif, teorema va lemmalar o'rganildi.

**Natijalarning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati:** Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterda bo'lib, bu nazariyalar universitetda matematik analiz va funksional analiz kurslaridan o'rgangan nazariyalar davomi bo'lib hisoblanadi. Ishda ilmiy yangilik yo'q, faqat bor nazariyani o'rganish maqsadida qilingan.

**Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi, qo'llanilish sohasi.**

**Xulosa va takliflar**

No-Arximed normalangan fazolar, matematika (xususan ultrametrikada), biologiya (xususan DNK shaklini o'rganishda), fizika (faza almashishlar, to'lqin tarqalishi) va boshqa sohalarda keng qo'llanilmoqda.

**Ishning hajmi va tuzilishi:** Bitiruv malakaviy ish kirish, ikkita bob va 5 ta mavzudan iborat. I bob uchta mavzuni o'z ichiga olib, bu bobda bosh obyektni kiritamiz. Ya'ni no-arximed sonlar maydoni, ultrametrikalar, p-adik sonlar maydoni kabi tushunchalar kiritildi. II bob ikkita mavzuni o'z ichiga olib, bu mavzular bitiruv malakaviy ishi mavzusining asosiy qismi bo'lib hisoblanadi. Bu bobda no-arximed normalangan fazo, no-arximed fazolarning ba'zi tatbiqi kabilar o'rganildi.

## I BOB

### Haqiqiy normalangan fazolar.

#### 1.1. No-Arximed sonlar maydoni.

$K$  orqali notrivial absolyut qiymat  $|\cdot|_k$  kiritilgan to'la no-arximed maydonini belgilaymiz.  $K$  xarakteristika nolga teng holni qaraymiz.

$F$  maydon bo'lsin. Absolyut qiymat bu

$$|x|_F \Leftrightarrow x = 0 \quad (1.1.1)$$

$$|xy|_F = |x|_F = |y|_F \quad (1.1.2)$$

$$|x + y|_F \leq |x|_F + |y|_F \quad (1.1.3)$$

shartni qanoatlantiruvchi  $|\cdot|: F \rightarrow R_+$  akslantirishdir.

Oxirgi tengsizlik uchburchak tengsizligi nomi bilan mashhurdir. Agar

$$|x + y|_F \leq \max(|x|_F, |y|_F) \quad (1.1.4)$$

kuchaytirilgan uchburchak tengsizligi o'rinli bo'lsa, unga noarximed absolyut qiymati deyiladi.

No-Arximed absolyut qiymat kiritilgan  $F$  maydonga no-arximed maydon deyiladi. Absolyut qiymat noarximed bo'lishi uchun birlik elementi  $F$  maydonga tortilgan halqadagi barcha  $n$  elementar uchun  $|n|_F \geq 1$  bo'lishi zarur va yetarli. Bu kuchaytirilgan uchburchak tengsizligi

$$|x + y|_F \leq \max(|x|_F, |y|_F)$$

dan kelib chiqadi.

Shunday qilib, agar  $l$  va  $L$  lar  $K$  ga tegishli  $|l|_k < |L|_k$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi nolmas elementlar bo'lsa, u holda shunday  $n$  natural son topilib  $|nl|_k > |L|_k$  bo'ladi. Ikkinchi tomondan, agar  $l$  va  $L$  lar  $R$  ga tegishli elementlar bo'lsa, u holda hamisha shunday  $n$  natural son topilib,  $|nl| > |k|$  bo'ladi, bu yerda  $|\cdot| \equiv |\cdot|_R$  -  $R$  dagi odatdagi absolyut qiymat. Demak, kuchaytirilgan uchburchak tengsizligi  $|x + y|_F \leq \max(|x|_F, |y|_F)$  ni o'lchashlar nazariyasidagi no-arximed aksiomasining matematik takomillashtirish usullaridan biridir.

**1.1.1.Eslatma.**  $K$  maydon xarakteristikasi nolga teng bo'lganda natural sonlar to'plamini  $K$  to'plamning qism to'plami sifatida qarash mumkin. Bu tasdiq  $Q$  ratsional sonlar to'plami uchun ham o'rinli. Kelgusida  $Q$  ni  $K$  maydonning qism maydoni deb hisoblaymiz.

Agar barcha  $x \neq 0$  larda  $|x|_F = 1$  bo'lsa,  $F$  maydondagi  $|\cdot|_F$  absolyut qiymatga trivial deyiladi.

$F$  maydondagi absolyut qiymat- bu  $R^*$  multiplikativ gruppani  $F^*$  multiplikativ gruppaga gomomorfizmidir.

$K$  ning bu gomomorfizmga nisbatan obrazi  $\Gamma$  bo'lsin. U holda  $\Gamma - R^*$  dagi qism gruppaga bo'ladi.  $R \in \Gamma$  skalyar qiymat uchun  $a_R$  orqali  $|a_R|_K = R$  bo'ladigan  $K$  maydonning istalgan elementini belgilaymiz.

Istalgan absolyut qiymat biror metrikani aniqlaydi.  $K$  maydonning to'laligi -bu  $\rho_k(x, y) = |x - y|_k$  metrikaga nisbatan to'lalidir. Agar absolyut qiymat  $K$  da no-arximed bo'lsa, u holda unga mos metrika bir nechta noodatiy xossalarga ega.

$Q_p$  -  $p$  adik maydon-no-arximed maydon bo'ladigan muhim misollardan biridir.  $R$  - haqiqiy sonlar maydoni kabi  $Q$  ratsional sonlar maydonining kengaytmasi bo'ladi. Lekin odatdagi absolyut qiymat norma o'rniga  $p$  adik deb ataluvchi  $|\cdot|_p$  ni qaraymiz. Bu yerda  $p$  fiksirlangan tub son,  $p = 2, 3, \dots$ . Har bir  $p$  uchun mos  $Q_p$  ni qurish mumkin.  $|\cdot|_p$  ni natural sonlar to'plamida aniqlash yatarli.  $n$  natural sonni  $n = 2^{V_1} 3^{V_2} \dots p^{V_p}$  kabi tasvirlaymiz, bu yerda  $V_j = 0, 1, 2, \dots$ . U holda ta'rifga ko'ra  $|n|_p = p^{-V_p}$ . Bunda  $|0|_p = 0$ . Agar  $x = n/m$  bo'lsa, bu yerda  $n$  va  $m$  natural sonlar, u holda ta'rifga ko'ra  $|x|_p = |n|_p / |m|_p$ .

Masalan,  $|3|_2 = 1$ ,  $|4|_2 = 2^{-2}$ ,  $|3/2|_2 = 2$ ,  $|3|_3 = 3^{-1}$ ,  $|4|_3 = 1$ ,  $|3/2|_3 = 3^{-1}$ . Xususan, agar ratsional son  $x = n/m$  kabi tasvirlansa, bu yerda  $n$  va  $m$  lar  $p$  ga bo'linmaydigan butun sonlar, u holda  $|x|_p = 1$ . Shunday qilib,  $Q$  fazodagi nuqtalar orasidagi  $p$  - adik masofa haqiqiy masofadan farq qiladi.

Agar  $|x|_\alpha = |x|_\beta^c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$  bo'lsa,  $|\cdot|_\alpha$  va  $|\cdot|_\beta$  absolyut qiymatlar ekvivalent deyiladi.

**1.1.1-teorema (Ostrovskiy).**  $Q$  maydondagi ixtiyoriy notrivial absolyut qiymat yo haqiqiy  $|\cdot|$  ga yoki biror  $p$ -adik  $|\cdot|_p$  ga ekvivalent.

No-Arximed holida  $1/|n|_K$  o'suvchi funksiya. Quyida o'sishning baholashi kerak bo'ladi. Bu baholashni  $Q_p$  maydon uchun keltiramiz:

$$(1/np)p^{n/(p-1)} \leq \frac{1}{|n|_p} \leq p^{(n-1)/(p-1)}$$

Ostrovskiy teoremasiga ko'ra  $p = p(K)$ ,  $l = l(K) > 0$ . Bundan eksponensial baho

$$a^n \leq \frac{1}{|n|_K} \leq b^n \quad (1.1.5)$$

kelib chiqadi, bu yerda ixtiyoriy  $K$  no-arximed maydon uchun  $a = a(p, l)$  va  $b = b(p, l)$ . Katta  $n$  lar uchun  $1/|n|_K \sim p^{n/(p-1)}$  asimptotikadan foydalanamiz.

Kuchaytirilgan uchburchak tengsizligi bir nechta muhim natijalarga ega.

**1.1.2-teorema (Yomon talabani orzusi).**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n \in K$  qator  $K$  da yaqinlashuvchi bo'lishi uchun  $a_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  bo'lishi zarur va yetarli.

Bu teoremani isbotlash uchun Koshi teoremasini to'la metrik fazo uchun qo'llash kerak.

Masalan,

$$1 + p + p^2 + \dots + p^n + \dots$$

qator  $Q_p$  da yaqinlashuvchi, chunki  $|p^n|_p = p^{-n} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Qator yig'indisi odatdagi kabi chekli yig'indilar limiti sifatida aniqlanadi:  $S = 1/(1-p)$ .

Quyidagi tasdiq ham kuchaytirilgan uchburchak tengsizligi natijasidir. U ba'zi baholashlarda va hisoblashlarda muhimdir.

**1.1.1-tasdiq.**  $x, y \in K$  bo'lsin. U holda  $|x|_K \neq |y|_K$  ekanligidan

$$|x + y|_K = \max(|x|_K, |y|_K)$$

kelib chiqadi.

**1.1.1-ta'rif.**  $V$  vektor fazo bo'lib,  $p$  funksional  $V$  ni to'g'ri chiziqli aks ettirsin.  $p$  funksional ushbu shartlarni qanoatlantirsa, u norma deyiladi.

$$1) \quad p(x) \geq 0; \text{ faqat } x = \theta \text{ uchun } p(x) = 0$$

$$2) \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y);$$

$$3) \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \quad \lambda - \text{son.}$$

Norma kiritilgan vektor fazo normalangan fazo deyiladi.  $x$  elementning  $p(x)$  normasi odatda  $\|x\|$  bilan belgilanadi. Agar  $p(x, y)$  bilan  $\|x - y\|$  sonni belgilasak,  $p(x, y)$  metrika ekanligi bevosita ko'rinib turibdiki. Demak, har qanday normalangan fazo metrik fazodir.

### Misollar.

1.  $\lambda$  haqiqiy son uchun  $\|\lambda\| = |\lambda|$  deb olsak, u holda  $R$ , ya'ni to'g'ri chiziqli normalangan fazo bo'ladi.

2.  $n$  o'lchamli  $R^n$  haqiqiy fazoda  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  element uchun Yevklid normasini quyidagicha kiritamiz:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \quad (1.1.6)$$

Bunda normaning 1) va 3) shartlari bajarilishi ravshan, 2) shart esa

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

Shu  $R^n$  fazoning o'zida quyidagi normalarni ham kiritish mumkin:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad (1.1.7)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \quad (1.1.8)$$

$n$  o'lchamli  $C^n$  kompleks fazoda ham (1.1.6), (1.1.7) va (1.1.8) kabi normalarni ko'rish mumkin.

3.  $C[a, b]$  fazoda normani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

Ravshanki bu norma uchun ham 1) va 3) shartlar bevosita bajariladi. 2) shartlar bajarilishini ko'rsatamiz. Har qanday  $t \in [a, b]$  nuqta va  $f, g$  funksiyalar uchun quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$|(f+g)(t)| = |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |g(t)| = \|f\| + \|g\| \quad t$$

ixtiyoriy bo'lgani uchun

$$\|f+g\| = \max_{a \leq t \leq b} |(f+g)(t)| \leq \|f\| + \|g\|$$

4.  $m$  vektor fazoda  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  elementning normasi deb ushbu

$$\|x\| = \sup_{1 \leq n \leq \infty} |x_n|$$

songa aytamiz. Normaning aksiomalari bevosita tekshiriladi.

Normalangan  $V$  fazoning  $V_0$  vektor qism fazosi yopiq bo'lsa, u holda  $V_0$  ni normalangan  $V$  fazoning qism fazosi deyiladi.

Uchinchi misoldagi  $C[a, b]$  fazoda  $P(x)$  ko'phadlar to'plami yopiq bo'lmagan vektor qism fazodir, demak, normalangan fazo ma'nosida  $P(x)$  fazo  $C[a, b]$  ning qism fazosi emas.

Normalangan  $V$  fazoda  $A$  to'plamning chiziqli qobig'i bo'lgan  $L(A)$  vektor qism fazoni olamiz.  $L(A)$  ning yopilmasi  $A$  to'plamning yopilmasi deyiladi va  $\overline{L(A)}$  bilan belgilanadi. Agar  $\{x_\alpha\}$  sistemaning chiziqli yopilmasi  $V$  fazoga teng bo'lsa, u holda  $\{x_\alpha\}$  to'la sistema deyiladi.

Yuqorida aytib o'tganimizdek, normalangan fazolar metrik fazolarning xususiy holidir. Demak, bunday fazolarning to'la yoki to'la emasligi haqida gap yuritish mumkin. Norma yordamida fazoning to'laligi quyidagicha ifodalanadi:

Ushbu  $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$  shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ketma-ketlik uchun shunday  $x_0 \in E$  element mavjudki,  $x_n \rightarrow x_0$  munosabat bajariladi.

