

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

Fizika – matematika fakulteti

“Matematik fizika va analiz” kafedrası
5460100 “Matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun

Ortikova Shahnoza Ormon qizi

“P-adik ehtimollik o'lchovlar nazariyasi”

Mavzusida

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**“Ish ko'rildi va himoyaga ruxsat Ilmiy rahbar: prof. U.Rozikov
berildi” ” _____ 2016y.**

Kafedra mudiri: ____ dots. R.Muxitdinov.

Taqrizchi: _____ o'qit. A.D. Qalandarov

“ _____ 2016y.

“ _____ 2016y.

“Himoya qilishga ruxsat berildi”

Fakultet dekani prof. Sh.M.Mirzayev

« _____ » 2016 y

Buxoro – 2016

Mundarija.

Kirish.....	3
I bob. P-adik sonlar arifmetikasi.....	.
1.1 P-adik son nima? Ular nima uchun ishlatiladi?.....	10
1.2 P-adik sonlar maydoni.....	15
1.3 Q_p da arifmetik amallar.....	22
1.4 Ratsional sonlarning p -adik yoyilmasi.....	25
II bob. P-adik qiymatli ehtimollik o'lchovi.....	
2.1 Noarximed qiymatli o'lchovga nisbatan integrallashning Monna Springer nazariyasi.....	28
2.2 Cheksizda kamayuvchi o'lchovlar.....	32
2.3 Funksiyalar va o'lchovlarning ko'paytmasi.....	34
2.4.1 P-adik qiymatli ehtimollik o'lchovi.....	39
2.4.2 Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar.....	40
2.4.3 Shartli matematik kutilma.....	43

Kirish

Mamlakatimiz rahbari asosiy e'tiborni yosh avlodni tarbiyalash masalasiga qaratib, ularning aqliy zakovati va ruhiy ma'naviy salohiyatiga to'g'risida g'amxo'rlik qilmoqda. Bu g'amxo'rlikni Oliy Majlisning birinchi chaqiriq IX sessiyasida (1997-yil 29-avgust) qabul qilingan. „Talim to'g'risida Qonun“, „Kadrlar tayorlash milliy dasturi“ da va 2008-yilni „Yoshlar yili“, 2010-yilni esa „Barkamol avlod“ yili deb nomlanishidan ham bilish mumkin. Bu hujjatlarda jamiyat kishilarining ayniqsa, yoshlarning aqliy zakovati va ruhiy ma'naviy salohiyatini yuksaltirish uchun ta'lim tizimini tubdan isloh qilish, uni mazmun va tuzilishini o'rganish uchun o'tmishdan qolgan mafkuraviy qarashlar va sarqitlardan to'la xalos etish „o'quv-tarbiya“ sohasidagi muammolarni izchillik bilan bosqichma-bosqich amalgam oshirish nazarda tutilgan.

Har qaysi ota-ona, ustoz va murabbiy har bir bola timsolida avvalo shaxsni ko'rish zarur. Ana shu oddiy talabdan kelib chiqqan holda farzandlarimizni mustaqil va keng fikrlash qobiliyatiga ega bo'lgan, ongli yashaydigan komil insonlar etib voyaga yetkazish talim-tarbiya olishga bog'liq. Bu esa ta'lim –tarbiya ishini uyg'un holda olib borishni talab etadi.

Darhaqiqat, istiqlol davrida barpo etilgan, barcha shart sharoitlarga ega bo'lgan akademik litsey va kasb hunar kollejlari, oliy o'quv yurtlarida tahsil olayotgan, zamonaviy kasb hunar va ilmiy ma'rifat so'zlarini o'rganayotgan, hozirdanoq ikki-uch yil tilda bimalol gaplashga oladigan ming-minglab, o'z istedodi va salohiyatini yorqin namoyon etayotgan yosh kadrlarimiz misolida ana shunday orzu-intilishlarimiz bugunning o'zida o'z hosilini berayotganini guvohi bo'lmoqdamiz.

Eng muhimi shundaki „portlash effekti“ haqiqiy mohiyati va ahamiyati vaqt o'tishi bilan biz tarbiya qilayotgan sog'lom va barkamol avlodning safimizga ildam kirib borishi yanada yaqqol seziladi.

Kadrlar tayorlash milliy dasturini amalgam oshirish jarayonida maktab ta'limi, ayniqsa, umumta'lim maktablarning moddiy-texnik bazasini mustahkamlashga e'tiborni kuchaytirish biz uchun kun tartibidagi muhim va jiddiy masalaga aylandi.

Shu maqsadda yurtimizda Kadrlar tayyorlash milliy dasturining uzviy va mantiqiy davomi bo'lmish 2004-2009-yillarda bu Maktab ta'limini rivojlantirish umummilliy davlat dasturi qabul qilindi.

Ushbu dasturga muvofiq yurtimizda mavjud bo'lgan o'n mingga yaqin umum ta'lim maktabining moddiy texnik bazasini mustahkamlash, talim jarayonining mazmunini tubdan takomillashtirish rag'batlantirish bo'yicha katta ishlar qilinmoqda.

Biz yurtimizda yangi avlod, yangi tafakkur sohiblarini tarbiyalashdek masuliyatli vazifani ado etishda birinchi galda anashu kasb agalariga suyanamiz, ertaga o'rnimizga keladigan yoshlarning ma'naviy dunyosini shakllantirishda ularning xizmati naqadar beqiyos ekanini o'zimizga yaxshi ta'savur qilamiz.

„Agar bolalar erkin fikrlashni o'rganmasa berilgan ta'lim samarasi past bo'lishi muqarrar“ Islom Abdug'aniyevich Karimov.

Biz Navoiy, Bobur, Xorazmiy, Beruniy, Imom Buxoriy, Qoshg'ariy, Ulug'bek, Ummar Hayyom, Ibn Sino avlodlari har tomonlama yetuk barkamol bo'lib yetishimiz uchun keng imkoniyatlar yaratilib, Prezidentimiz Islom Abdug'aniyevich Karimov yosh avlod tarbiyasiga katta e'tibor berib, kelajakda iqtidorli, kuchli salohiyatni, izlanuvchan kadrlar, qobiliyatli mutaxassislar tayorlash borasida ko'plab sayi-harakatlar amalgam oshirilmoqda. Jumladan, „Asosiy vazifamiz- vatanimiz taraqqiyoti va xalqimiz farovonligini yanada kuchaytirish“ nomli 2009-yilning asosiy yakunlari va 2010-yilda O'zbekistonni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirishning eng asosiy muhim ustuvor vazifalariga bag'ishlangan Vazirlar Mahkamasining majlisidagi maruzasida „Biz farzandlarimizning nafaqat jismoniy va ma'naviy sog'lom o'sishi, balki ularning eng zamonaviy intellektual bilimlarga ega bo'lgan uyg'un rivojlangan insonlar bo'lib, XXI-asr talablariga

to'liq javob beradigan barkamol avlod bo'lib voyaga yetish uchun zarur barcha imkoniyatlarimizni safarbar etishni ko'zga tutadi." deganlar. Ta'lim tizimini isloh qilish bilan bir qatorda , ta'lim jarayoning mazmuni uning shakli tuzilmasi va unga qo'yilgan talablar ham ko'rinishga o'tmoada , u endi o'zining oldingi , yani sobiq tizimi davridagi qatib qolgan ma'muriy, pedagogik tizimdan tubdan farq qilishi bilan xarakterlanadi. Prezidentimiz Islom Abdug'aniyevich Karimov „Barhamol avlod O'zbekiston taraqqiyotining poydevori" ma'ruzasida yana quyidagilarga to'xtalib o'tgan edi:

Umumlashtirilgan holda kadrlar tayyorlash tizimini sharoitini shakllantirish va faoliyat ko'rsatishining asosiy tamoiyillari, mening nazarimda quyidagi vazifalarni o'z ichiga oladi.

barcha xil va turdagi ta'lim muassalarida yuqori malakali mutaxassislar uchun uzluksiz ta'lim, fan va ishlab chiqarish salohiyatidan samarili foydalanish.

Davlat ta'lim standartlarini joriy etish va ularning faoliyat ko'rsatish mexanizmini ishlab chiqish;

- Ixtisosliklar, malaka darajasiga ko'ra mutaxassislariga bo'lgan umumdavlat va mintaqaviy talablarning istoqbolini aniqlash;

- Ta'lim tizimini tuzish va mazmun jihatdan isloh qilish uchun o'qituvchilarni va murabbiylarni qayta tayorlash ;

- Davlat va ijtimoiy muassalarning kasbga yo'naltirish bo'yicha faoliyatini takomillashtirish. Bunda kasb tanlashning bozor ehtiyojlari va imkoniyatlarini e'tiborga olish zarur, toki har bir kishi o'ziga mos kasbni egallay olsin.

„Barkamol avlod yili" davlat dasturi to'g'risida O'zbekiston Respublikasi Prezidentining qarorida „ Ta'lim jarayonida yangi axborot komunikatsiya va pedagogik texnologiyalarni elektronik dasturliklar, multimediya vositalarini keng joriy etish orqali mamlakatimiz maktablarida, kasb-hunar kolejlari, litseylar va oily o'quv yurtlarida o'qitish sifatini tubdan yaxshilash, ilm-fanni ytanada rivojlantirish , iqtidorli va qobiliyatli talabalarni ilmiy faoliyatga

keng jalb qilish, ularning o'z ijodiy va intellektual salohiyatini ro'yobga chiqarish , sharoit yaratishga doir kompleks chora tadbirlarni ishlab chiqish, ko'zda tutilgan vazifalardan biri hisoblanar ekan , darslarda Yangi Pedagogik Texnologiyalaridan foydalanish , ta'lim samaradorligini oshirish, Prezidentimiz ta'kidlagan -„erkin fikrlashni” o'rganish uchun ayni muddao bo'ladi.

Yurtimiz, Barkamol avlod-O'zbekiston taraqqiyotining poydevori asarlarida quyidagi shartlarni o'qitishimiz mumkin: „ Mamlakatimizni istiqlol yo'lidagi birinchi qadamlaridanoq buyuk mamlakatimizni tiklash va yanada yuksaltirish, milliy ta'lim tarbiya tizimini tiklash va yanada yuksaltirish, milliy ta'lim tarbiya tizimini takomillashtirish, uning milliy zamini mustahkamlash, zamon talablari bilan uyg'unlashtirish asosida jahon andozalari vqa ko'nikma darajasiga chiqarish maqsadida katta ahamiyat bo'lib ko'rinmoqda.

Jumladan, Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” da takidlaganidek, ta'lim sohasini tubdan isloh qilish, uni o'tmishdan qolgan mafkuraviy qarashlar va sarqitlardan to'la xolos etish, rivojlangan demokratik davlatlar darajasida yukak ma'naviy va axloqiy talablarga javob beruvchi yuqori malakali kadrlar tayyorlash milliy tizimini tashkil etadi.

-o'quvchi yoshlarni vatanga sadoqat, yuksak axloqiy, ma'naviyat va ma'rifat, mehnatga vijdonan munosabatda bo'lish ruhida tarbiyalash,

-ta'lim muassalarini , birinchi navbatda umumta'lim masalalarini, maktablarni davlat tomonidan moliyaviy va moddiy teexnikaviy to'liq taminlash meyorlarini oshirish va uning mexanizmini takomillashtirish;

- kadrlar tayorlash tizimini istemolchilari, korxonalar, muassalari, firmalar hissadorlik jamiyatlari, banklar va boshqa tuzilmalarning imkoniyatlaridan, birinchi navbatda , o'rta ta'lim o'quv yurtlari va oily o'quv yurtlarining moddiy va ma'naviy bazasini mustahkamlash uchun mumkin qadar foydalanish;

- kadrlar tayyorlash va ta'lim sohasiga chet el sarmoyalarini, xalqaro donorlik tashkilotlari va jamg'armalarining mablag'larini jalb etish;

- qonun doirasida o'quv rejalari, dasturlar va o'qitish yo'riqnomalarini, ta'limiy xizmatlarni belgilashda ta'lim muassalariga, birinchi navbatda, oily o'quv yurtlariga mustaqillik berish va o'zini o'zi boshqarish usullarini joriy etish.

Tabiiyki, bunday murakkab vazifalarni amalgam oshirishda davlat vajamioyatning ma'suliyati alohida ahamiyat kasb etadi.

Davlat va jamiyat kadrlar tayyorlash tizimini uzliksiz rivojlantirish va takomillashtirishning kafili bo'lishi zarur. Ular yuqori malakali, raqobatga qodir mutaxassislar tayyorlash bo'yicha ta'lim muassalarining faoliyatini uyg'unlashtirishi lozim.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti „Tarixiy xotirasiz kelajak yo'q“ asarida komil inson tushunchasiga aniq ta'rif beradilar. Komil inson deganda biz, eng avvalo ongi yuksak, o'z xulq-atvori bilan o'zgalarga ibrat bo'ladigan, mustaqil fikrlay oladigan, bilimli ma'rifatli kishilarni tushunamiz. Buning uchun o'qituvchi yoshlarga nutq mahorati, notiq va har qanday gapiruvchining ma'naviy yetukligi o'z fanini chuqur o'rganishi, insoniy vazilatlari bilan bog'liq ekanligini tushuntirishi zarur. O'qituvchidan o'z nutq mahoratini oshirish uchun mantiqiy fikrlashni bilish, o'z fikriga o'qituvchi o'quvchilarni ishontirish uchun mantiqiy dalillash san'atini – ritorikani yaxshi o'rganish, tarixdagi mashhur allomalarning ta'lim – tarbiyaga ma'naviy kamolotga doir hikmatli so'zlari, ibratli hayotiy voqealarni, badiiy va pedagogik asarlarida qiziqarli hikoyalarni keltirib, o'z nazariy pedagogic fikrlarni isbotlashi muhim ahamiyatga egadir.

Zamonaviy darsga qo'yiladigan talab asosan jamiyatimizni ehtiyojlaridan kelib chiqadi. Jamiyatning rivoji hayotning barcha jabhalariga shu jumladan ta'lim mazmuniga, dars tuzilishiga qolaversa insonning kundalik faoliyatiga albatta o'z ta'sirini o'tkazishi tabiiydir. Zamonaviy darslar inson ma'naviyatini yuksaltirishda eng asosiy mezondir.

Bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligi: Zamonaviy ilm-fan tarraqiyoti shuni ko'rsatmoqdaki haqiqiy sonlar maydoni ustida rivojlantirilgan matematik analiz hamda extimollar nazariyasi ko'plab fizik va biologik

sistemalarni o'rganishda yetarli emas. Shu sababli haqiqiy sonlarning o'rnida p -adik sonlar bilan ishlashga zaruriyat tug'ildi. Bu sonlar shunisi bilan muhimki ratsional sonlar to'plamidan har xil metrika yordamida to'ldiriganda yoki haqiqiy sonlar maydoni, yoki p -adik sonlar maydoni hosil bo'ladi (Boshqa hech qanday sonlar hosil bo'lmaydi--Ostrovsky teoremasi). Bu fakt bizni o'rab turgan olam qonunlari faqat 2 xil sonlar (haqiqiy va p -adik) yordamida ifodalanishini tasdiqlaydi. Shu sababli p -adik sonlar ustida analiz, ehtimollar nazariyasi, differensial tenglamalar, matematik fizika nazariyalarini rivojlantirish dolzarb bo'lib qoldi. BMIda shu masalalardan biri p -adik ehtimollik o'lchovlar nazariyasini o'rganish masalasi qaraldi. Yuqorida keltirilgan fikrlar bu mavzuning naqadar dolzarb ekanligini ifodalaydi. Ikkinchi tomondan, oliy o'quv yurtlarida matematika yo'nalishidagi iqtidorli talabalar va magistrarlari uchun ilmiy to'garaklarini olib borishga yo'naltirish. Buning uchun esa p -adik son, sonlar maydoni, p -adik qiymatli ehtimollik o'lchovi kabilarni bilishimiz zarurdir.

Tadqiqot obyekti va predmeti: p -adik sonlar maydoni. Bu maydonda berilgan p -adik o'lchovlar.

Ishning maqsad va vazifalari: Ishda ko'zlangan asosiy maqsad talabaning universitet kurslarida o'tilmaydigan yangi mavzuni o'rganishi. Bu mavzu zamonaviy p -adik sonlar nazariyasining bir qismidir. Talabaga qo'yilgan vazifalar: p -adik sonlar, p -adik qiymatli ehtimollik o'lchovi mavzusi haqida bilim, ko'nikmalar hosil qilish. Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega, unda oliy o'quv yurtlarida matematika yo'nalishi iqtidorli talabalari va magistrarlarni bilimini tekshirishda foydalanish mumkin.

