

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA  
O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI  
NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI  
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI  
**5130100-Matematika yo`nalishi, IV-bosqich,**

403-guruh bitiruvchisi

Pulatova O'g'ilhon Maxmud qizining

*bakalavr darajasini olish uchun yozgan*

# BITIRUV

# MALAKAVIY ISHI

**MAVZU: CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI  
TURG'UNLIGINI TAHLILI**

Ilmiy rahbar:

dotsent Yu.Toshmirzayev

# **MAVZU: CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI TURG'UNLIGINI TAHLILI**

## **REJA**

### **I. KIRISH**

### **II ASOSIY QISM**

#### **I-BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNING SISTEMASI HAQIDA MA'LUMOTLAR.**

1§ -Differensial tenglama ta'rifi va uning turlari.

2-§. - Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.

#### **II BOB DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNING HOATLAR TEKISLIGI. LYAPUNOV MA'NOSIDA TURG'UNLIK .**

1-§. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli sistemaning holatlar tekisligi.

2-§. Turg'unlik. lyapunov ma'nosidagi turg'unlik. Asimptotik turg'unlik.

### **III. XULOSA.**

### **IV. FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.**

### **V. INTERNET MA'LUMOTLARI.**

## KIRISH

Biz jahon sivilizatsiyasining bosh tafakkuri va yuksak ma'naviyati bilan ulkan hissa qo'shgan, insoniyat tarixida o'chmas iz qoldirgan buyuk ajdodlarimiz bilan haqli ravishda faxrlanamiz. Ularning madaniy-ma'naviy, ilmiy merosini o'rganish, asrab avaylash va yanada boyitish kelgusi avlodlar oldidagi burchimizdir.

Prezidentimiz Islom Abdug'aniyevich Karimov rahnamoligida barcha sohalar qatori ma'naviy-ma'rifiy jabhalarda olib borilayotgan ishlar zamirida ham ana shu ezgu maqsad mujassam. Muqaddas qadamjolarni obodonlashtirish, buyuk bobolarimizning boy ma'naviy merosini chuqur o'rganish, yoshlarimizni shu asosda barkamol insonlar etib voyaga yetkazish ustuvor ahamiyat kasb etmoqda. O'zbekiston Resublikasi mustaqillika erishgandan so'ng ko'pgina sohalar bilan bir qatorda ta'lim sohasida ham katta o'zgarishlar yuz berdi. Bunda asosan rivojlangan davlatlarning ta'lim tizimlari namuna sifatida olinib, bizning xalqimiz imkoniyatlari va yutuqlariga mos holda yangi ta'lim tizimi ishlab chiqildi. O'zbekiston innovatsion rivojlanish turining hozirgi zamon modeliga o'tishi uchun hamma zarur sharoitlarga ega. Bu model vujudga keltirilgan ilmiy texnikaviy salohiyatdan keng va samarali foydalanishga fundamental va amaliy fanlarning yutuqlarini chuqur ilm talab qiladigan texnologiyalarni amaliyotga keng joriy etishga, yuqori malakali, iqtidorli ilmiy kadrlar sonini ko'paytirishga asoslanadi. Bu mamlakatimiz jahondagi iqtisodiyoti va sanoati rivojlangan davlatlar qatoriga kirib borishning zarur, zamonaviy sharti va mustahkam poydevori bo'lib xizmat qiladi.

Ma'lumki, O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A.Karimovning Respublika Oliy Majlisi IX sessiyasida so'zlagan nutqida takrorlaganidek: "Ta'lim tarbiya va kadrlar tayyorlash tizimini tubdan isloh qilish, barkamol avlodni voyaga etkazishda muhim ahamiyatga ega bo'ladi". Bu esa Oliy maktabda o'qitish sistemasini isloh qilishni taqozo etadi. Shuning uchun zamon talabiga mos o'quv qo'llanmalar yaratish milliy dasturni amalga oshirish vazifalaridan biridir. Matematika o'sib kelayotgan yosh avlodni kamol toptirishda o'quv fani sifatida

keng imkoniyatlarga ega. U o'quv tafakkurini rivojlantirib, aqlni charxlaydi, fikrlashni tartibga soladi. Shu bilan bir qatorda teoremlarni isbotlash va mulohazalarning to'g'ri, go'zal tuzilganligi, talabalarning go'zallikga extiyojli qalb sifatida tarbiyalab boriladi.

Matematikaning imkoniyatlari juda keng va boy. U nafaqat fizika, astronomiya, ximiya, biologiya, geologiya, iqtisod fanlarida, balki tibbiyot, tilshunoslik, atrof-muhitni himoya qilish tabiatdagi turli-tuman hodisalarni o'rganishga ham dadillik bilan kirib boryapti va samarali natija beryapti. Mamlakatning ijtimoiy-iqtisodiy taraqqiyotini jadallashtirish yangi texnologiyalarni yaratish va ishga tushirishni, bu esa o'z navbatida juda murakkab matematik hisob-kitoblarni taqozo etadi. Shunday qilib, matematik kadrlar sifatini tubdan yaxshilash masalasi yuzaga kelmoqda. Mamlakatimizga ko'plab yuqori malakali matematiklar kerak. Ularni tayyorlash ishi maktabdan, hattoki, bog'chadan boshlanishi kerak.