To'la normalangan fazo Banax fazosi yoki  $B$ -fazo deyiladi va normalangan fazolar ichida muhim rol o'ynaydi. Yuqoridagi  $R, R^n, C[a, b]$ ,  $m$  fazolar Banax fazolaridir. Yana misollar ko'ramiz:

5.  $C^2[a, b]$  fazoda normani quyidagicha kiritamiz:

$$\|x\| = \left( \int_a^b x^2(t) dt \right)^{1/2}$$

Norma aksiomalari bevosita tekshiriladi

6.  $l_2$  fazoda normani

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} \quad x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

ko'rinishida kiritsak,  $l_2$  fazo  $B$ -fazoga misol bo'ladi.

$V$  normalangan fazo bo'lib,  $\hat{V}$  fazo  $V$  ni o'z ichiga oluvchi  $B$ -fazo bo'lsin. Agar  $V$  fazo  $\hat{V}$  ning hamma yerida zich bo'lsa, u holda  $\hat{V}$  fazo  $V$  ning to'ldiruvchisi deyiladi.

**1.1.3-teorema.** Ixtiyoriy normalangan fazo yagona to'ldiruvchiga ega.

Isbot. Metrik fazolarning to'ldiruvchi fazosi haqidagi teoremaga asosan  $V$  ning to'ldiruvchisi bo'lgan  $\hat{V}$  metrik fazo mavjud. Biz shu metrik fazoga  $V$  dagi algebraik amallarni davom ettirishimiz kerak.  $\hat{V}$  ning  $x, y$  elementlariga yaqinlashuvchi bo'lgan va  $V$  fazoning elementlaridan iborat  $\{x_n\}$  va  $\{y_n\}$  ketma-ketliklarni olamiz va  $z_n = x_n + y_n$  elementlarni tuzamiz,  $n = 1, 2, \dots$ . Ushbu

$$\|z_n - z_m\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

munosabatdan  $\{z_n\}$  ketma-ketlikning fundamental ekanligi ko'rinib turibdi.

Demak,  $z_n$  ketma-ketlik  $\hat{V}$  fazodagi biror  $z$  elementga yaqinlashuvchidir, ya'ni  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ . Bu  $z$  elementni  $x$  va  $y$  elementlarning yig'indisi deymiz, ya'ni  $z = x + y$ . Aniqlangan  $z$  element  $\{x_n\}$  va  $\{y_n\}$  ketma-ketliklarga bog'liq emas. Darhaqiqat, agar  $\{x_n\}, \{y_n\}$  mos ravishda  $x$  va  $y$  elementlarga yaqinlashuvchi

boshqa ketma-ketliklar bo'lsa, u holda  $z'_n = x'_n + y'_n$  uchun  $\|z_n - z'_n\| \leq \|x_n - x'_n\| + \|y_n - y'_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n$ .

Shunga o'xshash  $\hat{V}$  metrik fazoda songa ko'paytirish amalini kiritish mumkin. Bevosita ko'rinib turibdiki,  $\hat{V}$  fazoda kiritilgan algebraik amallar  $V$  fazoda ko'rilsa, undagi berilgan amallar bilan ustma-ust tushadi.

Shunday qilib,  $\hat{V}$  vektor fazoga aylantiriladi. Endi  $x \in \hat{V}$  element uchun normani ushbu

$$\|x\| = p(x, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| (x_n \rightarrow x, x_n \in V)$$

ko'rinishda aniqlasak,  $\hat{V}$  normalangan fazo bo'ladi.  $V$  fazo  $\hat{V}$  ning vektor qism fazosini hosil qiladi.

Kiritilgan norma  $\hat{V}$  fazoda metrikani hosil qilgani uchun  $\hat{V}$  fazo  $V$ -fazodir va  $V$  uning hamma yerida zichdir, ya'ni  $\hat{V}$  fazo normalangan  $V$  fazoning to'ldiruvchisi. Nixoyat, to'ldiruvchi fazoning yagonaligini isbotlaymiz.

Demak,  $\hat{V}$  fazodagi algebraik amallarning yagonaligini isbotlasak bas. Bu esa amallarning uzliksizligidan kelib chiqadi. Darhaqiqat, yig'indi  $z = x_{+1}y$  va  $z = x_{+2}y$  ko'rinishlarda aniqlangan bo'lsin. U holda  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$  ( $x_n, y_n \in V$ ) munosabatdan  $x_n + y_n \rightarrow x_{+1}y$  va  $x_n + y_n \rightarrow x_{+2}y$ . yaqunlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega bo'lgani uchun  $x_{+1}y \rightarrow x_{+2}y$ .

Shunga o'xshash, songa ko'paytirish amalining yagonaligi ko'rsatiladi.

Banax fazosiga muxim bir misol ko'ramiz.  $X$  kompakt topologik fazo bo'lib  $C(X)$  fazo  $X$  da aniqlangan uzluksiz kompleks funksiyalar fazosi bo'lsin. Ravshanki,  $C(X)$  vektor fazodir. Bu fazoda normani quyidagicha kiritamiz:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

**1.1.4-teorema.**  $C(X)$  fazo kiritilgan normada Banax fazosidir.

Isbot.  $\{f_n(x)\}$  fundamental ketma-ketlik bo'lsin. Ya'ni ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $N$  natural son topiladiki, ixtiyoriy  $m, n \geq N$  uchun ushbu

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (1.1.9)$$

tengsizlik hamma  $x$  nuqtalarda bajariladi.  $x \in X$  nuqta tayinlansa,  $\{f_n(x)\}$  sonli ketma-ketlik fundamentaldir, demak,  $\{f_n(x)\}$  biror  $f(x)$  songa yaqinlashadi. Yuqoridagi (1.1.9) tengsizlikda  $m$  bo'yicha limitga o'tsak,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \text{ ya'ni} \quad \|f_n - f\| \leq \varepsilon$$

munosabat hosil bo'ladi. Demak,  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  ketma-ketlik  $f(x)$  funksiyaga yaqinlashadi.  $f(x)$  ning uzluksizligini isbotlash kifoya. Ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $m$  son topiladiki,  $\|f - f_m\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  tengsizlik o'rinli bo'ladi.  $m$  sonini tayinlab olsak,  $f_m(x)$  funksiya ixtiyoriy  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'ladi,  $x_0$  nuqtaning shunday  $U_{x_0}$  atrofi topiladiki, ixtiyoriy  $x \in U_{x_0}$  nuqtada  $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, ixtiyoriy  $x \in U_{x_0}$  nuqtada quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| \leq \|f - f_m\| + \frac{\varepsilon}{3} + \\ \|f - f_m\| &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ya'ni  $f(x)$  uzluksiz funksiya.

**1.1.5-teorema (Askoli teoremasi).**  $\Phi \subset C(X)$  funksiyalar to'plami uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

a) ixtiyoriy  $x \in X$  uchun  $\sup\{|f(x)| : f \in \Phi\} < \infty$ ;

b) ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun har bir  $x \in X$  nuqtaning shunday  $V$  atrofi topiladiki, ushbu

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik istalgan  $y \in V$  va  $f \in \Phi$  uchun bajariladi, ya'ni  $\Phi$  tekis darajada uzluksiz.

U holda  $\Phi$  to'plam  $C(X)$  Banax fazosida nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. Endi  $\Phi$  ning to'la chegaralanganligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  olamiz.  $X$  fazo kompakt bo'lgani uchun shunday  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  nuqtalar mavjudki, ularning b) xossadagi  $V_1, V_2, \dots, V_n$  atroflarning yig'indisi  $X$  gat eng, ya'ni  $X = \bigcup_{i=1}^n V_i$  va

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \quad (f \in \Phi, x \in V_i, i \leq n). \quad (1.1.10)$$

Bu tengsizlikdan va a) shartdan  $\Phi$  to'plamning tekis chegaralanganligi, ya'ni

$$\sup\{|f(x)| : x \in X, f \in \Phi\} = M < \infty \quad (1.1.11)$$

kelib chiqadi.

$D$  to'plamni quyidagicha aniqlaymiz:

$$D = \{\lambda \in C : |\lambda| \leq M\}.$$

Har bir  $f \in \Phi$  funksiyaga  $p(f) \in D^n \subset C^n$  nuqtani mos qo'yamiz, bu yerda

$$p(f) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)).$$

$D^n$  to'plam  $C^n$  fazoda chegaralangan, demak, u to'la chegaralangan. Ya'ni shunday  $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Phi$  funksiyalar topiladiki, har bir  $p(f)$  biror  $p(f_k)$  nuqtadan  $\varepsilon$  dan kichik masofada joylashgan. Demak, ixtiyoriy  $f \in \Phi$  uchun shunday  $k$  topiladiki ( $1 \leq k \leq m$ ),

$$|f(x_i) - f_k(x_i)| < \varepsilon.$$

$X$  fazoning har bir  $x$  nuqtasi biror  $V_i$  ichida joylashgan, demak, shu  $i$  uchun

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \quad \text{va} \quad |f_k(x) - f_k(x_i)| < \varepsilon.$$

Bulardan

$$|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_k(x)| < 3\varepsilon.$$

Demak, ixtiyoriy  $\varepsilon$  uchun chekli  $3\varepsilon$  to'r mavjud, ya'ni  $\Phi$  to'la chegaralangan.

**1.1.2-ta'rif.** Biror  $V_1, V_2$  normalangan fazolar orasida :  $V_1 \rightarrow V_2$  chiziqli izomorfizm mavjud bo'lsin. Agar fazolardagi normalaga nisbatan  $u$  va  $u^{-1}$  uzluksiz bo'lsa, u holda  $u$  normalangan fazolarning izomorfizmi deyiladi.  $V_1$  va  $V_2$  fazolar esa izomorf normallangan fazolar deyiladi.

**1.1.6-teorema.** Ixtiyoriy haqiqiy (kompleks)  $n$  o'lchamli normalangan fazo Yevklid normali  $R^n(C^n)$  fazoga izomorfdir.

Isbot. Teoremani haqiqiy fazolar uchun isbotlaymiz (kompleks holda isboti shunga o'xshash).  $V$  normalangan fazo  $n$  o'lchamli bo'lib,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  undagi bazis bo'lsin. Bu fazoning ixtiyoriy  $x$  elementi ushbu

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$$

ko'rinishga ega;  $\xi_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$ . Bunday  $x$  elementga  $R^n$  fazodagi

$$u(x) = \bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

elementni mos qo'yamiz. Natijada hosil bo'lgan  $u: V \rightarrow R^n$  moslik chiziqli izomorfizm ekanligi ravshan. Demak,  $u$  va  $u^{-1}$  uzluksiz ekanligini isbotlash kerak.

Ixtiyoriy  $x \in V$  uchun

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i| \|x_i\| \leq \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{1/2} = \beta \|u_i(x)\|,$$

bu yerda  $\beta = \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2}$ . Xususan, ixtiyoriy  $x, y \in V$  uchun

$$\|x - y\| \leq \beta \|u(x) - u(y)\|,$$

ya'ni

$$\|u^{-1}(\bar{x}) - u^{-1}(\bar{y})\| \leq \beta \|\bar{x} - \bar{y}\|.$$

Demak,  $u^{-1}: R^n \rightarrow V$  uzluksiz aks ettirish. Endi  $R^n$  fazodagi

$$S = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n : \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1 \right\}$$

birlik sferada ushbu

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n\|$$

funksiyani ko'ramiz.  $S$  sferada  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sonlarning hammasi bir vaqtda nolga teng bo'lmagani va  $\{x_i\}$  vektorlar chiziqli erkli bo'lgani sababli ixtiyoriy  $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in S$  uchun

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) > 0.$$

Ushbu

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| = |f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)| = \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \leq \beta \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

tengsizlikdan  $f$  uzluksiz funksiya ekanligi ko'rinib turibdi. Ravshanki,  $a = \min f(\bar{x}) > 0$ . Demak,  $x \in S$  uchun

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geq a$$

ya'ni ixtiyoriy  $\bar{x} \in R^n$  uchun

$$f(\bar{x}) = \|x\| = \|\bar{x}\| \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i x_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}} \right\| \geq \|\bar{x}\| a,$$

ya'ni

$$\|u(x)\| = \|\bar{x}\| \leq \frac{1}{a} \|x\|.$$

Bundan ko'rinib turibdiki,

$$\|u(x) - u(y)\| \leq \frac{1}{a} \|x - y\|,$$

ya'ni  $u$  uzluksizdir.

**1.1.1-natija.** Hamma haqiqiy (kompleks)  $n$  o'lchamli normalangan fazolar o'zaro izomorfdir.

## 1.2. Ultrametrikalar.

$|\cdot|_K$ -no-arximed absolyut qiymat bo'lsin.  $\rho_K(x, y) = |x - y|_K$  ni qaraymiz. Bu metrika bo'lishini oson ko'rsatish mumkin. Absolyut qiymat uchun kuchaytirilgan uchburchak tengsizligini qo'llab,

$$\rho_K(x, y) \leq \max\{\rho_K(x, z), \rho_K(z, y)\}, \quad x, y, z \in K$$

ni hosil qilamiz.

### Standart uchburchak tengsizligi

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \quad x, y, z \in K$$

o'rniga kuchaytirilgan uchburchak tengsizligi

$$\rho(x, y) \leq \max[\rho(x, z), \rho(z, y)], \quad x, y, z \in K$$

bajariladigan  $X$  umumiy metrik fazoni qarash qiziqarli.

Bunday metrikalar ultrametrikalar deyiladi, mos metrik fazo esa ultra metrik fazo deyiladi. Kuchaytirilgan uchburchak tengsizligi quyidagi geometrik ma'noga ega: uchburchakning istalgan tomoni uning ikkita boshqa tomonlari kattasidan katta emas. Shunday qilib, ultrametrik fazolarda ixtiyoriy uchburchak teng yonli bo'ladi.

