

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

MATEMATIKA KAFEDRASI

**“ Z_5 MAYDON USTIDA DARAJASI n DAN OSHMAYDIGAN
KELTIRILMAYDIGAN KO'PHADLAR” MAVZUSIDAGI**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Namangan – 2016

R E J A

KIRISH

ASOSIY QISM

I-BOB. Cheksiz maydon ustidagi ko‘phadlar.

- 1- § Halqa ustidagi ko‘phad tushunchasi
- 2-§ Ko‘phadning ildizi
- 3-§ Ko‘phadlarning EKUBi
- 4-§ Keltiriladigan va keltirilmaydigan ko‘phadlar

II-BOB. Chekli maydon ustidagi ko‘phadlar

- 1-§ Chekli maydon ustidagi ko‘phadlar va ularning ildizlari
- 2-§ Z_5 maydon ustidagi darajasi n dan oshmaydigan keltirilmaydigan ko‘phadlar

XULOSA

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

INTERNET MA`LUMOTLARI

K i r i s h

O'zbekiston Respublikasi demokratik huquqiy davlat va fuqorolik jamiyati qurish yo'lini tanlangan va amalga oshirib kelmoqda.

Respublikamizdagi amalga oshirilayotgan qayta qurishning asosiy maqsad va uning harakatlantiruvchi kuchi inson, shaxsning har tomonlama rivojlanishi hisoblanadi. Mamlakatimiz taraqqiyotining muhim sharti kadrlarni tayyorlash tizimini mukammal bo'lishi, zamonaviy iqtisod, fan-madaniyat, texnika va texnologiyalar asosida rivojlanish hisoblanadi. «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» uzluksiz ta'lim va kadrlarni tayyorlash tizimlarini tubdan isloh qilishga qaratilgan.

Milliy dasturni amalga oshirishda mavjud ta'lim va kadrlarni tayyorlash tizimlarini tubdan o'zgartirish zamonaviy ilmiy fikrlar yutuqlari va ijodiy tajribalarga, ta'lim jarayonini hammasi shakli ta'limlarga tayangan holda amalga oshiriladi. Hozirgi zamonaviy bosqichda pedagogik dolzarb vazifalarga fan-texnika, ilg'or texnologiyalar yutuqlaridan foydalanish asosida shaxsni tarbiyalash, o'qitish va rivojlanishi maqsadlari, mazmuni, metodlari, vositalari va tashkiliy shakllarini ilmiy ta'minlash kiradi. Kadrlar tayyorlash sohasidagi davlat siyosati uzluksiz ta'lim tizimi orqali har tomonlama rivojlangan shaxs-fuqaroning tashkil topishini ko'zda tutadi. Ushbu ta'lim tizimida va kadrlar tayyorlashda ta'lim xizmatlarining istemolchisi, buyurtmachisi sifatida va xuddi shunday ishlab chiqaruvchi sifatida ishtirok etadi.

Shaxs ta'lim jarayonining ishlab chiqaruvchi sifatida ta'lim, moddiy ishlab chiqarish, fan, madaniyat va xizmatlar sohasi faoliyatida bilim va tajribalarni berishda ishtirok etadi. Respublikamizda shaxsga o'zining ijodiy imkoniyatlarini amalga oshirish uchun professional ta'lim dasturini

tanlash huquqini bergan. «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» asosida oliy ta'limning asosiy vazifalari belgilab berilgan. Oliy ta'limning eng muhim vazifalaridan biri zamonaviy o'quv dasturlari asosida yuqori saviyada o'qitish va malakali kadrlar tayyorlashni ta'minlash hisoblanadi. Oliy ta'limni islox qilishning hozirgi bosqichi oliy ta'lim maktabi o'qituvchisining vazifasini ham o'zgartiradi.

O'zbekiston Respublikasi davlat mustaqilligiga erishib, iqtisodiy va ijtimoiy rivojlanishning o'ziga xos yo'lini tanlashi kadrlar tayyorlash tuzilmasi va mazmanini qayta tashkil etishni zarur qilib qo'ydi va qator chora-tadbirlar ko'rishni: «Ta'lim to'g'risida» gi qonunni joriy etishni, yangi o'quv rejalari, dasturlari, darsliklarini joriy etishning zamonaviy didaktik ta'minotini ishlab chiqishni, o'quv yurtlarini attestatsiyadan o'tkazishni va akkreditatsiyalashni, yangi tipdagi ta'lim muassasalarini tashkil etishni taqazo etdi. Mana shunday fan-texnika taraqqiyoti davrida matematika sohasida ham, xususan, algebrada katta natijalarga erishilmoqda. Algebra matematikaning abstrakt holda to'plam va unda aniqlangan algebraik amallar orqali o'rganuvchi bo'limi hisoblanadi. Algebraning hozirgi zamon matematikasidagi ahamiyati nihoyatda katta. Umuman, hozirgi zamon matematikasida ko'p bo'limlarining «algebraiklashuvi» kuchayib bormoqda. Matematika boshqa bo'limlari masalalarining algebra tiliga o'tkazilishi, ularni yechish uchun nihoyatda unumli bo'lgan farmal algebraik hisoblashlarni tadbiq qilishga imkon beradi.

1. Mavzuning dolzarbligi va ahamiyati.

O'rta maktab matematikasida ko'phadlar juda ham ko'p qo'llaniladi. O'rta maktab algebra kursida o'rganiladigan bir o'zgaruvchili funksiyalar tenglamalarning asosi bir o'zgaruvchili ko'phadlarga borib taqaladi. Lekin, maktab matematika kursidagi ko'phadlar faqat butun sonlar va haqiqiy sonlar ustida qoraladi. Ko'phadlarning ildizlari (tenglamalarning yechimlari) ham butun yoki haqiqiy sonlar ichidan izlanadi.

Oliy algebrada esa ko'phadlar halqasi ixtiyoriy maydon ustida qaraladi. Ayniqsa maydon chekli bo'lsa, bunday ko'phadlar ustida amallar bajarish, uning ildizlarini aniqlash, xossalari qay xolatda o'rinli bo'lishini aniqlash masalasi oliy algebraning muxim masalasi hisoblanadi.

2. Bitiruv malakaviy ishining maqsadi va vazifalari.

Bitiruv malakaviy ishini bajarishdan maqsad, o'rta maktab algebra kursi bilan oliy maktab algebra kursidagi yana bir bog'lanishni o'rganishdan undagi uzviylikni ta'minlab, undagi farqni aniqlashdan iborat.

3.Tanlangan ob'yektlar va tadqiqot usullari.

Tanlangan ob'yektlar universitetning matematika fakultetidagi bakalavr yunalishi kurslaridan iborat. Chunki, algebra fanining asosiy kursida ixtiyoriy halqa ustidagi bir o'zgaruvchili ko'phadlar va ularning barcha xossalari, unga bog'liq barcha tushunchalar (darajasi, ildizlari, qiymati, EKUBI va EKUK iva hokazo) o'rganiladi. So'ngra bu halqa ustidagi ko'phad tushunchasi maydon ustidagi ko'phad tushunchasi maydon ustida qaralib, tushunchalar umumlashtiriladi. Algebraning maxsus kursida esa ko'phadlar chekli maydon ustida qaralib, chekli maydon ustida ko'phad (o'zini qanday tutishi) o'rganiladi.

4. Ishning amaliy ahamiyati.

Bitiruv malakaviy ishida ko'phadlarni 2 sinfga, cheksiz maydon va chekli maydon ustidagi ko'phadlarga ajratib o'quvchilarga o'rta maktabdanoq tanish bo'lgan koefsientlari cheksiz maydonlardan olingan ko'phadlar halqasi aloxida o'rganiladi, bunday xalkalar uchun asosiy tushunchalar, asosiy xossalari aloxida keltirildi. So'ngra koefsientlari chekli maydondan olingan ko'phadlar uchun yukoridagi asosiy tushunchalar ta'riflanib, bu tushunchalarning asosiy xossalari, xarakterli xususiyatlari ochib berildi,hamda cheksiz maydon ustidagi ko'phadlar

chekli maydon ustidagi ko'phadlar bilan taqqoslab, o'xshash va farqli jixatlari keltirildi.

6. Bitiruv malakaviy ishining tuzilishi haqidagi umumiy ma'lumotlar.

Bitiruv malakaviy ishi 3 ta qism, 2 ta bob va 6 ta paragrfdan iborat. 1- qism kirish, 2-asosiy qism, 3-xulosa. Asosiy qism 6 tadan paragrfga bo'linib, o'rganildi. Bitiruv malakaviy ishi jamida bet xajmni egalladi.

Asosiy qism.

1-BOB. Cheksiz maydon ustidagi ko'phadlar.

1- § Halqa ustidagi ko'phad tushunchasi.

$K - \forall$ halqa bo'lsin

Ta'rif:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

ko'rinishdagi ifodaga x o'zgaruvchili ko'phad deyiladi, bu yerda $n - \forall$ nomanfiy butun son, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ lar K halqaning elementlari bo'lib ular ko'phadning koeffitsiyentlari deyiladi.

(1) ifodaning koeffitsiyentlari K halqadan olingan bo'lsa ko'phadni K halqa ustidagi ko'phad deyiladi.

Masalan:

$$1 - x^2 - 4x^3 - 3x^4, \quad -2 + 3x - 5x^3 + 7x^5 \quad \text{lar}$$

butun sonlar halqasi Z ustidagi ko'phadlardir.

$\sqrt{3} - 2x + \sqrt{\frac{2}{4}}x^2, \quad 1 - \sqrt{5}x^2 + 9x^9$, bularesa haqiqiy sonlar halqasi R ustidagi ko'phadlardir.

Shuni ta'kidlash kerakki (1) ifoda bir butun yaxlit belgi sifatida qaraladi. Ya'ni hech qanday qo'shish yoki ko'paytirish amallari uning alohida qismlari uchun bajarilmaydi. K halqaning a_k elementi ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) (1) ko'phadning x^k oldidagi koeffitsiyenti deyiladi, $k > n$ bo'lgan holda x^k oldidagi koeffitsiyent nolga teng deb hisoblanadi. Ko'phadlar $f(x), g(x), \dots$ kabi belgilanadi.

Ta'rif. Agar $f_1(x)$ ko'phadning barcha koeffitsiyentlari $f_2(x)$ ko'phadning barcha koeffitsiyentlariga mos ravishda teng bo'lsa, ya'ni

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \\ f_2(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m \end{aligned} \quad (3) \quad \text{bo'lib,}$$

bu yerdagi $a_0, a_1, \dots, a_n \in k$, $b_0, b_1, \dots, b_m \in k$, $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_i = b_i, \dots$,

bo'lsa, u holda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ko'phadlar teng deyiladi va $f_1(x)$ q $f_2(x)$ kabi yoziladi.

(2) va (3) formulalar orqali berilgan $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ko'phadlar uchun ularning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasini quyidagicha aniqlanadi:

$$a) f_1(x) + f_2(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_k + b_k)x^k \quad (4)$$

$$b) f_1(x) - f_2(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots + (a_k - b_k)x^k \quad (5)$$

bu yerda $k = \max\{n, m\}$ $m > n$ bo'lganda $a_m = 0$ va $n > m$ bo'lganda $b_n = 0$ deb hisoblanadi.

Masalan:

$$\begin{aligned} (2 - x + 3x^2 + 5x^4) + (1 - x^2 + x^3 - 7x^4) &= \\ = (2 + 1) + (-1 + 0)x + (3 - 1)x^2 + (0 + 1)x^3 + (5 + 7)x^4 &= 3 - x + 2x^2 + x^3 + 2x^4 \end{aligned}$$

v) $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ko'phadlarning ko'paytmasi barcha tuzish mumkin bo'lgan $u \cdot v$ ko'rinishdagi ko'paytmalarning yig'indisiga teng bo'ladi, bu yerda $u - f_1(x)$ ko'phadning, v esa $f_2(x)$ ko'phadning $\forall$ hadi. O'xshash hadlarni ixchamlagandan so'ng quyidagi ko'phad hosil bo'ladi:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n+m}x^{n+m} \quad (6)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} c_k x^k &= a_0 \cdot b_k x^k + a_1 x \cdot b_{k-1} x^{k-1} + a_2 x^2 \cdot b_{k-2} x^{k-2} + \dots + a_k x^k \cdot b_0 = \\ &= (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \dots + a_k b_0) x^k \end{aligned}$$

bundan,

$$c_k = a_0 a_k + a_1 a_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \dots + a_k b_0 \quad (7)$$

(bu yerda yuqoridagi kabi $l > n$ bo'lganda $a_l = 0$ $l > m$ bo'lganda

$b_l = 0$ deb hisoblanadi.

Masalan:

$$(2 - 3x + x^3 + 2x^4)(-1 + 3x + 2x^2) = -2 + 9x - 5x^2 - 7x^3 + x^4 + 8x^5 + 4x^6$$

Xususiyl holda, x^4 oldidagi ko'effitsiyent (7) formula bo'yicha quyidagicha hisoblab topiladi:

$$2 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 1$$

Qo'shish va ko'paytirishning bunday aniqlash ko'phadlarning tengligi ta'rifiga mos keladi. Ya'ni agar $f_1(x)$ q $f_2(x)$ va $g_2(x) = g_2(x)$ bo'lsa, u holda

$$f_1(x) + g_1(x) = f_2(x) + g_2(x) \text{ esa}$$

$$f_1(x) \cdot g_1(x) = g_2(x) \cdot f_2(x) \text{ bo'ladi.}$$

Izox:

1) Ko'phadning ifodasidagi x harfining o'rnida $\forall$ boshqa harf bo'lishi mumkin. Agar ko'phadning berilishida bu qaysi harf ekani ma'lum bo'lsa, u holda ko'phadning belgilanishini qisqartirib, $f, g, \dots$ ko'rinishda yozish mumkin.