Buni biz prezidentimiz Islom Abdug'anievich Karimovning «O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida: xavfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari» nomli kitoblarida keltirilgan quyidagi so'zlardan ham bilib olsak bo'ladi: «Respublikada quyidagi yo'nalishlar bo'yicha jahon darajasidagi ilmiy maktablar yaratilgan bo'lib, ularda tadqiqotlar muvaffaqiyatli olib borilmoqda. Jumladan, matematika, ehtimollar nazariyasi, tabiiy va ijtimoiy jarayonlarni matematik modellash, informatika va hisoblash texnikasi sohasidagi tadqiqotlar.

Matematika fanining ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, differentsial tenglama, algebra va sonlar nazariyasi, funktsional tahlil sohasidagi yutuqlari Respublikadan ancha uzoqda ham mashhur».

Milliy g'oya targ'iboti va ma'naviy ma'rifiy ishlar samaradorligini oshirish yo'lida ham prezident I.A.Karimov juda katta va ijobiy ishlar olib bormoqda. Bunday ishlar O'zbekiston respublikasi prezidenti I.A.Karimovning 451- qarorida o'z aksini topgan. Shu qarordan ilhomlangan holda biz o'z ilmiy izlanishlarimizni yanada rivojlantirmoqdamiz. Vatanimiz mustaqilligining ma'naviy asoslarini mustahkamlash, milliy qadriyatlarimiz, an'ana va urf odatlarimizni asrab avaylash

xalqimiz, ayniqsa yosh avlod qalbi va ongiga ona yurtga muxabbat, istiqloлга sadoqat tuyg'ularini chuqur singdirish masalasi bugungi kunda tobora dolzarb ahamiyat kasb etmoqda.

O'zbekiston Respublikasi inson huquqlari va erkinliklariga rioya etilishini, jamiyatning ma'naviy yangilanishini, ijtimoiy yo'naltirilgan bozor iqtisodiyotini shakllantirishni, jahon hamjamiyatiga qo'shilishni ta'minlaydigan demokratik huquqiy davlat va ochiq fuqarolik jamiyati qurmoqda.

Xalqning boy intellektual merosi va umumbashariy qadriyatlar asosida, zamonaviy madaniyat, iqtisodiyot, fan, texnika va texnologiyalarning yutuqlari asosida kadrlar tayyorlashning mukammal tizimini shakllantirish O'zbekiston taraqqiyotining muhim shartidir.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturi "Ta'lim to'g'risidagi" gi O'zbekiston Respublikasi Qonunining qoidalariga muvofiq holda tayyorlangan bo'lib, milliy tajribaning tahlili va ta'lim tizimidagi jahon miqyosidagi yutuqlar asosida tayyorlangan hamda yuksak umumiy va kasb-hunar madaniyatiga, ijodiy va ijtimoiy faollikka, ijtimoiy-siyosiy hayotda mustaqil ravishda mo'ljalni to'g'ri ola bilish mahoratiga ega bo'lgan, istiqbol vazifalarini ilgari surish va hal etishga qodir kadrlarning yangi avlodini shakllantirishga yo'naltirilgandir.

O'zbekiston Respublikasi davlat mustaqilligiga erishib, iqtisodiy va ijtimoiy rivojlanishning o'ziga xos yo'lini tanlashi kadrlar tayyorlash tuzilmasi va mazmunini qayta tashkil etishni zarur qilib qo'ydi va chora-tadbirlar ko'rishni:

"Ta'lim to'g'risida" gi Qonunni joriy etishni (1992 yil); yangi o'quv rejalari, dasturlari, zamonaviy didaktik ta'minotni ishlab chiqishni; o'quv yurtlarini attestatsiyadan o'tkazishni va akkreditatsiyalashni, yangi tipdagi ta'lim muassasalarini tashkil etishni taqozo etdi.

Mazkur dasturning **maqsadi** – ta'lim sohasini tubdan isloh qilish, uni o'tmishdan qolgan mafkuraviy qarashlar va sarqitlardan to'la xalos etish, rivojlangan demokratik davlatlar darajasida, yuksak ma'naviy va axloqiy talablarga javob beruvchi yuqori malakali kadrlar tayyorlash Milliy tizimini yaratishdir.

Milliy dasturning maqsad va vazifalari bosqichma-bosqich ro'yobga chiqarilmoqda.