$X$  ultrametrik fazoning asosiy xossalarini muhokama qilamiz.  $U_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}$  va  $U_r^-(a) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$ ,  $r \in R_+$ ,  $a \in X$  deb olamiz. Bu markazi  $a$  nuqtada radiusi  $r$  ga teng sharlardir. Intuitsiyaga ko'ra  $U_r(a)$  yopiq shar,  $U_r^-(a)$  esa ochiq shar. Lekin ultrametrik fazolarda holat boshqacha.

**1.2.1-tasdiq.**  $X$  fazodagi ixtiyoriy shar bir vaqtda ham ochiq ham yopiq shar bo'ladi. Sharining istalgan nuqtasi markaz bo'ladi. Shar cheksiz ko'p radiuslarga ega.

Isbot. Albatta  $U_r^-(a)$  ochiq,  $U_r(a)$  esa yopiq sharlar.  $U_r(a)$  ochiq shar bo'lishini isbotlaymiz.  $b \in U_r(a)$  bo'lsin.  $U_r(b) \subset U_r(a)$  ekanligini isbotlaymiz. Agar  $x \in U_r(b)$  bo'lsa, kuchaytirilgan uchburchak tengsizligini qo'llab  $\rho(x, a) \leq \max[\rho(x, b), \rho(b, a)]$  ni hosil qilamiz. U holda  $x \in U_r(a)$ , ya'ni  $U_r(b) \subset U_r(a)$ . Simmetriyani qo'llab  $U_r(b) = U_r(a)$  ni isbotlash qiyin emas. Shu sababli  $U_r(a)$  sharining ixtiyoriy  $b$  nuqtasi uning markazi bo'ladi.

Bir vaqtda ham ochiq ham yopiq bo'ladigan to'plamlar kelgusi izlanishlarda muhim ahamiyatga ega. Bunday to'plamlar uchun yopiq-ochiq atamasi ishlatiladi.

**1.2.2-tasdiq.**  $U$  va  $V$  lar  $X$  fazodagi ikkita sharlar bo'lsin. U holda ikkita imkoniyat mavjud:

- 1) Sharlar bir-birida yotadi, ya'ni  $U \subset V$  yoki  $V \subset U$ ;
- 2) Sharlar kesishmaydi.

Isbot. Agar bu tasdiqlardan biri xato bo'lsa,  $a \in U \cap V$ ,  $x \in U \setminus V$ ,  $y \in V \setminus U$  elementlar topilar edi.  $a$  nuqta  $U$  ning ham  $V$  ning ham markazi bo'lib,  $x \in U$  va  $y \notin U$  da  $\rho(y, a) > \rho(x, a)$ ;  $y \in V$  va  $x \notin V$  da  $\rho(x, a) > \rho(y, a)$  bo'lar edi. Bu esa ziddiyat.

**1.2.3-tasdiq.**  $G - X$  to'plamning bo'sh bo'lmagan ochiq qism to'plami bo'lsin. U holda  $G$  ning sharlarga bo'linishi mumkin. Bundan tashqari,  $r_1 > \dots > r_n$  uchun  $G$  ni  $U_{r_n}(a_n)$ ,  $a_n \in X$  ko'rinishidagi kesishmaydigan sharlar bilan qoplash mumkin.

Bu tasdiqni isbotlash uchun avvalgi 2.2-tasdiqni qo'llash yetarli.

Agar faqat bo'sh to'plam va bitta nuqtali  $\{a\}$  to'plam bog'langan bo'lsa,  $Y$  topologik fazo to'la bog'liqmas deyiladi. Agar  $O = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$  ekanligidan  $A = \emptyset$  yoki  $B = \emptyset$  kelib chiqsa,  $O$  ga bog'langan deyiladi, bu yerda  $A$  va  $B$  lar yopiq-ochiq sharlar.

**1.2.4-tasdiq.**  $X$  ultrametrik fazo to'la bog'liqmasdir.

Isboti.  $\forall A \in X$  uchun  $a$  nuqtaning bog'langan  $T$  komponentasi  $a$  nuqtaning har bir yopiq-ochiq atrofida saqlanadi. Lekin  $X$  da yopiq-ochiq atroflar bazasi mavjud. Shu sababli  $T = \{a\}$ .

Agar  $\forall a \in Y$  va  $a$  nuqtaning ixtiyoriy  $U$  atrofi uchun shunday yopiq-ochiq  $V$  atrofi topilib,  $a \in V \subset U$  bo'lsa,  $Y$  topologik fazo nol o'lchamga ega deyiladi. Ixtiyoriy  $X$  ultrametrik fazo nol o'lchamga ega.

Agar  $\forall a \in X$  va  $\forall \varepsilon > 0$  uchun shunday  $\delta > 0$  topilib,  $\rho(x, a) < \delta$  bo'ladigan  $x \in X$  uchun  $|f(x) - f(a)|_K < \varepsilon$  tengsizlik bajarilsa,  $f : X \rightarrow K$  funksiya uzluksiz deyiladi. Endi  $O$  to'plam yopiq-ochiq bo'lishi uchun uning  $K$ -qiymatli  $x \in O$  da  $\phi_0(x) = 1$  va  $x \notin O$  uchun  $\phi_0(x) = 0$  bo'ladigan  $\phi_0(x)$  funksiya uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli ekanligini qo'llaymiz.

Markazi  $a$  nuqtada radiusi  $r \in R_+$  bo'lgan  $\{x \in X : \rho(x, a) = r\}$  sferani  $S_r(a)$  bilan belgilaymiz. Ultrametrik holda  $S_r(a)$  sfera  $U_r^-(a)$  va  $U_r(a)$  sharlarning chegarasi bo'lmaydi. Shar chegarasi bo'sh to'plam bo'lishini isbotlash mumkin.

### 1.3. p-adik sonlar maydoni.

$X$  -bo'sh bo'lmagan to'plam bo'lsin.  $X$  ning tartiblangan  $(x, y)$  juftliklari to'plamida aniqlangan va nomanfiy haqiqiy qiymatlarini qabul qiluvchi  $d$  funksiya

$$(1) \quad d(x, y) = 0 \text{ faqat va faqat } x = y \text{ bo'lsa;}$$

$$(2) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$(3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ barcha } z \in X \text{ larda}$$

shartlarni qanoatlantirsa,  $d$  ga  $X$  dagi masofa yoki metrika deyiladi.  $X$  to'plam berilgan  $d$  metrika bilan birgalikda metrik fazo deyiladi. Bitta  $X$  to'plamdan bir nechta metrik fazolarni qurish mumkin.

Ko'pincha  $X$  to'plam sifatida maydonni qaraymiz.  $F$  maydon ikkita  $\bullet$  va  $+$  binar munosabatli to'plam bo'lib,  $F$  to'plam  $+$  amalga nisbatan kommutativ grupp bo'ladi,  $F - \{0\}$  esa  $\bullet$  amalga nisbatan kommutativ grupp bo'ladi va distributivlik qonuni o'rinli bo'ladi. Maydonga misol sifatida  $Q$  ratsional sonlar maydonini va  $R$  haqiqiy sonlar maydonini olish mumkin.

$F$  maydondagi normaga mos keluvchi  $d$  metrika bilan ishlaymiz.  $F$  haqiqiy nomanfiy sonlar maydonida aniqlangan  $\|\bullet\|$ , akslantirish

$$(1) \quad \|x\| = 0 \text{ faqat va faqat } x = 0 \text{ bo'lganda;}$$

$$(2) \quad \|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|;$$

$$(3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

shartlarni qanoatlantirsa, unga norma deyiladi. Agar  $d$  metrika  $d(x, y) = \|x - y\|$  formula bilan aniqlansa,  $d$  metrika  $\|\bullet\|$  normaga mos deb aytiladi. Bunday aniqlangan  $d$  funksiya haqiqatan ham metrika bo'ladi.

$Q$  ratsional sonlar maydonidagi normaga asosiy misol bu  $|x|$  dir. Unga mos  $d(x, y) = |x - y|$  metrika sonlar o'qidagi odatdagi masofa bilan ustma-ust tushadi. Keyingi bo'limlarda yangi tipdagi metrika qaraladi. U (1)- (3) shartlarni qanoatlantiradi, lekin uning xossalari keskin farq qiladi. Quyida biz nafaqat  $Q$  maydon bilan balki uning turli kengaytmalari bilan ishlaymiz.

### 1.3.1 Ratsional sonlar maydonidagi metrikalar.

Biz  $Q$  maydondagi bitta maydonni bilamiz: u odatdagi absolyut qiymatga mos keladi.

**1.3.1-ta'rif.**  $p \in \{2,3,5,7,11,13,17,\dots\}$ - biror tub son bo'lsin. Ixtiyoriy nolmas butun  $a$  soni uchun  $\text{ord}_p a$  orqali  $a$  ning tub ko'paytuvchilariga yoyilmasida  $p$  ning karalligini, ya'ni  $a \equiv 0 \pmod{p^m}$  bo'ladigan butun nomanfiy  $m$  sonlarning eng kattasi belgilanadi. Masalan,  $\text{ord}_5 35 = 1$ ,  $\text{ord}_5 250 = 3$ ,  $\text{ord}_2 96 = 5$ ,  $\text{ord}_2 97 = 0$ . Agar  $a = 0$  bo'lsa,  $\text{ord}_p 0 = \infty$  deb olamiz.  $\text{ord}_p$  fuksiya biroz logarifm funksiyaga o'xshaydi:  $\text{ord}_p(a_1 a_2) = \text{ord}_p a_1 + \text{ord}_p a_2$ .

Ixtiyoriy  $x = a/b$  rasional son uchun  $\text{ord}_p x$  ni  $\text{ord}_p a - \text{ord}_p b$  deb olamiz. Bunday aniqlangan miqdor faqat  $x$  dan bog'liq:  $x = ac/bc$  tasvirdan  $\text{ord}_p x = \text{ord}_p ac - \text{ord}_p bc$  ni hosil qilamiz.

Bundan tashqari,  $Q$  ga quyidagi  $|\cdot|_p$  akslantirishni aniqlaymiz:

$$|x|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{\text{ord}_p x}}, & \text{agar } x \neq 0 \\ 0 & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

**1.3.1-tasdiq.**  $|\cdot|_p$  funksiya  $Q$  maydonda normani aniqlaydi.

Isboti. (1) va (2) xossalarni mustaqil tekshirish uchun qoldiramiz. (3) ni tekshiramiz. Agar  $x = 0$  yo  $y = 0$  yoki  $x + y = 0$  bo'lsa, u holda (3) oson tekshiriladi. Shu sababli  $x$ ,  $y$ ,  $x + y$  sonlarni nolmas deb olamiz.  $x = a/b$  va  $y = c/d$  lar qisqarmas tasvirlar bo'lsin. U holda  $x + y = (ad + bc)/bd$  va  $\text{ord}_p(x + y) = \text{ord}_p(ad + bc) - \text{ord}_p b - \text{ord}_p d$ . Ikki butun son yig'indisi bo'linuvchi  $p$  ning eng katta darajasi har bir qo'shiluvchi bir vaqtda bo'linadigan  $p$  ning darajasidan kichik emas. Shu sababli

$$\begin{aligned} \text{ord}_p(x + y) &\geq \min(\text{ord}_p ad, \text{ord}_p bc) - \text{ord}_p b - \text{ord}_p d = \min(\text{ord}_p a + \text{ord}_p d, \text{ord}_p b + \text{ord}_p c) - \\ &- \text{ord}_p b - \text{ord}_p d = \min(\text{ord}_p a - \text{ord}_p b, \text{ord}_p c - \text{ord}_p d) = \min(\text{ord}_p x, \text{ord}_p y). \end{aligned}$$

Shunday qilib,  $|x+y|_p = p^{-ord_p(x+y)} \leq \max(p^{-ord_p x}, p^{-ord_p y}) = \max(|x|_p, |y|_p)$  oxirgi esa  $\leq |x|_p + |y|_p$ .

Aslida biz kuchliroq tengsizlikni isbotladik. Hosil bo'lgan tengsizlik  $p$ -adik analizning asosiy tushunchalaridan biriga olib keladi.

**1.3.2-ta'rif.** Agar hamisha  $\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$  tengsizlik bajarilsa, normaga no-arximed normasi deyiladi. Agar  $d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}$  bajarilsa,  $d$  ga no-arximed metrika deyiladi. No-Arximed normaga mos metrika noarximed metrika deyiladi. Chunki bu holda

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z) + (z-y)\| \leq \max\{\|x-z\|, \|z-y\|\} = \max\{d(x,z), d(z,y)\}.$$

Shunday qilib,  $|\cdot|_p - Q$  maydondagi no-arximed norma bo'ladi. No-Arximed bo'lgan norma (yoki metrika) ga arximed norma (yoki metrika) deyiladi.

Har bir  $X$  metrik fazoda Koshi ketma-ketligi aniqlangan.  $X$  ning  $\{a_1, a_2, \dots\}$  elementlari ketma-ketligi uchun  $\forall \varepsilon > 0$  uchun shunday  $N$  nomer topilib, istalgan  $m > N$  va  $n > N$  larda  $d(a_m, a_n) < \varepsilon$  tengsizlik bajarilsa, unga Koshi ketma-ketligi deyiladi.