2) Ko'phadning (1) ko'rinishida berilishidan ko'rdikki, ko'phad mavjud bo'lishi uchun uning ko'effitsiyentlari berilishi kerak ekan. Bu ko'effitsiyentlarni K halqaning qandaydir elementlari ketma-ketligi $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ o'rinishida ifodalash mumkin. Unga mos holda qo'shish va ko'paytirish amallarini bunday ketma-ketliklar ustida aniqlasak, ko'phadni qisqaroq yozuvda ya'ni ketma-ketlik ko'rinishida ifodalash mumkin bo'ladi.

Ko'phadlarni qo'shish va ko'paytirish quyidagi xossalarga ega:

1⁰. Qo'shishning kommutativligi $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ko'phadlar (2) va (3) formulalar orqali berilgan bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra

$$f_1(x) + f_2(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_k + b_k)x^k$$

$$f_2(x) + f_1(x) = (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + \dots + (b_k + a_k)x^k$$

bu yerda $k = \max\{n, m\}$ bo'ladi. K halqada qo'shish ya'ni $p = 0, 1, 2, \dots, k$ bo'lganda $a_p + b_p = b_p + a_p$ bo'lagani uchun

$$f_1(x) + f_2(x) = f_2(x) + f_1(x) \text{ bo'ladi.}$$

2⁰. Qo'shishning assotsiativligi $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ ko'phadlar uchun

$$(f_1(x) + f_2(x)) + f_3(x) = (f_1(x) + f_2(x)) + f_3(x)$$

tenglikning bajarilishini K halqada qo'shishning assotsiativligidan foydalanib, osongina tekshirib ko'rish mumkin.

3⁰ . Nolning mavjudligi. Barcha koeffitsiyentlari nolga teng bo'lgan ko'phad **nol ko'phad** deyiladi va **0** bilan belgilanadi.

Bu ko'phad nol element (qo'shishga nisbatan neytral element) vazifasini bajaradi.

Ko'phadlarni qo'shish amalining ta'rifi ko'ra $\forall f(x)$ ko'phad uchun $f(x) + 0 = f(x)$ ekanligi tushunarli.

4⁰ . Qarama-qarshi elementning mavjudligi. $f(x)$ ko'phaddagi barcha koeffitsientlarni mos ravishda ularning qarama-qarshi lari bilan almashtirishdan xosil qilingan ko'phadni $-f(x)$ kabi belgilanadi. Ravshanki $f(x) + (-f(x)) = 0$ ya'ni

$-f(x)$ ko'phad $f(x)$ ko'phad uchun qarama-qarshi ko'phaddir.

5⁰ . Ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi.

3 ta ko'phad berilgan bo'lsin.

$$f_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

$$f_3(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$$

$$(f_1(x) + f_2(x))f_3(x) = f_1(x)f_3(x) + f_2(x)f_3(x) \quad (8)$$

ekanini isbotlaymiz.

$f_1(x) + f_2(x)$ ko'phad (4) formula orqali berilgan ko'phadlarni ko'paytirish amalining ta'rifi ko'ra

$$(f_1(x) + f_2(x))f_3(x) = d_0d_1x + d_2x^2 + \dots + d_{p+e}x^{p+e}$$

bu yerda

$$d_k = (a_0 + b_0)c_k + (a_1 + b_1)c_{k-1} + \dots + (a_k + b_k)c_0$$

K halqada distributivlikning o‘rinliligidan foydalanib d_k ni $d_k^I + d_k^{II}$ yig‘indi ko‘rinishida ifodalashimiz mumkin bunda

$$d_k^I = a_0 c_k + a_1 c_{k-1} + a_2 c_{k-2} + \dots + a_k c_0$$

$$d_k^{II} = b_0 c_k + b_1 c_{k-1} + b_2 c_{k-2} + \dots + b_k c_0$$

$d_k^I - f_1(x)f_1(x)$ ko‘phaddagi x^k oldidagi koeffitsiyent ekanligi kelib chiqadi. Bundan (8) tenglikning o‘rinliligi kelib chiqadi xuddi shu mulohazalardan foydalanib 2- distributivlik

$$f_3(x)(f_1(x) + f_2(x)) = f_3(x) \cdot f_1(x) + f_3(x) \cdot f_2(x)$$

ham isbotlandi.

1^0-5^0 xossalardan ko‘ramizki, koeffitsiyentlari K halqadan olingan ko‘phadlar to‘plamining o‘zi ham ko‘phadlar ustida aniqlangan qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan halqa tashkil qiladi.

Bu halqa K halqa ustidagi (x o‘zgaruvchili) ko‘phadlar halqasi deyilib, $K[x]$ kabi belgilanadi. Barcha halqalardagi kabi ko‘phadlar halqasida ham qo‘shish amaliga teskari amal ayirish amali aniqlangan. Kelgusida biz amalning halqa aksiomalaridan kelib chiqadigan asosiy sodda xossalarini ko‘rsatamiz. (2) va (3) ko‘rinishda berilgan ko‘phadlarning ayirmasi (5) formula yordamida topiladi. Bu tenglikning o‘rinli ekanligini ayrimani

$$f_1(x) - f_1(x) - f_2(x) = f_1(x) + (-f_2(x))$$

ko‘rinishda ifodalasa osongina isbotlanadi.

x ni o‘z ichiga olmagan ko‘phadlar, ya’ni (1) ifodada $n=0$ bo‘lgan holda K halqaning elementlari bo‘ladi. Ulardagi qo‘shish va ko‘paytirish amali, ta’rifdan ko‘rinadiki K halqada bajariladi. Boshqacha aytganda, K halqa $K[x]$ halqaning qism halqasi bo‘ladi.

(1) Ifodadagi $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$ qo‘shiluvchilar ko‘phadning hadlari deyiladi. Xususan, a_0 ozod had deyiladi. Odatda (yozuvni soda bo‘lishi

uchun)ko'phadning yozuvida koeffitsiyenti nolga teng bo'lgan hadlar tashlab yuboriladi.

Masalan:

$6 + 0 \cdot x + 3x^2 - 4x^3 + 0 \cdot x^4$ ko'phad $6 + 3x^2 - 4x^3$ kabi yoziladi.

ax^k ko'rinishidagi ko'phad bir had deyiladi.

Ko'phadlarning yig'indisi ta'rifi ko'ra (1) ko'phadni

$$a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$$

birhadlarning yig'indisi deb qarasak, ko'phadning yozuvidagi «+» belgini qo'shish amali deb qarash mumkin bo'ladi.

$(-a)x^k$ ax^k birhadga qarama-qarshi birhad deyiladi. Shuning uchun qandaydir ko'phadga $(-a)x^k$ birhadni qo'shish deganda ko'phaddan ax^k birhadni ayirish tushuniladi. Bu «-» ni ko'phadlarni ayirish sifatida qarab $+(-a)x^k$ o'rniga $-ax^k$ ni yozish imkonini beradi.

Masalan:

$$1 + (-3)x + 2x^2$$

ko'phad o'rniga

$$1 - 3x + 2x^2$$

ko'phadni yozish mumkin.

Endi K halqa birlik elementga ega bo'lsin deb faraz qilamiz. $p(x) = 1x$ ko'phadni qaraymiz. Ko'phadlarni ko'paytirish formulasiga ko'ra,

$$(p(x))^2 = p(x)p(x) = 1x^2$$

$$(p(x))^3 = (p(x))^2 p(x) = 1x^3$$

va xokozolarga ega bo'lamiz. Umuman, $(p(x))^k = (p(x))^{k-1} p(x) = 1x^k$

bo'ladi. $K[x]$ halqada $1x^k$ ko'phadni a elementga ko'paytirsak,

$a \cdot (p(x))^k = ax^k$ hosil bo'ladi. Odatda $(p(x))^k$ ifodani $p^k(x)$ kabi belgilash ishlatiladi.

Nihoyat, bir nechta xuddi shunday tengliklarni qo'shish natijasida

$$\forall a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in K[x]$$

$$a_0 + a_1 p(x) + a_2 (p(x))^2 + \dots + a_n (p(x))^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ga ega bo'lamiz.

Bu tenglik qanday ma'noni anglatadi?

Uning chap tomoni ko'phadning ta'rifi ko'ra ko'phadning ifodasini bildiradi, o'ng tomonida esa $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ elementlar va $K[x]$ halqaning $p(x)$ elementlari o'rtasida bu halqadagi qo'shish va ko'paytirish amali bajarildi. Shuning uchun K halqada birlik element mavjud bo'lsa biz $p(x)$ deb belgilagan ko'phadni x harfi orqali ifodalab ko'phadning formal ifodasiga mazmun berdik.

Ko'phad haqidagi dastlabki ma'lumotlarning yakunida ko'phadning darajasi tushunchasini va unga bog'liq bo'lgan boshqa bir nechta tushunchalarni kiritamiz.

Ta'rif :

Noldan farqli bo'lgan

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ko'phadning darajasi deb, $a_k \neq 0$ bo'lgandagi eng katta k soniga aytiladi.

Nol ko'phadning darajasi $-\infty$ deb hisoblanadi.

$f(x)$ ko'phadning darajasi $\partial \text{ap. } f(x)$ kabi belgilandi.

Nolinchi darajali ko'phad- bu K halqaning noldan farqli elementidir.

Darajasi $n \geq 0$ bo'lgan $\forall$ ko'phad

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda $a_n \neq 0$ va $a_n x^n$ uning bosh hadi, a_n esa bosh koeffitsiyenti deyiladi.

Ta'rif :

Bosh koeffitsiyenti 1 ga teng bo'lgan (agar K halqada birlik element mavjud bo'lsa) ko'phad normallashtirilgan ko'phad deyiladi.

Ko'phadlarning yig'indisi va ko'paytmasini ifodalovchi (4) va (6) formulalardan ko'rinadiki yig'indi ko'phad $\max\{n,m\}$ dan ko'paytma ko'phad esa $n+m$ dan yuqori darajali hadga ega bo'lmaydi.

Bundan

$$\partial ap.(f_1(x) + f_2(x)) \leq \max\{\partial ap.f_1(x), \partial ap.f_2(x)\} \quad (9)$$

$$\partial ap.f_1(x) \cdot f_2(x) \leq \partial ap.f_1(x) + \partial ap.f_2(x) \quad (10)$$

munosabatlar kelib chiqadi.

Hozirga qadar biz K halqaga hech qanday shart qo'ymadik. (Ko'paytirishning kommutativligi yoki assotsiativligini talab qilmadik). $K[x]$ halqada ko'paytirish amali yuqoridagi u yoki bu hossani qanoatlantirishi uchun bu xossalarning K halqada o'rinli bo'lishini talab qilish lozim bo'ladi. Shu nuqtai nazardan K halqada **butunlik sohasi** bo'lishini, ya'ni birlik elementli nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan, kommutativ, assotsiativ halqa bo'lgan holni ko'rib chiqamiz.

Shunday qilib qaralayotgan ko'phadlarning koeffitsiyentlari butunlik sohasidan olingan bo'lsin.

K butunlik sohasi bo'lganda ko'phadlarni ko'paytirish amali uchun o'rinli bo'lgan bir nechta qo'shimcha xossalar kelib chiqadi.

6⁰. Ko'paytirishning kommutativligi, ko'paytirishning ta'rifidan (6) va (7) formulalardan bevosita kelib chiqadi. Avvalo bir hadlarni ko'paytirishning kommutativligini isbotlaymiz. ax^n va bx^m birhadlar uchun

$$bx^m \cdot ax^n = abx^{n+m}$$

$$bx^m \cdot ax^n = bax^{n+m} \text{ bo'ladi.}$$

K halqada ko'paytirish kommutativ bo'lgani uchun $ab=ba$ bo'ladi, demak,

$$ax^n \cdot bx^m = bx^m \cdot ax^n$$

bo'ladi.

Endi $f_1(x)$ va $f_2(x)$ lar $\forall$ ko'phadlar bo'lsin $f_1(x) \cdot f_2(x)$ ko'phad barcha tuzish mumkin bo'lgan $u \cdot v$ ko'rinishdagi ko'paytmalarning

yig'indisiga teng, bunda $u - f_1(x)$ ko'phadning hadi, v esa $f_2(x)$ ko'phadning hadi.

Masalan:

$$(2 - 3x + x^2)(3 + 5x) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5x + (-3x)5x + x^2 \cdot 3 + x^2 \cdot 5x$$

Bunga mos ravishda $f_2(x) \cdot f_1(x)$ ko'phad barcha tuzish mumkin bo'lgan $v \cdot u$ ko'rinishdagi ko'paytmalarning yig'indisiga teng, bunda ham u va v lar yuqoridagi ma'noga ega.

Masalan:

$$(3 + 5x) \cdot (2 - 3x + x^2) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-3x) + 3 \cdot x^2 + 5x \cdot 2 + 5x \cdot (-3x) + 5x \cdot x^2$$

Yuqorida isbotlandiki, birhadlarning ko'paytirish kommutativ u holda $f_1(x)$ ko'phadning $\forall u$ hadi va $f_2(x)$ ko'phadning $\forall v$ hadi uchun $u \cdot v = v \cdot u$ tenglik o'rinli. Bundan

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = f_2(x) \cdot f_1(x)$$

kelib chiqadi.

7⁰. Ko'paytirishning assotsiativligi.