Tadqiqot usuli va uslubi: Ish referativ xarakterga ega bo'lgani sababli unda p -adik sonlar maydonidagi ma'lum metodlar va usullar o'raniladi. p -adik sonlar, p -adik sonlar maydoni, p -adik qiymatli ehtimollik o'lchovi mavzusiga oid bo'lgan maqolalarni o'rganish, tahlil qilish va matematik analiz metodlaridan

foydalanish usuli va uslubiyotlari. P-adik sonlar nazariyasi yani p-adik sonlar ustida algebraik amallar:qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lishni olib borish.

Olingan asosiy natijalar: p-adik sonlar maydoni, ular ustida arifmetik amallar, p-adic ehtimollik o'lchovlar nazariyasi o'rganildi. Asosiy natijalar shuki p-adik sonlar maydoni kiritilishidan oldin biz metric fazo va to'la metric fazolarni kiritib so'ngra bu asosiy tushunchalar orqali p-adik sonlar maydoni qurildi. P- adik sonlar maydoni ustida arifmetik amallar bajarildi. P-adic qiymatli ehtimollik o'lchovini o'rganish uchun esa avval o'lchov, kamayuvchi o'lchov tushunchalarini kiritib so'ng tasodifiy miqdor, matematik kutilma, shartli zichlik funksiyasi diskret tasodifiy miqdor, ularga doir ta'rif, teorema va lemmalar o'rganildi.

Natijalarning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati: Bitiruv malakaviy ishi refereativ xarakterda bo'lib, bu nazariyalar universitetda matematik analiz va funksional analiz kurslaridan o'rgangan nazariyalar davomi bo'lib hisoblanadi. Ishda ilmiy yangilik yo'q, faqat bor nazariyani o'rganish maqsadida qilingan.

Tadbiq etish darajasi va iqtisodiy samaradorligi, qo'llanilish sohasi.

Xulosa va takliflar:

Ishda qaralgan natijalar nazariy xarakterga ega. Ulardan ko'plab fizik va biologik sistemalarni o'rganishda foydalanilishi zamonaviy fanda keltirilgan. Bizni o'rab turgan olam qonunlari faqat 2 xil sonlar (haqiqiy va p-adik) yordamida ifodalanishini tasdiqlangan. BMda p-adik extimollik o'lchovlar nazariyasini o'rganish masalasi qaraldi. Oliy o'quv yurtlarida matematika yo'nalishidagi iqtidorli talabalar va magistrleri uchun ilmiy to'garaklarini olib borishga yo'naltirish uchun qo'llash mumkin.

Ishning hajmi va tuzilishi: Bitiruv malakaviy ish kirish, ikkita bob va 8 ta mavzudan iborat. I-bob to'rtta mavzuni o'z ichiga olib, bu bobda bosh obyektни kiritamiz. Ya'ni p-adik sonlar, p-adik sonlar maydoni, p-adic sonining fazosi kabi tushunchalar kiritildi. II-bob to'rtta mavzuni o'z ichiga olib, bu mavzular bitiruv malakaviy ishi mavzusining asosiy qismi bo'lib hisoblanadi. Bu bobda p-adik

qiymatli ehtimollik o'lchovi: noarximed qiymatli o'lchovga nisbatan integrallashning Monna Springer nazariyasi, cheksizda kamayuvchi o'lchovlar, bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar, shartli matematik kutilma kabilar o'rganilib ularga doir misollar yechildi.

I.Bob

P-adik sonlar arifmetikasi

1.1 P-adik son nima? Ular nima uchun ishlatiladi.

P-adik sonlar . p-adik sonlar 1904 yilda nemis matematiki K.Hensel tomonidan kiritilgan. Ular sonlar nazariyasiga keng qo'llaniladi. Biz odatda haqiqiy sonni o'nli kasr ko'rinishida yozishda verguldan chapga cheklita o'ngga esa cheksizta raqam ishlatishimiz mumkin. P-adik butun sonlar p asos bo'yicha butun ko'rinishga yoziladi, lekin verguldan chapga cheksizta raqam yozilishi mumkin o'ngda esa cheklita yoziladi.

Masalan, 35 ning ikkilik sanoq sistemasida yoyilmasi $1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5$ bazida qisqacha 100011_2 kabi xam yoziladi.

$1=0,1111\dots_2=0,(1)_2$ tenglik o'rinli. Lekin $\dots 111111,0_2=(1),0_2$ nimani bildiradi? $(1),0_2+1$ ni hisoblaymiz :

$$\begin{array}{r} \dots\dots\dots 111111,0_2 \\ + \dots\dots\dots 000001,0_2 \\ \hline \dots\dots\dots 000000,0_2 \end{array}$$

Demak $(1),0_2 = -1$. Bu tenglik.

$$(1),0_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - 1) = -1. \quad (1.1.1)$$

kabi yozilishi mumkin . Bu limit $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = 0$ ga ekvivalent . Haqiqiy holda

$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ bo'lishi uchun $|q| < 1$ bo'lishi zarur va yetarli. Haqiqiy sonni absolyut qiymat metrikadan foydalanib ratsional sonlar ketma-ketligining barcha limit nuqtalari sifatida aniqlash mumkin.

(1.1.1) limitga ma'no berish uchun yangi $|\cdot|_*$ absolyut qiymat kiritamiz, ratsional sonlar to'plamida $|2|_* < 1$. Bu quyidagicha amalga oshiriladi. Q – ratsional sonlar maydoni bo'lsin. Har bir $x \neq 0$ ratsional son $x = p^r \frac{n}{m}$ ko'rinishida tasvirlanadi, bu yerda $r, n \in Z$, m esa musbat butun son, $(p, n) = 1, (p, m) = 1$ va p fiksirlangan tub son.

x ning p -adik absalyut qiymatini (normani)

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

kabi aniqlaymiz.

p -adik norma qat'iy uchburchak tengsizligi

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} \quad (1.1.2)$$

ni qanoatlantiradi, va u noarximed normadir.

$|x|_p$ ning bunday ta'rifi p ning yuqori darajalari “kichik” bo'lib qoladi, xususan

$$|2^n|_2 = \frac{1}{2^n}.$$

Shunday nolmas $a_1, \dots, a_r$ butun sonlar mavjudki $x = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ bo'ladi. U holda barcha $i = 1, \dots, r$ lar uchun $|x|_{p_i} = p_i^{-a_i}$ va boshqa $p \notin \{p_1, \dots, p_r\}$ tub sonlar uchun $|x|_p = 1$.

Masalan $63/550 = 2^{-1} \cdot 3^2 \cdot 5^{-2} \cdot 7 \cdot 11^{-1}$ va

$$\left| \frac{63}{550} \right| = \begin{cases} 2 & p = 2, \\ 1/9 & p = 3 \\ 25 & p = 5 \\ 1/7 & p = 7 \\ 11 & p = 11 \\ 1, & p \geq 13 \end{cases}$$

Agar shunday $\alpha > 0$ son topilib:

$$\|\bullet\|_1 = \|\bullet\|_2$$

bo'lsa, Q dagi 2 ta $\|\bullet\|_1$ va $\|\bullet\|_2$ normalar ekvivalent deyiladi.

Ostrovskiy teoremasiga ko'ra Q dagi har bir absolyut qiymat $\|\bullet\|$ yoki Evklid absolyut qiymatga (bu odatdagi absolyut qiymat), trivial absolyut qiymatga yoki biror p tub son uchun p -adik absolyut qiymatga ekvivalent bo'ladi.

Q dagi har bir absolyut qiymat bo'yicha masofani $|x-y|$ orqali kiritish mumkin. Shunday qilib p -adik absolyut qiymat Q dagi $|x-y|_p$ metrikanani aniqlaydi.

Agar r yetarlicha katta bo'lsa x va y sonlar p -adik ma'noda bir-biriga yaqin bo'lib, $p^r - |x-y|_p$ ga bo'linadi. $P=5$ uchun 135 soni 10 soniga 35 dan qaraganda yaqindir.

Q ning p -adik normaga nisbatan kengaytmasi p -adik maydonni tashkil qiladi va Q_p bilan belgilanadi. Istalgan p -adik $x \neq 0$ soni

$$x = p^{y(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots)$$

kanonik ko'rinishda yagona tasvirlanadi, bu yerda $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ va x_j butun son, $0 \leq x_j \leq p-1$, $x_0 > 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Bu xolda $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$. P -adik sonlar to'plami, Q ratsional sonlar maydonini o'zida saqlaydi, lekin undan farq qiladi.

P -adik sonlarning kanonik ko'rinishidan foydalanib, haqiqiy sonlarga o'xshab p -adik sonlar ustida arifmetik amallarni bajarish mumkin.

2. P -adik sonlarning "Yaxshi" xossalari. Ultra-metrik uchburchak tengsizligi, ya'ni (2) haqiqiy va p -adik sonlar orasidagi ko'plab farqlarni o'z ichiga oladi. P -adik sonlarning quyidagi xossalariga ko'ra

P -adik tahlil haqiqiy tahlilga nisbatan sodda ekanligini ko'rsatadi.

1. Barcha uchburchaklar teng tomonlidir

2. $D(a, r) = \{x \in Q_p : |x-a|_p \leq r\}$ doiraning istalgan $(\cdot)$ si uning markazidir.

Har bir doiraning chegarasi bo'sh to'plam. 2 ta doira yo kesishmaydi, yoki biri ikkinchisining ichida yotadi.

3. Agar $P_1 \neq P_2$ bo'lsa, $|\cdot|_{p_1} \not\sim |\cdot|_{p_2}$. Har bir p tub son o'zining Q_p p-adik maydoniga ega.

4. $x^2 = -1$ tenglama $x \in Q_p$ yechimga ega bo'lishi uchun $p \equiv 1 \pmod{4}$ bo'lishi zarur va yetarli.

5. Q_p dagi $\{x_n\}$ kerak qoshi kerakligi bo'lishi uchun $|x_{n+p} - x_n|_p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ bo'lishi zarur va yetarli.

Bu xossa quyidagi muhim natijani beradi : yig'indi yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning umumiy hadi nolga yaqinlashishi zarur va yetarli:

6. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ bo'lishi uchun $a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ bo'lishi zarur va yetarli.

$|n!|_p \rightarrow 0$ bo'lgani uchun,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n!(n+2) = 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n!(n^2-5) = -3$$

o'rinli. $\sum_{n=0}^{\infty} n!$ yig'indi har bir Q_p da mavjud. Quyidagi masala 1971-yildan beri

ochiqdir. **Muammo** : biror p tub soni uchun $\sum_{n=0}^{\infty} n!$ ratsional bo'lishi mumkinmi?

Agar Q_p da $\sum_{n=0}^{\infty} n! \neq 0$ bo'lsa bu noma'lum .

7. Xar bir $x \in Q_p$ uchun

$$|x| \prod |x_p| = 1$$

P: tub

o'rinli . Bu formula sonlar nazariyasining ko'plab masalalarini hal qilishda muhim bo'lib, Helmut Hessening lokalgeobal prinsipi qo'llaniladi .

3. P-adik sonlarning yomon xossalari .

1. Q_p tartiblanmagan

2. Q_p R bilan taqqoslanuvchi emas , masalan $\sqrt{7} \notin Q_5$, lekin $i = \sqrt{-1} \in Q_5$

3. Q_p algebraik yopiq emas.

Lekin $|\cdot|_p$ ni Q_p^a algebraik yopig'iga yagona usulda davom ettirish mumkin va $(Q_p^a, |\cdot|_p)$ kengaytma C_p kabi belgilanib, p -adik kompleks sonlar maydoni deb ataladi.

C_p lokal kompakt emas, lekin u separabel va algebraik yopiqdir.

Endi $\exp_p$ va $\log_p(x)$ funksiyalarni aniqlaymiz.

Berilgan $a \in Q_p$ va $r > 0$ uchun

$$B(a, r) = \{x \in Q_p : |x - a|_p < r\}$$

deb olamiz. p -adik logarifm

$$\log_p(x) = \log_p(1 + (x-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

qator yordamida aniqlanadi, va $x \in B(1, 1)$ da yaqinlashadi. p -adik eksponensial funksiya $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$ da yaqinlashuvchi.

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

qator orqali aniqlanadi. Agar $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$ bo'lsa u holda

$$|\exp_p(x)|_p = 1, \quad |\exp_p(x) - 1|_p = |x|_p, \quad |\log_p(1+x)|_p = |x|_p,$$

$$\log_p(\exp_p(x)) = x, \quad \exp_p(\log_p(1+x)) = 1+x$$

o'rinli

4. “Yomon” bo'ladigan ba'zi “yaxshi” funksiyalar. Masalan, $\exp(x)$

R da juda “yaxshi” funksiya hisoblanadi, lekin yuqoridagi mulohazalarga ko'ra $\exp_p(x)$ funksiya faqat $B(0, p^{-1/(p-1)})$ doirada aniqlangan.

1.2. p -adik sonlar maydoni.

X -bo'sh bo'lmagan to'plam bo'lsin. X ning tartiblangan (x, y) juftliklari to'plamida aniqlangan va nomanfiy haqiqiy qiymatlarini qabul qiluvchi d funksiya

(1) $d(x, y) = 0$ faqat va faqat $x = y$ bo'lsa;

$$(2) d(x, y) = d(y, x);$$

$$(3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ barcha } z \in X \text{ larda}$$

shartlarni qanoatlantirsa, d ga X dagi masofa yoki metrika deyiladi. X to'plam berilgan d metrika bilan birgalikda metrik fazo deyiladi. Bitta X to'plamdan bir nechta metrik fazolarni qurish mumkin.

Ko'pincha X to'plam sifatida maydonni qaraymiz. F maydon ikkita $\bullet$ va $+$ binar munosabatli to'plam bo'lib, F to'plam $+$ amalga nisbatan kommutativ grupp bo'ladi, $F - \{0\}$ esa $\bullet$ amalga nisbatan kommutativ grupp bo'ladi va distributivlik qonuni o'rinli bo'ladi. Maydonga misol sifatida Q ratsional sonlar maydonini va R haqiqiy sonlar maydonini olish mumkin.

F maydondagi normaga mos keluvchi d metrika bilan ishlaymiz. F haqiqiy nomanfiy sonlar maydonida aniqlangan $\|\bullet\|$, akslantirish

$$(1) \|x\| = 0 \text{ faqat va faqat } x = 0 \text{ bo'lganda};$$

$$(2) \|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|;$$

$$(3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

shartlarni qanoatlantirsa, unga norma deyiladi. Agar d metrika $d(x, y) = \|x - y\|$ formula bilan aniqlansa, d metrika $\|\bullet\|$ normaga mos deb aytiladi. Bunday aniqlangan d funksiya haqiqatan ham metrika bo'ladi.

Q ratsional sonlar maydonidagi normaga asosiy misol bu $|x|$ dir. Unga mos $d(x, y) = |x - y|$ metrika sonlar o'qidagi odatdagi masofa bilan ustma-ust tushadi. Keyingi bo'limlarda yangi tipdagi metrika qaraladi. U (1)- (3) shartlarni qanoatlantiradi, lekin uning xossalari keskin farq qiladi. Quyida biz nafaqat Q maydon bilan balki uning turli kengaytmalari bilan ishlaymiz.

1.2.1 Ratsional sonlar maydonidagi metrikalar.

Biz Q maydondagi bitta maydonni bilamiz: u odatdagi absolyut qiymatga mos keladi.

1.2.1-ta'rif. $p \in \{2,3,5,7,11,13,17,\dots\}$ - biror tub son bo'lsin. Ixtiyoriy nolmas butun a soni uchun $\text{ord}_p a$ orqali a ning tub ko'paytuvchilariga yoyilmasida p ning karraligini, ya'ni $a \equiv 0 \pmod{p^m}$ bo'ladigan butun nomanfiy m sonlarning eng kattasi belgilanadi. Masalan, $\text{ord}_5 35 = 1$, $\text{ord}_5 250 = 3$, $\text{ord}_2 96 = 5$, $\text{ord}_2 97 = 0$. Agar $a = 0$ bo'lsa, $\text{ord}_p 0 = \infty$ deb olamiz. ord_p fuksiya biroz logarifm funksiyaga o'xshaydi: $\text{ord}_p(a_1 a_2) = \text{ord}_p a_1 + \text{ord}_p a_2$.

Ixtiyoriy $x = a/b$ rasional son uchun $\text{ord}_p x$ ni $\text{ord}_p a - \text{ord}_p b$ deb olamiz. Bunday aniqlangan miqdor faqat x dan bog'liq: $x = ac/bc$ tasvirdan $\text{ord}_p x = \text{ord}_p ac - \text{ord}_p bc$ ni hosil qilamiz.