Ta'rifga ko'ra agar ikkita  $d_1$  va  $d_2$  metrikalarga mos Koshi ketma-ketliklari sinfi ustma-ust tushsa, ular ekvivalent deyiladi. Agar ikkita normaga mos metrikalar ekvivalent bo'lsa, ular ekvivalent normalar deyiladi.  $\rho \in (0,1)$  haqiqiy sonni fiksirlaymiz, keyin  $|\cdot|_\rho$  ta'rifida  $(1/\rho)^{ord_p x}$  o'rniga  $\rho^{ord_p x}$  ni qo'yamiz. U holda  $|\cdot|_\rho$  ga ekvivalent bo'lgan noarximed normani hosil qilamiz.  $\rho = 1/p$  kabi tanlashning qulayligini keyingi misollarda tushuntiramiz.

$|\cdot|$  odatdagi absolyut qiymatga ham unga ekvivalent bo'lgan arximed normalari oilasi mos keladi, aynan  $|\cdot|^\alpha$ , bu yerda  $0 < \alpha \leq 1$ .

Odatdagi absolyut qiymatni ba'zida  $|\cdot|_\infty$  orqali belgilaymiz. Bunda  $|\cdot|_\infty$  va  $|\cdot|_p$  orasida hech qanday aloqa yo'q, bu shunchaki qulay belgilash.

“Trivial” norma sifatida  $\|0\|=0$  va barcha  $x \neq \theta$  larda  $\|x\|=1$  bo’ladigan norma tushuniladi.

**1.3.1-teorema (Ostrovskiy).**  $Q$  maydondagi har bir notrivial  $\|\bullet\|$  norma biror tub  $p$  yoki  $p = \infty$  uchun  $|\bullet|_p$  ga ekvivalent bo’ladi.

Isbot. (i) hol.  $\|n\| > 1$  bo’ladigan biror  $n$  natural son mavjud bo’lsin. Bunday  $n$  larning eng kichigi  $n_0$  bo’lsin.  $\|n_0\| > 1$  bo’lgani uchun biror musbat haqiqiy  $\alpha$  son uchun  $\|n_0\| = n_0^\alpha$  bo’ladi. Endi istalgan butun musbat  $n$  sonni  $n_0$  lik sistemada yozamiz:

$$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \dots + a_s n_0^s$$

bu yerda  $0 \leq a_i < n_0$  va  $a_s \neq 0$ . U holda

$$\|n\| \leq \|a_0\| + \|a_1 n_0\| + \|a_2 n_0^2\| + \dots + \|a_s n_0^s\| = \|a_0\| + \|a_1\| \cdot n_0^\alpha + \|a_2\| \cdot n_0^{2\alpha} + \dots + \|a_s\| \cdot n_0^{s\alpha}. \quad a_i < n_0$$

bo’lgani uchun  $n_0$  tanloviga ko’ra  $\|a_i\| \leq 1$ . Shu sababli

$$\|n\| \leq 1 + n_0^\alpha + n_0^{2\alpha} + \dots + n_0^{s\alpha} = n_0^{s\alpha} (1 + n_0^{-\alpha} + \dots + n_0^{-s\alpha}) \leq n^\alpha \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (1/n_0^\alpha)^i \right],$$

chunki  $n > n_0^s$ . Kvadrat qavsdagi o’zgarmasni  $C$  bilan belgilaymiz. Shunday qilib,  $\|n\| \leq C n^\alpha$  barcha  $n = 1, 2, 3, \dots$  larda yetarlicha katta  $N$  natural sonni qaraymiz. Hosil bo’lgan tengsizlikda  $n$  ning o’rniga  $n^N$  ni qo’yamiz va ikkala tomonidan  $N$  – darajali ildiz chiqaramiz:

$$\|n\| \leq \sqrt[N]{C n^\alpha}.$$

$N \rightarrow \infty$  da limitga o’tish va fiksirlangan  $n$   $\|n\| \leq n^\alpha$  tengsizlikni beradi.

Teskari tengsizlikni quyidagicha isbotlash mumkin. Yuqoridagi kabi  $n$  ni  $n_0$  lik sistemada yozamiz. U holda  $n_0^{s+1} > n \geq n_0^s$ . Bundan tashqari,  $\|n_0^{s+1}\| = \|n + n_0^{s+1} - n\| \leq \|n\| + \|n_0^{s+1} - n\|$ , u holda  $\|n\| \geq \|n_0^{s+1}\| - \|n_0^{s+1} - n\| \geq n_0^{(s+1)\alpha} - (n_0^{s+1} - n)^\alpha$ . Bu  $\|n_0^{s+1}\| = \|n_0\|^{s+1}$  dan va  $\|n\| \leq n^\alpha$  tengsizlikdan kelib chiqadi. Demak,  $n_0$  va  $\alpha$  dan bog’liq, lekin  $n$  dan bog’liq bo’lmagan biror  $C$  o’zgarmas uchun

$$\|n\| \geq n_0^{(s+1)\alpha} - (n_0^{s+1} - n_0^s)^\alpha = n_0^{(s+1)\alpha} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{n_0} \right)^\alpha \right] \geq C' n^\alpha, \quad (\text{chunki } n \geq n_0^s).$$

Keyin yuqoridagi kabi oxirgi tengsizlikda  $n^N$  ni qo'yamiz,  $N$  – darajali ildiz chiqaramiz. Natijada  $\|n\| \geq n^\alpha$  ni hosil qilamiz.

Shunday qilib,  $\|n\| = n^\alpha$ . Normaning (2)- xossasidan  $\forall x \in Q$  uchun  $\|x\| = |x|^\alpha$ . U holda 7-misoldan  $\|\bullet\|$  va  $|\bullet|$  larning ekvivalentligini hosil qilamiz, bu (i) holning isbotini hosil qilamiz.

(ii) hol. Barcha  $n$  natural son uchun  $\|n\| \leq 1$  bo'lsin.  $\|n\| < 1$  bo'ladigan  $n$  natural sonlarning eng kichigi  $n_0$  bo'lsin.  $\|\bullet\|$  notrivial norma bo'lgani uchun bunday  $n_0$  mavjud.  $n_0$  soni tub bo'lishi kerak. Haqiqatan ham, agar  $n_0 = n_1 \cdot n_2$  va  $n_1, n_2 < n_0$  bo'lsa, u holda  $\|n_1\| = \|n_2\| = 1$ , shu sababli  $\|n_0\| = \|n_1\| \cdot \|n_2\| = 1$ .  $n_0$  tub sonni  $p$  bilan belgilaymiz.

$p$  dan farqli istalgan tub  $q$  soni uchun  $\|q\| = 1$  bo'lishini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz. U holda  $\|q\| < 1$  va yetarlicha katta  $N$  natural son uchun  $\|q^N\| = \|q\|^N < 1/2$  ni hosil qilamiz. Shunga o'xshash yetarlicha katta  $M$  larda  $\|p^M\| < 1/2$ .  $p^M$  va  $q^N$  lar o'zaro tub, ya'ni birdan farqli umumiy bo'luvchiga ega emas. Shu sababli, ikkita butun  $n$  va  $m$  butun sonlar uchun  $mp^M + nq^N = 1$ . U holda normaning (2) va (3) xossalariga ko'ra

$$1 = \|1\| = \|mp^M + nq^N\| \leq \|mp^M\| + \|nq^N\| = \|m\| \|p^M\| + \|n\| \|q^N\|.$$

$$\|m\|, \|n\| \leq 1$$

bo'lgani uchun

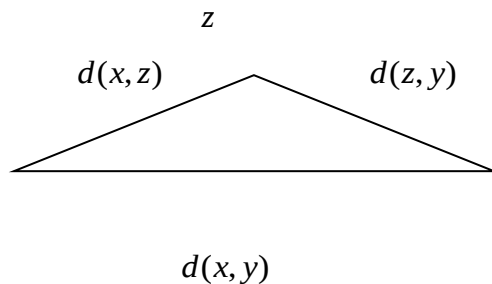
$$1 \leq \|p^M\| + \|q^N\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

bu esa qarama-qarshilik. Shu sababli  $\|q\| = 1$ .

Teorema isbot bo'ldi, chunki har bir musbat butun  $a$  sonini tub ko'paytuvchilarga ajratish mumkin.  $a = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_r^{b_r}$ . bo'lsin. U holda

$\|a\| = \|p_1\|^{b_1} \cdot \|p_2\|^{b_2} \dots \|p_r\|^{b_r}$ .  $p_i = p$  bo'ladigan  $\|p_i\|$  ko'paytuvchi 1 dan farqli bo'lad, mos  $b_i$  esa  $\text{ord}_p a$  bilan ustma-ust tushadi. Shu sababli  $\|a\| = p^{\text{ord}} p^a$  bu yerda  $p = \|p\| < 1$ . Normaning (2) xossasiga ko'ra oxirgi formula nafaqat  $a$  natural sonlar uchun, balki nolmas  $\forall x$  ratsional sonlar uchun o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Quyidagi 4-misoldan bunday normaning va  $|\cdot|_p$  ning ekvivalentligi kelib chiqadi. Ostrovskiy teoremasi isbotlandi.

Albatta, masofa haqidagi tasavvurlarimiz  $|\cdot|_\infty$  arximed metrikasiga asoslangan.  $|\cdot|_p$  noarximed metrikaning ba'zi xossalari dastlab g'alati tuyuladi. Quyidagi 2 ta misolni qaraymiz. Metrikaning (3) xossasi:  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  “uchburchak tengsizligi” nomi bilan ma'lum,  $C$  kompleks sonlar maydonida bu kompleks tekislikdagi uchburchak ikkita tomonining yig'indisi uchunchi tomonidan katta bo'lishini bildiradi:



#### 1.1.1-chizma. (Xossadan kelib chiqqan)

No-Arximed norma kiritilgan  $F$  maydon holini qaraymiz. Qulaylik uchun  $z = 0$  deb olamiz. U holda noarximed uchburchak tengsizligiga ko'ra  $\|x - y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ . Avvalo  $x$  va  $y$  tomonlar turli uzunlikga ega bo'lsin, masalan  $\|x\| < \|y\|$  deb olamiz. Uchunchi  $x - y$  tomon  $\|x - y\| \leq \|y\|$  uzunlikga ega lekin

$$\|y\| = \|x - (x - y)\| \leq \max(\|x\|, \|x - y\|),$$

va demak  $\|y\| \leq \|x - y\|$ , chunki  $\|y\| \leq \|x\|$  bajarilmaydi. Shu sababli,  $\|y\| = \|x - y\|$ . Shunday qilib, agar 2 ta  $x$  va  $y$  tomonlar teng bo'lmasa, u holda ularning kattasi uchunchi tomon bilan ustma-ust tushishi kerak. Barcha uchburchaklar teng yonli!

$(\bullet)_p$  norma kiritilgan  $Q$  maydon uchun shunga o'xshash xossa nimani anglatishini bilish kerak. Unga ko'ra 2 ta ratsional son ayirmasiga kiruvchi  $p$  ni karraliga bu karralikning kichigi bilan ustma-ust tushadi.

No-Arximed maydon uchun  $\|x \pm y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$  va  $\|x\| \neq \|y\|$  bo'lganda tenglik bajariladi. Bu muxim xossa bo'lib teng yonli uchbarchak prinsipi deb yuritiladi.

Ikkinchi misol sifatida markazi  $a$  nuqtada  $r$  radiusli ochiq doirani qaraymiz:

$$D(a, r^-) = \{x \in F \mid \|x - a\| < r\}.$$

$\|\bullet\|$  no-arximed normasi bo'lsin.  $b \in D(a, r^-)$  ning  $\forall$  elementi bo'lsin. U holda

$$D(a, r^-) = D(b, r^-),$$

Ya'ni doiraning har bir nuqtasi uning markazi bo'ladi!

Haqiqatan ham

$$\begin{aligned} x \in D(a, r^-) &\Rightarrow \|x - a\| < r \Rightarrow \|x - b\| = \|(x - a) + (a - b)\| \leq \\ &\leq \max(\|x - a\|, \|a - b\|) < r \Rightarrow x \in D(b, r^-) \end{aligned}$$

bu teskari munosabat ham shunga, o'xshash isbotlanadi.

Markazi  $a$  nuqtada bo'lgan  $r$  radiusli doirani

$$D(a, r) = \{x \in F \mid \|x - a\| \leq r\}$$

Kabi aniqlaymiz. U holda xuddi yuqoridagi kabi  $\|\bullet\|$  no-arximed norma holida  $D(a, r)$  ning har bir nuqtasi uning markazi bo'ladi.

### 1.3.2. Kompleks sonlar maydoni qanday quriladi?

Bizda ikkita ratsional sonlar orasidagi masofa degan yangi tushuncha bor: bunday metrikada ikkita ratsional son qancha bir-biriga yaqin bo'lsa, biror fiksirlangan tub  $p$  son uchun ularning ayirmasi  $p$  ning katta darajasiga bo'linadi. bunday  $p$ -adik metrika bilan ishlash uchun  $Q$  ratsional sonlar maydonini kengaytirish kerak bo'ladi, klassik arximed metrikasi  $|\bullet|$  ga o'xshash u  $R$  haqiqiy

sonlar maydonigacha to'ldiriladi va keyin  $C$  kompleks sonlar maydoniga kengaytiriladi. Shu sababli u qanday bajarilishini eslaymiz.

$Q$  maydon aniqlanishini qaraymiz.  $N = \{1, 2, \dots\}$  natural sonlar to'plamidan boshlaymiz.  $N$  dan  $C$  ga o'tishda hech qanday cheklovlarsiz quyidagi ikkita amalni ta'kidlash mumkin:

(1) ko'phadli tenglamalarni yechish;

(2) Koshi ketma-ketligi limitini topish, ya'ni sonlar sistemasidagi bo'shliqlarni shunday to'ldirish kerakki, yangi sonli sistemada har bir Koshi ketma-ketligi limitiga ega bo'lsin.