$(f_1(x) \cdot f_2(x)) \cdot f_3(x)$ ko'phad barcha tuzish mumkin bo'lgan $(u \cdot v) \cdot w$ ko'rinishidagi ko'paytmalarning yig'indisiga teng, bu yerda $u - f_1(x)$ ko'phadning, $v - f_2(x)$ ko'phadning, $w - f_3(x)$ ko'phadning hadi. Xuddi shuningdek, $f_1(x) \cdot (f_2(x) \cdot f_3(x))$ ko'phad barcha tuzish mumkin bo'lgan $u \cdot (v \cdot w)$ ko'rinishdagi ko'paytmalarning yig'indisidan iborat, bunda $u \cdot v$ va w lar yuqoridagi ma'noga ega. Shuning uchun $\forall u, v, w$ birhadlar uchun $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$ ekanini isbotlash kifoya.

$$ax^n, bx^m, cx^p \quad \text{birhadlar uchun}$$

$$(ax^n \cdot bx^m) \cdot cx^p = abx^{n+m} \cdot cx^p = abcx^{n+m+p}$$

$$ax^n \cdot (bx^m \cdot cx^p) = ax^n \cdot bcx^{m+p} = abcx^{n+m+p}$$

$$(ab)c = a(bc)$$

bo'lgani uchun

$$(ax^n \cdot bx^m) \cdot cx^p = ax^n \cdot (bx^m \cdot cx^p)$$

bo'ladi.

8⁰. Birlik elementning mavjudligi. $K[x]$ halqaning birlik elementi (ko'paytirish amaliga nisbatan neytral elementi) K halqaning birlik elementi bo'ladi. Haqiqatdan ham ko'phadlarni ko'paytirish amalining ta'rifiga ko'ra, $\forall f(x)$ ko'phad uchun

$$1 \cdot f(x) = f(x)$$

bo'ladi.

Xususiylashtirishda, $1 \cdot x^k = x^k$ shuning uchun ko'phadning yozuvida, odatda birga teng koeffitsiyentlar yozilmaydi.

9⁰. Ko'phadning nolning bo'luvchilariga ega emasligi.

2 ta noldan farqli ko'phadlar berilgan bo'lsin:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m \end{aligned}$$

Ularning ko'paytmasi noldan farqli bo'lishini ko'ramiz. Ta'rifga ko'ra

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + (a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1})x^{n+m-1} + a_nb_mx^{n+m}$$

bo'lgani uchun $f(x)g(x)$ ko'phaddagi x^{n+m} oldidagi koeffitsient a_nb_m ga teng bo'ladi. K da nolning bo'luvchilari bo'lmagani uchun $a_nb_m \neq 0$ bo'ladi va demak $f(x)g(x) \neq 0$ bo'ladi.

Yuqoridagi mulohazalardan kelib chiqadiki

$$\partial ap. f(x)g(x) = \partial ap. f(x) + \partial ap. g(x) \quad (11)$$

Bu formula (11) tenglikni K halqa nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan holda aniqlangan.

6⁰-9⁰- xossalardan ko'rinadiki, $K[x]$ butunlik sohasi bo'lar ekan shuning uchun quyidagi teorema keltirildi.

Teorema 1.

Butunlik sohasi ustidagi ko'phadlar halqasining o'zi ham butunlik sohasi bo'ladi.

Ko'phadlar halqasida bo'lish amali agar uni odatdagi ma'noda qaralsa, bajarilmaydi.

Masalan:

$R[x]$ halqada x^2 ko'phadni $x+1$ ko'phadga bo'lib bo'lmaydi, ya'ni $x^2 = g(x)(x+1)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $g(x)$ ko'phad mavjud emas. (agar bunday ko'phad mavjud bo'lganda edi, u holda $x=-1$ bo'lganda $1 = g(-1) \cdot 0$ noto'g'ri tenglikka ega bo'lar edik) shuning uchun ko'p hollarda «qoldikli bo'lish» deb ataluvchi amal bajariladi. Bu amal haqida keyinroq batafsil to'xtalamiz. Hozir esa uning hususiy holi bo'lgan $x-x_0$ ikki hadga qoldikli bo'lishni ko'rib chiqamiz.

Teorema 2.

$f(x)$ – koeffitsiyentlari K halqadan olingan ko'phad bo'lsin. $\forall x_0 \in K$ uchun $f(x)$ ko'phadni yagona usulda

$$f(x) = g(x)(x - x_0) + c \quad (13)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bu yerda $g(x) \in K[x], c \in K$ bo'lib, $c = r$

Isboti:

Agar $f(x) = a \in K$ bo'lsa, u holda $g(x) = 0, c = 0$ deb olish mumkin bo'ladi.

Ko'rinib turibdiki, bu $f(x) = 0$ uchun yagona imkoniyat. Endi $\partial_{ap} \cdot f(x) = n > 0$ bo'lsin. $f(x)$ ko'phadni x ning darajalarini pasaytish tartibida yozamiz:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Ravshanki $f(x)$ ko'phadni (13) ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, u holda $\partial_{ap} \cdot g(x) = n-1$ bo'ladi. $g(x)$ ni noaniq koeffitsiyentlar bilan yozamiz:

$$g(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}$$

$f(x)$ va $g(x)$ ifodalarini (13) tenglikka qo'ysak,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = b_0x^n + (b_1 + x_0b_0)x^{n-1} + (b_2 - x_0b_1)x^{n-2} + \dots + (b_{n-1} + x_0b_{n-2})x + (c + x_0b_{n-1})$$

hosil bo'ladi.

Bundan ko'phadlarning tengligi ta'rifiga ko'ra:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_1 + x_0b_0 \\ b_2 &= a_2 + x_0b_1 \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + x_0b_{n-2} \\ c &= a_n + x_0b_{n-1} \end{aligned} \quad (14) \quad \text{kelib chiqadi.}$$

bu formulalar $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ va c larni ketma-ket aniqlash imkoniyatini beradi. Yuqoridagi mulohazalardan ko'rinadiki (13) tenglikni qanoatlantiruvchi $g(x)$ ko'phad va c element mavjud va u bir qiymatli aniqlanadi.

$c = f(x_0)$ ekanini isbotlash uchun (13) tenglikdan foydalanib, $f(x)$ ko'phadning x_0 nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$f(x_0) = g(x_0)(x_0 - x_0) + c$$

bundan

$$f(x_0) = c$$

kelib chiqadi.

Teorema isbot bo'ldi.

2§ Ko‘phadning ildizi.

Ta`rif. Agar $f(x_0)=0$ bo‘lsa K halqaning x_0 elementi $f(x) \in K[x]$ ko‘phadning ildizi deyiladi.

Teorema 2 dan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. (Bezu teoremasi).

$f(x)$ ko‘phad $K[x]$ halqada $x-x_0$ ga bo‘linadi, faqat va faqat shu holdaki, x_0 - uning ildizi bo‘lsa.

Isboti:

Ravshanki $f(x)$ ko‘phad $x-x_0$ ga bo‘linishi uchun (13) tenglikdagi $c=0$ bo‘lishi kerak. $c=f(x_0)$ edi.

$c=0$ shart $x_0 - f(x)$ ko‘phadning ildizi degan shart bilan teng kuchli.

(13) tenglikni kanaotlantiruvchi $g(x)$ ko‘phadni va c elementni topish $f(x)$ ko‘phadni $x-x_0$ ga qoldikli bo‘lish deb ataladi. Bunda $g(x)$ – to‘liqsiz bo‘linma, c esa qoldiq deyiladi. (14) formulalar $f(x)$ ko‘phadni $x-x_0$ ga qoldikli bo‘lishning amaliy usulini ko‘rsatadi.

Hisoblashni quyidagi Gorner sxemasi yordamida bajarish ancha qulaylik yaratadi.

	a_0	a_1	$a_2 \dots$	a_{n-1}	a_n
x_0	b_0	b_1	$b_2 \dots$	b_{n-1}	c

Quyidagi sardagi elementlar (14) formula yordamida ketma-ket hisoblab topiladi: $b_0=a_0$, keyingi element esa o‘ziga mos yuqoridagi elementni o‘zidan oldingi elementga x_0 ni ko‘paytirib, qo‘shilganiga teng bo‘ladi. $c=f(x_0)$ edi, shuning uchun bu sxema berilgan ko‘phadning x_0 nuqtadagi qiymatini hisoblashga ham imkon beradi.

Misol:

$R[x]$ halqada

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$$

ko'phadni $x-4$ ga qoldiqli bo'lamiz.

Yechish:

$x_0 = 4$ bo'linuvchining koeffitsiyentlari mos ravishda 1,-3,6

-10,16 ga teng. Hisoblashlarni Gornier sxemasi yordamida bajaramiz.

	1	-3	6	-10	16
4	1	4·1-3q1	4·1-6q10	4·10-10q30	4·60+16q136

Demak to'liqsiz bo'linma

$$g(x) = x^3 + x^2 + 10x + 30$$

qoldiq esa $c = 136$

Misol 2:

Kompleks koeffitsientli

$$f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i$$

ko'phadning $x_0 = -i$ nuqtadagi qiymatini gornier sxemasi yordamida hisoblaymiz.

	1	$2i$	$-(1+i)$	-3	$7+i$
$-i$	1	$-i + 2i = i$	$-i \cdot i - (1+i) = i$	$-i(-i) - 3 = 4$	$i(4) + 7 + i = 7 + 5i$

Demak,

$$f(-i) = 7 + 5i$$

Bezu teoremasi yordamida ko'phad ildizlari sonining yuqori chegarasini ko'rsatish mumkin. Shu ma'noda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema 3.

Noldan farqli ko'phadning ildizlari soni uning darajasidan katta emas.

Isboti.

Teoremani ko'phadning darajasi bo'yicha induksiya yordamida isbotlaymiz. Nolinchi darajali ko'phad umuman ildizga ega emas, shuning uchun bu holda teorema o'rinli. Faraz qilaylik, teorema barcha $n-1$ darajali ko'phadlar uchun o'rinli bo'lsin va undan $\forall n$ - darajali $f(x)$ ko'phad uchun teorema o'rinli ekanini keltirib chiqaramiz.

Teskarisidan faraz qilamiz, ya'ni $x_1, x_2, \dots, x_m$ lar $f(x)$ ko'phadning ildizi bo'lib, $m > n$ bo'lsin.

Bezu teoremasiga ko'ra $f(x)$ ko'phad $x-x_1$ ga bo'linadi, ya'ni $f(x) = (x-x_1)g(x)$ bo'ladi, bu yerda $g(x)$ $(n-1)$ darajali qandaydir ko'phad K halqaning $x_2, \dots, x_m$ elementlari $g(x)$ ko'phadning ildizi bo'ladi. O'z navbatida $i = 2, \dots, m$ bo'lganda $f(x_i) = (x_i - x_1)g(x_i) = 0$ ga ega bo'lamiz. $x_i - x_1 \neq 0$. K halqa esa nolning bo'luvchilariga ega emas, u holda $g(x_i) = 0$ bo'ladi. Shuning uchun $g(x)$ ko'phad $m-1$ dan kam ildizlarga ega emas. Bu esa induktiv farazga zid, chunki $\partial \text{ap}.g(x) = n-1 < m-1 \partial \text{ap}$.

Teorema isbot bo'ldi.

Natija:

Darajasi n dan oshmagan ko'phad $n+1$ nuqtada o'zining qiymati bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Boshqacha aytganda, kamida bitta darajasi n dan oshmagan ko'phad mavjudki, berilgan (har xil) nuqtalar $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ da berilgan qiymatlar $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ ni qabul qiladi.

Isboti: Faraz qilaylik, darajasi n dan oshmagan 2 ta $f(x)$ va $g(x)$ ko'phad $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ nuqtalarda bir xil qiymatlar qabul qilsin. $h(x) = f(x) - g(x)$ ko'phadni qaraymiz. Bu ko'phadning darajasi ham n

dan yuqori emas. $f(x_i) = g(x_i)$ edi. U holda $h(x_i) = 0$ bo'ladi, $i = 1, 2, \dots, n+1$ da ya'ni $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ nuqtalar $h(x)$ ko'phadning ildizlari bo'ladi. Yuqorida isbotlangan teorema ko'ra $h(x) = 0$ bo'ladi, bundan $f(x) = g(x)$ kelib chiqadi.

Teorema 4. Agar K cheksiz halqa bo'lsa, u holda $K[x]$ halqaning 2 ta ko'phadi orqali aniqlangan funksiyalarning tengligi shu ko'phadlarning tengligi bilan ifodalanadi.

Isboti: $f(x), g(x) \in K[x]$ ko'phadlar bir xil funksiyalarni ifodalasin. Bundan ko'rinadiki $\forall x_0 \in K$ uchun $f(x) = g(x_0)$ $f(x), g(x)$ ko'phadlardagi eng yuqori darajasini n bilan belgilaymiz. K halqa cheksiz bo'lgani uchun unda $n+1$ ta har xil elementlar $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ mavjud bo'ladi.

Farazimizga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ nuqta larning har birida (va umuman $\forall$ nuqtada) bir xil qiymatlar qabul qiladi.

Teorema 3 ning natijasiga ko'ra $f(x) = g(x)$ xulosa kelib chiqadi.

Agar $K[x]$ halqadagi $\forall f(x)$ ko'phad K da aniqlangan va K dagi qiymatlarni qabul qiluvchi funksiyani aniqlasa, teorema4 ko'phadlar uchun va funksiyalar uchun aniqlangan amallarni mos keltiradi. Agar K halqa cheksiz bo'lsa $K[x]$ dagi har bir ko'phadga u orqali aniqlanuvchi funksiyani mos qo'yuvchi akslantirish $K[x]$ va K da aniqlangan holda K dagi qiymatlarni qabul qiluvchi qandaydir funksiyalar halqasida izomorfizm bo'ladi.

Agar K halqaning x_0 elementi uchun $f(x_0) = 0$ tenglik bajarilsa, u holda x_0 element $f(x) \in K[x]$ ko'phadning ildizi deb atalar edi. Berilgan $f(x)$ ko'phadning ildizini topish yoki $f(x) = 0$ algebrik tenglamani yechish masalasi matematikaning turli bo'limlarida asosiy o'rin tutadi. Ayniqsa, K - haqiqiy sonlar yoki kompleks sonlar maydoni bo'lganda bu masala yana ham chuqurlashadi.