Bundan tashqari, Q ga quyidagi $|\cdot|_p$ akslantirishni aniqlaymiz:

$$|x|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{\text{ord}_p x}}, & \text{agar } x \neq 0 \\ 0 & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

1.2.1-tasdiq. $|\cdot|_p$ fuksiya Q maydonda normani aniqlaydi.

Isboti. (1) va (2) xossalarni mustaqil tekshirish uchun qoldiramiz. (3) ni tekshiramiz. Agar $x = 0$ yo $y = 0$ yoki $x + y = 0$ bo'lsa, u holda (3) oson tekshiriladi. Shu sababli x , y , $x + y$ sonlarni nolmas deb olamiz. $x = a/b$ va $y = c/d$ lar qisqarmas tasvirlar bo'lsin. U holda $x + y = (ad + bc)/bd$ va $\text{ord}_p(x + y) = \text{ord}_p(ad + bc) - \text{ord}_p b - \text{ord}_p d$. Ikkita butun son yig'indisi bo'linuvchi p ning eng katta darajasi har bir qo'shiluvchi bir vaqtda bo'linadigan p ning darajasidan kichik emas. Shu sababli

$$\begin{aligned} \text{ord}_p(x + y) &\geq \min(\text{ord}_p ad, \text{ord}_p bc) - \text{ord}_p b - \text{ord}_p d = \min(\text{ord}_p a + \text{ord}_p d, \text{ord}_p b + \text{ord}_p c) - \\ &- \text{ord}_p b - \text{ord}_p d = \min(\text{ord}_p a - \text{ord}_p b, \text{ord}_p c - \text{ord}_p d) = \min(\text{ord}_p x, \text{ord}_p y). \end{aligned}$$

Shunday qilib, $|x + y|_p = p^{-\text{ord}_p(x+y)} \leq \max(p^{-\text{ord}_p x}, p^{-\text{ord}_p y}) = \max(|x|_p, |y|_p)$ oxirgi

esa $\leq |x|_p + |y|_p$.

Aslida biz kuchliroq tengsizlikni isbotladik. Hosil bo'lgan tengsizlik p -adik analizning asosiy tushunchalaridan biriga olib keladi.

1.2.2-ta'rif. Agar hamisha $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$ tengsizlik bajarilsa, normaga noarximed normasi deyiladi. Agar $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ bajarilsa, d ga noarximed metrika deyiladi. Noarximed normaga mos metrika noarximed metrika deyiladi. Chunki bu holda

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \max\{\|x - z\|, \|z - y\|\} = \max\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

Shunday qilib, $|\cdot|_p - Q$ maydondagi noarximed norma bo'ladi. noarximed bo'lgan norma (yoki metrika) ga arximed norma (yoki metrika) deyiladi.

Har bir X metrik fazoda Koshi ketma-ketligi aniqlangan. X ning $\{a_1, a_2, \dots\}$ elementlari ketma-ketligi uchun $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer topilib, istalgan $m > N$ va $n > N$ larda $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, unga Koshi ketma-ketligi deyiladi.

Ta'rifga ko'ra agar ikkita d_1 va d_2 metrikalarga mos Koshi ketma-ketliklari sinfi ustma-ust tushsa, ular ekvivalent deyiladi. Agar ikkita normaga mos metrikalar ekvivalent bo'lsa, ular ekvivalent normalar deyiladi. $\rho \in (0, 1)$ haqiqiy sonni fiksirlaymiz, keyin $|\cdot|_\rho$ ta'rifida $(1/\rho)^{\text{ord}_{p^x}}$ o'rniga $\rho^{\text{ord}_{p^x}}$ ni qo'yamiz. U holda $|\cdot|_\rho$ ga ekvivalent bo'lgan noarximed normani hosil qilamiz. $\rho = 1/p$ kabi tanlashning qulayligini keyingi misollarda tushuntiramiz.

$|\cdot|$ odatdagi absolyut qiymatga ham unga ekvivalent bo'lgan arximed normalari oilasi mos keladi, aynan $|\cdot|^\alpha$, bu yerda $0 < \alpha \leq 1$.

Odatdagi absolyut qiymatni ba'zida $|\cdot|_\infty$ orqali belgilaymiz. Bunda $|\cdot|_\infty$ va $|\cdot|_p$ orasida hech qanday aloqa yo'q, bu shunchaki qulay belgilash.

“Trivial” norma sifatida $\|0\| = 0$ va barcha $x \neq \theta$ larda $\|x\| = 1$ bo'ladigan norma tushuniladi.

1.2.1-teorema (Ostrovskiy). Q maydondagi har bir notrivial $\|\bullet\|$ norma biror tub p yoki $p = \infty$ uchun $|\bullet|_p$ ga ekvivalent bo'ladi.

Isbot. (i) hol. $\|n\| > 1$ bo'ladigan biror n natural son mavjud bo'lsin. Bunday n larning eng kichigi n_0 bo'lsin. $\|n_0\| > 1$ bo'lgani uchun biror musbat haqiqiy α son uchun $\|n_0\| = n_0^\alpha$ bo'ladi. Endi istalgan butun musbat n sonni n_0 lik sistemada yozamiz:

$$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \dots + a_s n_0^s$$

bu yerda $0 \leq a_i < n_0$ va $a_s \neq 0$. U holda

$$\|n\| \leq \|a_0\| + \|a_1 n_0\| + \|a_2 n_0^2\| + \dots + \|a_s n_0^s\| = \|a_0\| + \|a_1\| \cdot n_0^\alpha + \|a_2\| \cdot n_0^{2\alpha} + \dots + \|a_s\| \cdot n_0^{s\alpha}.$$

$a_i < n_0$ bo'lgani uchun n_0 tanloviga ko'ra $\|a_i\| \leq 1$. Shu sababli

$$\|n\| \leq 1 + n_0^\alpha + n_0^{2\alpha} + \dots + n_0^{s\alpha} = n_0^{s\alpha} (1 + n_0^{-\alpha} + \dots + n_0^{-s\alpha}) \leq n^\alpha \left[\sum_{i=1}^{\infty} (1/n_0^\alpha)^i \right],$$

chunki $n > n_0^s$. Kvadrat qavsdagi o'zgarmaning C bilan belgilaymiz. Shunday qilib, $\|n\| \leq Cn^\alpha$ barcha $n = 1, 2, 3, \dots$ larda yetarlicha katta N natural sonni qaraymiz. Hosil bo'lgan tengsizlikda n ning o'rniga n^N ni qo'yamiz va ikkala tomonidan N – darajali ildiz chiqaramiz:

$$\|n\| \leq \sqrt[N]{C} n^\alpha.$$

$N \rightarrow \infty$ da limitga o'tish va fiksirlangan n $\|n\| \leq n^\alpha$ tengsizlikni beradi.

Teskari tengsizlikni quyidagicha isbotlash mumkin. Yuqoridagi kabi n ni n_0 lik sistemada yozamiz. U holda $n_0^{s+1} > n \geq n_0^s$. Bundan tashqari, $\|n_0^{s+1}\| = \|n + n_0^{s+1} - n\| \leq \|n\| + \|n_0^{s+1} - n\|$, u holda $\|n\| \geq \|n_0^{s+1}\| - \|n_0^{s+1} - n\| \geq n_0^{(s+1)\alpha} - (n_0^{s+1} - n)^\alpha$.

Bu $\|n_0^{s+1}\| = \|n_0\|^{s+1}$ dan va $\|n\| \leq n^\alpha$ tengsizlikdan kelib chiqadi. Demak, n_0 va α dan bog'liq, lekin n dan bog'liq bo'lmagan biror C' o'zgarmaning uchun

$$\|n\| \geq n_0^{(s+1)\alpha} - (n_0^{s+1} - n_0^s)^\alpha = n_0^{(s+1)\alpha} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n_0} \right)^\alpha \right] \geq C' n^\alpha, \quad (\text{chunki } n \geq n_0^s).$$

Keyin yuqoridagi kabi oxirgi tengsizlikda n^N ni qo'yamiz, N – darajali ildiz chiqaramiz. Natijada $\|n\| \geq n^\alpha$ ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, $\|n\| = n^\alpha$. Normaning (2)- xossasidan $\forall x \in Q$ uchun $\|x\| = |x|^\alpha$. U holda 7-misoldan $\|\bullet\|$ va $|\bullet|$ larning ekvivalentligini hosil qilamiz, bu (i) holning isbotini hosil qilamiz.

(ii) hol. Barcha n natural son uchun $\|n\| \leq 1$ bo'lsin. $\|n\| < 1$ bo'ladigan n natural sonlarning eng kichigi n_0 bo'lsin. $\|\bullet\|$ notrivial norma bo'lgani uchun bunday n_0 mavjud. n_0 soni tub bo'lishi kerak. Haqiqatan ham, agar $n_0 = n_1 \cdot n_2$ va $n_1, n_2 < n_0$ bo'lsa, u holda $\|n_1\| = \|n_2\| = 1$, shu sababli $\|n_0\| = \|n_1\| \cdot \|n_2\| = 1$. n_0 tub sonni p bilan belgilaymiz.

p dan farqli istalgan tub q soni uchun $\|q\| = 1$ bo'lishini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz. U holda $\|q\| < 1$ va yetarlicha katta N natural son uchun $\|q^N\| = \|q\|^N < 1/2$ ni hosil qilamiz. Shunga o'xshash yetarlicha katta M larda $\|p^M\| < 1/2$. p^M va q^N lar o'zaro tub, ya'ni birdan farqli umumiy bo'luvchiga ega emas. Shu sababli, ikkita butun n va m butun sonlar uchun $mp^M + nq^N = 1$. U holda normaning (2) va (3) xossalariga ko'ra

$$1 = \|1\| = \|mp^M + nq^N\| \leq \|mp^M\| + \|nq^N\| = \|m\| \|p^M\| + \|n\| \|q^N\|.$$

$$\|m\|, \|n\| \leq 1$$

bo'lgani uchun

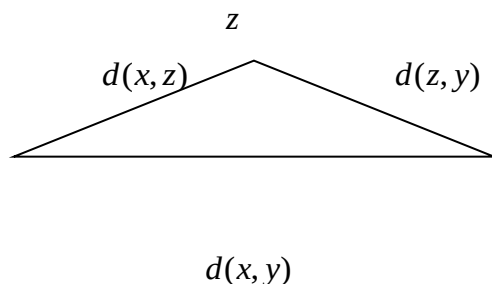
$$1 \leq \|p^M\| + \|q^N\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

bu esa qarama-qarshilik. Shu sababli $\|q\| = 1$.

Teorema isbot bo'ldi, chunki har bir musbat butun a sonini tub ko'paytuvchilarga ajratish mumkin. $a = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_r^{b_r}$. bo'lsin. U holda

$\|a\| = \|p_1\|^{b_1} \cdot \|p_2\|^{b_2} \dots \|p_r\|^{b_r}$. $p_i = p$ bo'ladigan $\|p_i\|$ ko'paytuvchi 1 dan farqli bo'lad, mos b_i esa $\text{ord}_p a$ bilan ustma-ust tushadi. Shu sababli $\|a\| = p^{\text{ord}} p^a$ bu yerda $p = \|p\| < 1$. Normaning (2) xossasiga ko'ra oxirgi formula nafaqat a natural sonlar uchun, balki nolmas $\forall x$ ratsional sonlar uchun o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Quyidagi 4-misoldan bunday normaning va $|\cdot|_p$ ning ekvivalentligi kelib chiqadi. Ostrovskiy teoremasi isbotlandi.

Albatta, masofa haqidagi tasavvurlarimiz $|\cdot|_\infty$ arximed metrikasiga asoslangan. $|\cdot|_p$ noarximed metrikaning ba'zi xossalari dastlab g'alati tuyuladi. Quyidagi 2 ta misolni qaraymiz. Metrikaning (3) xossasi: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ "uchburchak tengsizligi" nomi bilan ma'lum, C kompleks sonlar maydonida bu kompleks tekislikdagi uchburchak ikkita tomonining yig'indisi uchinchi tomonidan katta bo'lishini bildiradi:



Noarximed norma kiritilgan F maydon holini qaraymiz. Qulaylik uchun $z = 0$ deb olamiz. U holda noarximed uchburchak tengsizligiga ko'ra $\|x - y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$. Avvalo x va y tomonlar turli uzunlikga ega bo'lsin, masalan $\|x\| < \|y\|$ deb olamiz. Uchunchi $x - y$ tomon $\|x - y\| \leq \|y\|$ uzunlikga ega lekin

$$\|y\| = \|x - (x - y)\| \leq \max(\|x\|, \|x - y\|),$$

va demak $\|y\| \leq \|x - y\|$, chunki $\|y\| \leq \|x\|$ bajarilmaydi. Shu sababli, $\|y\| = \|x - y\|$. Shunday qilib, agar 2 ta x va y tomonlar teng bo'lmasa, u holda ularning kattasi uchunchi tomon bilan ustma-ust tushishi kerak. Barcha uchburchaklar teng yonli!

$(\bullet)_p$ norma kiritilgan Q maydon uchun shunga o'xshash xossa nimani anglatishini bilish kerak. Unga ko'ra 2 ta ratsional son ayirmasiga kiruvchi p ni karraliga bu karralikning kichigi bilan ustma-ust tushadi.

Noarximed maydon uchun $\|x \pm y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ va $\|x\| \neq \|y\|$ bo'lganda tenglik bajariladi. Bu muxim xossa bo'lib teng yonli uchbarchak prinsipi deb yuritiladi.

Ikkinchi misol sifatida markazi a nuqtada r radiusli ochiq doirani qaraymiz:

$$D(a, r^-) = \{x \in F \mid \|x - a\| < r\}.$$

$\|\bullet\|$ noarximed normasi bo'lsin. $b \in D(a, r^-)$ ning $\forall$ elementi bo'lsin. U holda

$$D(a, r^-) = D(b, r^-),$$

Ya'ni doiraning har bir nuqtasi uning markazi bo'ladi!

Haqiqatan ham

$$\begin{aligned} x \in D(a, r^-) &\Rightarrow \|x - a\| < r \Rightarrow \|x - b\| = \|(x - a) + (a - b)\| \leq \\ &\leq \max(\|x - a\|, \|a - b\|) < r \Rightarrow x \in D(b, r^-) \end{aligned}$$

bu teskari munosabat ham shunga, o'xshash isbotlanadi. Markazi a nuqtada bo'lgan r radiusli doirani

$$D(a, r) = \{x \in F \mid \|x - a\| \leq r\}$$

kabi aniqlaymiz. U holda xuddi yuqoridagi kabi $\|\bullet\|$ noarximed norma holida $D(a, r)$ ning har bir nuqtasi uning markazi bo'ladi.

1.3 Q_p da arifmetik amallar.

Sonning p -adik yoyilmasi Q_p maydon elementlari ustida xuddi R holidagi kabi arifmetik amallar bajarish imkonini beradi. Ko'rish mumkinki, Q_p maydondagi arifmetik amallar haqiqiy sonlar ustidagi amallarga nisbatan osonroqdir

$$a = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n p^n \quad b = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n p^n \quad (1.3.1)$$

Belgilash olamiz, bu yerda a_n va b_n lar p -adik raqamlar bo'lib, $a_{-m} \neq 0$. Lekin bitta yoki bir nechta birinchi raqam $b_{-m}, b_{-m+1}, \dots$ raqamlar nolga teng bo'lishi mumkin. U holda

$$a \pm b = \sum_{n=-m}^{\infty} (a_n \pm b_n) p^n \quad (1.3.2)$$

tenglikning o'ng tomoni yaqinlashuvchi qator bo'ladi, lekin umuman olganda $a = \sum_{n=-m}^{\infty} d_n p^n$ kanonik ko'rinishda bo'lmaydi. 1.3.1-teoremada tasvirlangan kanonik holga keltirish odatdagi ustunli qo'shish (yoki ayirish) jarayoniga mos kelib, $a = \dots d_n \dots d_2 d_1 d_0 d_{-1} \dots d_{-m}$ ko'rinishdagi p -adik songa tatbiq qilish kerak, bu yerda xuddi o'nli kasrlar holi kabi qo'shni birlikga o'tkazish sistemasi qo'llaniladi.

1.3.1-teorema. $|a|_p \leq 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har bir $a \in Q_p$ ekvivalentlik sinfi yagona quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\{a_i\}$ Koshi ketma-ketligini o'z ichiga oladi.