Bu yo'lda barcha butun sonlar to'plami  $Z$  ni

$$a + x = b, \quad a, b \in N$$

ko'rinishidagi tenglama yechimlari sifatida kiritish mumkin. Shundan so'ng ratsional sonlarni

$$ax = b, \quad a, b \in Z$$

tenglama yechimi sifatida aniqlash mumkin.

Haqiqiy sonlarni aniqlashning mumkin bo'lgan usullaridan biri bu ratsional sonlarning Koshi ketma-ketligidan tashkil topgan  $S$  to'plamni qarashdan iborat. Agar  $j \rightarrow \infty$  da  $|a_j - b_j| \rightarrow 0$  bo'lsa, ikkita  $S_1 = \{a_j\} \in S$  va  $S_2 = \{b_j\} \in S$  ketma-ketliklar ekvivalent deyiladi va  $S_1 \sim S_2$  kabi belgilanadi.

$Q_p$  maydonning  $p$ -adik sonlarning  $p$  ning darajalari bo'yicha qatorga yoyilmasini qaraymiz. Ixtiyoriy musbat  $a$  haqiqiy son

$$a = \dots + \frac{a_{-k}}{10^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{10} + a_0 + a_1 \cdot 10 + \dots + a_n \cdot 10^n = a_n \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-k} \dots, \quad (1.3.1)$$

o'nli kasr ko'rinishida tasvirlanadi, bu yerda  $a_j$  faqat o'nta qiymatni qabul qiladi:  $0, 1, \dots, 9$ . Bu yoyilma chekli sondagi haddan keyin barcha  $a_k$  lar 9 bo'ladigan holdan boshqa hollarda yagonadir. Masalan,

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots = 1 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \dots$$

va 1 sonining ikkita yoyilmasini hosil qilamiz. Agar  $m > 1$  bo'lsa, ixtiyoriy fiksirlangan butun son bo'lsa, u holda musbat  $a$  haqiqiy son

$$a = \dots + \frac{a_{-k}}{m^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{m} + a_0 + a_1 \cdot m + \dots + a_n \cdot m^n = a_n \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-k} \dots, \quad (1.3.2)$$

ko'rinishida tasvirlash mumkin, bu yerda  $a_k$  had  $0, 1, \dots, m-1$  qiymatlarni qabul qiladi. Bu yoyilma yetarli katta  $k$  larda  $a_k$  had  $m-1$  ga teng bo'ladigan holdan boshqa hollarda yagonadir. Shunday qilib, biror pozitsiyadan keyin barcha sonlar nol bo'ladigan ikkinchi tasvir ham mavjud. Shu sababli,

$$\sum_{k=f}^{\infty} (m-1) \cdot m^{-k} = m^{-f+1} + \sum_{k=f}^{\infty} 0 \cdot m^{-k}.$$

Musbat butun sonlar  $m$  bazisda

$$a = a_0 + a_1 \cdot m + \dots + a_n \cdot m^n. \quad (1.3.3)$$

chekli yig'indi kabi yozish mumkin. Umumiy holda

$$a = \frac{a_{-k}}{m^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{m} + a_0 + a_1 \cdot m + \dots + a_n \cdot m^n, \quad (1.3.4)$$

yig'indi musbat butun sonlar va  $m$  darajalar orasidagi munosabatni ifodalaydi. Ular ratsional sonidir.  $a$  haqiqiy son ratsional bo'lishi uchun uning  $m$ -adik yoyilmasi davriy bo'lishi zarur va yetarli.

Bunga o'xshash holat  $p$ -adik son uchun ham o'rinli. Istalgan  $p$ -adik  $a$  soni

$$a = \frac{a_{-f}}{p^f} + \dots + \frac{a_{-1}}{p} + a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n = a_{-f} \dots a_{-1}, a_0 a_1 \dots a_n \dots, \quad (1.3.5)$$

kabi tasvirlanishi mumkin, bu yerda  $a_j = 0, 1, \dots, p-1$ . Bu yoyilma haqiqiy sonni kasrlarga yoyishga yaqin bo'lib, haqiqiy holdan  $p$  darajalarning o'sish yo'nalishida chegaralanmaganligi va kamayish yo'nalishida chegaralanganligi bilan farq qiladi.  $p$ -adik yoyilmani (1.3.5) ko'rinishida yozishga kelishamiz. Natural sonlar yozish tartibi va (1.3.2) haqiqiy hol chun (1.3.4) munosabat hamda (1.3.5)  $p$ -adik holdan prinsipial farqi yo'q. (1.3.3) son  $a_n \dots a_0$  ko'rinishda (1.3.2) haqiqiy tasvirga mos ravishda yoziladi. Shuningdek (1.3.3) soni  $0, a_0 \dots a_n$  ko'rinishda (1.3.5)  $p$ -adik yoyilmaga mos ravishda yoziladi.

(1.3.5) ning isboti g'oyasi oddiy. Birinchidan, (1.3.5) dagi har bir qator  $Q_p$  da yaqinlashuvchi, chunki  $|p^n|_p = p^{-n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Bu yoyilma yagona, chunki nolning  $p$ -adik normasi nolga teng.

Teskarisini isbotlash uchun ixtiyoriy  $a$   $p$ -adik son  $\{U_i\}$  ratsional sonlar ketma-ketligining limiti bo'lishidan foydalanamiz. Agar  $|a|_p = p^{-f}$  bo'lsa, u holda  $\lim_{i \rightarrow \infty} |U_i|_p = p^{-f}$ . Lekin  $p^{-f}$  darajalar  $0$  va  $\infty$  dagi boshqa limitik nuqtaga ega bo'lmagani uchun  $|U_i|_p \neq p^{-f}$  bo'ladigan  $\{U_i\}$  ketma-ketlikning faqat cheklita hadi mavjud bo'lishi mumkin. Bu qiymatlar bilan limitni o'zgartirmasdan  $\{U_i\}$  ni tuzatish mumkin, shuning uchun  $|U_i|_p = p^{-f}$  ni barcha  $U_i = p^f \frac{r_i}{s_i}$  ko'rinishga ega, bu yerda  $r_i > 0$  va  $s_i > 0$  lar butun sonlar bo'lib,  $(r_i, s_i) = 1$ .

Bunday tipdagi istalgan ratsional son

$$c = c_f p^f + c_{f+1} p^{f+1} + \dots + c_{N+1} p^{N+1} + p^N (t_N / q_N) \quad (1.3.6)$$

ko'rinishida tasvirlanishi mumkin, bu yerda  $c_k$  ko'effitsiyentlar raqamlar va  $(p, q_N) = 1$ .  $N$  butun son xoxlagancha katta tanlanishi mumkin.

Isbotini yakunlash uchun  $\{U_i\}$  ketma-ketlikning fundamental ekanligini ko'rsatish yetarli. Katta  $i$  lar  $\{U_i\}$  uchun (1.3.6) tasvirdagi raqamlar  $i$  ga bog'liq emasligi fundamentallikni bildiradi.

$p$ -adik hisoblashlarni umumiylashtirishning eng sodda usullaridan biri bu sonlarning kanonik yoyilmasidan foydalanishdir. Bo'lish amali xuddi ko'paytirish amaliga o'xshab bajariladi.  $x = a/b$  ni hosil qilish uchun  $a, b$  va  $x$  ni (1.3.5) ko'rinishda tasvirlash kerak va  $xb = a$  tenglamaga mos cheksiz tenglamalar sistemasini qadamlab yechish kerak. Kompyuterda  $p$ -adik hisoblashlar haqiqiyga nisbatan ancha oson bajariladi.

$p$ -adik sonlarning kanonik yoyilmasini  $p$ -adik sonlar ustidagi statistik modellashtirish uchun asos sifatida ishlatamiz.

Haqiqiy holdagi kabi, agar  $p$ -adik son kanonik yoyilmasi davriy bo'lsa, u ratsional deyiladi. Bu  $p$ -adik natijalarni aniq fizik qiymatlar kabi qarash mumkin. Lekin bu hatto sodda hollar uchun ham sonlar nazariyasining qiyin muammosidir. Masalan, (1.1.5) baholashga ko'ra

$$1 + 2! + \dots + n! + \dots$$

qator istalgan  $Q_p$  da yaqinlashuvchi. Bu yig'indining qiymati haqida hech narsa ma'lum emas. Bu yig'indi ratsional bo'lish bo'lmashligini bilmaymiz. Kanonik yoyilmadagi davriylikni kompyuter yordamida topish bo'yicha bir necha urinishlar bo'lgan. Lekin biror  $p$  uchun ham davr topilmagan.

$Q_p$  dagi yaqinlashish (1.3.5) kanonik yoyilmada raqamlarni stabillashtirishga ekvivalentdir. Bu ma'lumot  $Q_p$  da statistik stabillashtirish uchun  $p$ -adik qiymatli ehtimollik nazariyasida ishlatiladi.

$U_1(0)$  birlik shar keyingi muhokamalarda muhim rol o'ynaydi. Sonlar nazariyasida  $Z_p$  – bu  $U_1(0)$  uchun qo'llaniladigan standart belgilashdir. Kuchaytirilgan uchburchak tengsizligiga ko'ra  $Z_p - Q_p$  ning additiv qism gruppasi bo'ladi. bundan tashqari u halqa bo'ladi. U butun  $p$ -adik sonlar halqasi deyiladi. Bunday atamani ishlatishning quyiagicha ma'nosi bor. Agar natural son (1.3.5)=(1.3.3) kanonik qatorga yoyilsa, u holda bu yoyilma  $p$  ning manfiy darajasini saqlamaydi. Bu  $Z_p$  elementlari uchun ham o'rinli. Butun  $p$ -adik sonlar yoyilmasini noldan boshlamaymiz:  $a = 0, a_0 a_1 \dots$   $Z_p$  ni qaraymiz.

**1.3.1-eslatma.** Manfiy butun sonning kanonik yoyilmasini cheksiz qator kabi yozish mumkin. **Masalan,**  $p = 2$  bo'lsa, u holda

$$-1 = 1/(1-2) = 1 + 2 + 2^2 + \dots = 111\dots$$

$Z_p$  halqa ratsional kasr sonlarni ham saqlaydi. Masalan,  $Q$  da

$$1/3 = 1 + 2 + 2^3 + 2^5 + \dots = 110101\dots$$

$A - K$  to'plamning qism to'plami va  $b \in K$  bo'lsin.  $\{x \in K : x = ba, a \in A\}$  to'plamni  $bA$  bilan belgilaymiz.  $p^n Z_p = U_{p^{-n}}(0)$  o'rinli.

$Q_p$  dagi topologiya to'la bog'liqmas bo'lib, nol o'lchamli bo'ladi. Ta'rifga ko'ra  $Q_p$  maydon to'la va separable.

**1.3.2-tasdiq.**  $Z_p$  -  $p$ -adik butun sonlar halqasi kompakt bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik

$$\left\{ x^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n = a_0^k \dots a_n^k \dots \right\}_{k=1}^{\infty} \quad (1.3.7)$$

$Z_p$  dagi ketma-ketlik bo'lsin. Bu ketma-ketlikning yaqinlashuvchiligini ko'rsatamiz.  $a_0^k$  uchun chekli sondagi imkoniyatlar mavjud bo'lganligi uchun shunday  $b_0 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  va  $\{x^k\}$  ketma-ketlikning qisman ketma-ketligi topilib, bu ketma-ketlikning elementlari uchun (1.3.7) dagi 1-raqam  $b_0$  ga teng. Bu jarayonni ketma-ketlikning ikkinchi raqami uchun davom ettiramiz va hokazo. Isbot standart diagonal jarayon yordamida tugaydi.

**1.3.3-tasdiq.** Natural sonlar to'plami butun  $p$ -adik sonlar halqaning hamma yerida zich.

Bu xossa isboti uchun kanonik yoyilma ishlatiladi.

**1.3.1-natija.**  $Q_p$  maydon lokal kompaktdir.

O'lchash jarayonini tahlil qilishda  $p$ -adik sonlarning umumlashmasi ham ishlatiladi. Ular  $m$ -adik sonlar deb ataladi.  $m$ -fiksirlangan natural son bo'lib,  $m > 1$  bo'lsin.  $m$ -adik sonlar ham  $p$ -adik son kabi aniqlanadi.  $Q$  ratsional sonlar maydonida  $m$ -adik psevdonorma  $x \rightarrow |x|_m$  tushunchasi kiritiladi. Agar  $n$  natural son bo'lsa, uni  $n = m^r k$  ko'rinishida tasvirlash mumkin, bu yerda  $k$  va  $m$  o'zaro tub sonlar.  $|n|_m = m^{-r}$  deb olamiz.  $p$ -adik sonlardan farqi shundaki, agar  $m$  tub son

bo'lmasa,  $|\bullet|_m$  uchun (1.2) shart bajarilmaydi. Masalan,  $m=4$  bo'lsa,  $|2|_4=1$ , lekin  $|2 \times 2|_4 = 1/4 \neq |2|_4 \cdot |2|_4$  (1.2) shart o'rniga umumiy holda

$$|xy|_m \leq |x|_m \cdot |y|_m$$

kuchsiz shart bajariladi. Bunday funksiya psevdonorma deyiladi.  $Q$  ratsional sonlar maydoni  $|\bullet|_m$  psevdonormaga mos metrika bilan kengaytirilgan maydonga  $Q_m$   $m$ -adik sonlar maydoni deyiladi. Bu holda (1.3.5) kanonik tasvir unga o'xshash bo'ladi. haqiqiy son holidan farqli bu kanonik yoyilma yagonadir. Uning yordamida  $Q_m$  da algebraik amallar quriladi.  $Q_m$  halqa bo'lishini ko'rsatish mumkin. Lekin bo'lish amalini kiritishda muammo bor.