Algebraik tenglamalarni yechish usullarini, jumladan ko'phadlar algebrasi hamda guruppalar nazariyasi bo'limlarida ham ko'rib chiqilgan.

Quyidagi sabablarga ko'ra maydon ustidagi ko'phadlarni qaraymiz:

- 1) Koeffitsiyentlar halqasi maydon bo'lgan hol yanada muhimroq.
- 2) Maydon ustidagi ko'phadlar halqasining xossalari birmuncha sodda.
- 3) K butunlik sohasi ustidagi ko'phadlar halqasi P nisbatlar maydoni ustidagi ko'phadlar halqasi uchun qism halqa bo'ladi. $K[x]$ halqaning ko'pgina xossalari $P[x]$ halqaning xossalaridan kelib chiqib isbotlanadi.

Quyida $\forall P$ maydon ustidagi ko'phadlarning ildizlari haqidagi umumiy teoremlarni isbotlaymiz.

$f(x)$ - koeffitsiyentlari P maydondan olingan ko'phad bo'lib x_0 - uning ildizi bo'lsin. Bezu teoremasiga ko'ra $f(x)$ ko'phad $x - x_0$ ga bo'linadi. $f(x)$ ko'phad nafaqat $x - x_0$ ga balki $(x - x_0)^2$ va xatto $x - x_0$ ning yuqoriroq darajasiga ham bo'linishi mumkin.

Ta'rif :

x_0 - $f(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsin. $f(x)$ $(x - x_0)^k$ ga bo'linadigan eng katta k butun son x_0 ildizning karralisi deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar $f(x)$ $(x - x_0)$ ga bo'linib, $(x - x_0)^{k+1}$ ga ham bo'linsa, u holda x_0 - k karrali ildiz deb ataladi. Agar $k > 1$ bo'lsa, u holda x_0 karrali ildiz deyiladi. Agar $k = 1$ bo'lsa u holda x_0 $f(x)$ ko'phadning oddiy ildizi deyiladi.

Ildizning karralisi uchun keltirilgan yuqoridagi ta'rifni $k = 1$ bo'lgan hol uchun ham qo'llab hisoblash mumkin. Bu holda ildizning 0 karralisi $f(x)$ ko'phadning umuman ildizi bo'lmagan, P maydonining elementi bo'ladi.

Misol.

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$$

ko'phad uchun $x_0 = 2$ ildizning karralisini aniqlaymiz. Buning uchun $f(x)$ ko'phadni $x - 2$ ga noldan farqli qoldiq qolguncha ketma-ket bo'lamiz. Bo'lishni qulaylik uchun Gorner sxemasi yordamida bajaramiz.

	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	0
2	1	-1	-1	-2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	7			

Bu yerda 2-satrda $f(x)$ ni $x - 2$ ga bo'lgandagi bo'linma $f_1(x)$ ning ko'effitsiyentlari turadi. $f_1(x)$ ni $x - 2$ ga bo'lgandagi bo'linma $f_2(x)$ ning ko'effitsiyentlari 3- satrda $f_2(x)$ ni $x - 2$ ga bo'lgandagi bo'linma $f_3(x)$ ning ko'effitsiyentlari 4-satrda turadi va xokazo.

Hisoblash natijalari ko'rsatishicha $f(x)$ ko'phad $(x - 2)^3$ ga bo'linadi, ammo $(x - 2)^4$ ga bo'linmaydi, (qoldiq 7 ga teng bo'ladi) demak $x_0 = 2$ ildizning karralisi berilgan $f(x)$ ko'phad uchun 3 ga teng ekan.

Agar $f(x)$ ko'phadning $(x - x_0)^k$ ga bo'linishi ma'lum bo'lsa, ya'ni

$$f(x) = (x - x_0)^k g(x),$$

bunda $g(x) \in P[x]$ bo'lsa va $f(x)$ ning $(x - x_0)^{k+1}$ ga bo'linishini aniqlash talab qilinsa, u holda $g(x)$ ko'phadning $x - x_0$ ga bo'linish- bo'linmasligini aniqlash kerak bo'ladi. Bezu teoremasiga ko'ra $g(x)$ $x - x_0$ ga bo'linmaydi faqat va faqat shu holdagi qachonki $g(x_0) \neq 0$ bo'lsa demak, P maydonning x_0 elementi $f(x) \in P[x]$ ko'phad uchun k - karrali ildiz bo'lishi uchun

$$f(x) = K (x - x_0)^k g(x)$$

bo'lishi zarur va yetarli, bunda $g(x) \in P[x]$ bo'lib $g(x_0) \neq 0$.

Masalan:

$$f(x) = (x-2)^2(x^5 - 10x + 1) \in R[x]$$

ko'phad 2 karrali 2 ta ildizga ega $x^5 - 10x + 1$ ko'phad $x_0 = 2$ nuqtada nolga aylanmaydi.

Haqiqiy koeffitsiyentli ko'phadlar uchun oddiy va karrali ildizning geomik ma'nosi quyidagicha:

$f(x) \in P[x]$ ko'phad uchun x_0 ildiz oddiy ildiz bo'lsa $f(x)$ ko'phadning grafigi $x = x_0$ nuqtada $0x$ o'qiga urinmaydi, balki bu o'qni kesib o'tadi.(1-rasm) x_0 karrali bo'lsa $f(x)$ ko'phadning grafigi $x = x_0$ nuqtada abssissa o'qiga o'rinadi. Bu holda ildizning karralisi urinish tartibiga ko'ra aniqlanadi (2-rasm)

3-§ Ko'phadlarning EKUBi

Endi yevklid halqasi ustidagi ko'phadlarni qaraymiz.

Ta'rif: K butunlik sohasi bo'lib, $K \setminus \{0\}$ da nomanfiy butun qiymatlarni qabul qiluvchi shunday N funksiya berilgan bo'lsaki, quyidagi (E) xossa o'rinli bo'lsa:

$$\forall a, b \in K, b \neq 0$$

uchun

$$\exists q, r \in K, a = bq + r$$

va

$$N(r) < N(b)$$

yoki

$$r = 0$$

bo'lsa, u holda K butunlik sohasining **Yevklid halqasi** deyiladi.

Berilgan a va b elementlar uchun bunday q va r elementlarni izlash K halqada **qoldiqli bo'lish** deb ataladi. Bu holda q a ni b ga bo'lgandagi to'liqsiz bo'linma r esa qoldiq deyiladi.

Maydon ustidagi bir o'zgaruvchili ko'phadlar halqasida N funksiya sifatida uning darajasini olish mumkin. U holda (E) xossadan quyidagi teoremdan kelib chiqadi.

Teorema 1.

P - $\forall$ maydon, f va g - koeffitsiyentlari P dan olingan ko'phadlar bo'lib $g \neq 0$ bo'lsin. u holda yagona $q, r \in P[x]$ ko'phadlar jufti mavjudki uning uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'ladi:

$$1) f = gq + r$$

$$2) \partial_{ap} r < \partial_{ap} g$$

($\partial_{ap} 0 = -\infty$ edi, shuning uchun xususan $r = 0$ bo'lgan holda 2- shart bajarildi.)

Isboti:

$$\begin{aligned} f &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \\ g &= b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m \end{aligned}$$

bo'lsin bunda

$$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0.$$

Agar $n < m$ bo'lsa, u holda $q = 0$, $r = f$ deb olish mumkin. $n < m$ bo'lsin, u holda $f_1 = f - c_0 x^{n-m} g$ deb olamiz, bu yerda

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}$$

Ravshanki $\partial ap. f_1 \leq n-1$.

$$f_1 = a_0^1 x^{n-1} + a_1^1 x^{n-2} + \dots + a_{n-2}^1 x + a_{n-1}^1$$

bo'lsin.

$$f_2 = f_1 - c_1 x^{n-m-1} g,$$

bunda

$$c_1 = \frac{a_0^1}{b_0}$$

deb olamiz. $\partial ap. f_2 \leq n-2$ ekani ravshan. Bu jarayonni

davom ettirib, $f_1, f_2, \dots$ ko'phadlar ketma-ketligiga ega bo'lamiz, bunda dar $f_k \leq n-k$. Oxirgi ko'phad darajasi g ning darajasidan kichik bo'lgan f_{n-m+1} ko'phad bo'ladi. U holda

$$f_{n-m+1} = f - c_0 x^{n-m} g - c_1 x^{n-m-1} g - \dots - c_{n-m} g$$

ga ega bo'lamiz. Bundan

$$f = (c_0 x^{n-m} + c_1 x^{n-m-1} + \dots + c_{n-m})g + f_{n-m+1}$$

bo'ladi.

$$g = c_0 x^{n-m} + c_1 x^{n-m-1} + \dots + c_{n-m} c \quad \text{va}$$

$$r = f_{n-m+1}$$

ko'phadlar teoremaning shartini qanoatlantiradi.

Endi teoremaning shartini qanoatlantiruvchi q va r ko'phadlar yagona ekanini hisoblaymiz.

Faraz qilaylik, yagona emas ya'ni

$$f = g q_1 + r_1 = g q_2 + r_2,$$

$$\partial ap. r_1 < \partial ap. g \quad \text{va}$$

$$\partial ap. r_2 < \partial ap. g \quad \text{bo'lsin. U holda}$$

$$(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1 \quad \text{bo'ladi.}$$

Agar $q_1 \neq q_2$ bo'lsa u holda

$$\partial ap. (q_1 - q_2)g \geq \partial ap. g$$

2-tomondan

$$\partial ap. (r_1 - r_2) < \partial ap. g$$

demak

$$q_1 = q_2 \quad \text{bo'ladi.}$$

Bu holda esa faqat

$$r_1 = r_2 \quad \text{bo'ladi.}$$

Teorema isbot bo'ldi.

Shunday qilib, $P[x]$ halqa yevklid halqasi ekan. Bundan tashqari bu halqada qoldikli bo'lish bir qiymatli bajariladi.

(bu yevklid halqasining ta'rifida talab etilmaydi)

Amaliyotda ko'phadlarni qoldikli bo'lish xuddi butun sonlardagi kabi bajariladi.

Misol:

$P[x]$ halqada $f = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ ko'phadni $g = x^2 - 3x + 1$ ko'phadga qoldikli bo'ling.

Yechish:

Hisoblashlarni quyidagi sxema bo'yicha bajaramiz.

$$\begin{array}{r}
 2x^4 - 3x^3 + 5x + 6 \\
 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 3x^3 + 2x^2 + 5x + 6 \\
 3x^3 - 9x^2 + 3x \\
 \hline
 11x^2 - 8x + 6 \\
 11x^2 - 33x + 11 \quad x^2 - 3x + 1 \\
 \hline
 25x - 5 \quad 2x^2 + 3x + 11
 \end{array}$$

(O'ng ustundagi bo'luvchining ostiga to'liqsiz bo'linmaning hadlari ketma-ket yoziladi. Chap ustunda g ga karrali bo'lgan $f, f_1, f_2, \dots, f_n$ ko'phadlarning hadlari yoziladi, ular mos ravishda ayiriladi.)

shunday qilib,

$$q = 2x^2 + 3x + 11, \quad r = 25x - 5$$

shuni ta'kidlash kerakki odatdagi ma'nodagi bo'lish qoldikli bo'lishning hususiy holdan iborat f ko'phad g ko'phadga bo'linadi faqat va faqat shu holdagi qachonki f ni g ga qoldikli bo'lganda qoldiq nolga teng bo'lsa. Bu $\underline{f}$ holda g bo'linma to'liqsiz bo'linmaga teng bo'ladi.

Algebra va sonlar nazariyasi asosiy kursida $\forall$ yevklid halqasidagi bo'linish nazariyasi bayon qilinadi. Bu nazariyaning asosiy tushunchalari va teoremlari, hususiy holda ya'ni P maydon ustidagi $P[x]$ ko'phadlar halqasida qanday bo'linishining ko'rib chiqamiz.

Avvalo $P[x]$ halqada teskarilanuvchi va assotsirlangan tushunchalari qanday ma'noni anglatishni ko'ramiz. Ko'phadlarni ko'paytirganda darajalari qo'shiladi, u holda 2 ta ko'phadning ko'paytmasi 1 ga teng bo'lishi mumkin faqat va faqat shu holdaki 2- ko'phad nolinch darajali ko'phad bo'lsa, ya'ni ular P maydonning noldan farqli elementlari bo'lsa, demak $P[x]$ halqada faqat P maydonning noldan farqli elementlarigina teskarilanuvchi bo'ladi. Ravshanki P maydonning $\forall$ noldan farqli element teskarilanuvchi bo'lgani uchun bu element $P[x]$ halqada ham teskarilanuvchi bo'ladi. Shunday qilib $P[x]$ halqaning teskarilanuvchi elementlari bu P maydonning noldan farqli elementlaridir. Unga mos ravishda assotsirlangan elementlari bu $P[x]$ halqadagi ko'phadlarni P maydonining noldan farqli elementlariga ko'paytmasidan hosil bo'lgan ko'phadlardir.

Berilgan noldan farqli ko'phad bilan assotsirlangan ko'phadlar orasida roppa-rosa bitta normallashtgan ko'phad bo'ladi.

Agar

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad \text{bunda}$$

$$a_0 \neq 0 \quad \text{u holda}$$

$f(x)$ assotsirlarngan yagona normallashtgan ko'phad

$$\frac{1}{a_0} f(x) = x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} x + \frac{a_n}{a_0}$$

ko'phaddan iborat bo'ladi.