- 1) $a_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_i < p^i$ uchun $i = 1, 2, \dots$
- 2) $a_i = a_{i+1} \pmod{p^i}$ uchun $i = 1, 2, \dots$

Qo'shish algoritmini tushuntirish uchun -1 sonining Q_p dagi p -adik yoyilmasini topamiz. $1 = \dots 00001$ o'rinli. $a = \dots a_3 a_2 a_1 a_0$ soni $1 + a = 0$ munosabatni qanoatlantirsin. U holda $a = -1$ bo'ladi. O'ngdan boshlab $1 + a_0 = 0$ ni hosil qilamiz. Lekin $a_0 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ bo'lgani uchun maqsadga erishishning yagona usuli $1 + a_0 = p$ tenglikdan a_0 ni toppish, keyin 1 ni o'ngga o'tkazishdir. Shunday qilib, $a_0 = p-1$. Bu jarayonni davom ettirib barcha a_n lar $p-1$ ga tengligini, ya'ni

$$-1 = \dots (p-1)(p-1)(p-1) \quad (1.3.3)$$

ni hosil qilamiz. Ko'paytirish amali shunga o'xshash bajariladi. a va b sonlarining

$$a = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n p^n \quad b = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n p^n \quad (1.3.4)$$

kanonik yoyilmalari berilgan bo'lsin. Qatorlarni ko'paytirib va o'xshash hadlarni ixchamlab

$$ab = \sum_{n=-m-k}^{\infty} u_n p^n \quad (1.3.5)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$\begin{aligned} u_{-m-k} &= a_{-m} b_{-k}, \\ u_{-m-k+1} &= a_{-m+1} b_{-k} + a_{-m} b_{-k+1}, \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

.....

Bu qator umuman olganda kanonik ko'rinishga ega emas, lekin 1.3.1-teoremaga ko'ra uni kanonik ko'rinishga keltirish mumkin. Bu odatdagi ustunli ko'paytirish jarayoniga o'xshash bo'lib, $a = \dots d_n \dots d_2 d_1 d_0 d_{-1} \dots d_{-m}$ ko'rinishdagi p -adik sonlarga qo'llash kerak.

Bo'lish amalini tushuntirish uchun 2 ta $a, b \in Q_p$, $b \neq 0$ sonlari berilgan bo'lsin deb faraz qilamiz. Umumiylikni buzmaganda $b \in Z_p$ $b = \dots b_2 b_1 b_0$, deb faraz qilamiz, bunda $b_0 \neq 0$. Faraz qilamiz a - p -adik son

$$a = \dots a_3 a_2 a_1 a_0, a_{-1} \dots a_{-k}$$

ko'rinishga ega bo'lsin. $b_0 \neq 0$ va Z/pZ qoldiqlar halqasi p tub son uchun maydon bo'lgan uchun hamisha shunday $c_{-k} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ soni topilib, $c_{-k} b_0 \equiv a_{-k} \pmod{p}$ bo'ladi. Odatdagi bo'lish jarayonini davom ettirib, a/b bo'linmaning kanonik ko'rinishini hosil qilamiz.

Yuqoridagi aytilgan fikrlarga ko'ra, agar $a = \dots a_3 a_2 a_1 a_0$ - butun p -adik son bo'lib, $a_0 \neq 0$ bo'lsa, u holda $1/a$ soni ham butun p -adik son bo'ladi.

Ikkinchi tomondan

$$p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i = a_0 p + a_1 p^2 + \dots \neq 1 + 0p + 0p^2 + \dots, \quad (1.3.7)$$

ga ko'ra P soni uchun Z_p dagi ko'paytirishga nisbatan teskari son mavjud emas. Lekin Q_p da p soniga teskari son mavjud.

Shunga o'xshash mulohazalarga ko'ra birinchi a_0 raqami 0 ga teng butun p -adik son Z_p da ko'paytirish amaliga nisbatan teskari songa ega emas.

1.3.1-tasdiq Ushbu

$$a = \dots a_1 a_0 \in Z_p \quad (1.3.7)$$

butun p -adik son Z_p dagi ko'paytirishga nisbatan teskari songa ega bo'lishi uchun $a_0 \neq 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Z_p halqadagi teskarilanuvchan elementlar guruhini $Z_p^\times$ orqali belgilaymiz. U holda

$$Z_p^\times = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i p^i : a_0 \neq 0 \right\}. \quad (1.3.8)$$

Bu guruh p -adik birliklar guruhi deb ham ataladi.

1.3.2-tasdiq. Faraz qilaylik x -normasi p^{-n} gat eng p -adik son bo'lsin. U holda x soni $x = p^n u$ ko'rinishda tasvirlanishi mumkin, bu yerda $u \in Z_p^\times$.

Ta'kidlash lozimki Q_p dagi arifmetik amallar natural sonlar ustidagi amallarni kengaytiradi, ya'ni umumlashtiradi. Bizga ma'lum algoritm cheksiz marta davom ettiriladi.

Q_7 dagi arifmetik amallarga bir nechta misollar keltiramiz:

$$\dots 263 \times \dots 154 = \dots 455;$$

$$\dots 302 - \dots 56,4 = \dots 40,5;$$

$$\dots 421 : \dots 153 = \dots 615;$$

1.4 Ratsional sonlarning p -adik yoyilmasi

Har bir butun ratsional son butun p -adik son bo'ladi. Biroq p -adik sonlar ratsional kasrlar orasida ham bor.

$$-1 = (p-1) \sum_{i=0}^{\infty} p^i \quad (1.4.1)$$

bo'lgani uchun

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{1}{1-p}, \quad \frac{1}{1-p} = \dots 1111, \quad (1.4.2)$$

o'rinli, bu esa Z_p halqa elementi bo'ladi. Ta'kidlash lozimki, bu butun p -adik sonning p -adik yoyilmasi cheksizdir.

7-masala p -adik yoyilma chekli bo'lishining zarur va yetarli shartini bildiradi.

1.4.1-teorema. $a = \dots d_n \dots d_2 d_1 d_0 d_{-1} \dots d_{-m}$ kanonik p -adik yoyilma ratsional son bo'lishi uchun u biror momentdan boshlab chapdan davriy bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot: Faraz qilaylik kanonik p -adik yoyilma biror momentdan boshlab davriy bo'lsin. Berilgan x - p -adik sonni p ning biror darajasiga ko'paytirib, ratsional sonni ayirib, $x \in Z_p$ va x_0 lar

$$x = x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots + x_{k-1} p^{k-1} + x_0 p^k + x_1 p^{k+1} \dots$$

ko'rinishdagi davriy yoyilmaga ega deb olish mumkin.

$$a = x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots + x_{k-1} p^{k-1}$$

soni butun ratsional son bo'ladi va shu sababli x ni

$$a(1 + p^k + p^{2k} + \dots) = a \frac{1}{1 - p^k}, \quad (1.4.3)$$

kabi tasvirlash mumkin. Demak x ratsional son.

Aksincha, faraz qilaylik

$$\frac{a}{b} = \sum_{i \geq 0} x_i p^i \in Z_p \quad (1.4.4)$$

bo'lsin. a va b sonlari butun o'zaro tub sonlar bo'lib, b soni p ga bo'linmasin.

a/b sonining p -adik yoyilmasini yozamiz:

$$\frac{a}{b} = x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots + x_{n-1} p^{n-1} + \dots, \quad \text{va} \quad A_n = x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots + x_{n-1} p^{n-1},$$

$0 \leq A_n \leq p^n - 1$ deb olamiz. A_n butun ratsional son bo'lgani uchun

$$\frac{a}{b} = A_n + p^n \frac{r_n}{b}, \quad (1.4.5)$$

o'rinli, bundan tashqari r_n - butun son. U holda $r_n = (a - A_n b) / p^n$ va

$$\frac{a - (p^n - 1)b}{p^n} \leq r_n \leq \frac{a}{p^n} \quad (1.4.6)$$

o'rinli. Agar n yetarlicha katta bo'lsa, u holda $-b \leq r_n \leq 0$, bu esa r_n faqat chekli qiymatni qabul qilishini bildiradi. Endi

$$x = A_n + p^n \frac{r_n}{b} = A_{n+1} + p^{n+1} \frac{r_{n+1}}{b} = A_n + x_n p^n + p^{n+1} \frac{r_{n+1}}{b} \quad (1.4.7)$$

deb olamiz. Bundan barcha n larda $r_n = x_n b + p r_{n+1}$ bo'lishi kelib chiqadi. r_n faqat chekli sondagi qiymatlarni qabul qilgani uchun shunday m indeks va P natural son topilib, $r_m = r_{m+P}$ bo'ladi. Bundan esa

$$x_m b + p r_{m+1} = x_{m+P} b + p r_{m+P+1}, \quad (1.4.8)$$

shu sababli

$$(x_m - x_{m+P})p = p(r_{m+P+1} - r_{m+1}) \quad (1.4.9)$$

bo'ladi. $(b, p) = 1$ bo'lgani uchun p soni $x_m - x_{m+P}$ ga bo'linadi. Lekin x_m va x_{m+P} lar $\{0, 1, \dots, p-1\}$ to'plamdan olingan sonlar bo'ladi. Shuning uchun $x_m = x_{m+P}$. Agar bu tenglikni (1.4.8) ga qo'ysak, $r_{m+1} = r_{m+P+1}$ ni hosil qilamiz. Yuqoridagi mulohazalarni takrorlab

$$r_n = r_{n+P} \quad \text{va} \quad x_n = x_{n+P} \quad (n \geq m) \quad (1.4.10)$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib agar $n \geq m$ bo'lsa nafaqat raqamlar ketma-ketligi x_n , balki suratlar ketma-ketligi r_n ham P davrga ega bo'ladi.

Ratsional sonning p -adik yoyilmasi bo'yicha ishorasini aniqlash mumkinmi? degan tabiiy savol paydo bo'ladi. Bu savolga javob ijobiy bo'lib, 5-masalada berilgan.

Yuqoridagilarni o'rgangan holda quyidagi misol va masalarni yechishni talabalarga havola qilaman.

Misollar

1. $Z_p^{\times} = \{x \in Z_p : |x|_p = 1\}$ ekanligini isbotlang.
2. $a \in Q_p$ soni $\dots a_n \dots a_2 a_1 a_0, a_{-1} \dots a_{-m}$ kanonik yoyilmaga ega bo'lsin. $-a$ soni qanday kanonik yoyilmaga ega?
3. 2,3,4 butun sonlar uchun Z_5 da teskari son mavjud. Ularning 5 -adik yoyilmasini toping.
4. Quyidagi p -adik sonlarning kanonik yoyilmasidagi 4 ta raqamni toping.
 - a) Q_7 da $\dots 1246 \times \dots 6003$ ni hisoblang.
 - b) $1 : \dots 1323$ ni Q_5 da hisoblang.
5. $(p^n)!$ sonning p -adik normasini toping.

Masalalar

6. $r \in Q$ bo'lsin. Shunday $k \geq 1$ soni topilib, rp^k sonining p -adik yoyilmasi $\dots aaaaab$, kabi tasvirlanishi mumkinligini isbotlang, bu yerda a va b fragmentlar bir xil sondagi raqamlarni saqlaydi. $r > 0$ tengsizlik odatdagi ma'noda $b > a$ tengsizlikka ekvivalent ekanligini isbotlang.
7. $a \in Q_p$ sonining p -adik yoyilmasida biror N dan boshlab $a_i = 0$ bo'lishi uchun a soni maxraji p ning darajasi bo'lgan musbat ratsional son bo'lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

Xulosa

Mazkur bitiruv malakaviy ishining I bobida to'rtta mavzu yoritilgan bo'lib, birinchi mavzusi p -adik sonlar haqida, ular nima uchun ishlatiladi, kim tomonidan kiritilgan degan savollarga javob berilgan.

Ikkinchi mavzusi esa p -adik sonlar maydoni bo'lib, unga oid ta'rif, teorema va lemmalar keltirilgan.

Uchinchi mavzusi Q_p da arifmetik amallar bo'lib, p -adik sonlar ustida qo'shish, ayirish va bo'lish amallari o'rganilgan.

To'rtinchi mavzu ratsional sonlarning p -adik yoyilmasi haqida bo'lib hisoblanadi.

P-adik qiymatli ehtimollik o'lchovi.

2.1. Noarximed qiymatli o'lchovga nisbatan integrallashning Monna-Springer nazariyasi.

X orqali nol o'lchamli local kompakt σ - kompakt topologik fazoni, $\Delta(x)$ orqali X to'plamning kompakt ochiq qism to'plamlari halqsini, $C_c(x)$ orqali esa kompakt tashuvchili $f: X \rightarrow K$ uzluksiz funksiyalar fazosini belgilaymiz. Bu fazoda tekis normani

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|_K \quad (2.1.1)$$

kabi kiritamiz.

2.1.1-ta'rif. Agar K -chiziqli $\mu: C_c(x) \rightarrow K$ funksional uchun $\forall A \in \Delta(x)$ uchun shunday $M_A \geq 0$ soni topilib, $\text{supp} f \subset A$ bo'ladigan barcha $f \in C_c(x)$ lar uchun

$$|\mu(f)|_K \leq M_A \|f\| \quad (2.1.2)$$

tengsizlik bajarilsa, μ ga o'lchov deyiladi.

2.1.2-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas $M \geq 0$ soni topilib,

$$|\mu(f)|_K \leq M \|f\|, \quad f \in C_c(x) \quad (2.1.3)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, o'lchovga chegaralangan deyiladi.

Chegaralangan μ o'lchovning normasi $C_c(x)$ ikkili fazosidagi elementning normasi kabi aniqlanadi:

$$\|\mu\| = \sup_{f \neq 0} \|f\|^{-1} |\mu(f)|_K \quad (2.1.4)$$

Istalgan $B \subset X$ qism to'plam uchun B to'plamning xarakteristik funksiyasi Φ_B orqali belgilanadi. Agar $B \in \Delta(x)$, u holda $\Phi_B \in C_c(x)$. Har bir μ o'lchov $\mu: \Delta(x) \rightarrow K, \mu(A) = \mu(\Phi_A)$ to'plam funksiyasini aniqlaydi.

2.1.1-teorema. Faraz qilaylik F - X topologiya bazasi bo'lib, kompakt ochiq qism to'plamlardan tashkil topgan bo'lsin va $\mu: F \rightarrow K$ quyidagi shartlarni qanoatlantiradi.

$$1. \text{Faraz qilaylik } A_1, \dots, A_k \in F, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \text{ va } A = \bigcup_{j=1}^k A_i \in F. \quad (2.1.5)$$

bo'lsin. U holda

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i) \quad (2.1.6)$$

2. Faraz qilaylik $\{A\}, A \in F$ -fiksirlangan $B \in \Delta(x)$ to'plamning qism to'plamlari to'plami bo'lsin. U holda $\{\mu(A)|_K\}$ -Kda chegaralangan bo'ladi. U holda μ to'plam funksiyasini $C_c(x)$ o'lchovgacha davom ettirish mumkin. Aksincha, har bir μ o'lchov 1 va 2 shartlarni qanoatlantiradi. 1 va 2 shartlarni qanoatlantiruvchi $\mu: F \rightarrow K$ funksiya uchun $\mu(f)$ integral Riman yig'indisining limiti sifatida aniqlanadi, ya'ni

$$S_u(f) = \sum_{i=1}^k f(a_i) \mu(A_i), \quad (2.1.7)$$

bu yerda $u = (U, a_1, \dots, a_k), U = (A)_{i=1}^k - B = \sup pf$ to'plamning qoplamasi, $A_i \in F, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, a_j \in A_j$.

$C_c(x)$ fazoda haqiqiy qiymatli N_f funksiyani kiritamiz:

$$N_\mu(f) = \sup_{g \neq 0} \|g\|^{-1} |\mu(fg)|_K, g \in C_c(X) \quad (2.1.8)$$

Bu $C_c(x)$ dagi noarximed yarim normasi bo'lib, quyidagi xossalarga ega:

$$a) |\mu(f)|_K \leq N_\mu(f);$$

$$b) N_\mu(fg) \leq N_\mu(f) \|g\| \text{ (Telder tengsizligi).}$$

Agar $U_i \cap U_j = \emptyset, i \neq j, U_i \in \Delta(x)$ bo'lsa, $U = (U_i) - X$ uchun qoplama deyiladi. $f \in C_c(x)$ uchun

$$N_\mu(f, U) = \sup_i \left(\sup_{x \in U_i} |f(x)| N_\mu(\phi u_i) \right) \quad (2.1.9)$$

deb olamiz. U holda

$$N_\mu(f) = \inf_U N_\mu(f, U). \quad (2.1.10)$$

$x \in X$ uchun $N_\mu(x) = \inf N_\mu(\Phi_U)$ deb olamiz, bu yerda $\{U\}$ - x nuqtaning kompakt ochiq atroflari sistemasi.