**1.3.1-misol.**  $m=6$  bo'lsin.  $ab=0$  bo'ladigan ikkita  $a=2a_1a_2\dots$  va  $b=3b_1b_2\dots$  6-adik sonni topish mumkin.  $a$  va  $b$  ga nisbatan cheksizta tenglamalar sistemasini yechish mumkin. Masalan, 3-qadamdan keyin  $a=2101\dots$  va  $b=3120\dots$  ni hosil qilish mumkin.

Shunday qilib, agar  $m$ -tub son bo'lsa,  $Q_m$  da nolning bo'luvchilari mavjud. Shu sababli u maydon emas, halqa bo'ladi.

Butun  $m$ -adik sonlarning  $Z_m$  halqasida ham shunga o'xshash kiritiladi. U kompakt va butun sonlar to'plami  $Z_m$  to'plamning hamma yerida zich. Ta'rifga ko'ra  $Q_m$  halqa to'la va separable bo'ladi. undagi metrika ultrametrika bo'ladi.  $Q_m$  - to'la bog'liqsiz nol o'lchamli topologik fazodir.

$m = p^r$ ,  $r=1,2,\dots$ -tub son darajasi holiga e'tibor beraylik. Ixtiyoriy  $m$ -adik kanonik yoyilmani  $p$ -adik sonning yoyilmasi sifatida qarash mumkin. Ikkinchi tomondan har qanday  $p$ -adik yoyilmani  $m$ -adik kabi yozish mumkin. Shu sababli  $Q_{p^r}$  va  $Q_p$  ustma-ust tushadi. Ulardagi topologiyalar ekvivalentdir. Shunday qilib,  $Q_{p^r} = Q_p$ . Bu natijani umumlashtirish mumkin.  $p_1, p_2, \dots, p_k$ -turli tub sonlar va  $m = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$  va  $l = p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$  bo'lsin, bu yerda  $r_1 \dots s_k$ -musbat butun sonlar. Mulohazalarni takrorlab,  $Q_m = Q_e$  ni hosil qilamiz. Shunday qilib barcha  $m$ -adik

kengaytmalarni qarashni  $m = p_1 \dots p_k$  bitta yoki bir nechta tub son ko'paytmasiga keltirish mumkin. Quyidagi teorema Genzel tomonidan isbotlangan.

**1.3.2-teorema.**  $p_1, \dots, p_k$  -  $k$  ta turli tub sonlar va  $m = p_1 \dots p_k$  bo'lsin. U holda  $Q_m$  halqa  $Q_{p_i}$  -  $p$ -adik halqalarning to'g'ri yig'indisi bo'ladi.:

$$Q_m = Q_{p_1} \oplus \dots \oplus Q_{p_k}.$$

Agar  $p \neq q$  bo'lsa,  $Q_p$  va  $Q_q$  lar izomorf emas.  $R$  haqiqiy sonlar maydoni  $\forall Q_p$  ga izomorf emas.  $Q_p$  da (i)  $1 \geq 0 \geq -1$  (ii) agar  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  bo'lsa, u holda  $a + b \geq 0$ , (iii) agar barcha  $n$  larda  $a_n \geq 0$  va  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  bo'lsa, u holda  $a \geq 0$  shartlarni qanoatlantiruvchi  $\geq$  xususiy tartib tarkibini aniqlab bo'lmaydi.

Masalan,  $\forall Q_p$  uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} nn! = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n! - \sum_{n=1}^{\infty} n! = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)! - \sum_{n=1}^{\infty} n! = -1$$

### Xulosa.

Haqiqiy normalagan fazolar bobida No-Arximed sonlar maydoni, ultrametrikalar,  $p$ -adik sonlar maydoni mavzulariga to'xtalib o'tilgan. Biz bu mavzularga oid ta'rif, teorema, eslatma, tasdiqlar va ularning isbotlari keltirib o'tilgan. Normalagan fazo ta'rifi va unga doir misollar keltirilgan. Ostrovskiy va yomon talabaning orzusi teoremlari va ularning isboti keltirib o'tilgan.

## II BOB

### No-Arximed normalangan fazolar.

#### 2.1. No-Arximed normalangan fazo.

2.1.1. Kvadratik kengaytma tuzilishi va no-arximed maydonning algebraik to'ldiruvchisi.

$x^2 + 1 = 0$ ,  $C = R(i)$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $z = x + iy$ ,  $x, y \in R$  asosida  $C$  kompleks sonlar maydoni  $R$  haqiqiy sonlar maydonining kengaytmasi bo'ladi. Bu holda yetarlicha sodda tuzilish paydo bo'lib, berilgan kvadratik yoyilma haqiqiy sonlar maydonining algebraic yopig'I ham bo'ladi.

$p$ -adik holda algebraik tuzilishi sodda emas. Birinchidan haqiqiy holdan farqli ravishda kvadratik kengaytma yagona emas. Agar  $p = 2$  bo'lsa, yettita kvadratik kengaytma bor,  $p \neq 2$  bo'lsa, uchta kengaytma bor. Shunday qilib, agar  $Q_p$  maydonning fiksirlangan  $Q_p(\sqrt{\tau})$  kvadratik kengaytmasi qaralsa, u holda  $Q_p(\sqrt{\tau})$  da kvadratik ildizini hisoblab bo'lmaydigan  $p$ -adik sonlar mavjud. Barcha kvadratik kengaytmalar algebraik yopiq bo'lmaydi. Bundan tashqari ixtiyoriy chekli tartibli kengaytma, algebraik yopiq bo'lmaydi.  $Q_p$  maydon algebraik yopig'i chekli tartibli cheksiz zanjir kabi quriladi. Shu sababli u  $Q_p$  ustida cheksiz o'lchamli vektor fazo bo'ladi va to'la maydon bo'lmaydi. Bunday maydonni  $C_p$  bilan belgilaymiz. U kompleks  $p$ -adik sonlar maydoni deyiladi.

Fizikaviy tadbiqlarda  $C_p$  ni kompleks  $p$ -adik son sifatida ishlatishda muammo bor.  $inv : C \rightarrow C$ ,  $z \rightarrow \bar{z}$  avtomorfizm odatdagi kvant mexanikasida katta rol o'ynaydi.  $|z|^2 = z\bar{z}$  ifoda kvant mexanikasida ehtimollik sifatida qoraladi. Bu avtomorfizm kvant zarracha zaryadi bilan bog'liq. Avtomorfizm ta'sirida zarracha zaryadi ishorasi o'zgaradi. Kvant maydon nazariyasida avtomorfizm zarracha simmetriyasi  $\rightarrow$  antizarrachaga mos keladi. Ehtimollik  $inv$  avtomorfizm invarianti bo'ladi.  $p$ -adik qiymatli kvant mexanikasida  $inv$  avtomorfizm analogi kerak bo'ladi.

Lekin bunday avtomorfizmida  $inv_p : C_p \rightarrow C_p$  involyutsiya mavjud emas. Eng sodda yechim  $Q_p$  kvadratik kengaytmani kompleks qo'shma avtomorfizm analogi sifatida ishlatishdir.

$x^2 - \tau = 0$ ,  $\tau \in K$  kvadratik tenglama  $K$  maydonda yechimga ega bo'lmasin.  $K$  maydonning  $K(\sqrt{\tau})$  kvadratik kengaytmasi uchun  $Z$  belgilash ishlatamiz.  $Z$  ning elementlarini  $z = x + \sqrt{\tau}y$ ,  $x, y \in K$  ko'rinishida tasvirlash mumkin; qo'shma amali  $\bar{z} = x - \sqrt{\tau}y$  kabi;  $Z$  dagi absolyut qiymatni  $|\bullet|_k$  kabi belgilash mumkin. Ta'rifga ko'ra  $|z|_k = \sqrt{|z|_k^2}$ . Bu yerda  $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 - \tau y^2$  yevklid kvadrat uzunligi ishlatiladi. Bu miqdorning barcha qiymatlari  $K$  maydonga tegishli.

### 2.1.2. $p$ -adik sonlar maydonida kvadratlar.

$x \neq 0$   $p$ -adik sonning kanonik yoyilmasidan foydalanib, uni  $x = p^m \varepsilon$  ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda  $|\varepsilon|_p = 1$  va  $m$ -butun son. Agar  $y = p^m \varepsilon_0$ ,  $|\varepsilon_0|_p = 1$   $p$ -adik sonning kvadrati  $x$  bo'lsa, u holda  $m = 2k$  va  $\varepsilon = \varepsilon_0^2$  bo'ladi. shu sababli  $Q_p$  dagi barcha kvadratlarni tavsiflash uchun  $\varepsilon = \varepsilon_0^2$  kvadrat bo'ladigan  $\varepsilon$ ,  $|\varepsilon|_p = 1$  elementlarni tavsiflash yetarli.

**2.1.1-teorema.**  $p \neq 2$  bo'lsin.  $\varepsilon = C_0 + C_1 p + \dots + C_2 p^2 + \dots$ ,  $C_i = 0, \dots, p-1$ ,  $C_0 \neq 0$   $p$ -adik son kvadratik bo'lishi uchun  $C_0 - p$  modul bo'yicha kvadrat qoldiq bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot.  $\varepsilon = \eta^2$  va  $\eta = b \pmod{p}$  bo'lsin,  $b$ -butun son. U holda  $c_0 = b^2 \pmod{p}$ . Ikkinchi tomondan  $c_0 = b^2 \pmod{p}$  bo'lsin.  $F(x) = x^2 - \varepsilon$  ko'phadni qaraymiz.  $F(b) = 0 \pmod{p}$  hosil bo'ladi.  $F'(b) = 2b \not\equiv 0 \pmod{p}$  bo'ladi. nyuton usuli analogini qo'llab,  $\eta \in Z_p$  topilib,  $F(\eta) = 0$  va  $\eta = b \pmod{p}$  bo'lishini hosil qilamiz. Shunday qilib,  $\varepsilon = \eta^2$ . Teorema isbotlandi.

**2.1.1-natija.** Agar  $p \neq 2$  bo'lsa, u holda  $\varepsilon = 1 \pmod{p}$  bo'ladigan ixtiyoriy  $\varepsilon$  element  $Q_p$  da kvadrat bo'ladi.

$Q_p$  maydonning  $Q_p^*$  multiplikativ qism gruppasini va  $Q_p^*$  dagi barcha kvadratlar to'plami  $Q_p^{*2} = \{u = v^2 : v \in Q_p^*\}$  ni qaraymiz.

**2.1.2-natija.** Agar  $p \neq 2$  bo'lsa,  $(Q_p^*; Q_p^{*2})$  indeks to'rtga teng.

Isbot. Haqiqatan ham, agar  $|\varepsilon|_p = 1$  va  $\varepsilon$  kvadrat bo'lmasa, u holda  $(1, \varepsilon, p, \wp)$  sonlardan ixtiyoriy ikkkitasining nisbati  $Q_p$  da kvadrat bo'lmaydi. Ikkinchi tomondan ixtiyoriy nolmas  $p$ -adik sonni  $(1, \varepsilon, p, \wp)$  sonlar va kvadratlari ko'paytmasi kabi yozish mumkin.

Masalan,  $p = 3$  holni qaraymiz. U holda 3-adik  $x \neq 0$  son kvadrat bo'ladi, agar

$$x = 3^{2k}(1 + c_1 3 + c_2 3^2 + \dots).$$

bo'lsa. Xususan,  $Q_3$  da  $\sqrt{2}$  mavjud emas. Avvalgi natijadan  $\varepsilon = 2$  va  $(1, 2, 3, 6)$  to'rtta sonni tanlaymiz.  $x$  3-adik sonni bitta son va kvadrat ko'paytmasi kabi yozish mumkin.  $|x|_3 = 1$  holni qarash yetarli. Agar  $x$  kvadrat bo'lmasa, u holda

$$x = 2 + c_1 3 + c_2 3^2 + \dots = 2(1 + c_1' 3 + c_2' 3^2 + \dots) = 2\omega,$$

bu yerda  $\omega$  - kvadrat.

$p \neq 2$  bo'lsa,  $Q_p$  maydonning 3 xil kengaytmasi bor. Bular  $Q_p(\sqrt{\varepsilon})$ ,  $Q_p(\sqrt{p})$ ,  $Q_p(\sqrt{\varepsilon \cdot p})$ . Xususan,  $p = 3$  bo'lsa,  $Q_3(\sqrt{2})$ ,  $Q_3(\sqrt{3})$ ,  $Q_3(\sqrt{6})$  ni olish mumkin. Agar  $p = 5$  bo'lsa,  $\varepsilon_1 = 2$  va  $\varepsilon_2 = 3$  uchun kvadrat ildiz mavjud emas. Demak,  $Q_5(\sqrt{2})$ ,  $Q_5(\sqrt{5})$ ,  $Q_5(\sqrt{10})$  maydoni  $Q_5$  ning kvadrat kengaytmasi sifatida tanlash mumkin. Boshqacha ham tanlash mumkin,  $Q_5(\sqrt{2})$ ,  $Q_5(\sqrt{5})$ ,  $Q_5(\sqrt{15})$  -  $3 = 2(3/2) = 2(4 + 2 \cdot 5 + \dots 2 \cdot 5^n + \dots) = 2v$  o'rinli, bu yerda  $v = \omega^2$  va  $\sqrt{3} = \sqrt{2}\omega$ . Shu sababli  $Q_5(\sqrt{2}) \cong Q_5(\sqrt{3})$  va  $Q_5(\sqrt{10}) \cong Q_5(\sqrt{15})$ .