Bo'linish nazariyasining muhim tushunchalari ideal va bosh ideal tushunchalaridir. Umumiy ta'rifga mos holda quyidagi ta'rifni kiritamiz.

Ta'rif:

$P[x]$ halqaning f ko'phad yordamida hosil qilingan bosh ideali deb $(f) = \{u f / u \in P[x]\}$ idealga aytiladi.

Agar f_1 va f_2 ko'phadlar assotsirlangan ko'phadlar bo'lsa, u holda (f_1) va (f_2) ideallar ustma-ust tushadi.

$\forall$ yevklid halqasi kabi $P[x]$ halqa ham bosh ideallar halqasi bo'ladi bu degan so'z $P[x]$ halqaning $\forall I$ ideali bosh ideal bo'ladi, ya'ni (f) ideal bilan ustma-ust tushadi, bu yerda $f-I$ idealning tashkil etuvchisi deb ataladigan qandaydir ko'phad

$f_1, f_2, \dots, f_m - P[x]$, halqaning ko'phadlari bo'lsin, barcha tuzish mumkin bo'lgan

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + \dots + u_m f_m (u_1, u_2, \dots, u_m \in P[x]) \quad (1)$$

ko'rinishdagi «chiziqli kombinatsiya» lar $P[x]$ da ideal bo'ladi (1) ko'rinishdagi 2 ta ifodaning yig'indisi va (1) ko'rinishdagi ifodaning $\forall$ ko'phadga ko'paytmasining ham (1) ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu idealni I orqali ifodalab, uning tashkil etuvchi ko'phadi d ni qaraymiz d ko'phad quyidagi xossalarga ega:

1) $d - f_1, f_2, \dots, f_m$ ko'phadlarning har biri uchun ya'ni ularning umumiy bo'luvchilari uchun bo'luvchi bo'ladi.

2) $d - f_1, f_2, \dots, f_m$ ko'phadlarning $\forall$ umumiy bo'luvchisi bo'ladi.

1-xossa $f_1, f_2, \dots, f_m$ ko'phadlarning $I=(d)$ idealda yotishidan,

2-xossa esa d ko'phadni (1) ko'rinishda ifodalash mumkinligidan kelib chiqadi.

Ta'rif: 1- va 2- xossalarni qanoatlantiruvchi $\forall d$ ko'phad $f_1, f_2, \dots, f_m$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisi- EKUBi deb ataladi.

Yuqoridagi mulohazalardan ko'rinadiki, EKUB hamma vaqt mavjud. Bundan tashqari EKUB assotsirlanganlik aniqligida yagona ekanini ko'rsatish mumkin. Faraz qilaylik, d_1 va $d_2 - f_1, f_2, \dots, f_m$ ko'phadlarning 2 ta EKUBi

bo'lsin. 2-xossaga ko'ra $d_1 \mid d_2$ ga bo'linadi va xuddi shu kabi $d_2 \mid d_1$ ga bo'linadi. Bundan d_1 va d_2 ning assotsirlanganligi kelib chiqadi.

Yuqorida ko'rdikki, $f_1, f_2, \dots, f_m$ ko'phadlar uchun (1) ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lgan EKUB mavjud. $\forall$ 2 ta EKUB assotsirlangan va $f_1, f_2, \dots, f_m$ ko'phadlarning $\forall$ EKUBi (1) ko'rinishini ifodalaydi, ya'ni I idealda yotadi. Bundan d ga bo'linuvchi $\forall$ ko'phadning ham I idealda yotishi kelib chiqadi.

Shunday qilib quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema 2.

$\forall f_1, f_2, \dots, f_m \in P[x]$ ko'phadlar uchun EKUB d mavjud. U assotsirlanganlik aniqligida bir qiymatli aniqlanadi. d ga bo'linuvchi $\forall h$ ko'phadni (xususan d ko'phadning o'zi)

$$h = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \dots + u_m f_m$$

ko'rinishida ifodalash mumkin, bu yerda

$$u_1, u_2, \dots, u_m \in P[x] \quad (2)$$

Qandaydir h ko'phadning (2) ko'rinishidagi ifodasini uning $f_1, f_2, \dots, f_m$ ko'phadlar orqali chiziqli ifodasi deyiladi.

Trivial holat $f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0$ bo'lib $d = 0$ bo'lgan holdan tashqari $f_1, f_2, \dots, f_m$ ko'phadlarning EKUBlari orasida faqat bitta normallashtirilgan ko'phad bo'ladi. Uni $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ kabi belgilaymiz. (ko'pincha EKUB $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ kabi belgilanadi)

Ta'rif: Agar $(f_1, f_2, \dots, f_m) = 1$ bo'lsa, u holda $f_1, f_2, \dots, f_m$ lar o'zaro tub ko'phadlar deyiladi, ya'ni ularning umumiy bo'luvchilari faqat P maydonning elementlaridan iborat bo'ladi.

Teorema3. $f_1, f_2, \dots, f_m \in P[x]$ ko'phadlar o'zaro tub bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki

$$u_1 f_1 + u_2 f_2 + \dots + u_m f_m = 1 \quad (3)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $u_1, u_2, \dots, u_m \in P[x]$ ko'phadlar mavjud bo'lsa.

Isboti.

Agar $(f_1, f_2, \dots, f_m) = 1$ bo'lsa u holda (3) tenglikni qanoatlantiruvchi $u_1, u_2, \dots, u_m \in P[x]$ ko'phadlarning mavjudligi 2- teoremaning oxirgi tasdig'idan kelib chiqadi. Agar (3) tenglik bajarilsa u holda (3) tenglikning chap tomoni uchun bo'luvchi bo'lgan $f_1, f_2, \dots, f_m$ ko'phadlarning $\forall$ umumiy bo'luvchisi 1 ning bo'luvchisi bo'ladi, ya'ni P maydonining elementi bo'ladi.

Teorema isbotlandi.

2-teoremadan agar $f_1, f_2, \dots, f_m$ ko'phadlar o'zaro tub bo'lsa, u holda $\forall$ ko'phadning (2) ko'rinishida ifodalash mumkinligi kelib chiqadi.

2 ta $f, g \in P[x]$ ko'phadlarning EKUBini yevklid algoritmi yordamida hisoblash mumkin.

Yevklid algoritmi quyidagicha: avval f ko'phadni g ko'phadga qoldiqli bo'linadi, so'ngra g ni 1-bo'lishdagi qoldiqqa keyin 1- bo'lishdagi qoldiqni 2-bo'lishdagi qoldiqqa qoldiqli bo'linadi va xokazo, bu jarayonni nol qoldiq qolguncha davom ettiriladi.

Natijada quyidagi tengliklar hosil bo'ladi.

$$f = q_1 g + r_1$$

$$g = q_2 r_1 + r_2$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3$$

$$\dots \quad \dots$$

$$r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$$

$$r_{k-1} = q_{k+1} r_k$$

bu yerda

$$\partial ap. g > \partial ap. r_1 > \partial ap. r_2 > \dots > \partial ap. r_k \text{ oxirgi noldan farqli}$$

qoldiq (ya'ni r_k) f va g ko'phadlarning EKUBi bo'ladi.

Amalda agar berilgan ko'phadlarning darajalari turlicha bo'lsa, f sifatida yuqori darajali ko'phadni olish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Misol: $R[x]$ halqada

$$f = x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$$

$$g = x^5 + x^2 - x + 1$$

ko'phadlarning EKUBini toping. f ni g ga bo'lamiz.

$$\begin{array}{r} x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5 \\ x^5 + x^2 - x + 1 \\ \hline x^6 - x^3 - x^2 + x \\ \hline 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x - 5 \end{array}$$

2- bo'lishni bajaramiz:

$$2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 7x - 5$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

$$\begin{array}{r} \frac{5}{2}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \\ \hline \frac{5}{2}x^4 - \frac{25}{4}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{35}{4}x - \frac{25}{4} \\ \hline \frac{29}{4}x^3 - \frac{29}{4}x + \frac{29}{4} \end{array}$$

qulaylik uchun hosil bo'lgan qoldiqni $\frac{4}{29}$ ga ko'paytiramiz bu holda keyingi qoldiq ham qandaydir songa ko'payadi lekin bu EKUBning topilishiga bog'liq bo'lmaydi

3-bo'lishni bajaramiz:

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 7x - 5 \\ 2x^4 - 2x^2 + 2x \\ \hline -5x^3 + 5x - 5 \\ -5x^3 + 5x - 5 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 - x + 1 \\ 2x - 5 \end{array}$$

qoldiq nolga teng shuning uchun $(f, g) = x^3 - x + 1$ bo'ladi.

Bir nechta $f_1, f_2, \dots, f_m$ ko'phadlarning EKUBini topish uchun quyidagi formulaga asoslangan induktiv usuldan foydalanish mumkin:

$$(f_1, f_2, \dots, f_m) = ((f_1, f_2, \dots, f_{m-1}), f_m) \quad (5)$$

$(f_1, f_2, \dots, f_m)$ ko'phadlarning EKUBini topish uchun bu formulaga ko'ra, avval $d_2 = (f_1, f_2)$, so'ngra $d_3 = (d_2, f_3)$ topiladi va xakozo

$$d_m = d_{m-1}, f_m \text{ -izlangan EKUB bo'ladi.}$$

(5) formulani isbotlaymiz. EKUBning ta'rifiga ko'ra $(f_1, f_2, \dots, f_{m-1})$ ko'phadlarning bo'luvchilari bu $(f_1, f_2, \dots, f_{m-1})$ ko'phadlarning umumiy bo'luvchilari aniqligida bo'ladi.

Shuning uchun $(f_1, f_2, \dots, f_{m-1})$ va f_m ko'phadlarning barcha umumiy bo'luvchilari $(f_1, f_2, \dots, f_{m-1})$ va f_m , ko'phadlarning barcha umumiy bo'luvchilari to'plami bilan ustama-ust tushadi. Bundan (5) formula kelib chiqadi.

2 teoremaga ko'ra 2 ta $f, g \in P[x]$ ko'phadlarning EKUBi d ni va umuman $\forall d$ ga karrali ko'phadlarni $u f + v g$ $u, v \in P[x]$ ko'rinishida ifodalash mumkin. Bu ifodani berilgan ko'phadning f va g ko'phadlar orqali chiziqli ifodasi deb ataymiz.

EKUB d ning chiziqli ifodasini topish uchun yevklid algoritmidan foydalanish mumkin. (4) tengliklarning 1-sidan r_1 ko'phadning f va g lar orqali ifodasini topamiz:

$$r_1 = f - q_1 g$$

uni 2-tenglikka qo'yib r_2 ko'phadning chiziqli ifodasini topamiz.

$$r_2 = g - q_2 f \quad r_1 = -g_2 f + (1 + q_1 q_2) g$$

Xuddi shunday davom ettirib nihoyat $d = r_k$ ning chiziqli ifodasiga ega bo'lamiz.

Misol: 2- misoldagi f va g ko'phadlarning EKUBi d ning chiziqli ifodasining topamiz.

2-misolda bajarilgan qoldiqli bo'lish natijalari ko'rsatadiki,

$$f = xg - \frac{3}{4}(x+1)$$

$$g = -(2x+1)(x+1) + 0$$

bundan

$$d = x + 1 = \frac{4}{3}xg - \frac{4}{3}f$$

ni topamiz shuning uchun

$$u = \frac{4}{3}x, v = -\frac{4}{3}$$

bo'ladi.

d ga karrali bo'lgan $\forall h$ vektorning chiziqli ifodasini d ning chiziq ifodasidan foydalanib hisoblash mumkin.

$$h = h_1 d \quad \text{va}$$

$$d = u f + v g$$

bo'lsin.

U holda

$$h = h_1(uf + vg) = (h_1 u) f + (h_1 v) g$$

bo'ladi.

Amaliyotda h ko'phadning chiziqli ifodasini yevklid algoritmi yordamida emas, balki noma'lum koeffitsiyentlar usuli yordamida topiladi. Izlanayotgan u va v ko'phadlarni umumiy ko'rinishida noma'lum koeffitsiyentlar orqali ifodalaymiz, ko'rish qiyin emaski, bu tenglamalar chiziqli bo'ladi.

Bu usulni qo'llash uchun u va v ko'phadlarning darajasini oldindan baholash kerak bo'ladi. (Boshqacha aytganda biz ularni qanday umumiy ko'rinishda yozishni bilmaymiz).

Teorema4. $d = (f \bullet g)$ ga karrali bo'lgan h ko'phad

$$\partial \text{ap. } h < \partial \text{ap. } f + \partial \text{ap. } g$$

shartni qanoatlantirsin. U holda

$$h = u f + v g$$

chiziqli ifodada

$$\partial_{ap}. u < \partial_{ap}. g, \partial_{ap}. v < \partial_{ap}. f$$

bo'ladi.

Isboti:

$$h = u_0 f + v_0 g$$

h ko'phadning qandaydir chiziqli ifodasi bo'lsin. u_0 ni g ga qoldiqli bo'lamiz.

$$u_0 = q g + u, \partial_{ap}. u < \partial_{ap}. g$$

U holda

$$u_0 f + v_0 g$$

ifoda quyidagi ifodaga almashadi:

$$u_0 f + v_0 g = u f + (v_0 + g f) g = u f + v g,$$

bunda

$$v = v_0 + g f.$$

demak

$$h = u f + v g,$$

bo'lib

$$\partial_{ap}. u < \partial_{ap}. g$$

$$v g = h - u f$$

va

$$\partial_{ap}. h < \partial_{ap}. f + \partial_{ap}. g$$

bo'lgani uchun

$$\partial_{ap}. v g < \partial_{ap}. f + \partial_{ap}. g$$

bo'ladi. Bundan

$$\partial_{ap}. v < \partial_{ap}. f \text{ kelib chiqadi.}$$

Shu u va v ko'phadlar teorema shartini qanoatlantiradi.