2.1.2-teorema. $f \in C_c(X)$ bo'lsin. U holda

$$N_\mu(f) = \sup_{x \in X} |f(x)|_K N_\mu(x). \quad (2.1.11)$$

$\forall \alpha > 0$ uchun

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \{x \in X : N_\mu(x) \geq \alpha\}, X_+ = \bigcup_{\alpha > 0} X_\alpha \\ X_0 &= \{x \in X : N_\mu(x) \geq 0\}, X = X_+ \cup X_0. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

ni hosil qilamiz. (2.1.1) dan foydalanib, $\forall f : X \rightarrow K$ funksiya uchun $N_\mu(f)$ ni aniqlash mumkin, xususan, $N_\mu(x) = N_\mu(\Phi\{x\})$.

2.1.3-ta'rif. Agar $N_\mu(f) = 0$ bo'lsa, f funksiya μ -e'tiborsiz deyiladi.

2.1.1-tasdiq. f funksiya μ -e'tiborsiz bo'lishi uchun istalgan $x, f(x) \neq 0$ uchun $N_\mu(f) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

2.1.4-ta'rif. Agar $(f-g)$ funksiya μ -e'tiborsiz bo'lsa, f va g funksiyalar ekvivalent deyiladi.

$F(\mu)$ orqali $N_\mu(f) < \infty$ bo'ladigan μ -ekvivalent f funksiyalarning fazosini belgilaymiz.

2.1.5-ta'rif. μ o'lchovga nisbatan inyegrallanuvchi funksiyalarning $L^1(X, \mu)$ sinfi $F(\mu)$ da $c_c(X)$ fazoning yopig'I sifatida aniqlanadi.

2.1.2-tasdiq. $f \in L^1(X, \mu)$ bo'lsin. U holda f funksiyaning istalgan X_α to'plamdagi qisqartmasi uzluksiz bo'ladi.

2.1.6-ta'rif. Agar quyidagi shartlar bajarilsa, $f : X \rightarrow K$ funksiya N_μ ga nisbatan absolyut uzluksiz deyiladi:

a) $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ soni topilib, $N_\mu(\Phi_U) < \delta, U \in \Delta(x)$ lar uchun $N_\mu(f\Phi_U) < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi;

b) $\lim_V N_\mu(f\Phi_U) = 0$, bu yerda $V-X$ to'plamning kompakt qism to'plamlari to'ldiruvchisi bo'ladigan to'plamlar filtri.

2.1.3-teorema. $f : X \rightarrow K$ funksiya integrallanuvchi bo'lishi uchun

a) f funksiyaning istalgan X_α, α dagi qismi uzluksiz

b) f funksiya N_μ ga nisbatan uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

2.1.3-tasdiq. $f \in L^1(X, \mu)$ bo'lsin. U holda

$$N_\mu(f) = \sup_{g \neq 0} \frac{\|fg\|}{\|g\|} = \mu(f, g)_K, g \in C_c(X) \quad (2.1.13)$$

$\bar{A}$ orqali X to'plamning A qism to'plamining to'ldiruvchisi belgilangan, $\bar{A} = A \cup A$.

2.1.7-ta'rif. Agar istalgan $B \subset K$ kompakt va $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun shunday $B_1 \subset B$ kompakt to'plam topilib, $N_\mu(B \setminus \bar{B}_1) < \varepsilon$ va f funksiyaning B_1 dagi qismi uzluksiz bo'lsa, u holda $f : X \rightarrow K$ funksiya μ -o'lchovli deyiladi.

2.1.4-tasdiq. $f : X \rightarrow K$ funksiya μ -o'lchovli bo'lishi uchun $\forall \alpha > 0$ uchun f funksiyaning X_α dagi qismi uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

2.1.8-ta'rif. Agar $\forall B$ kompakt to'plam va $\forall \varepsilon > 0$ Uchun B kompakt to'plamning B_1 kompakt qism to'plami topilib $N_\mu(B \setminus \bar{B}_1) < \varepsilon$ va $\{f_n\}$ ketma-ketlik B_1 da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, X da μ -o'lchovli bo'lgan $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi Yegorov bo'yicha yaqinlashuvchi deyiladi.

2.1.5-tasdiq. Agar $\{f_n\}$ ketma-ketlik istalgan $X_\alpha, \alpha > 0$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, $\{f_n\}$ ketma-ketlik Yegorov bo'yicha yaqinlashuvchi bo'ladi.

2.1.4-teorema. (Monna-Springer integrali uchun limit teoremasi). $\{f_n\}$ -Yegorov bo'yicha yaqinlashuvchi integrallanuvchi funksiyalar ketma-ketligi bo'lsin. Faraz qilaylik shunday g integrallanuvchi g funksiya topilib, barcha $x \in X$ larda $|f_n(x)|_K \leq |g(x)|_K$ bo'lsin. U holda f limitik funksiya integrallanuvchi va $\mu(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n)$.

X dagi μ va Y dagi ν o'lchovlarning $\mu \otimes \nu$ -to'g'ri ko'paytmasini

$$N_{\mu \otimes \nu}(x, y) = N_\mu(x) N_\nu(y). \quad (2.1.13)$$

kabi aniqlaymiz.

Monna-Springer nazariyasida Radon-Nikodim teoremasining analogi yoq.

Biz ko'pincha Q_p da aniqlangan va qiymatlari Q_q da bo'lgan Xaar o'lchovi mavjud deb hisoblaymiz, bu yerda $p \neq q$. Bu o'lchov $\mu(Z_p)=1$ shart bo'yicha yagonadir. Bu holda $N_\mu(x)$ funksiya $c=1$ o'zgarmasga teng va L^1 fazo C_C fazo bilan ustma-ust tushadi

2.2 Cheksizda kamayuvchi o'lchovlar.

Biz Q_p -qiymatli ehtimollik o'lchovini aniqlamoqchimiz. Bizni σ -additivlik shartining P-adik analogi qiziqtiradi.

μ o'lchovga qo'yiladigan 1-shart-bu chegaralanganlik shartidir.

2.2.1-teorema. μ o'lchov chegaralangan bo'lishi uchun N_μ funksiya X da chegaralangan va

$$\|\mu\| = \sup N_\mu(x).$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. μ chegaralangan bo'lsin, $\{U\}$ esa x nuqtaning yopiq-ochiq ayroflari sistemasi bo'lsin. U holda

$$N_\mu(x) = \inf_U \sup_{g \neq 0} \|g\|^{-1} |\mu(g\phi_U)|_K \leq \|\mu\| \sup_{g \neq 0} \|g\|^{-1} \|g\phi_U\| \leq \|\mu\|.$$

Ikkinchi tomondan, $\forall f \in C_C(x)$ uchun

$$|\mu(f)|_K \leq N_\mu(f) = \sup_x |f(x)|_K N_\mu(x) \leq \sup_x N_\mu(x) \|f\|.$$

Q_p qiymatli ehtimollik o'lchovini aniqlash uchun quyidagi shartdan foydalanamiz. Tatbiq uchun bizga nafaqat $\Delta(x)$ dagi, balki barcha yopiq-ochiq qism to'plamlar algebrasidagi o'lchov kerak bo'ladi.

2.2.2-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $U_\varepsilon \in \Delta(x)$ topilib,

$$\sup \{N_\mu(x) : x \in \overline{U_\varepsilon}\} < \varepsilon$$

bo'lsa, μ o'lchov cheksizda kamayuvchi deyiladi.

2.2.1-teoremaga ko'ra kamayuvchi μ o'lchov chegaralangandir.

2.2.1-misol. $X=K=Q_p$, $\{x_n = p^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$ va $\mu(\{x_n\})=1, n=0,1,\dots$ bo'lsin. U holda μ chegaralangan, lekin emas.

X fazoning yopiq ochiq to'plamlari algebrasini $\Phi(x)$ bilan belgilaymiz.

2.2.2-teorema. μ kamayuvchi o'lchov bo'lsin. U holda $\forall A \in \Phi(x)$ to'plam kamayuvchi bo'ladi.

Isboti. $N_{\mu}(\Phi_A - G_n) \rightarrow 0$ bo'ladigan $g_n \in C_C(x)$ ketma-ketlikni qurishimiz kerak. $\{B_n\} - \Delta(x)$ dagi qism to'plamlar ketma-ketligi bo'lib, $\sup\{N_{\mu}(x) : x \in B_n\} < 1/n$ bo'lsin. Bundan tashqari,

$$N_{\mu}(\phi_A - \phi_{C_n}) = \sup_{x \in X} |\phi_A(x) - \phi_{C_n}(x)|_K N_{\mu}(x) < 1/n.$$

Xususan, bu teoremani qo'llab X fazo jamlanuvchi ekanligini hosil qilamiz.

μ kamayuvchi o'lchovni $\Phi(x)$ algebraga chekli additivlik va chegaralanganlik xossalarini saqlagan holda davom ettirish mumkin: $\forall A \in \Phi(x)$ uchun

$$\sup\{|\mu(B)|_K : B \subset A, B \in \Delta(X)\} < \infty.$$

Bu tasdiqni isbotlash uchun

$$|\mu(B)|_K = N_{\mu}(\phi_B) = \sup_x \phi_B(x) N_{\mu}(x) \leq \|\mu\|.$$

ekanligini ko'rsatish kerak.

$\forall A \in \Phi(x)$ uchun shunday $(C_n), C_n \in \Delta(x)$ ketma-ketlik topilib, $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n)$ bo'ladi.

Uzlüksiz chegaralangan $f : X \rightarrow K$ gunksiyalar fazosini $C_b(x)$ bilan belgilaymiz. Bu fazo $\|\cdot\|$ tekis norma bilan tasdiqlanadi.

2.2.1-tasdiq. μ kamayuvchi o'lchov bo'lsin. U holda $\forall f \in C_b(X)$ funksiya uchun $f \in L^1(X, \mu)$ element mos keladi va

$$|\mu(f)|_K \leq N_{\mu}(f) \leq \|f\| \|\mu\|.$$

tengsizlik bajariladi.

Isboti. Faraz qilaylik (B_n) -2.2.2-teoremada aytilgan ketma-ketlik bo'lsin.

U holda

$$N_{\mu}(f - f\phi_{B_n}) \leq \sup_{x \in B_n} |f(x)|_K N_{\mu}(x) \leq \|f\|/n.$$

2.2.2-tasdiq. μ o'lchov kamayuvchi bo'lishi uchun X_{α} to'plam $\forall \alpha > 0$ uchun kompakt bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. 1. X_{α} to'plam yopiq-ochiqdir. μ o'lchov kamayuvchi bo'lgani uchun shunday $U_{\alpha} \in \Delta(x)$ topilib, barcha $x \in \overline{U_{\alpha}}$ larda $N_{\mu}(x) < \alpha$ bo'ladi. Shu sababli, $X_{\alpha} \subset U_{\alpha}$.

2. Endi aksincha barcha $X_{\alpha} + \forall \alpha > 0$ uchun kompakt bo'lsin. U holda har bir $x \in X_{\alpha}$ nuqta uchun $U(x)$ yopiq-ochiq atrof mavjud bo'ladi. Bunday atroflar sistemasi X_{α} kompakt qism to'plamning ochiq qoplamasi bo'ladi. $(U(x_j))_{j=1}^n$ chekli qism qoplama mavjud. $G_j = \bigcup_{j=1}^n U(x_j)$ ni hosil qilamiz. Bu to'plam $\Delta(x)$ ga tegishli, lekin

$$\sup\{N_{\mu}(x) : x \in \overline{G_{\alpha}}\} \leq \sup\{N_{\mu}(x) : x \in \overline{X_{\alpha}}\} < \alpha.$$

2.3. Funksiyalar va o'lchovlarning ko'paytmasi.

μ -X dagi $\forall$ o'lchov bo'lib, $f \in L^1(X, \mu)$ bo'lsin. Barcha $g \in C_c(x)$ uchun $\nu = f\mu, \nu(g) = \mu(fg)$ funksionalni qaraymiz. Bunda

$$|\nu(g)|_K \leq N_{\mu}(fg) \leq N_{\mu}(f)\|g\|.$$

Shu sababli ν – chegaralangan o'lchov bo'ladi.

2.3.1-teorema. μ o'lchov, $f \in L^1(X, \mu), \nu = f\mu$, bo'lsin. U holda

$$N_{\nu}(x) = |f(x)|_K N_{\mu}(x). \quad (2.3.1)$$

Isbot. $N_{\nu}(x)$ va $N_{\mu}(x)$ larning ta'rifidan x nuqtaning shunday ochiq-kompakt U atrofi topilib,

$$N_{\nu}(\phi_U) - N_{\nu}(x) \leq \varepsilon \quad (2.3.2)$$

bo'lishi va $N_\mu(\phi_U) - N_\nu(x) \leq \varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi. $f \in L^1$ bo'lgani uchun shunday $g \in C_c(x)$ topilib, $N_\mu(f - g) \leq \varepsilon$ bo'ladi, $\forall y \in U$ uchun $|g(y) - g(x)|_K \leq \varepsilon$ bo'ladigan U atrofni qarash mumkin. (2.3.2)ga ko'ra

$$|N_\mu(f\phi_U) - |f(x)|_K N_\mu(x)|.$$

ni baholash yetarli.

$$\begin{aligned} |N_\mu(f\phi_U) - |f(x)|_K N_\mu(x)| &\leq \sup_{y \in Y} |g(x) - g(y)|_K N_\mu(y) + |g(x)|_K |N_\mu(f\phi_U) - N_\mu(x)| \leq \\ &\leq \varepsilon \left(\sup_{y \in Y} N_\mu(y) + |g(x)|_K \right) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

o'rinli. Ya'ni

$$|N_\mu(f\phi_U) - N_\mu(g\phi_U)| \leq \varepsilon$$

va

$$||g(x)|_K N_\mu(x) - |f(x)|_K N_\mu(x)| \leq \sup_x |g(x) - f(x)|_K N_\mu(x) \leq \varepsilon.$$

ni hosil qilamiz.

2.3.1-tasdiq. μ -o'lchov bo'lib, $f \in L^1(X, \mu)$ bo'lsin. U holda $\nu = f\mu$ kamayuvchi bo'ladi.

Kamayuvchi o'lchov uchun Monna-Springer integralida o'zgaruvchilarni almashtirish formulasi.

Lokal-kompakt to'la noarximed maydonni S bilan belgilaymiz. S -qiymatli o'lchov va funksiyalarni qaraymiz.

2.3.2-teorema. μ kamayuvchi o'lchov va $\eta \in L^1(X, \mu)$ bo'lsin. U holda $f \circ g \in L^1(X, \mu)$.

Isbot. $\eta \in L^1(X, \mu)$ bo'lgani uchun $\eta - X_\alpha$ da uzluksiz bo'ladi. Shu sababli $M_\alpha = \eta(X_\alpha)$ kompakt bo'ladi. V_α orqali S maydondagi markaz O nuqtada bo'lgan va $M_\alpha \subset V_\alpha$ bo'lgan sharni belgilaymiz.

Faraz qilaylik $U_\alpha \in \Delta(x)$ uchun $\sup\{N_\mu(x) : x \in \overline{U_\alpha}\} < \alpha$ bo'lsin. $\eta \in L^1$ bo'lgani uchun shunday $\delta > 0$ topilib, $\eta_\delta \in C_c(x)$ va $N_\mu(\eta - \eta_\delta) < \eta$ bo'ladi.

Endi

$$g_{\delta\alpha}(x) = [(f\phi_{V_a}) \circ \eta_\delta] \phi_{U_a}.$$

funksiyalar sistemasini qaraymiz. Bu funksiyalar $C_C(x)$ ga tegishli. Barcha $x \in X_\alpha \subset U_\alpha$ uchun

$$g_{\delta\alpha}(x) = f(\eta_\delta(x)) \phi_{V_a}(\eta_\delta(x))$$

o'rinli. $\delta, \alpha \rightarrow 0$ bo'lganda $N_\mu(f \circ \eta - g_{\delta\alpha}) \rightarrow 0$ bo'lishini ko'rsatamiz.