$p = 2$  holga to'xtalamiz.

**2.1.2-teorema.**  $p = 2$  bo'lsin.  $\varepsilon, |\varepsilon|_2 = 1$  2-adik son kvadrat bo'lishi uchun  $\varepsilon \equiv 1 \pmod{8}$  bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zaruriyligi toq sonning kvadrati hamisha  $1(\bmod 8)$  bilan taqqoslanish natijasidir. Ikkinchi tomondan  $F(x) = x^2 - \varepsilon$  ko'phadni qaraymiz. U holda  $F(1) = 0(\bmod 8)$  va  $F'(1) = 2 \neq 0(\bmod 4)$ . 2.1-teoremani yana qo'llaymiz.

**2.1.3-natija.**  $(Q_2^* : Q_2^{*2})$  indeks 8 ga teng.

Isbot.  $S_1 \equiv S_1(0)$  birlik shar  $Q_2^*$  da multiplikativ qism gruppasi bo'ladi.  $S_1$  dagi kvadratlar qism gruppasi  $S_1^2$  bo'lsin. 4.2-teoremaga ko'ra  $A = (1, 3, 5, 7)$  sonlar to'plami  $S_1 / S_1^2$  qoldiqlar sinfini tasvirlaydi. Buni isbotlash uchun  $\forall x \in S_1$  elementni  $x = au^2$ ,  $a \in A$ ,  $u \in S_1$  kabi tasvirlash yetarli.  $x = a + x_3 \cdot 2^3 + \dots$  bo'lganda  $x = a(x/a)$  ni hosil qilamiz, bu yerda  $a \in A$ . Lekin  $1/3 = 11(01)$ ,  $1/5 = 1011(011)$ ,  $1/7 = 111(011)$ . Bu kanonik yoyilmada qavs davrni belgilash uchun ishlatiladi. Agar  $a = 3$  bo'lsa, u holda  $x/3 = 100x_3 \dots$  kvadrat bo'ladi; agar  $a = 5$  bo'lsa, u holda  $x/5 = 100x_3 \dots$  kvadrat bo'ladi; agar  $a = 7$  bo'lsa, u holda  $x/7 = 100x_3 \dots$ . Shu sababli  $\sqrt{x/a}$  mavjud. Agar  $A$  to'plamga  $2 \cdot 1$ ,  $2 \cdot 3$ ,  $2 \cdot 5$ ,  $2 \cdot 7$  ko'paytmalarni qo'shsak,  $Q_2^{*2}$  bo'lgan to'la sistemani hosil qilamiz.

$Q_p$  da  $x = -1$  dan kvadrat ildiz qiziqtiradi. Bu ildizlardan bittasini  $i_p$  bilan, ikkinchisini  $-i_p$  bilan belgilaymiz. 4.1 va 4.2 foydalanib bu ildiz  $p \equiv 1(\bmod 4)$  bo'lganda  $Q_p$  da mavjudligini ko'rsatish mumkin. Masalan, agar  $p = 5$  bo'lsa, u holda  $i_5 = 21213423032204132404 \dots$ .

### 2.1.3. $C_p$ -kompleks $p$ – adik sonlar maydoni.

Biz nafaqat kvadrat yoyilmalarni balki  $C_p$   $p$  – adik kompleks sonlar maydonini ham qaraymiz. Bu maydonni qurish uchun  $Q_p$  maydonning  $Q_p^a$  algebraik yopig'ini qaraymiz.  $Q_p$  dagi  $\|\cdot\|_p$  normaning  $Q_p^a$  ga yagona davomi mavjud. Bu  $\|\cdot\|_p$  davomning aniq formulasini hech qayerda ishlatmaymiz.  $Q_p^a$  dagi  $p$  – adik norma uchun  $\|\cdot\|_p$  belgi ishlatiladi.  $Q_p^a$  metrik fazo to'la emas.  $Q_p^a$  maydonning  $C_p$  to'ldiruvchisi kompleks  $p$  – adik sonlar maydoni deyiladi. Bu algebraik yopiq maydon.

#### 2.1.4. $p$ – adik sonlarni $a = x^2 - \alpha y^2$ kabi tasvirlash.

$p$  – adik sonlar maydonida signum-funksiya.  $z = Q_p(\sqrt{\tau})$  –  $Q_p$  ning fiksirlangan kvadratik kengaytmasi bo'lsin. Bizni  $3 = 2(3/2) = 2(4 + 2 \cdot 5 + \dots + 2 \cdot 5^n + \dots) = 2v$  ko'rinishida tasvirlab bo'ladigan  $a \in Q_p$  elementlar qiziqtiradi. Umumiy bo'lgan

$$a = x^2 - \alpha y^2, \quad (2.1.1)$$

Tasvirni o'rganish foydali, bu yerda  $\alpha - \forall p$ -adik son va  $\alpha \neq 0$ . Bunday barcha nolmas elementlar to'plamini  $H_\alpha$  bilan belgilaymiz. Bu multiplikativ gruppaga bo'ladi. Haqiqatdan ham, agar  $u = x^2 - \alpha y^2$  va  $b_1 = x_1^2 - \alpha y_1^2$  bo'lsa, u holda

$$bb_1 = (xx_1 + \alpha yy_1)^2 - \alpha(xy_1 + yx_1)^2, \quad b^{-1} = \left(\frac{x}{b}\right)^2 - \alpha\left(\frac{y}{b}\right)^2.$$

**2.1.3-teorema.** Agar  $\alpha - Q_p$  ga kvadrat bo'lsa, u holda  $H_\alpha = Q_p^*$ . Agar  $\alpha - Q_p$  ga kvadrat bo'lmasa, u holda  $(Q_p^* : H_\alpha) = 2$ .

$\tau$  – kvadrat bo'lmagan fikserlangan element bo'lsin.  $x \in H_\tau$  bo'lsa,  $\text{sign}_\tau(x) = 1$  va  $x \notin H_\tau$  bo'lsa  $\text{sign}_\tau(x) = 0$  funksiyani qaraymiz. U odatdagi signum funksiyaning umumlashmasidir.  $H_\tau$  2 indeksli  $Q_p^*$  multiplikativ qism gruppaga bo'lgani uchun  $\text{sign}_\tau - Q_p^*$  dagi multiplikativ funksiya bo'ladi:

$$\text{sign}_\tau(ab) = \text{sign}_\tau(a) \cdot \text{sign}_\tau(b).$$

#### 2.1.5. Normalangan va lokal qavariq fazolar.

$E - K$  ustida chizqli fazo bo'lsin.  $E$  dagi  $\|\bullet\|_p : E \rightarrow R_+$  akslantirish

$$1) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$2) \|\lambda x\| = |\lambda|_K \|x\|, \quad \lambda \in K,$$

$$3) \|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$$

shartni qanoatlantirsa unga  $E$  dagi noarximed norma deyiladi. Agar  $\|\bullet\|$  - (2) va (3) shartlarni qanoatlantirsa, u holda  $\|\bullet\|$  -no-arximed old norma deyiladi.  $B$  noarximed banax fazoni oddatdagi kabi  $K$  ustida to'la normallangan fazo sifatida aniqlaymiz.  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  ultrametrika bo'ladi. shu sababli, ixtiyoriy noarximed banax fazo

to'la bog'liqsiz nol o'lchovli fazo bo'ladi.  $U_r(a) = \{x \in B : \|x - a\| \leq r\}$  va  $U_r^-(a) = \{x \in B : \|x - a\| < r\}$ ,  $r \in R_+$ ,  $a \in B$  sharlar yopiq-ochiq to'plamlar bo'ladi.  $B'$  qo'shma fazoni  $K$  chiziqli  $l : B \rightarrow K$  funksionallar fazosi sifatida aniqlaymiz.  $B'$  da norma kiritamiz:

$$\|l\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|l(x)|_K}{\|x\|}.$$

Berilgan normaga  $B'$ -Banax fazo bo'ladi.

**2.1.4-teorema.**  $B$ -no-arximed Banax fazosi bo'lsin.  $B$  da  $\sum_{m=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n \in B$

qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun  $a_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Kuchaytirilgan uchburchak tengsizligidan kelib chiqadi.

Agar  $E - K$  - chiziqli fazoda topologiya noarximed old normalar sistemasi bilan berilgan bo'lsa, u holda  $E$  noarximed lokal qavariq fazo deyiladi.  $a$  nuqtaning atrofi  $U_{\alpha,r}(a) = \{x \in E : \|x - a\|_{\alpha} \leq r\}$ ,  $r \in R_+$  ko'rinishga ega, bu yerda  $\|\bullet\|_{\alpha} \in P_E$  -  $E$  dagi topologiyani aniqlovchi old normalardan biri. Bunday old normalar  $P_E$  orqali belgilangan. Xususan, agar ixtiyoriy  $\|\bullet\|_{\alpha} \in P_E$  uchun  $\|x - x_n\|_{\alpha} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  bo'lsa,  $\{x_n\}$   $E$  fazo elementlar ketma-ketligi  $x \in E$  ga yaqinlashuvchi deyiladi.  $E$  Freshe fazosini topologiya metrik topologiyaga ekvivalent va bu metrikaga nisbatan to'la lokal qavariq fazo sifatida aniqlaymiz.  $E$  lokal qavariq fazoning kengaytmasi Freshe fazosi bo'lishi uchun uning topologiyasi  $\left\{ \|\bullet\|_n \right\}_{n=1}^{\infty}$  sanoqli old normalar bilan aniqlanishi zaur va yetarli.

No-Arximed banax lokal qavariq fazo odatdagi kabi kiritiladi. Agar  $B$ -banax algebra bo'lsa, u holda  $\|ab\| \leq C\|a\| \cdot \|b\|$  tengsizlik boshqariladi; agar  $E$  - lokal qavariq algebra bo'lsa,  $\forall \|\bullet\|_n \in P_E$  oldnorma uchun shunday  $\|\bullet\|_{\beta} \in P_E$  old norma topilib,  $\|ab\|_{\alpha} \leq C\|a\|_{\beta} \cdot \|b\|_{\beta}$  bo'ladi.

**2.1.1-eslatma.** Haqiqiy holda lokal qavariq fazo topologik vektor fazo bo'lib, qavariq to'plamlardan tashkil topgan nol nuqta atroflari fundamental sistemasi mavjud bo'ladi. Bunday atroflar sistemasining mavjudligi absolyut qavariq balanslangan qism to'plamlar fundamental sistemaning mavjudligiga ekvivalentdir. No-Arximed hol uchun absolyut qavariqlik tushunchasi qavariqlik tushunchasiga nisbatan tabiiydir. Agar barcha  $x, y \in A; \lambda, \mu \in K, |\lambda|_k, |\mu|_k \leq 1$  lar uchun  $\lambda x + \mu y \in A$  bo'lsa,  $A \subset E$  to'plam absolyut qavariq deyiladi. E noarximed chiziqli fazo absolyut qavariq qism to'plamlari va noarximed normalari orasida odatdagi munosabat mavjud. E fazo lokal qavariq bo'lishi uchun absolyut qavariq qism to'plamlardan iborat atroflarning fundamental sistemasi mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir. Absolyut qavariq fazolarning noarximed nazariyasi [86,90,92] ishlarda qaralgan.

**2.1.2-eslatma.** Lokal qavariq fazodagi absolyut kompakt qism to'plamning haqiqiy nazariyasi muhim o'rin egallaydi. No-Arximed holda to'g'ridan to'g'ri umumlashtirish turli patologik misollarga olib keladi. Shu sababli obyektlarning yangi sinfi-kompaktoidlar [91,92] kiritiladi.

No-Arximed banax fazosiga oddiy misol sifatida  $\|x\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|_k$  no-arximed normal  $k^n = k \times \dots \times k$  fazoni olish mumkin.

## 2.2. No-Arximed fazolarning ba'zi tadbiqi.

O'lchashning ikkinchi jarayoni: cheksiz kamayuvchi birlik shkalasi va cheksiz o'suvchi birlik shkalasi.

Istalgan o'lchash jarayoni biror o'lchash birligi 1 va  $m$  koeffitsientli o'sish yoki kamayish o'lchash birligi 1, ya'ni  $S(1, m)$  shkalani

$$x = \frac{a_{-k}}{m_k} + \dots + a_0 + a_1 m + \dots + a_n m^n, \quad (2.21)$$

ko'rinishidagi yig'indini bu shkala bo'yicha o'lchash mumkin, bu yerda  $a_j = 0, 1, \dots, m-1$ . Bu yig'indilarni  $S(1, m)$ -o'lchamli deb atash tabiiydir.

Ikkita imkoniyat mavjud:

1. Kamayuvchi birlikga ega o'lchash jarayoni  $m$  marta cheksiz, ya'ni

$$x = \dots + \frac{a_{-k}}{m_k} + \dots + a_0 + a_1 m + \dots + a_n m^n. \quad (2.2.2)$$

2. O'suvchi birlikga ega o'lchash jarayoni  $m$  marta cheksiz, ya'ni

$$x = \frac{a_{-k}}{m_k} + \dots + a_0 + a_1 m + \dots + a_n m^n + \dots \quad (2.2.3)$$

Birinchi holda (2.2) haqiqiy sonlar paydo bo'ladi, ikkinchi holda  $m$ -adik sonlar. Xususan, agar  $m = p$  tub bo'lsa,  $p$ -adik sonlar paydo bo'ladi.  $S(1, m)$  shkala yo  $\overleftarrow{S}(1, m)$ - $m$ -adik shkalaga yoki  $\overrightarrow{S}(1, m)$ - $m$ -adik shkalagacha davom etadi. Klassik haqiqiy fizikada (2.2.2) ko'rinishdagi abstraksiya mumkin bo'lsa, u holda yangi noarximed fizikada (2.2.3) ko'rinishdagi abstraksiya mumkin.