Misol: $h = x - 2$ ko'phadning $f = x^2 + 2, g = x^3 + x - 1$ ko'phadlar orqali chiziqli ifodasini topamiz.

Tekshirish qiyin emaski f va g ko'phadlar o'zaro tub shuning uchun izlangan chiziqli ifoda mavjud va u, v ko'phadlarni quyidagi ko'rinishida izlash mumkin:

$$u = a_0 x^2 + a_1 x + a_2,$$

$$v = b_0 x + b_1$$

$$(a_0 x^2 + a_1 x + a_2)(x^2 + 2)(x^2 + 2) + (b_0 x + b_1)(x^3 + x - 1) = x - 2$$

Tenglikdagi x ning mos darajalari oldidagi koeffitsiyentlarini tenglasak quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$a_0 + b_0 = 0$$

$$a_1 + b_1 = 0$$

$$2a_0 + a_2 + b_0 = 0$$

$$2a_1 - b_0 + b_1 = 1$$

$$2a_2 - b_1 = -2$$

bundan:

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 0,$$

$$a_2 = -1,$$

$$b_0 = -1,$$

$$b_1 = 0$$

ni topamiz ya'ni

$$u = x^2 - 1,$$

$$v = -x$$

Ko'pincha

$$u \text{ va } v$$

ko'phadlarning koeffitsiyentlari uchun chiziqli tenglamalar tuzishda x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashdan ko'ra x ga turli xil qiymatlar berish osonroq kechadi.

Misol.

$$f = (x+1)(x-3),$$

$$g = x(x-1),$$

bo'lganda

$$u f + v g = 1$$

shartni qanoatlantiruvchi

$$u, v \in R[x]$$

ko'phadlarni topamiz.

Ravshanki f, g ko'phadlar o'zaro tub (aks holda ularda umumiy chiziqli bo'luvchi va demak, umumiy ildiz mavjud bo'lar edi) u va v ni

$$u = a_0 x + a_1,$$

$$v = b_0 x + b_1$$

ko'rinishida izlaymiz.

$$(a_0 x + a_1)(x+1)(x-3) + (b_0 x + b_1)x(x-1) = 1$$

tenglikda x ga ketma ket 0,1,2,3,-1 qiymatlarni beramiz. Natijada

$$-3a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{3}$$

$$-4(a_0 + a_1) = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{12}$$

$$6(3b_0 + b_1) = 1$$

$$2(-b_0 + b_1) = 1 \Rightarrow b_0 = -\frac{1}{12}, b_1 = \frac{5}{12}$$

ga ega bo'lamiz.

Shunday qilib,

$$u = \frac{1}{12}(x-4), v = \frac{1}{12}(-x+5)$$

Har qanday bosh ideallar halqasi kabi P maydon ustidagi $P[x]$ ko'phadlar halqasida ham teskarilanmaydigan element tub ko'paytiruvchilarning ko'paytmasi shaklida ifodalashi mumkin, bu ifoda ko'paytuvchilarning o'rinlari almashinishi aniqligida va ularni assotsirlangan elementlar bilan almashtirish aniqligida yagona bo'ladi.

Bizga ma'lumki, agar butunlik sohasining noldan farqli elementi teskarilantiruvchi bo'lmasa va 2 ta teskarilantiruvchi elementlarning ko'paytmasi shaklida ifodalanmasa bu elementni tub element deb ataladi. Odatda $P[x]$ halqaning tub elementlari keltirilmaydigan ko'phadlar deb ataladi. $P[x]$ halqaning noldan farqli teskarilantiruvchi elementlari -bu musbat darajali ko'phadlar bo'ladi. U holda keltirilmaydigan ko'phad – bu musbat darajali shunday ko'phadki, uni 2 ta musbat darajali ko'phadlarning ko'paytmasi shaklida ifodalab bo'lmaydi (2 ta musbat darajali ko'phadlarning ko'paytmasi shaklida ifodalanadigan ko'phad keltiriladigan ko'phad deyiladi) yana shuni aytish mumkinki, keltirilmaydigan ko'phadni, uni 2 ta kichik darajali ko'phadlarning ko'paytmasi shaklida ifodalab bo'lmaydi.

O'z navbatida, agar $f = g h$ ifodadagi g va h ko'paytuvchilar musbat darajali bo'lsa, u holda ulardan ham birining darajasi f ning darajasidan kichik bo'ladi va aksincha.

Bu ta'rifdan va ko'phadlar uchun «assotsirlanganlik» tushunchasidan quyidagi teorema kelamiz.

Teorema1.

P Maydonning elementi bo'lmagan $\forall f \in P[x]$ ko'phad keltirmaydigan ko'phadlarning ko'paytmasi shaklida ifodalanadi.

$$f = p_1 p_2 \dots p_m \quad (1)$$

agar

$$f = q_1 q_2 \dots q_e$$

xuddi shunday boshqa bir ifoda bo'lsa $l = m$ bo'ladi va mos o'rinda turgan ko'paytuvchilar uchun

$$q_i = c_i p_i (i = 1, 2, \dots, m) c_i \in P, c_i \neq 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Masalan:

$$f = 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + x - 1$$

Ko'phad $R[x]$ halqada quyidagicha ko'paytuvchilarga ajraladi.

$$f = (2x^2 + 2x + 2)(3x + 3)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}\right)$$

$$f = (3x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$$

Ifoda ham f ko'phadning keltirilmaydigan ko'paytuvchilariga yoyilmasini ifodalaydi, faqat u 1-sidan ko'paytuvchilar o'rinlarining almashinishi bilan

hamda ularni mos ravishda $\frac{1}{6}$, 3 va 2 sonlariga ko'paytirilgani bilan farq qiladi.

Agar $f \in P[x]$ ko'phadning qandaydir yoyilmasidagi barcha keltirilmaydigan ko'phadlarning bosh koeffitsientlarini qavsdan tashqariga chiqarilsa, u holda f ko'phad quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f = a p_1 p_2 \dots p_m \quad (a \in P, a \neq 0) \quad (2)$$

Bu yerda $p_1 p_2 \dots p_m$ - normallashtirilgan keltirilmaydigan ko'phadlardir.

f ko'phadning bunday ifodasi uning normallashtirilgan keltirilmaydigan ko'phadlar bo'yicha yoyilmasi deyiladi.

Ravshaniki (2) formuladagi a ko'paytuvchi f ning bosh koeffitsientidan iborat bo'ladi va normallashtirilgan keltirilmaydigan ko'paytuvchilarga yoyilmasi ko'paytuvchilar o'rinlarining almashinishi aniqligida yagona bo'ladi.

Yuqoridagi misoldan f ning normallashtirilgan keltirilmaydigan ko'paytuvchilarga yoyilmasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$f = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1)(x^2 + x + 1)$$

$f \in P[x]$ ko'phadning qandaydir keltirilmaydigan bo'luvchisi bo'lsin. f nafaqat P ga P^2 ga va xatto P ning yana ham yuqori darajalariga bo'linishi mumkin. $f \in P^k$ ga bo'linadigan eng katta k soni f ko'phad P keltirilmaydigan bo'luvchisining karralisi deb ataladi. Boshqacha aytganda karrali k ga teng bo'ladi, agar $f \in P^k$ ga bo'linib, P^{k+1} ga bo'linmasa. Agar P keltirilmaydigan ko'phad f ko'phadning bo'luvchisi bo'lmasa u holda P -nolinchi karrali bo'luvchi deyiladi.

Oldingi paragraflarda berilgan ildizning karralisi tushunchasining ta'rifi bilan keltirilmaydigan bo'luvchisining karralisi tushunchasining ta'rifini solishtirsak

$$f \in P[x]$$

ko'phad $x - x_0$ ildizining karralisi bu ko'phadning

$$x - x_0$$

keltirilmaydigan bo'luvchisining karralisi bilan bir xil ekanligini ko'ramiz.

($x - x_0$ ko'phad keltirilmaydigan ko'phad ekani ravshan chunki uni 2 ta musbat darajali ko'phadlarning ko'paytmasi shaklida ifodalab bo'lmaydi)

Teorema2.

f ko'phad, keltirilmaydigan bo'luvchi P ning karralisi f ko'phadning P bilan assotsirlangan $\forall$ keltirilmaydigan ko'phadlarga yoyilmasidagi ko'paytuvchilar soniga teng.

Xususan, P keltirilmaydigan ko'phad f ko'phadning bo'luvchisi bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki qachonki f ko'phadning keltirilmaydigan ko'phadlarga yoyilmasidagi kamida 1 ta ko'paytuvchi P bilan assotsirlangan bo'lsa. Shuning uchun f ko'phadning keltirilmaydigan bo'luvchilari ham uning keltirilmaydigan ko'paytuvchilari deb ataladi.

Isboti:

Faraz qilaylik $P - f$ ko'phadning k -karrali keltirilmaydigan bo'luvchisi bo'lsin u holda

$$f = p^k f_1 \quad (3)$$

bo'ladi, bunda f_1 p ga bo'linmaydi. f_1 ko'phadni keltirilmaydigan ko'paytuvchilariga ajratamiz.

$$f_1 = q_1 q_2 \dots q_e$$

bu yoyilmada P bilan assotsirlangan ko'paytuvchi yo'q. U holda f ko'phadning keltirilmaydigan ko'paytuvchilarga yoyilmasi

$$f = p^k q_1 q_2 \dots q_e$$

bo'ladi. Bu yerda P bilan assotsirlangan ko'paytuvchilar soni roppa-rosa k ta bo'ladi. 2- teoreмага ko'ra P bilan assotsirlangan ko'paytuvchilar soni qancha bo'lsa f ning $\forall$ yoyilmasidagi keltirilmaydigan ko'paytuvchilar soni shuncha bo'ladi.

4-§ Keltirilmaydigan ko'phadlar.

Keltirilmaydigan ko'phadlar arifmetikasidagi tub sonlar vazifasini bajaradi. $\forall$ 1- darajali ko'phad keltirilmaydigan ko'phaddir 2 ta musbat darajali ko'phadning darajasi ham doim ≥ 2 bu uning chiziqli ko'paytuvchilarga yoyilmasi, xususan, keltirilmaydigan ko'phadlarga yoyilmasidan iborat bo'ladi.

Bezu teoremasiga ko'ra x_0 ildizga ega bo'lgan ko'phad $x - x_0$ ga bo'linadi. Bu holda bo'linmaning darajasi bo'linuvchi ko'phadning darajasidan bittaga kam bo'ladi. Shuning uchun darajasi ≥ 2 bo'lgan P Maydonda ildizga ega bo'lgan $\forall$ ko'phad keltiriladigan ko'phad bo'ladi. $C[x]$ halqada faqat 1- darajali ko'phadlarga keltirilmaydi. Chunki algebraning asosiy teoremasiga ko'ra, C maydon ustidagi $\forall$ musbat darajali ko'phad C

kompleks sonlar maydonida yechimga ega. Demak bu holda ko'phadning keltirilmaydigan ko'paytuvchilarga yoyilmasi chiziqli ko'paytuvchilarga yoyilmasidan iborat bo'ladi.

Umumiy holda ko'phadning keltirilmaydigan ko'paytuvchilariga yoyilmasidagi ayrim ko'phadlarga 1- darajali bo'ladi. (Balki bunday ko'paytuvchi umuman bo'lmas).

2- teorema ko'ra $x - x_0$ ko'paytuvchi f ko'phadning normallashtirilgan keltirilmaydigan ko'phadlarga yoyilmasida qatnashadi. Faqat va faqat shu holdaki, $x_0 - f$ ko'phadning ildizi bo'lsa, bu holda $x - x_0$ ko'paytuvchining karralisi x_0 ildizning karralisiga teng bo'ladi. Shunday qilib f ko'phadning keltirilmaydigan ko'phadlarga yoyilmasidagi 1-darajali ko'paytuvchilarning soni uning ildizlari soniga teng bo'ladi.

1-darajali ko'phadlardan tashqari keltirilmaydigan ko'phadlar mavjudmi degan savol tug'iladi. Bu savolni ochib berish uchun $f \in P[x]$ ko'phadning quyidagi 2 ta xossasini ko'rib chiqamiz.

1⁰. f - keltiriladigan ko'phad

2⁰. f - P maydonda ildizga ega .

Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra, 2⁰ xossadan 1⁰ xossa kelib chiqadi. Teskarisi, umuman olganda, o'rinli emas.

Masalan:

$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$ ko'phad $R[x]$ halqada keltirilmaydigan ko'phad, lekin ko'rinib turibdiki, u haqiqiy ildizlarga ega emas. 2- va 3- darajali ko'phadlar uchun 1⁰- xossadan 2⁰-xossa kelib chiqadi. Chunki shunday f ko'phad 2 ta musbat darajali ko'phadlarning ko'paytmasi shaklida ifodalansa u holda ulardan biri albatta 1- darajali bo'ladi va demak P ko'phad ildizga ega bo'ladi. Shunday qilib 2 yoki 3 -darajali ko'phad keltirilmaydigan ko'phad bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki qachonki u P maydonda ildizga ega bo'lmasa.

Masalan:

$R[x]$ halqada x^2+1 ko'phad va umuman haqiqiy ildizga ega bo'lmagan $\forall$ 2- darajali ko'phad keltirilmaydigan ko'phaddir. $Q[x]$ halqada esa masalan, x^3-2 ko'phad keltirilmaydigan ko'phaddir, chunki uning yagona haqiqiy ildizi irratsional sonidir.

Shunday qilib, $R[x]$ halqada faqat 1- darajali va haqiqiy ildizga ega bo'lmagan 2- darajali ko'phadlar keltirilmaydigandir $Q[x]$ halqada esa $\forall$ darajali keltirilmaydigan ko'phad mavjud.