Avval α ni shunday tanlaymizki, $\|f\|\alpha < \varepsilon$ bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} N_\mu(f \circ \eta - g_{\delta\alpha}) &\leq \max \left[\sup_{x \in X_\alpha} |f(\eta(x)) - g_{\delta\alpha}(x)|_S N_\mu(x), \sup_{x \in X_\alpha} |f(\eta(x)) - g_{\delta\alpha}(x)|_S N_\mu(x) \right] = \\ &= \max[\gamma_{\delta\alpha}, \lambda_{\delta\alpha}]. \end{aligned}$$

$\lambda_{\delta\alpha} \leq \|f\|\alpha < \varepsilon$ bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} \gamma_{\delta\alpha} &= \sup_{x \in X_\alpha} |f(\eta(x)) - (\eta_\delta(x)) \phi_{V_a}(\eta_\delta(x))|_S N_\mu(x) = \\ &= \sup_{x \in X_\alpha} |(f\phi_{V_a})(\eta(x)) - (f\phi_{V_a})(\eta_\delta(x))|_S N_\mu(x). \end{aligned}$$

$\delta = \theta\alpha$ deb olamiz. U holda $N_\mu(\eta - \eta_\delta) \leq \theta\alpha$. Shunday qilib, $|\eta(x) - \eta_\delta(x)|_S N_\mu(x) \leq \theta\alpha$. Bu $x \in X_\alpha$ uchun $|\eta(x) - \eta_\delta(x)|_S \leq \theta$ bo'lishini bildiradi. $f\phi_{V_a}$ funksiya kompakt tashuvchiga ega va shu sababli u tekis uzluksizdir. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $\theta_\varepsilon > 0$ topilib, $|y_1 - y_2|_{S_1} \leq \theta_\varepsilon$ bo'lganda $|f(y_1) - f(y_2)|_S < \frac{\varepsilon}{\|\mu\|}$ bo'lishi kerak.

Isbotni yakunkash uchun $\delta = \delta_\varepsilon = \theta_\varepsilon \alpha$ deb olish kerak.

2.3.3-teorema. μ -kamayuvchi o'lchov, $\eta \in L^1(X, \mu)$ bo'lsin. U holda $\mu(f) = \mu(f \circ g)$ tenglama yordamida aniqlangan $\mu: C_C(S) \rightarrow S$ funksional $C_C(S)$ dagi chegaralangan o'lchov bo'ladi.

Agar μ o'lchov chegaralangan, lekin kamayuvchi bo'lmasa, $f \in C_C(S)$ uchun $f \circ g \notin L^1(X, \mu)$ bo'lishi mumkin.

2.3.1-misol. μ teoremadagi o'lchov bo'lsin. $\eta(x_n) = y_n = p^n$ va $x \neq x_n$ da $\eta(x) = 0$ bo'ladigan funksiyanı qaraymiz. $\eta \in L^1$ bo'lishini ko'rsatamiz. Har bir x_n

nuqta uchun turli nuqtalar uchun bo'sh kesishmaga ega yopiq-ochiq V_n sharlar mavjud. Kompakt tashuvchili uzluksiz funksiyalarni qaraymiz:

$$\eta_N(x) = \sum_{k=1}^N y_k \phi_{V_k}(x)$$

U holda $N_\eta(\eta - \eta_N) \rightarrow 0$. Endi f funksiya $U_1(0)$ da $1+y$ ga va undan tashqarida 0 ga teng bo'lsin. U holda $z_n = f(y_n) = 1 + p^n$ va $\alpha_n z_n$ nolga intilmaydi, $n \rightarrow 0$.

2.3.2-tasdiq. μ kamayuvchi o'lchov, $\eta \in L^1(X, \mu)$ bo'lsin. U holda

$$N_{\mu\eta}(f) \leq N_\mu(f \circ \eta). \quad (2.3.3)$$

Isbot.

$$N_{\mu\eta}(f) = \sup_{g \neq 0, g \in C_c} \|g\|^{-1} |\mu_\eta(fg)|_S \leq \sup_x |f(\eta(x))|_S N_\mu(x).$$

Bu tengsizlik qat'iy bo'lishi mumkin.

2.3.1-lemma. Agar $y \notin M_\alpha = \eta(x_\alpha)$ bo'lsa, u holda $N_{\mu\eta}(y) < \alpha$.

Isboti. M_α yopiq to'plam, shu sababli $\forall y \in \overline{M_\alpha}$ uchun $V_\alpha \cap M_\alpha = \emptyset$ bo'ladigan V_α atrof mavjud. (2.3.1) tenglik va (2.3.3) tengsizlikni qo'llab,

$$N_{\mu\eta}(y) = \inf_{y \in V \in \Delta(x)} N_{\mu\eta}(\phi v) \leq \inf_{y \in V \in \Delta(x)} N_{\mu\eta}(\phi v \circ \eta) \leq \sup_x |\phi_{V_\alpha}(\eta(x))|_S N_\mu(x) < \alpha.$$

ni hosil qilamiz.

2.3.3-tasdiq. $\forall \eta \in L^1(x, \mu)$ uchun μ_η o'lchov kamayuvchi bo'ladi.

Bu tasdiq 2.3.1-lemmaning natijasi hisoblanadi. 2.3.2-teoremada f funksiyaga kuchsizroq shart qo'yish mumkin.

$\eta \in L^1$ bo'lsin. $\forall \alpha > 0$ uchun M_α da uzluksiz $f: S \rightarrow S$ funksiyalarning funksional fazosi $\Gamma(\eta)$ ni kiritamiz. $\Gamma_b(\eta)$ orqali $\Gamma(\eta)$ ga kiruvchi chegaralangan funksiyalar qism fazosini belgilaymiz.

2.3.4-teorema. μ -kamayuvchi o'lchov, $\eta \in L^1(x, \mu)$, $f \in \Gamma_b(\eta)$ bo'lsin. U holda $f \circ \eta \in L^1(x, \mu)$, $f \in L^1(S, \mu_\eta)$ va

$$\mu_\eta(f) = \mu(f \circ \eta). \quad (2.3.4)$$

tenglik o'rinli.

Isboti.

1. $(f \circ g) \in L^1(x, \mu)$ ni ko'rsatamiz. f funksiyaning M_α dagi qismi f_α ning tekis uzluksizligini qo'llab, $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ topilib, $|x - y|_S < \delta$ da $|f(x) - f(y)|_S < \varepsilon$ ni hosil qilamiz. $U_\delta(x), x \in M_\alpha$ qoplamani qaraymiz.

$\bigcup_{j=1}^n U_\delta(x_j) \supset M_\alpha$ chekli qism qoplama mavjud. $\varepsilon = \beta$ uchun

$$f_{\alpha\beta}(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \phi_{U_\delta(x_j)}(x)$$

bo'lsin. U holda $f_{\alpha\beta} \in C_c$ va

$$\sup_{x \in M_\alpha} |f_{\alpha\beta}(x) - f(x)|_S < \beta.$$

η_δ funksiyalar 2.3.2-teoremadagi kabi bo'lsin. $g_{\alpha\beta\delta}(x) = f_{\alpha\beta}(\eta(x)) \phi_{U_\alpha}(x)$ funksiyani qaraymiz, bu yerda U_α avvalgi teoremadagi kabi. 6.1-teoremaga o'xshash

$$\rho_{\alpha\beta\delta} = N_\mu(f \circ \eta - g_{\alpha\beta\delta}) \rightarrow 0, \alpha, \beta, \delta \rightarrow 0.$$

ni isbotlash mumkin. Shunday qilib, (2.3.4) tenglamaning o'ng tomonini aniqlangan.

Endi $f \in L^1(S, \mu_\eta)$ bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun shunday $\{\Phi_n\}, \Phi_n \in C_c(S)$ ketma-ketlik topilib, $N_{\mu_\eta}(f - \Phi_n) \rightarrow 0$ bo'lishini ko'rsatish yetarli.

Lemmaga ko'ra

$$\begin{aligned} N_{\mu_\eta}(f - f_{\alpha\beta}) &= \sup_{y \in S} |f(y) - f_{\alpha\beta}(y)|_S N_{\mu_\eta} \leq \\ &\leq \max \left[\sup_{y \in M_\alpha} |f(y)|_S N_{\mu_\eta}(y); \sup_{y \in M_\alpha} |f(y)|_S N_{\mu_\eta}(y) \right] \leq \\ &\max[\alpha \|f\|, \beta \|\mu\|] \rightarrow 0, \alpha, \beta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Shu sababli, (2.3.4) tenglamaning chap tomoni aniqlangan. Endi o'ng tomon chap tomonga tengligini ko'rsatamiz. Avvalgi mulohazalarni qo'llab, $\mu_\alpha(f \circ \eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta})$ ni hosil qilamiz. Shunga ko'ra $N_\mu(f \circ \eta - f_{\alpha\beta} \circ \eta) \rightarrow 0$. Demak,

$$\mu(f \circ \eta) = \lim \mu(f_{\alpha\beta} \circ \eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta}).$$

2.3.1-eslatma. Olingan natijalarni vector qiymatli $\eta: X \rightarrow S^n, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n), \eta_j \in L^1$ holga umumlashtirish mumkin. μ_η o'lchov $\Phi(S^n)$ da aniqlangan bo'ladi.

2.4.1 P-adik qiymatli ehtimollik o'lchovi.

Kamayuvchi o'lchovlarga asoslangan aksiomatika.

Kamayuvchi o'lchovlar nazariyasi p-adik ehtimollar nazariyasi aksiomatik darajada paydo bo'lishiga asos bo'lgan.

2.4.1-ta'rif. $(\Omega, \Phi(\Omega), P)$ -uchlik bu ehtimollik fazosidir, bu yerda Ω -nol o'lchamli lokal kompakt σ -kompakt topologic fazo, $\Phi(\Omega)$ -yopiq-ochiq qism to'plamlar algebrasi, P-kamayuvchi Q_p -qiymatli $\Phi(\Omega)$ dagi o'lchov bo'lib, $P(\Omega) = 1$.

2.4.1-eslatma. Kolmogorov aksiomatikasiistalgan abstrakt Ω to'plam va uning qism to'plamlari algebrasi asosida qurilgan. Lekin bunday mulohaza bizni holga to'g'ri kelmaydi. Bizning mulohazalarda Ω fazoning topologic xossalari muhim rol o'ynaydi. Bizning aksiomatika Freshe va Kramerning geometrik ehtimollar nazariyasiga biroz o'xshash.

S bu Q_p ni qism maydon sifatida o'zida saqllovchi local kompakt noarximed maydon bo'lsin.

2.4.2-ta'rif. L^1 sinfdan olingan $\xi: \Omega \rightarrow S$ funksiyaga tasodifiy miqdor deyiladi.

Odatdagi

$$M\xi \equiv \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) = P(\xi),$$

ta'rif yordamida ξ matematik kutilmani kiritamiz, $m_K(\xi) = M\xi^K$ -momentlar, agar $\xi^K \in L^1$ bo'lsa, bu momentlar korrekt aniqlangan, va $\nu_\xi(A) = \rho(\xi \in A)$ ehtimollik taqsimoti. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ vektorga tasodifiy miqdor deyiladi, bu yerda ξ_K -tasodifiy miqdor. ξ tasodifiy vector uchun P_ξ tasodifiy taqsimotni tasodifiy miqdor uchun ham kiritish mumkin. Shu bilan birga $m_\alpha(\xi) = M_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ tasodifiy vektorlarning aralash momentlarini kiritish mumkin.

2.4.2. Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar.

2.4.3-ta'rif. Agar barcha $A, B \in \Delta(\Omega)$ lar uchun

$$P(\xi \in A, \eta \in B) = P(\xi \in A)P(\eta \in B) \quad (2.4.1)$$

bo'lsa, ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqmas deyiladi.

2.4.1-lemma. ξ va η lar bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U holda $f, g \in C_c(S)$ funksiyalar uchun

$$Mf(\xi)g(\eta) = Mf(\xi)Mg(\eta) \quad (2.4.2)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. α orqali

$$|Mf(\xi)g(\eta) - Mf(\xi)Mg(\eta)|_S.$$

ifodani belgilaymiz.

$$f^\varepsilon = \sum_{K=1}^{N_\varepsilon} C_K^\varepsilon \Phi_{U_K^\varepsilon} \quad \text{lokal o'zgarmas funksiya bo'lib, } U_K^\varepsilon \in \Delta(S) \quad \text{va}$$

$\sup_x |f(x) - f^\varepsilon(x)|_S < \varepsilon; g^\varepsilon$ esa g ga o'xshash funksiya. U holda $a \leq \max[a_{\varepsilon 1}, a_{\varepsilon 2}]$ bu yerda

$$\begin{aligned}
a_{\varepsilon 1} &= \left| Mf(\xi)g(\eta) - Mf^{\varepsilon}(\xi)g^{\varepsilon}(\eta) \right|_S \leq \\
&\leq \max \left[\sup_{\omega} \left| f(\xi(\omega)) \right|_S \left| g(\eta(\omega)) - g^{\varepsilon}(\eta(\omega)) \right|_S N_p(\omega), \right. \\
&\quad \left. \sup_{\omega} \left| g^{\varepsilon}(\eta(\omega)) \right|_S \left| f(\xi(\omega)) - f^{\varepsilon}(\xi(\omega)) \right|_S N_p(\omega) \right] = \max[u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}]; \\
u_{\varepsilon} &\leq \|f\| \|P\|, v_{\varepsilon} \leq \varepsilon \|g^{\varepsilon}\| \|P\|; \\
a_{\varepsilon 2} &= \left| Mf(\xi)Mg(\eta) - Mf^{\varepsilon}(\xi)Mg^{\varepsilon}(\eta) \right|_S \leq \\
&\leq \max \left[\left| Mf(\xi)Mg(\eta) - g^{\varepsilon}(\eta) \right|_S, \left| Mg^{\varepsilon}(\eta)M(f(\xi) - f^{\varepsilon}(\xi)) \right|_S \right] = \max[\alpha_{\varepsilon}, \beta_{\varepsilon}]; \\
\alpha_{\varepsilon} &\leq N_p(f \circ \xi) N_p(g \circ \eta - g^{\varepsilon} \circ \eta) \leq N_p(f \circ \xi) \|P\| \|g - g^{\varepsilon}\|.
\end{aligned}$$

β^{ε} ni ham shunga o'xshash baholash mumkin.

2.4.1-teorema. ξ va η lar bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lib, $f, g \in C_c(S)$ bo'lsin. U holda (2.4.2) bajariladi.

Isbot. Faraz qilaylik $M_{\alpha, \xi} = \xi(\Omega_{\alpha}), M_{\alpha, \eta} = \eta(\Omega_{\alpha}), \alpha > 0$ bo'lsin. U holda $T_{\alpha} = M_{\alpha, \xi} \cup M_{\alpha, \eta}$ to'plam kompakt bo'ladi.

$U \in C_b(S)$ bo'lsin. U funksiyaning T_{α} dagi qismi tekis uzluksiz bo'ladi.

2.3.4-teoremadagi mulohazalarni takrorlab,

$$\sup_{x \in T_{\alpha}} |u(x) - u_{\alpha\beta}(x)|_S < \beta.$$

bo'ladigan $u_{\alpha\beta} \in C_b(S)$ funksiyani quramiz.

$f_{\alpha\beta}$ va $g_{\alpha\beta}$ funksiyalar f va g ga o'xshash funksiyalar bo'lsin. 2.4.1 yordamida

$$\begin{aligned}
\lambda_{\alpha\beta} &= \left| M(f(\xi)g(\eta) - f_{\alpha\beta}(\xi)g_{\alpha\beta}(\eta)) \right|_S; \\
\mu_{\alpha\beta} &= \left| Mf(\xi)Mg(\eta) - Mf_{\alpha\beta}(\xi)Mg_{\alpha\beta}(\eta) \right|_S.
\end{aligned}$$

ifodalarni baholaymiz.

Masalan, $\lambda_{\alpha\beta} \leq \max[\lambda_{\alpha\beta_1}, \lambda_{\alpha\beta_2}]$, bu yerda

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta_1} &\leq \sup_{\omega} |f(\xi(\omega))|_S |g(\eta(\omega)) - g_{\alpha\beta}(\eta(\omega))|_S N_P(\omega) \leq \\ &\leq \|f\| \max \left[\sup_{\omega \in \Omega_\alpha} |g(\eta(\omega)) - g_{\alpha\beta}(\eta(\omega))|_S N_P(\omega), \right. \\ &\quad \left. \sup_{\omega \in \Omega_\alpha} |g(\eta(\omega)) - g_{\alpha\beta}(\eta(\omega))|_S N_P(\omega) \right]; \end{aligned}$$

Agar $\omega \in \Omega_\alpha$ bo'lsa, u holda $\eta(\omega) \in M_{\alpha\eta} \subset T_\alpha$ va $\xi(\omega) \in M_{\alpha\xi} \subset T_\alpha$. Shu sababli,

$$\lambda_{\alpha\beta_2} \leq \|f\| \max[\|P\|\beta, \|g\|\alpha] \rightarrow 0, \alpha, \beta \rightarrow 0.$$

$\lambda_{\alpha\beta_2}$ ni ham shunga o'xshash baholash mumkin.