(2.2.2) va (2.2.3) ifodalar belgilar bo'lib, cheksiz o'lchash algoritmi uchun ishlatildi.

(2.2.2) irratsional sonlar va (2.2.3) ratsional sonlarni davriy  $m$ -adik son sifatida tasvirlash mumkin bo'lib,  $S(1, m)$ -o'lchamli bo'lmaydi.

Masalan, detsimetrli shkalada

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{7}{10} + \dots \quad (2.2.4)$$

irratsional son va

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots \quad (2.2.5)$$

Ratsional son o'lchovli emas.  $\sqrt{3}$  ni va  $\frac{1}{3}$  ni detsimetrli shkalada o'lchash natijasi sifatida hosil qilib bo'lmaydi. Biz faqat ularning (2.21) ko'rinishidagi kasrga yaqinlashishini hosil qilishimiz mumkin,  $m = 10$ , ya'ni detsimetrli shkala

uchun  $\sqrt{3}$  ham  $\frac{1}{3}$  ham (2.2.4), (2.2.5) cheksiz o'lchash algoritmini belgilash uchun ishlatiladigan belgi xolos.

$m$  – adik o'lchashlar uchun ham bu hol o'rinli. Masalan,

$$\frac{1}{3} = 1 + 2 + 2^3 + 2^5 \dots \quad (2.2.6)$$

$p$  – adik shkalada. Shunday qilib,  $m$  marta cheksiz o'suvchi o'lchash birligi (2.2.2) va  $m$  marta cheksiz kamayuvchi o'lchash birligi (2.2.3) cheksiz o'lchash algoritmi yig'indining hech qanday maxsus xossasini ifodalamaydi. Bu cheksizlik faqat  $\overleftarrow{S}(1, m)$  va  $\overrightarrow{S}(1, m)$  shkalalarni tanlashdan bog'liq.

Ta'kidlash lozimki, (2.2.3)  $m$  – adik son o'lchash jarayonini tavsiflab, har bir qadamda o'lchash birligi  $1 - m$  marta o'sadi. (2.2.3) algoritm cheksiz bo'lsin. U holda (2.2.3)  $m$  – adik son cheksiz sondagi o'lchash birligi 1 va o'lchash birligi 1 ga nisbatan cheksiz katta yig'indi sifatida tavsiflangan. Bu holda cheksiz katta yig'indilarning yangi xossalari paydo bo'ladi. Haqiqiy metrikaga nisbatan chekli yig'indini  $m$  – adik o'lchash jarayonida cheksiz katta yig'indi ko'rinishida tasvirlash mumkin.

### 2.2.1 No-Arximed kosmotologiya

Bu punktda biz  $m$  – adik sonlarni kosmologiyaga qo'llaymiz.

$m$  – adik kosmologiyada fazo-vaqtning  $m$  – adik modeli. Fazo-vaqtning  $m$  – adik modeli bir qator qiziqarli xossalarga ega. Masalan, bu yerda cheksiz sondagi birlik uzunlikka ega qadamni uzunligi  $\frac{1}{3}$  ga teng qadam bilan aralashtirish mumkin. Shunga o'xshash,  $t_0 = 0$  boshlang'ich moment uchun birlik  $\Delta t = 1$  uzunlikka ega (2.2.6) vaqt intervallarni hisoblab,  $t = \frac{1}{3}$  momentga qaytamiz. Shunday qilib, qaralayotgan  $m$  – adik modelda kosmologik shkalada vaqt-fazoda tartib yo'qoladi. 1 birlik o'lchashning qismi cheksiz sondagi 1 birliklar

ko'rinishida tasvirlanadi.  $m$ -adik modelda kosmologik fazo-vaqt no-arximed tuzilishga ega. Bundan tashqari,  $\vec{S}(1,2)$  shkala uchun

$$-1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + \dots \quad (2.2.7)$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib,  $m$ -adik modelda fazodagi yo'nalishlar farqi xuddi avvalgi va hozirgi kabi yo'qoladi. (2.2.7) ga ko'ra (2.2.7) cheksiz sonidagi  $\Delta t = 1$  intervallarni yig'ib biz avvalgi intervallardan biriga qaytamiz. Shunga o'xshash (2.2.7) munosabatning oddiy umumlashmasini olish mumkin:

$$-2 = 2^n + 2^{n+1} + \dots \quad (2.2.8)$$

va keyin

$$0 = 1 + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + \dots). \quad (2.2.9)$$

Shunday qilib, qaralayotgan  $m$ -adik  $m$ -adik modelda kosmologik fazo-vaqt cheksiz radiusli diskret tor tuzilishga ega.  $T = (2.2.9)$  kosmologik vaqtda  $m$ -adik o'z rivojida boshlang'ich  $t_0 = 0$  momentga qaytadi.

### 2.2.2 Kosmologiyadagi cheksiz, manfiy va nol massalar.

Cheksiz katta (2.2.3) masalalar totoidal  $m$ -adik fazo-vaqtga o'tkaziladi, ba'zi cheksiz massali konfiguratsiyalar esa (2.2.9) nol massani yoki (2.2.7)-(2.2.8) manfiy massa effektini beradi.

2.2.1-eslatma. Relyativistik nazariyada holatga asoslangan cheksiz massalar manfiy son bilan xarakterlanadi, ya'ni

$$M_0^2 = 1 + 2 + \dots + n + \dots = -\frac{1}{2}. \quad (2.2.10)$$

(2.2.10) tenglik  $R$  haqiqiy sonlar maydonida ma'noga ega emas, chunki (2.2.2) haqiqiy algoritmlar 1 o'lchash birligining cheksiz kamayishiga tadbqiq qilinadi, (2.2.10) da cheksiz o'suvchi bo'ladi. (2.2.10) algoritmi (2.2.3)  $m$ -adik algoritimga yaqin.  $P$ -struna (p-tub) - bu  $\nu_n = P_n, n = 0, 1, 2, \dots$  chastotali struna:

$$x_p(\sigma) = x_p^0 + \sum_{n=0}^{\infty} x_p^n \cos p^n \sigma, \quad \sigma \in [0, \pi]$$

$P$  struna asosiy holati uchun kvadrat massa

$$M_0^2 = 1 + p + p^2 + \dots + p^n + \dots = \frac{1}{1-p}.$$

Xususan,  $Q_{13}$  – 13 – adik sonlar maydonida

$$M_0^2 = 1 + 13 + 13^2 + \dots + 13^n + \dots = \frac{1}{1-13} = -\frac{1}{12}.$$

qator yaqinlashuvchi. Shunday qilib,  $p = 13$  uchun  $p$ -struka asosiy holati odatdagi bozon struna asosiy holati bilan ustma-ust tushadi.  $2p = 26$  hol – bu bozon struna uchun kritik o'lchov holidir.

2.2.3. Massa zichligi singulyarligining yo'qolishi.

(2.2.9) algoritmgaga ko'ra massa zichligining singulyarligi nol zichlikka olib keladi. Xuddi shunga o'xshash, (2.2.9) gravitatsiya yoki elektromagnit maydonda cheksiz o'sish uning yo'qolishiga olib keladi.

Mikrodunyo va Minkovskiy fazo-vaqt haqiqiy modelining noarximed tuzilishi.

Minkovskiy fazo-vaqt haqiqiy modeli ham noarximed tuzilishga ega. Biz uni faqat taqribiy arximed deb olishimiz mumkin.

Masalan,  $L = 1$ -makroshkaladagi o'lchash birligi,  $l = 1$  esa mikroshkaladagi o'lchash birligi bo'lsin. Agar biz  $L$  miqdorning mikrotuzilishini hisobga olmasak,

$$L > L/n, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.2.11)$$

Arximed munosabati qarashimiz mumkin. Biroq, agar  $L$  miqdorning mikrostrukturasini hisobga olsak, u holda

$$L = \left[ \frac{a_{-k}}{m^k} + \dots + a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \dots \right] l; \quad (2.2.12)$$

$$\frac{L}{m} = \left[ \frac{a_{-k}}{m^{k+1}} + \dots + \frac{a_0}{m} + a_1 + a_2 m + \dots \right] l; \quad (2.2.13)$$

(2.2.12) va (2.2.13) lar miqdorlar  $l$  ga qiyoslanganda cheksiz katta bo'ladi va (2.2.11) tengsizlik ikkita tengsizlarni taqqoslashga aylanadi.

Masalan,  $\vec{S}(1, m)$ -3-adik shkalada,  $L = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \dots$ , bo'lsa, u holda

$$\frac{L}{2} = 1 + 3 + 3^2 + \dots = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}.$$

bo'ldi.

Barcha (2.2.1)-(2.2.9) tenglamalar mikrodunyoda ham o'rinlidir.

## **Xulosa**

No-Arximed matematikaga birinchi qadamlar.

Ish refereariv xarakterga ega. Kirish qismi va asosiy tushunchalar muhokamasiga no-arximed matematikaning muhim jihatlariga bag'ishlangan. Shuni takidlash kerakki no-arximed sonlar maydoni o'tgan asrning boshlarida paydo bo'lgan bo'lsada, bu sonlarning fizika va boshqa tabiiy fanlarga tadbiqlari 1980 yildan keyin topilgan. Bugungi kunda kvant fizikasi va matematik biologiyada no-arximed sonlar maydoni juda keng qo'llanilmoqda. BMIda no-arximed matematikadan olingan natijalar o'rganildi. Ba'zi natijalar to'la isboti bilan berilgan. Maler no-arximed maydonni sonlar nazariyasida nuqtai nazaridan qaragan: raqamlar, yoyilmalar, algebraik amallar, bu amallar algoritmi. Shixovning izlanishlari no-arximed analiz nuqtai nazaridan foydalidir. No-Arximed normalangan fazolar zamonaviy matematik fizikaning asosiy matematik apparati hisoblanadi. Bu ishda biz no-arximed kosmotologiya haqida ko'proq to'xtalganmiz.

## **Xotima**

Ushbu bitiruv malakaviy ishi haqiqiy normalagan fazolar bobida No-Arximed sonlar maydoni, ultrametrikalar,  $p$ -adik sonlar maydoni mavzulariga to'xtalib o'tilgan. Biz bu mavzularga oid ta'rif, teorema, eslatma, tasdiqlar va ularning isbotlari keltirib o'tilgan. Normalagan fazo ta'rifi va unga doir misollar keltirilgan. Ostrovskiy va yomon talabani orzusi teoremlari va ularning isboti keltirib o'tilgan.

Noarximed normalar va ularning qo'llanilishini o'rganishga bag'ishlangan. Ish ikki bobdan iborat bo'lib, birinchi bobda mazkur ishni bayon qilishda zarur bo'ladigan ma'lumotlar keltirilgan. Xususan, noarximed sonlar maydoni, ultrametrikalar,  $p$ -adik sonlar maydoni haqidagi ta'rif tushuncha, teoremlar keltirilgan.

Ikkinchi bob ishning asosiy qismi bo'lib unda noarximed normallangan fazolar qaralgan. Xususan, Ostrovskiy teoremasi, kuchaytirilgan uchburchak tengsizligi bir nechta muhim natijalari keltirilgan va teoremlar isbotlangan.

### Foydanilgan adabiyotlar:

1. I.A.Karimov “Ona yurtimiz baxtu-u iqboli va buyuk kelajagi yo’lida xizmat qilish-eng oliy saodatdir”, T. :O’zbekiston, 2015 y. 20-30 betlar.
2. I.A.Karimov “Tarixiy xotirasiz kelajak yo’q”, O’zbekiston, 1998. 31-45 betlar.
3. I.A.Karimov “Yuksak ma’naviyat yengilmas kuch”, O’zbekiston, 2008. 11-30 betlar.
4. I.A.Karimov “Jahon moliyaviy-iqtisodiy inqirozi, O’zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo’llari va choralari”. T. :O’zbekiston, 2009 y. 10-15 betlar.
5. А.Ю.Хренников «Неархимедов анализ и его приложения», М.:Физматлит.2003 г. 92-97 ст
6. Н.Коблиц «р-адические числа, р-адический анализ и дзета-функции», М.:Мир,1982 г. 1-19 ст.
7. З.И.Боревич, И.Р.Шафаревич «Теория чизел», М.:Наука, 1985.
8. Ж.П.Серр «Курс арифметики», М.:Мир, 1972.
9. Б.Беккер, С.Востоков, Ю.Ионин «2-адический числа // Квант», 1979. — Т. 2.- С. 26-31
- 10.U.A.Roziqov. What are  $p$ -Adic Numbers? What are They Used for?. Asia Pacific Math. Newsletter, 2013, V.3, No.4., p.1-7.
11. Т.А.Саримсоков, «Функционал анализ курси», Т. :Укитувчи 1980 й. 84-110 б.
- 12.[www.eknigu.com/lib/Mathematics/](http://www.eknigu.com/lib/Mathematics/).
- 13.[www.eknigu.com/info/M\\_Mathematics/Mc](http://www.eknigu.com/info/M_Mathematics/Mc)
- 14.[www.ilm.uz](http://www.ilm.uz).