Tub sonlar cheksizligining isboti kabi $\forall P$ maydon ustidagi normallashtirilgan keltirilmaydigan ko'phadlar to'plamining cheksizligini ham isbotlash mumkin. Faraz qilaylik, bunday ko'phadlar soni chekli bo'lsin va ular $p_1 p_2 \dots p_n$ bo'lsin. $p_1 p_2 \dots p_{n+1}$ ko'phadni qaraymiz. $\forall$ musbat darajali ko'phad qaysidir keltirilmaydigan ko'phadga bo'linishi kerak lekin f ko'phad $p_1 p_2 \dots p_n$ ko'phadlarning hech biriga bo'linmaydi. Demak f ko'phad ham keltirilmaydigan ko'phad ekan. Olingan qarama-qarshilik keltirilmaydigan ko'phadlar to'plamining chekliligini inkor qiladi.

2-BOB.Chekli maydon ustidagi ko'phadlar.

1-§ Chekli maydon ustidagi ko'phadlar va ularning ildizlari.

Matematik analiz kursida ko'phad tushunchasiga (yoki butun ratsional funksiya tushunchasiga) quyidagicha ta'rif beriladi.

Ta'rif1:

Agar haqiqiy x o'zgaruvchili $f(x)$ funksiyaning

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa u holda bu funksiyaning x o'zgaruvchili ko'phad deyiladi, bu yerda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ qandaydir haqiqiy sonlar (ulardan ba'zilari va xatto hammasi ham nolga teng bo'lishi mumkin).

Masalan:

$$f(x) = 1 - x^2 + 2x^4 = 1 + 0x + (-1)x^2 + 0x^3 + 2x^4$$

funksiyalar ko'phaddir

$$f(x) = ((x-1)^2 + x)(x+1) - x^2$$

qavslarni ochib o'xshash hadlarni ixchamlagandan so'ng bu funksiya

$$f(x) = 1 - x^2 + 2x^3$$

ko'rinishga keladi. Ko'phadning hususiy holi bu x ning barcha qiymatlarida bitta a qiymatni qabul qiluvchi $f(x) = a$ o'zgarmas funksiya.

Matematikada nafaqat haqiqiy koeffitsiyentli ko'phadlar bilan balki koeffitsiyentlari boshqa maydon yoki halqalardan olingan ko'phadlar bilan ish ko'riladi. Bu holda ko'phadni yuqoridagi kabi funksiya sifatida qarash hamma vaqt ham to'g'ri bo'lavermaydi.

Masalan:

Bu nuqtani nazar bilan koeffitsientlari $\mathbb{Z}_2 - 2$ modul bo'yicha chegirmalar halqasidan olingan ko'phadlar qaralsa, u holda

$$f_1(x) = \bar{1}x, f_2(x) = \bar{1}x^2$$

ko'phadlarni teng deb hisoblashga to'g'ri keladi, chunki x ning barcha qiymatlarida $f_1(x) = f_2(x)$ bo'ladi.

$$f_1(\bar{0}) = f_2(\bar{0}) = \bar{0}, f_1(\bar{1}) = f_2(\bar{1}) = \bar{1},$$

shuning uchun ham ko'phad tushunchasining algebraik ma'nosi ochib beriladi. Bu holda koefitsiyentlari $\forall$ halqadan olingan ko'phadlar qaraladi.

Ta'rif:

$K - \forall$ halqa bo'lsin koefitsiyentlari K dan olingan x o'zgaruvchili ko'phad deb

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2)$$

Ko'rinishdagi ifodaga aytiladi, bu yerda $n - \forall$ nomanfiy butun son $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ - K halqaning elementlari.

Ko'phad tushunchasining yuqorida keltirilgan algebrik va funksional ta'riflaridan ko'rdikki K butunlik sohasi ustidagi har bir ko'phad bilan K da aniqlangan va K dagi qiymatlarni qabul qiluvchi funksiya o'rtasida tabiiy bog'lanish mavjud

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

koefitsiyentlari K dan olingan ko'phad bo'lsin. $\forall x_0 \in K$ uchun

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (3)$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu ifodaning o'ng tomoni K dagi amalning natijasidir. Bu holda hosil bo'lgan $f(x_0) \in K$ element $f(x)$ ko'phadning x_0 nuqtadagi qiymati deyiladi, shunday qilib K halqaning ham bir x_0 elementiga xuddi shu halqaning $f(x_0)$ elementi mos quyiladi va o'z navbatida K da K dagi qiymatlarni qabul qiluvchi funksiya aniqlanadi.

Umuman aytganda ko'phadlar bilan ular orqali aniqlanuvchi funksiyalar o'rtasidagi moslik o'zaro bir qiymatli emas. Yuqorida biz $Z_2[x]$ halqadagi 2 ta har xil ko'phadlarni misol keltirdikki, bu ko'phadlarning har biri Z_2 da bitta

funksiyani ifodalaydi. Bu misol quyidagicha umumlashtirishga imkon beradi. P - $\forall$ tub son va $Z_p - P$ modul bo'yicha chegirmalar halqasi bo'lsin, (bu halqa maydon bo'ladi va demak u butunlik sohasi) u holda Fermaning kichik teoremasiga ko'ra $Z_p[x]$ halqaning x va x^p ko'phadlari Z_p da bir xil funksiyalarni ifodalaydi.

Oldingi bobda biz cheksiz K halqa ustidagi 2 ta ko'phadning funksional tengligi haqidagi 4 teoremani isbotlagan edik.

Chekli K halqa (xatto chekli P maydon) uchun bu teorema o'rinli emas. Qandaydir qo'shimcha shartlar asosida 2 ta ko'phad orqali aniqlangan funksiyalarning tengligidan ko'phadlarning ham teng bo'lishi kelib chiqishi mumkin.

Masalan:

$K = Z_p - P$ tub modul bo'yicha chegirmalar halqasi bo'lsin. 2 ta $f(x), g(x) \in Z_p[x]$ ko'phadlarni ekvivalent deymiz, agar ular Z_p da bitta funksiyani ifodalasalar bunday holda ularni $f(x) \sim g(x)$ kabi yozamiz.

Z_p halqada P ta element bor. U holda 3- teoremadan quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

Teorema1.

Agar darajalari $P-1$ dan yuqori bo'lmagan

$f(x), g(x) \in Z_p[x]$ ko'phadlar ekvivalent bo'lsa, u holda ular teng bo'ladi.

Endi $\forall f(x) \in Z_p[x]$ ko'phad uchun unga ekvivalent bo'lgan darajasi $P-1$ dan yuqori bo'lmagan $f_0(x)$ ko'phadni bo'lish usuli bilan tanishamiz.

$\forall n$ natural sonni $n = q(P-1) + r$ ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda $1 \leq r \leq P-1$ (agar $P-1$ ga bo'linmasa u holda bunday ifoda qoldikli bo'lish bo'ladi agar $n = m \cdot (P-1)$ bo'lsa, u holda $q = m-1$, $r = P-1$ bo'ladi. $x^n x^r$ ekanini isbotlaymiz. $x = \bar{0}$ bo'lganda x^n va x^r ko'phadlarning har biri $\bar{0}$

qiymatga ega bo'ladi; $x = x_0 \neq \bar{0}$ bo'lganda Fermaning kichik teoremasiga ko'ra $x_0^{p-1} = 1$ bo'ladi va demak

$$x_0^n = (x_0^{p-1})^q x_0^r = x_0^r$$

bo'ladi.

Endi $\forall f(x) \in [x]$ ko'phadda x ning barcha darajalarini ularga ekvivalent bo'lgan ko'rsatkichlar $p-1$ dan oshmagan darajalarga almashtirsak, u holda darajasi $p-1$ dan oshmagan $f(x)$ ekvivalent $f_0(x)$ ko'phad hosil bo'ladi.

Masalan:

$$\bar{1} - x - x^3 - x^4 - x^5 + x^7 \in Z_3[x]$$

ko'phad

$$\bar{1} - x - x - x^2 - x + x = \bar{1} + x + x^2 \quad \text{ko'phadga ekvivalent.}$$

$$f(x) = 4x^{21} + x^{18} + 2x^{10} - x^8 + 3x^5 - x - 3 \in Z_7[x]$$

ko'phadga ekvivalent bo'lgan ko'phadlar orasida eng kichik darajali ko'phad bu

$$4x^3 + 1 + 2x^4 - 1 + 3x^5 - x - 3 = 3x^5 + 2x^4 + 4x^3 - x - 3$$

ko'phaddir.

Chekli maydon ustidagi ko'phadlar uchun ham yuqorida isbotlangan qoldiqli bo'lish haqidagi teorema va uning natijasi (Bezu teoremasi) o'rinli bo'ladi. Va demak ko'phadning bir nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun Gorner sxemasidan foydalanish mumkin.

Masalan:

Gorner sxemasidan foydalanib

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2 \in Z_5[x]$$

ko'phadning barcha qiymatlari jadvalini tuzaylik:

	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

$$f(\bar{0}) = \bar{2}$$

$$f(\bar{1}) = \bar{2}$$

$$f(\bar{2}) = \bar{1}$$

$$f(\bar{3}) = \bar{3}$$

$$f(\bar{4}) = \bar{1}$$

Karrali ildizlar va ildizning karralisini chekli maydon ustidagi ko'phadlar uchun ham Gornier sxemasidan foydalanib hisoblab topish mumkin.

Masalan:

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 3x - 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$$

ko'phad uchun $x_0 = 2$ ildizning karralisini aniqlaylik. Buning uchun $f(x)$ ko'phadni $x - 2$ ga ketma ket bo'lamiz.

	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{-2}$	$\bar{-3}$	$\bar{-1}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	4	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{-3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$		
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$			
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$				

Demak,

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 3x - 1 = (x - 2)^4(x + 5) \in Z_7[x]$$

ya'ni $x_0 = 2$ ildizning karralisi 4 ga teng ekan.

Vilson teoremasi:

$p - \forall$ tub son bo'lganda $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ taqqoslama o'rinli bo'ladi.

Isboti:

Fermaning kichik teoremasiga ko'ra p modul bo'yicha chegirmalar maydoni Z_p ning barcha noldan farqli elementlari,

$x^{p-1} - 1 \in Z_p[x]$ ko'phadning ildizi bo'ladi. $x^{p-1} - 1 \in Z_p[x]$ Z_p maydonda

$p-1$ ta noldan farqli elementlar bor shuning uchun bu ko'phad

$Z_p[x]$ halqada chiziqli ko'paytuvchilarga ajraladi. Bundan tashqari uning barcha ildizlari tub. Bu ildizning ko'paytmasi

$(p-1)!$ sonning p modul bo'yicha chegirmalaridan iborat bo'ladi. Viet

formulasiga ko'ra esa u $\bar{1}$ ga teng bo'ladi. Bundan Vilson teoremasi kelib chiqadi.

p tub son bo'lsin.

Ta'rif:

p modul bo'yicha algebraik taqqoslama deb
 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \equiv 0 \pmod{p}$ (4)

ko'rinishdagi taqqoslamaga aytiladi. Bu yerda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ - butun sonlar x esa butun sonlarni qabul qiluvchi noma'lum son.

Taqqoslamaning umumiy xossalaridan quyidagilar kelib chiqadi.

1) Agar (4) taqqoslamaning koeffitsiyentlari p modul bo'yicha ular bilan taqqoslanuvchi $\forall$ butun sonlar bilan almashtirilsa u holda hosil bo'lgan taqqoslama (4) taqqoslamaga ekvivalent bo'ladi.

2) Agar x_0 -(4) taqqoslamaning yechimi bo'lsa u holda x_0 bilan p modul bo'yicha taqqoslanuvchi $\forall$ butun sonlar ham bu taqqoslamaning yechimi bo'ladi.

Ta'rif:

Agar (4) taqqoslamaning barcha koeffitsiyentlari

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ p ga bo'linsa u holda (4) –trivial taqqoslama deb ataladi.

Bu holda (4) taqqoslama x ning $\forall$ qiymatlarida bajariladi. Trival bo'lmagan algebrlik taqqoslamalarni 1-xossadan foydalanib a_0 p ga bo'linmaydigan ko'rinishga keltirish mumkin. Buning uchun taqqoslamadagi koeffitsiyentlari p ga bo'linadigan hadlarni (agar ular mavjud bo'lsa) tashlab yuboriladi.

Ta'rif:

(4) taqqoslamada a_0 p ga bo'linmasa u holda n soni bu taqqoslamaning darajasi deyiladi. $\forall a$ butun son uchun a ni o'z ichiga oluvchi p modul bo'yicha chegirmalar sinfini $\bar{a}$ bilan belgilaymiz. Chegirma sinflar ustida aniqlangan amallardan

$$\forall x_0 \in Z$$

da

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (5)$$

kelib chiqadi.

x_0 soni (4) taqqoslamaning yechimi bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \bar{0} \quad \text{bo'lsa}$$

(5) ga ko'ra oxirgi tenglikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \bar{0}$$

bundan ko'rinadiki x_0 chegirmalar sinfi Z_P

$$\text{ustidagi } a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \bar{0} \quad (6)$$

algebrik tenglamaning yechimi bo'ladi.

Shunday qilib, P modul bo'yicha algebrik taqqoslama algebrak tenglamadan faqatgina Z_P maydon ustida aniqlanishi bilan farq qilar ekan.

(4) taqqoslamaning yechimlar sinfi deb uning yechimidan tashkil topgan P modul bo'yicha chegirma sinfiga aytiladi. Bu sinf (6) tenglamaning bitta yechimiga mos keladi ravshanki, (6) tenglamaning darajasi (4) taqqoslamaning darajasiga teng bo'ladi.

Teorema.