2.4.1-natija. ξ va η lar bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U holda barcha yopiq-ochiq A va B qism to'plamlar uchun (2.4.1) bajariladi.

Agar Σ xossa Ω_+ qism to'plamda bajarilsa, bu xossa (modP) deyarli barcha joyda bajariladi deyiladi.

ξ va η tasodifiy miqdorlar deyarli hamma joyda chegaralangan. 2.3.4-teoremaga ko'ra $\forall k = 0, 1, \dots$ uchun ξ^k va η^k lar ham tasodifiy miqdorlar bo'ladi. 2.3.2-teoremaga ko'ra $\xi^k \eta^k$ ham tasodifiy miqdor bo'ladi. Shu sababli barcha $m_{kn}(\xi\eta)$ momentlar korrekt aniqlangan.

2.4.2-teorema. ξ va η tasodifiy miqdorlar deyarli hamma joyda chegaralangan bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lishi uchun barcha $k, n = 1, 2, \dots$ lar uchun

$$m_{kn}(\xi, \eta) = m_k(\xi)m_n(\eta) \quad (2.4.3)$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot.

1. ξ va η tasodifiy miqdorlar, U esa $\xi(\Omega_+)$ to'plamlarni saqllovchi Sdagi shar bo'lsin. U holda $f_k(y) = y^k \Phi_U(y)$ va $g_n(y) = y^n \Phi_U(y)$ funksiyalar $C_c(S)$ sinfga tegishli va

$$Mf_k(\xi)g(\eta) = m_{kn}(\xi, \eta), Mf_k(\xi) = m_k(\xi), Mg_n(\eta) = m_n(\eta).$$

tengliklar bajariladi.

2. Faraz qilaylik (2.4.3)-shart bajarilsin va f, g funksiyalar $C_c(S)$ sinfga tegishli bo'lsin. $\text{Supp} f, \text{supp} g \subset U$ holni qarash mumkin. U to'plamlar kompaktligidan va Kaplanskiy teoremasidan foydalanib isbotni yakunlaymiz.

ξ tasodifiy miqdor uchun odatdagi ehtimollar nazariyasidagi kabi

$$\xi^c(\omega) = \xi(\omega) \Phi_{U_c(0)}(\xi(\omega)) c \in R_+.$$

deb olamiz.

2.4.1-tasdiq. Agar (7.3)-shart barcha ξ^c va η^c lar uchun bajarilsa, ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lmas bo'ladi.

2.4.2-tasdiq. Agar $P_Z = P_\xi \otimes P_\eta$ bo'lsa, ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lmas bo'ladi, bu yerda $z = (\xi, \eta)$. Bu 2.4.1-lemmaning natijasidir.

2.4.3. Shartli matematik kutilma.

ξ va η tasodifiy miqdorlar bo'lsin. $M[\xi | \eta = y]$ shartli matematik kutilma $m(y) \in L^1(S, P_\eta)$ funksiya sifatida aniqlab $\forall B \in \Delta(S)$ to'plam uchun

$$\int_{\{\omega \in \Omega: \eta(\omega) \in B\}} \xi(\omega) P(d\omega) = \int_B m(y) P_\eta(dy)$$

bo'ladi. Barcha ξ va η tasodifiy miqdorlar uchun $\Phi_B(\eta(\omega)) \xi(\omega) \in L^1(\Omega, P)$ bo'lgani uchun bu ta'rif korrektdir.

2.4.2-tasdiq. ξ va λ tasodifiy miqdorlar bo'lib, λ deyarli hamma yerda chegaralangan bo'lsin. U holda $\xi \lambda$ tasodifiy miqdor bo'ladi.

Isbot. $\psi(\omega) = \xi(\omega) \lambda(\omega) \in L^1$ bo'lishini ko'rsatamiz. $g(\omega) = \xi(\omega) u(\omega)$ funksiyaning qaraymiz, bu yerda $u \in C_c$ va $g(\omega)$ tasodifiy miqdor bo'lishini ko'rsatamiz. $\forall \varepsilon < 0$

Soni uchun shunday $\alpha \in C_c(\Omega)$ funksiya topilib, $N_p(\xi - \alpha) < \varepsilon / \|u\|$ bo'ladi.

Shu sababli $\alpha u \in C_c(\Omega)$ uchun $N_p(\xi u - \alpha u) < \varepsilon$ bo'ladi.

Endi $\lambda \in L^1$ shartda foydalanamiz: shunday $(U_n), U_n \in C_c(\Omega)$ ketma-ketlik topilib, $N_p(\lambda - U_n) \rightarrow 0$ bo'ladi. Shu sababli,

$$\sup_{\omega \in \Omega_\alpha} |\lambda(\omega) - u_n(\omega)|_S \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right) \sup_{\omega \in \Omega_\alpha} |\lambda(\omega) - u_n(\omega)|_S N_p(\omega) \rightarrow 0, n \rightarrow 0$$

bundan tashqari, $\|U_n\| \in \sup_{\omega \in \Omega_+} |\lambda(\omega)| = c$ bo'ladi.

$\{\psi_N(\omega) = \xi(\omega)u_N(\omega)\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini qaraymiz. U holda

$$|\psi_N(\omega)|_S \leq C|\xi(\omega)|_S, \omega \in \Omega_+$$

tengsizlik o'rinli va $\forall \Omega_\alpha$ qism to'plamda $\{\psi_N\}$ ketma-ketlik ξ, λ ga tekis yaqinlashuvchi bo'ladi:

$$\sup_{\omega \in \Omega_\alpha} |\xi(\omega)\lambda(\omega) - \psi_N(\omega)|_S \leq \sup_{\omega \in \Omega_\alpha} |\xi(\omega)|_S \sup_{\omega \in \Omega_\alpha} |\lambda(\omega) - u_N(\omega)|_S \rightarrow 0, N \rightarrow 0.$$

Bunda biz $\lambda(\omega) = \Omega_\alpha$ dagi qismi uzluksiz funksiya ekanligidan foydalandik. Isbotni yakunlash uchun Monna-Springer integral uchun limit teoremani qo'llash kerak.

Noarximed holida Radon-Nikodima teoremasining analogi yo'q. Shartli matematik kutilma mavjud bo'lmagan holatlar bor.

Deyarli hamma yerda chegaralangan ξ tasodifiy miqdorlarni qaraymiz. Bu shart texnik shart bo'lib, bu shartsiz nazariyani rivojlantirish mumkin emas. $M[\lambda(\omega) | \eta(\omega) = y]$ matematik kutilma hamma yerda mavjud.

2.4.3-tasdiq. $\forall f \in \Gamma_b(\eta)$ funksiya uchun

$$Mf(\eta(\omega))\xi(\omega) = Mf(\eta(\omega))M[\xi(\omega) | \eta = \eta(\omega)]. \quad (2.4.4)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. $\xi(\Omega_+ \subset U, U \in \Delta(\Omega))$ bo'lsin. U holda

$$f(\eta(\omega))\xi(\omega)\Phi_U(\xi(\omega)) = f(\eta(\omega))\xi(\omega).$$

deyarli hamma joyda bajariladi.

$g(x, y) = f(y)x\Phi_U(x)$ funksiya $\Gamma_b(z)$ ga tegishli, bu yerda $z = (\xi, \eta)$.

O'zgaruvchilarni almashtirish formulasidan foydalanib

$$I = \int_{\Omega} g(\xi(\omega), \eta(\omega))P(d\omega) = \int_{S^2} f(y)x\Phi_U(x)P_z(dx dy) = \int_{S^2} f(y)xP_z(dx dy).$$

ni hosil qilamiz.

Ushbu

$$\lambda(A) = \int_{S^2} \Phi_A(x) P_z(dx dy) = \int_A m(y) x P_\eta(dy)$$

o'lchovni qaraymiz, $m(y) = M[\xi | \eta = y]$. Shu sababli,

$$I = \int_S f(y) m(y) P_\eta(dy).$$

2.4.4-tasdiq. Shartli matematik kutilma $(\text{mod } P_\eta)$ yagona.

Isbot. $m_j(y) = M[\xi | \eta = y]$, $j = 1, 2$ bo'lsin. U holda

$$N_{P_\eta}(m_1 - m_2) = \sup_{\Phi \neq 0, \Phi \in C_c(S)} \|\Phi\|^{-1} |P_n(\Phi(m_1 - m_2))|_S.$$

Lekin $\forall f \in \Gamma_b(\eta)$ uchun

$$P_\eta(\Phi m_1) = \int_S \phi(y) m_1(y) P_n(dy) = \int_\Omega \Phi(\eta(\omega)) \xi(\omega) P(d\omega) = P_\eta(\Phi m_2).$$

2.4.5-tasdiq. $\forall f \in \Gamma_b(\eta)$ funksiya uchun

$$M[f(\eta)\xi | \eta = y] = f(y)M[\xi | \eta = y] \quad (2.4.5)$$

tenglik bajariladi.

Isbot. Bu tenglikni $(\text{mod } P_\eta)$ deyarli hamma yerda bajariluvchi tenglik sifatida qaraymiz. O'zgaruvchilarni almashtirish formulasidan foydalanib

$$\int_{\{\omega \in \Omega, \beta\eta(\omega) \in B\}} f(\eta(\omega)) \xi(\omega) P(d\omega) = \int_B \Phi_B(y) f(y) m(y) P_\eta(dy).$$

ni hosil qilamiz. Isbotni yakunlash uchun avvalgi tasdiqni qo'llaymiz.

2.4.6-tasdiq. ξ va η tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U holda

$$M[\xi | \eta = y] = M\xi. \quad (2.4.6)$$

Isbot. ξ lar deyarli hamma yerda chegaralanganligidan

$$\int_{\{\omega \in \Omega, \beta\eta(\omega) \in B\}} \xi(\omega) P(d\omega) = M\xi(\omega) M\Phi_B\eta(\omega) = \int_S \Phi_B(y) M\xi P_n(dy).$$

ni hosil qilamiz.

2.4.7-tasdiq. ξ va η bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lib, $\Phi \in C_b(S^2)$

bo'lsin. U holda

$$M[\Phi(\xi, \eta) | \eta = y] = M\Phi(\xi, y). \quad (2.4.7)$$

Isbot. (2.4.7) ning chap tomonini $g_1(y)$ bilan, o'ng tomonini $g_2(y)$ bilan belgilaymiz. $N_{\rho_\eta}(g_1 - g_2) = 0$ ni isbotlash kerak. $\forall \psi \in C_B(S)$ uchun $P_\eta(\psi g_1) = P_\eta(\psi g_2)$ tenglikni ko'rsatamiz. Lekin

$$P_\eta(\psi g_1) = \int_{\Omega} \psi(\eta(\omega)) \phi(\xi(\omega), \eta(\omega)) P(d\omega)$$

va

$$P(\psi g_2) = \int_S \psi(y) = \int_{\Omega} \phi(\xi(\omega), y) P(d\omega) P_\eta(dy) = \int_{S^2} \psi(y) \phi(x, y) P_z(dx, dy)$$

bu yerda $z = (\xi, \eta)$. R_α orqali $z(\Omega_\alpha), \alpha > 0$ dagi kompakt to'plamni belgilaymiz. $T_\alpha \in \Delta(S^2), R_\alpha \subset T_\alpha$ bo'lsin. $T_\alpha = T_\alpha^1 \times T_\alpha^2, T_\alpha^j \in \Delta(S^2)$ holni qarash mumkin. 2.3.2-lemma yordamida

$$\left| P_z(\psi \phi) - P_z(\psi \phi \phi_{T_\alpha}) \right|_S \leq N_{P_z}(\psi \phi(1 - \phi_{T_\alpha})) \leq \|\psi\| \sup_{t \in T_\alpha} |\phi(t)|_S N_{P_z}(t) \leq \alpha \|\psi\| \|\phi\|.$$

ni hosil qilamiz. Shu sababli,

$$\{P_z(\psi \phi \phi_{T_\alpha})\}_{\alpha > 0}.$$

ketma-ketlik yordamida $P_\eta(\psi g_2)$ approksimatsiya mumkin. Kaplanskiy teoremasini qo'llab shunday $P_\varepsilon : T_\alpha \rightarrow S$ ko'phad topilib

$$\sup_{t \in T_\alpha} |\phi(t) - p_\varepsilon(t)|_S \leq \varepsilon.$$

bo'lishini hosil qilamiz. Shu sababli,

$$\left| P_z(\psi \phi \phi_{T_\alpha}) - P_z(\psi p_\varepsilon \phi_{T_\alpha}) \right|_S \leq \varepsilon \|\psi\| \|P_z\|.$$

Demak,

$$\{P_z(\psi p_\varepsilon \phi_{T_\alpha})\}_{\alpha, \varepsilon > 0}.$$

yordamida $P_z(\psi g_2)$ approksimatsiya mumkinligini hosil qilamiz. Ta'kidlab o'tamizki,

$$P_z(\psi p_\varepsilon \phi_{T_\alpha}) = \sum_{k_1, k_2} p \in k_1, k_2 (M\psi(\eta) \eta^{k_2} \phi_{T_\alpha^2}(\eta)) (M\psi(\xi) \xi^{k_1} \phi_{T_\alpha^1}(\xi)).$$

o'rinli. ξ va η bog'liqmas tasodifiy miqdorlar va shuning uchun

$$P_z(\psi p_\varepsilon \phi_{T_\alpha}) = \sum_{k_1, k_2} p \in k_1, k_2 M\psi(\eta) \eta^{k_2} \phi_{T_\alpha^2}(\eta) \psi(\xi) \xi^{k_1} \phi_{T_\alpha^1}(\xi) = M\psi(\eta) p_\varepsilon(\xi, \eta) \phi_{T_\alpha}(\xi, \eta).$$

Isbotni yakunlash uchun $\{\psi(\eta)\phi(\xi, \eta)(1 - \phi_{T_\alpha}(\xi, \eta))\}_{\alpha, \varepsilon > 0}$ tasodifiy miqdorlar oilasi $\psi(\eta)\phi(\xi, \eta)$ tasodifiy miqdorga approksimatsiya bo'lishini isbotlash kerak. Haqiqatdan ham,

$$N_{P_z}(\psi(\eta)\phi(\xi, \eta)(1 - \phi_{T_\alpha}(\xi, \eta))) \leq \|\psi\| \|\phi\| N_{P_z}(1 - \phi_{T_\alpha}(\xi, \eta)) \leq \|\psi\| \|\phi\| \sup_{\omega \in \Omega_\alpha} N_{P_z}(\omega) \leq \alpha \|\psi\| \|\phi\|$$

va

$$N_{P_z}(\psi(\eta)\phi(\xi, \eta)\phi_{T_\alpha}(\xi, \eta) - \psi(\eta)p_\varepsilon(\xi, \eta)) \leq \|\psi\| \sup_{\omega \in \Omega_\alpha} |(\psi(\xi(\omega), \eta(\omega)) - p_\varepsilon(\xi(\omega), \eta(\omega)))\phi_{T_\alpha}(\xi, \eta)| N_{P_z}(\omega) = \gamma_\varepsilon.$$

$W_\alpha = z^{-1}(T_\alpha); \Omega_\alpha \subset W_\alpha$. deb olamiz. U holda

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon &\leq \max \left[\sup_{\omega \in \Omega_\alpha} |\phi(\xi(\omega), \eta(\omega)) - p_\varepsilon(\xi(\omega), \eta(\omega))| N_{P_z}(\omega), \sup_{\omega \in W_\alpha} N_{P_z}(\omega) \right] \leq \\ &\leq \max[\varepsilon \|P\|, \alpha] \rightarrow 0, \alpha, \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2.4.2-natija. ξ va η bog'liqmas tasodifiy miqdorlar va $B \in \Phi(S^2)$ bo'lsin.

U holda

$$M[\phi_B(\xi, \eta) | \eta = y] = M\phi_B(\xi, y).$$

Shartli zichlik. $\nu - S$ dagi o'lchov bo'lsin. Agar $L^1(S, \nu)$ dan shunday $f_\xi(y)$ funksiya topilib,

$$P(\xi(\omega) \in A) = \int_A f_\xi(y) \nu(dy), A \in \Phi(S),$$

ya'ni $P_\xi = f_\xi \nu$ bo'lsa, ξ tasodifiy miqdor ν ga nisbatan zichlikka ega deyiladi.

Odatdagidek

$$\int_S f_\xi(y) \nu(dy) = P(\xi(\omega) \in S) = 1.$$

Shunga o'xshash ta'rif tasodifiy vektorlar uchun ham ishlatiladi.

$z(\omega) = (\xi(\omega), \eta(\omega))$ tasodifiy vector $\nu \otimes \nu$ ga nisbatan $f_z(x, y)$ zichlikka ega bo'lsin, bu yerda $f_\eta(y) = 0$ bo'lganda $f_{\xi|\eta}(x | y) = 0$.

2.4.8-tasdiq. $z=(\xi,\eta)$ tasodifiy vector $\nu \otimes \nu$ ga nisbatan zichlikka ega bo'lsin va $G = \{y \in S : f_\eta(y) = 0\}$ to'plam ν -e'tiborsiz bo'lsin. U holda

$$M[\xi | \eta = y] = \int_S x f_{\xi|\eta}(x | y) \nu(dx).$$

mavjud.

Isbot.

$$I_1 = \int_{\Omega} \xi(\omega) \phi_B(\eta(\omega)) P(d\omega) = \int_B b(y) P_\eta(dy) = I_2.$$

tenglikni tekshiramiz.

$\xi(\Omega_+)$ to'plamlar chegaralanganligini va o'zgaruvchilarni almashtirish formulasidan foydalanamiz:

$$I_1 = \int_{\Omega} x \phi_B(y) f_z(x, y) \nu \otimes \nu(dx dy) = \int_S \phi_B(y) m(y) P_\eta(dy) = I_2.$$

Diskret tasodifiy miqdorlar. $\eta = (y_n)$ diskret tasodifiy miqdorlar holini qaraymiz. Shartli matematik kutilma uchun odatdagi formulani olish mumkin. $A_k = \eta^{-1}(y_k)$ to'plam jamlanuvchi bo'lmasligi mumkin.

2.4.1-misol. $\Omega = Z_q$ va $P = dx$ - Q_p da qiymat qabul qiluvchi Z_q dagi Xaar o'lchovini belgilaymiz. U holda $N_p(\omega) \equiv 1$ va $L^1(\Omega, P) = C(\Omega)$ bo'ladi. y_n -p-adik sonlar ketma-ketligi bo'lib, $i \neq j$ da $y_i \neq y_j$ bo'lsin va $\lim_{j \rightarrow \infty} y_j = y_\infty$ bo'lsin. s_l orqali q^{-l} radiusli sferani belgilaymiz va $s_l, l = 0, 1, 2, \dots$ dagi $\eta : \eta \equiv y_l$ funksiyani belgilaymiz va $\eta(0) = y_\infty$. s_l yopiq-ochiq va η ning uzluksizligi uning noldagi uzluksizligining natijasidir. Shu sababli, $\eta = (y_l)_{l=0}^\infty$ -diskret tasodifiy vector. Lekin $A_\infty = \eta^{-1}(y_\infty) = \{0\}$ va $\Phi_{A_\infty} \notin C(\Omega)$.

2.4.9-tasdiq. $\eta = (y_n)$ -diskret tasodifiy vector va $y_k - (y_n)$ ketma-ketlikning yakkaalangan nuqtalari bo'lsin. U holda A_k to'plam jamlanuvchi bo'ladi.

Isbot. $U \in \Delta(S), y_k \in U$ bo'lib, lekin $y_j \notin U, j \neq k$ bo'lsin. U holda $\phi_U(\eta(\omega)) \equiv \phi_{A_k}(\omega)$. Isbotlash uchun 2.3.2-teoremani qo'llash kerak.

2.4.2-eslatma.

$$\eta(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \phi_{A_k}(\omega) \quad (2.4.8)$$

qiziqarli holder, bu yerda $A_k \in \Phi(\Omega)$. Bunda A_k ning jamlanuvchanlik muammosi paydo bo'lmaydi.

Umumiyroq yetarli shartni qaraymiz. Ω_α kompakt to'plam Ω dagi topologiyaga nisbatan taqsimlangan bo'lsin.

2.4.10-tasdiq. $A \subset \Omega$ to'plam jamlanuvchi bo'lishi uchun $A_\alpha = A \cap \Omega_\alpha, \alpha > 0$ to'plam Ω_α topologic fazolarda yopiq-ochiq bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot.

1. $\phi_A \in L^1(\Omega, P)$ bo'lsin. Xususan, $\phi_A = \Omega_\alpha$ dagi qism uzluksiz. U-markazi $t=1 \in S$ nuqtada bo'lgan shar va $a=0 \notin U$ bo'lsin. U holda $\phi_A^{-1}(U) = A_\alpha$ -yopiq-ochiq to'plam, chunki U yopiq-ochiq to'plam va ϕ_{A_α} uzluksiz.

2. $A_\alpha \in \Delta(\Omega_\alpha)$ bo'lsin. $V_\alpha \in \Phi(\Omega): V_\alpha \cap \Omega_\alpha = A_\alpha$ bo'lsin. A_α ning kompaktligiga ko'ra $V_\alpha \in \Delta(\Omega)$, shu sababli $\phi_{A_\alpha} \in C_c(\Omega)$. Lekin

$$N_p(\phi_A - \phi_{V_\alpha}) \leq \sup_{\omega \in \Omega_\alpha} |\phi_A(\omega) - \phi_{V_\alpha}(\omega)| N_p(\omega) \leq \alpha.$$

4.2-misol. $\Omega = Z_q, \mu = dx$ bo'lsin. $f: \Omega \rightarrow Q_p$ funksiyaning s_l dagi qismi f_l o'zgarmasga teng f zichlikni qaraymiz, bu yerda $f_l \rightarrow 0, l \rightarrow 0, |f_l|_p < |f_{l-1}|_p$ va $f(0)=0$. bu funksiya uzluksiz, shu sababli L^1 ga tegishli. Normalashtiruvchi shart $\sum f_l \mu(s_l) = 1$ shartga olib keladi. $P = f\mu$ bo'lsin. Teoremaning 1-punktidan $N_p(\omega) = |f(\omega)|_p$ va $\Omega_0 = \{0\}, \Omega_+ = Z_q / \{0\}$ ni hosil qilamiz. $A = \Omega_+$ to'plam yopiq-ochiq bo'lmaydi, va shu sababli bu funksiya uchun 1-eslatma sharti bajarilmaydi. Lekin $A_\alpha = A \cap \Omega_\alpha \in \Phi(\Omega)$ to'plam va shu sababli A to'plam jamlanuvchi.

Bu misolni o'zgartirib, A_α yopiq-ochiq bo'lmaydigan to'plam hosil qilish mumkin.

2.4.3-misol. $\Omega' = Z_q \times Z_q, \mu' = \mu \otimes \delta, \mu = dx$. bo'lsin. Bu yerda $N_{\mu'}(x,0)=1$ va $N_{\mu'}(x,y)=0, y \neq 0. \bar{f}(x,y): \bar{f}(x,0)=f(x)$ zichlikni kiritamiz, bu yerda f avvalgi misoldagi kabi zichlik, va $y \neq 0$ da $\bar{f}(x,y)=0. P' = \bar{f}\mu'$ deb olamiz. Bu holda

$$\Omega'_+ = \{z = (x,0) : x \neq 0\}, \Omega_0 = \{z = (x,y) : y \neq 0\} \cup \{z = (0,y)\}.$$

$A = \Omega_+$ bo'lsin. U holda $A_\alpha = A \cap \Omega'_\alpha = \Omega_\alpha \times \{0\}, \Omega_\alpha$ -2.4.2-misoldagi to'plam bo'lsin.

$A_\alpha \notin \Phi(\Omega')$ bo'ladi. $U_\alpha = \Omega_\alpha \times Z_q \in \Phi(\Omega')$ bo'lsin. U holda $A_\alpha = U_\alpha \cap \Phi'_\alpha$. Endi 2.4.10-tasdiqni qo'llash mumkin.

$\eta(\omega)$ diskret tasodifiy miqdor uchun $A_k = \{\omega \in \Omega : \eta(\omega) = y_k\}$ to'plamning jamlanuvchanlik masalasini o'rganamiz. Teskari masalani qaraymiz. Barcha A_k to'plam jamlanuvchi bo'ladigan holni muhokama qilamiz. Bizni (2.4.8) funksiya tasodifiy miqdor bo'lishi uchun qo'yiladigan shartlar qiziqtiradi.

2.4.11-tasdiq. Faraz qilaylik

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |y_k|_S N_P(A_k) = 0.$$

bo'lsin. U holda (2.4.8) funksiya tasodifiy miqdor bo'ladi.

Isbot. Barcha N lar uchun $\eta_N(x) = \sum_{k=1}^N y_k \Phi_{A_k}(\omega)$ funksiya tasodifiy miqdor bo'ladi. Ya'ni, $\xi_N(\omega) \in C_C(\Omega)$ funksiyalar mavjud bo'lib, $N_P(\eta_N - \xi_N) \leq \varepsilon$. Endi $N_P(\eta_N - \xi_N) = \sup_{k > N} |y_k|_S N_P(A_k) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$. ni hisobga olsak yetarli.

2.4.2-lemma. $(A_k)_{k=1}^\infty$ to'plam jamlanuvchi va $\bigcup_{k=1}^\infty A_k = \Omega, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

bo'lsin. U holda k indekslarning faqat chekli to'plami uchun $A_k \cap \Omega_\alpha \neq \emptyset, \alpha > 0$ bo'ladi.

Isbot. 2.4.10-tasdiqqa ko'ra $\{A_k \cap \Omega_\alpha\}$ to'plamlar sistemasi kompakt topologik fazoning ochiq qoplamasi.

2.4.12-tasdiq. λ -biror tasodifiy miqdor va η -(2.4.8) ko'rinishda bo'lsin, bu yerda $A_k \cap \Omega_\alpha$ to'plam jamlanuvchi, $f \in C_c(S)$. U holda

$$Mf(\eta(\omega))\lambda(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} f(y_k) \int_{A_k} \lambda(\omega) P(d\omega).$$

tenglik bajariladi.

Isbot. 2.3.2-teoramadan $z(\omega) = f(\eta(\omega))$ funksiya tasodifiy miqdor bo'lishi kelib chiqadi.

$$u_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} f(y_k) \phi_{A_k}(\omega) \lambda(\omega).$$

ni qaraymiz. U holda agar $\omega \in \bigcup_{k=1}^n A_k$ bo'lsa, $U_n(\omega) = z(\omega)\lambda(\omega)$ va $\omega \notin \bigcup_{k=1}^n A_k$ bo'lsa $U_n(\omega) = 0$ bo'ladi. Shunday qilib, $|U_n(\omega)|_S \leq \|f\| |\lambda(\omega)|_S$ bo'ladi. Isbotni yakunlash uchun 7.2-lemma va limit teoremani qo'llaymiz.

2.4.13-tasdiq. η -2.4.12-tasdiq shartlarini qanoatlantirsin. U holda $P_\eta - (y_n) = \eta(\Omega)$ nuqtalarga qo'yilgan diskret o'lchov bo'ladi va $N_{P_\eta}(y_k) = |P(A_k)|_S$.

Bu tasdiq avvalgi tasdiqdan kelib chiqadi.

2.4.3-teorema. λ -tasodifiy miqdor, η tasodifiy miqdor esa 2.4.3.11-tasdiqdagi kabi bo'lsin. U holda $M[\lambda | y = \eta]$ shartli matematik kutilma mavjud bo'lib,

$$M[\lambda | y = \eta] = (1/P(A_n)) \int_{A_n} \lambda(\omega) P(d\omega) \quad (2.4.9)$$

formula bilan hisoblanadi.

Isbot. Agar $P(A_n) = 0$ bo'lsa, 2.4.13-tasdiqqa ko'ra $N_{P_\eta}(y_n) = 0$. Demak, (2.4.9) tenglikning o'ng tomonidan $m(y)$ funksiyaning korrekt aniqlanganligi kelib chiqadi. Bu funksiya shartli matematik kutilma ekanligini isbotlash qoldi:

$$\int_{\{\omega: \eta(\omega) \in B\}} \lambda(\omega) P(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_B(y_k) \int_{A_k} \lambda(\omega) P(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_B(y_k) m(y_k) P(A_k) = \int_S \phi_B(y) m(y) P_\eta(dy).$$

Isbotni yakunlash uchun $m \in L^1(S, P_\eta)$ ni ko'rsatamiz. Bu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(y_n)P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} \lambda(\omega)P(d\omega) = 0.$$

ga ekvivalent.

$\lambda(\omega)$ funksiya jamlanuvchi va shu sababli,absolyut uzluksiz. $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilib, $N_p(U) < \delta, U \in \Delta(\Omega)$ da $N_p(\lambda\phi_U) \leq \varepsilon$ bo'ladi. Xususan, $\forall \omega \in U$ uchun

$$|\lambda(\omega)|_S N_p(\omega) \leq \varepsilon \quad (2.4.10)$$

bo'ladi. $\omega \notin \Omega_\delta$ bo'lsin. Ω_δ ning kompaktligiga ko'ra ω nuqtaning shunday $V \in \Delta(\Omega)$ atrofi topilib, $V \cap \Omega_\delta \neq \emptyset$ bo'ladi. Lekin $N_p(\Phi_V) < \delta$ (2.4.10) tengsizlikni qanoatlantiradi.

2.4.1-lemmaga ko'ra shunday N son topilib, $\forall n > N$ uchun $A_n \cap \Omega_\delta = \emptyset$ bo'ladi. Shuning uchun barcha $\omega \in A_n$ nuqtalar uchun (4.10) bajariladi. Demak,

$$\left| \int_{A_n} \lambda(\omega)P(d\omega) \right|_S \leq N_p(\lambda\phi_{A_n}) = \sup_{\omega \in A_n} |\lambda(\omega)|_S N_p(\omega) \leq \varepsilon.$$

Bu yerda biz λ ning chegaralanganligidan foydalandik.

Xulosa

Bitiruv malakaviy ishining II bobi to'rtta mavzuni o'z ichiga olib, bu mavzular bitiruv malakaviy ishi mavzusining asosiy qismi bo'lib hisoblanadi. Bu bobda p-adik qiymatli ehtimollik o'lchovi: noarximed qiymatli o'lchovga nisbatan integrallashning Monna Springer nazariyasi, cheksizda kamayuvchi o'lchovlar, bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar, shartli matematik kutilma kabilar o'rganilib ularga doir misollar yechildi.

Xotima.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi mavzusi p -adik ehtimollik o'lchovlar nazariyasini o'rganishga bag'ishlangan. Bitiruv malakaviy ishi boshlang'ich tushunchalar va asosiy qismdan tashkil topgan. Kirish qismi ikki bandedan iborat bo'lib, birinchi bandeda O'zbekiston Respublikasi Prezidentining ta'lim-tarbiya, ilm-fan taraqqiyotiga bag'ihlangan nutqidan olingan ba'zi ma'lumotlar kiritilgan. Ikkinchi bandeda esa bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligi, asosiy maqsadi va vazifalari, tadqiqot obyekti va predmeti, bitiruv malakaviy ishining ilmiyligi va asosiy natijalar bayon qilingan. Bitiruv malakaviy ishda I-bob to'rtta mavzuni o'z ichiga olib, bu bobda bosh obyektni kiritganmiz. Ya'ni p -adik sonlar, p -adik sonlar maydoni, p -adic sonining fazosi kabi tushunchalar kiritildi. II-bob to'rtta mavzuni o'z ichiga olib, bu mavzular bitiruv malakaviy ishi mavzusining asosiy qismi bo'lib hisoblanadi. Bu bobda p -adik qiymatli ehtimollik o'lchovi: noarximed qiymatli o'lchovga nisbatan integrallashning Monna Springer nazariyasi, cheksizda kamayuvchi o'lchovlar, bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar, shartli matematik kutilma kabilar o'rganilib ularga doir misollar yechildi.

Foydalanilgan Adabiyotlar:

- 1) *Хренников А.Ю.* Неархимедов анализ и его приложения.— М.: Физматлит. 2003.
- 2) *Коблиц Н.* p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функции, — М.: Мир, 1982.
- 3) *Серр Ж.-П.* Курс арифметики, — М.: Мир, 1972.
- 4) *Б. Беккер, С. Востоков, Ю. Ионин* [2-адические числа](#) // [Квант](#). — 1979. — Т. 2. — С. 26—31.
- 5) *Rozikov U.A.* What are p -Adic Numbers? What are They Used for?. Asia Pacific Math. Newsletter, 2013.V.3, No.4., p.1-7.

6) Розиков У.А., Хакимов О.Н. р-адические гиббсовские меры и марковские случайные поля на счетных графах. *Теоретическая и математическая физика*. 2013, V.175, No.2.