Trival bo'lmagan tub modul bo'yicha algebrak taqqoslamaning yechimlar sinfining soni uning darajasidan katta emas.

2-tomondan, ravshanki, $\forall$ algebrak taqqoslamaning yechimlari sinfining soni P dan katta bo'la olmaydi. (P modul bo'yicha barcha chegirma sinflarining soni) Shuning uchun $n \geq P$ bo'lganda bu teorema hech narsani ifodalamaydi. Yuqorida biz ko'rdikki,

$$\forall f(x) \in Z_p[x]$$

ko'phad bo'yicha darajasi $P-1$ dan oshmagan barcha nuqtalarda $f(x)$ bilan bir xil qiymatlar qabul qiluvchi $f_0(x) \in Z_p[x]$ ko'phadni tuzish mumkin. Ravshanki,

$f_0(x)=0$ tenglama $f(x_0)=0$ tenglamaga ekvivalent bo'ladi. Bu usuldan foydalanib $\forall$ algebraik taqqoslamani o'ziga ekvivalent bo'lgan darajasi $p-1$ dan oshmagan taqqoslamaga almashtirish mumkin.

Masalan:

$$x^7 - x^5 + x^4 + x^3 - x - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

taqqoslama

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

taqqoslamaga ekvivalentdir.

Chekli maydon ustidagi algebrik tenglamalarni (hech bo'lmaganda, prinsipga ko'ra) maydonning barcha elementlarini noma'lum o'rniga navbat bilan qo'yib ko'rish orqali yechish mumkin. Shuning uchun algebraik taqqoslamalarni ham xuddi shu yul bilan yechish mumkin bo'ladi.

Masalan:

$$8x^9 - 17x^8 + 31x^6 + 12x^5 - 7x^4 + 2x + 11 \equiv 0 \pmod{5}$$

Taqqoslamani yechaylik. Buning uchun unga mos $\mathbb{Z}_5$ maydon ustidagi algebraik tenglamani hosil qilamiz:

$$\bar{3}x^9 + \bar{3}x^7 + \bar{1}x^6 + \bar{2}x^5 + \bar{3}x^4 + \bar{2}x + \bar{1} = 0$$

Qulaylik uchun chegirma sinfni ifodalovchi chiziqlarni yozmaslikka kelishamiz. Hosil bo'lgan tenglamaning chap tomonini o'ziga ekvivalent bo'lgan ko'phad bilan almashtirsak.

$$3x + 3x^4 + x^2 + 2x + 3x^4 + 2x + 1 = x^4 + x^2 + 2x + 1$$

quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz.

$x^4 + x^2 + 2x + 1 = 0$ Gerner sxemasi yordamida $x = 0, \pm 1, \pm 2$ qiymatlarda (ya'ni x ning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlarida) ko'phadning qiymatini hisoblaymiz.

	1	0	1	2	1
0	1				1
-1	1	-1	2	0	1
1	1	1	2	-1	0
-2	1	-2	0	2	-3
2	1	2	0	2	0

Demak, tenglamaning yechimi 2 ta 1 va 2 u holda yuqoridagi taqqoslamaning yechimi $5^k + 1$ va $5^k + 2$ sonlari bo‘ladi.

Endi

$$x^{100} + 10x^{51} + 10x^{10} + 100x \equiv 0 \pmod{11}$$

taqqoslamani yechamiz. Bu taqqoslamaga mos $\mathbb{Z}_{11}$ maydon ustidagi tenglamani yozamiz.

$$x^{100} - x^{51} - x^{10} + x = 0$$

bu tenglamaning chap tomoni $x^{10} - x - x^{10} + x = 0$ ko‘phadga ekvivalent, demak yuqoridagi tenglama $0 = 0$ -trivial tenglamaga ekvivalent. Uning yechimi $\mathbb{Z}_{11}$ maydonning barcha elementlaridan iborat bo‘ladi, berilgan taqqoslamaning yechimi esa barcha butun sonlardan iborat.

2-§ $\mathbb{Z}_5$ maydon ustidagi keltirilmaydigan ko‘phadlar

1-bobda ko‘phadlar halqasida qoldikli bo‘lish haqida yevklid algoritmi, ideal ko‘phadlarning EKUBi kabi tushunchalar yoritiladi. Ya'ni $P[x]$ halqaning yevklid halqasi ekanligi, uning bosh ideallar halqasi ekanligini ko‘rsatadi.

Endi P -chekli maydon bo‘lgan holni qaraymiz $\mathbb{Z}_p[x]$ halqadagi har bir ko‘phadga u orqali aniqlanuvchi funksiyani mos qo‘yuvchi gomomorfizmning yadrosini I bilan belgilaymiz. U

$Z_p[x]$ halqaning ideali bo'ladi. Bu ideal barcha nol funksiyalar orqali aniqlanuvchi ko'phadlardan ya'ni nol ko'phadga ekvivalent bo'lgan barcha ko'phadlardan tuzilgan. Fermaning kichik teoremasiga ko'ra, $x^p - x \in I$ bo'ladi. Shuning uchun I idealning tashkil etuvchi ko'phadi $x^p - x$ ko'phadning bo'luvchisi bo'ladi. 2-tomondan I ideal darajasi p dan kichik bo'lmagan noldan farqli ko'phadni o'z ichiga olmaydi. Demak,

$$I = (x^p - x)$$

bo'ladi.

2 ta $f, g \in Z_p[x]$ ko'phadlar ekvivalenti bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki qachonki $f - g \in I$ bo'lsa, ya'ni $f - g$ $x^p - x$ ga bo'linsa. Hususiy holda har bir f ko'phad $x^p - x$ ga bo'lganda hosil bo'lgan qoldiqqa ekvivalent bo'ladi. Bu qoldiq $f_0 = f(x_0)$ -ya'ni f ko'phadning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng bo'ladi. Z_p maydon ustidagi f va g ko'phadlarning EKUBini ham yevklid algoritmi yordamida topish mumkin. Bunda barcha hisoblashlar Z_p -maydonda, ya'ni p modul bo'yicha chegirmalar maydonida bajariladi.

Masalan:

$Z_3[x]$ halqada $f = x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$ va $g = x^3 - x^2 + x - 1$ ko'phadlarning EKUBini topaylik, buning uchun f ni g ga qoldikli bo'lamiz: $x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$
 $x^3 - x^2 + x - 1$

$$\begin{array}{r} x^5 - x^4 + x^3 - x^2 \qquad \qquad x^2 + 2x \\ 2x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1 \\ 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x \\ \qquad \qquad \qquad -x^2 - 1 \end{array}$$

Endi g ko'phadni qoldiqqa bo'lamiz:

$$\begin{array}{r}
x^3 - x^2 + x - 1 \quad -x^2 - 1 \\
x^3 + x \quad -x + 1 \\
\hline
-x^2 - 1 \\
-x^2 - 1 \\
\hline
0
\end{array}$$

qoldiq nolga teng demak EKUB $(f, g) = -x^2 - 1$ yoki

$x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ bo'ladi. EKUB (f, g) ning chiziqli ifodasini ham topish mumkin.

$$x^5 + x^4 - x^3 + x - 1 = (x^3 - x^2 + x - 1)(x^2 + 2x) + (-x^2 - 1)(x^3 - x^2 + x - 1) = (-x^2 - 1)(-x + 1)$$

Bu 1-tenglikdan

$$-x^2 + 1 = 2x^2 - 1 = (x^5 + x^4 - x^3 + x - 1)(x^2 + 2x)$$

Ya'ni EKUB

$$(f, g) = f - g(x^2 + 2x)$$

bo'ladi.

1- Bobda keltirilmaydigan ko'phadlar haqida fikr yuritib

$R[x]$ halqada faqat 1- darajali ko'phadlar va haqiqiy ildizlarga ega bo'lmagan ko'phadlar keltirilmaydigan ko'phadlar ekani $Q[x]$ halqada $\forall$ darajali keltirilmaydigan ko'phad mavjud ekani aytib o'tilgan edi.

Agar P chekli maydon bo'lsa u holda $\forall n$ uchun darajasi n dan oshmagan koeffitsiyentlari P dan olingan ko'phadlar soni chekli bo'ladi. Shuning uchun darajasi $\forall$ berilgan darajadan oshmagan keltirilmaydigan ko'phadlar berilgan sondan katta bo'lmagan tub sonlarni topish kabi topish mumkin.

Masalan:

$\mathbb{Z}_3[x]$ halqadagi darajasi 4 dan oshmagan barcha keltirilmaydigan ko'phadlarni topamiz va bu halqada 5- darajali keltirilmaydigan ko'phad mavjud ekanini isbotlaymiz.

Bu halqada 2 ta 1-darajali keltirilmaydigan ko'phad mavjud x va $x+1$ darajasi 1 dan yuqori bo'lgan ko'phadlar orasidan faqat $\mathbb{Z}_2$ maydonda ildizga

ega bo'lmagan ko'phadlarnigina qaraymiz. $\mathbb{Z}_2$ maydonda faqatgina 2 ta element bor 0 va 1 $f(0) \neq 0$ shart esa f ko'phadning ozod hadi, noldan farqli ekanini bildiradi. $f(1) \neq 0$ shart esa f ko'phadning noldan farqli hadlari soni toq ekanini ifodalaydi. Biz bilamizki 2- va 3-darajali ko'phadlar uchun ildizning mavjud emasligi ularning keltirilmaydigan ko'phad ekanini ta'minlaydi. Shunday qilib 2- va 3- darajali ko'phadlar orasida

$$x^2 + x + 1, x^3 + x^2 + 1, x^3 + x + 1$$

lar keltirilmaydigan ko'phadlardir. Bundan yuqori darajali ko'phadlar ildizga ega bo'lmay turib keltiriladigan ko'phad bo'lishi mumkin. Bu holda ularning barcha keltirilmaydigan ko'paytuvchilarining darajalari 1 dan yuqori bo'ladi. Xususan 4- darajali ko'phadlar ichida ildizga ega bo'lmay keltiriladigan ko'phad faqat bitta u ham bo'lsa 2- darajali keltirilmaydigan ko'phadlarning kvadratidan iborat. Bu ko'phad

$$(x^2 + x + 1)^2 = x^4 + x^2 + 1$$

Qolgan 3 ta ko'phad

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, x^4 + x^3 + 1, x^4 + x^2 + 1, x^4 + x + 1$$

keltirilmaydigan ko'phadlardir.

5-darajali ko'phadlar ichida 2 tasi ildizga ega bo'lmagan keltirilmaydigan ko'phadlardir, ular 2-darajali keltirilmaydigan ko'phad bilan 3-darajali keltirilmaydigan ko'phadlardan birining ko'paytmasiga yoyiladi.

Ildizga ega bo'lmagan 5- darajali ko'phadlar soni 8 ta har bir shunday ko'phadning x^5 oldidagi koeffitsienti va ozod hadi 1 ga teng x^4 , x^3 va x^2 oldidagi koeffitsientlar 8 xil turlicha usullarda berilishi mumkin, natijada x oldidagi koeffitsient barcha noldan farqli koeffitsientlar soni toq degan shart asosida bir qiymatli aniqlanadi, demak 5-darajali keltirilmaydigan ko'phadlar soni $8-2=6$ ga teng.

X U L O S A

Maydon ustidagi bir o'zgaruvchili ko'phadlar halqasi algebraning eng ko'p o'rganiladigan, eng ko'p tatbiq qilinadigan va boshqa matematik fanlar: matematik tahlil, analitik geometriya kabi fanlar bilan ko'p jihatdan bog'liq bo'lgan sohalaridan biridir. Biroq, maydon ustidagi bir o'zgaruvchili ko'phadlar qaralganda, ko'pincha, sonli maydonlar, ya'ni cheksiz maydonlar ustidagi ko'phadlar bilan chegaralanadi. Vaholanki, alohida e'tiborga molik bo'lgan chekli maydonlar ham mavjud va ko'phadlar bunday maydonlar ustida aniqlanganda, ular o'zlarini anchagina boshqacha tutadilar. Cheksiz maydon ustidagi bir o'zgaruvchili ko'phadlar uchun taalluqli bo'lgan xususiyatlar maydon chekli bo'lganda, boshqacha tusga kiradi. Shu bois ham ko'phadlarning bu ikki tur maydon xususiyatlariga ko'ra o'ziga xosliklarini o'rganish, solishtirish va tahlil qilish juda ham qiziqarli va mazmunli ishdur.

Mazkur bitiruv malakaviy ishida chekli maydon ustidagi ko'phadlar bilan bog'liq tushunchalar, xossalar va teoremlar keltirilib, Z_5 maydon ustidagi kichik darajali keltiriladigan va keltirilmaydigan ko'phadlar cheksiz maydon ustidagi xuddi shunday ko'phadlar bilan qiyosiy tahlil qilgan holda o'rganildi va misollar yordamida bayon qilindi. Z_5 maydon ustidagi 1-darajali va 2-darajali keltirilmaydigan ko'phadlarning soni hisoblab chiqarildi va ularga aniq misollar ko'rsatildi.

MUNDARIJA

KIRISH.....	
ASOSIY QISM	
I-BOB. Cheksiz maydon ustidagi ko‘phadlar.....	
1- § Halqa ustidagi ko‘phad tushunchasi.....	
2-§ Ko‘phadning ildizi.....	
3-§ Ko‘phadlarning EKUBi.....	
4-§ Keltiriladigan va keltirilmaydigan ko‘phadlar.....	
II-BOB. Chekli maydon ustidagi ko‘phadlar.....	
1-§ Chekli maydon ustidagi ko‘phadlar va ularning ildizlari	
2-§ Z_5 maydon ustidagi keltirilmaydigan ko‘phadlar.....	
XULOSA.....	
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI.....	
INTERNET MA`LUMOTLARI.....	