**Birinchi bosqich** (1997-2001 yillar)-mavjud kadrlar tayyorlash tizimining ijobiy salohiyatini saqlab qolish asosida ushbu tizimni isloh qilish va rivojlantirish uchun huquqiy, kadrlar jihatidan, ilmiy-uslubiy, moliyaviy-moddiy shart-sharoitlar yaratish.

Ushbu bosqichda quyidagilarni amalga amalga oshirish zarurligi ko'zda tutilgan:

- "Ta'lim to'g'risida" gi Qonunga muvofiq ta'lim tizimi mazmunitarkibiy qayta qurish va tubdan yangilash;
- Pedagog va ilmiy - pedagog kadrlar tayyorlash hamda ularning malakasini oshirishni zamon talablariga javob beradigan darajada tashkil etish;
- Ta'lim oluvchilarning yuksak tayyorgarlik darajasi, malakasi, madaniy va ma'naviy-axloqiy saviyasining sifatiga nisbatan qo'yiladigan zarur talablarni belgilab beruvchi davlat ta'lim standartlarini yaratish va joriy etish;
- Ta'lim muassasalari faoliyatiga baho berishning reyting tizimini, kadrlar tayyorlash sifati va ularga bo'lgan ehtiyojning monitoringini olib borish tizimini ishlab chiqish va joriy etish;
- Kadrlar tayyorlash milliy dasturini ro'yobga chiqarishning monitoringini olib borish.

Ushbu bosqichda bolalarni olti-yetti yoshdan maktabga qabul qilish ularning jismoniy va aqliy jihatdan rivojlanganligini e'tiborga olgan holda amalga oshiriladi. Taqozo etilayotgan o'quvchi o'rinlari zarur moddiy-texnika shart-sharoitlari va pedagog kadrlar bilan ta'minlangan holda izchil tayyorlanadi.

Birinchi bosqich bajarilishining monitoringi asosida Milliy dasturni ro'yobga chiqarish yo'nalishlariga aniqliklar kiritiladi.

**Ikkinchi bosqich** (2001-2005 yillar)-Milliy dasturni to'liq ro'yobga chiqarish, mehnat bozorining rivojlanishi va real ijtimoiy- iqtisodiy sharoitlarni hisobga olgan holda unga aniqliklar kiritish.

Majburiy umumiy o'rta va o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limiga, shuningdek o'quvchilarning qobiliyatlari va imkoniyatlariga qarab, tabaqalashtirilgan ta'limga o'tish to'liq amalga oshiriladi.

Ta'lim muassasalarini maxsus tayyorlangan malakali pedagog kadrlar bilan to'ldirish ta'minlanadi, ularning faoliyatida raqobatga asoslangan muhit vujudga keltiriladi.

Ta'lim muassasalarining moddiy-texnika va axborot bazasini mustahkamlash davom ettiriladi, o'quv-tarbiya jarayoni yuqori sifatli o'quv adabiyotlari va ilg'or pedagogik texnologiyalar bilan ta'minlanadi. Uzluksiz ta'lim tizimini axborotlashtirish amalga oshiriladi.

Ta'lim xizmati ko'rsatish bozorini shakllantirish mexanizmlari to'liq ishga solinadi.

***Uchinchi bosqich*** (2005 va undan keying yillar)-to'plangan tajribani tahlil etish va umumlashtirish asosida, mamlakatni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirish istiqbollari muvofiq kadrlar tayyorlash tizimini takomillashtirish va yanada rivojlantirish. Ta'lim muassasalarining resurs, kadrlar va axborot bazalari yanada mustahkamlanadi, o'quv-tarbiya jarayoni yangi o'quv-uslubiy majmualar, ilg'or pedagogik texnologiyalar bilan to'liq ta'minlanadi.

Milliy (elita) oliy ta'lim muassasalarini qaror toptirish va rivojlantirish amalga oshiriladi. Kasb-hunar ta'limi muassasalarining mustaqil faoliyat yuritishi va o'zini o'zi boshqarishi shakllari mustahkamlanadi.

Prezidentimiz I.Karimov "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" to'g'risida joriy etgan qonunlari biz yoshlarga katta yutuq bo'ldi va "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" xaqida quyidagi gaplarni aytib o'tganlar. I.Karimov nutqidan olingan quyidagi gaplarini ko'rib o'taylik "Kadrlarni puxtaroq qilib tayyorlamasdan, ularni qadriga etmasdan, ularga ishonmasdan va qullab-quvatlamasdan, o'ylaymanki biron bir sohada axvolni hech qanaqa tarzda o'zgartirib bo'lmaydi". (1989 yil 28 oktyabr)

Shuni alohida ta'kidlash joizki bugungi kunda odamlarimiz ularning ijtimoiy ongi hayotga munosabati toboro o'zgarmoqda. Bu esa mamlakatimizning

taraqqiyot va farovonlik yo'lidagi izchil rivojlanib borishini, yangi marralarni qo'lga kiritishimizni ta'minlayotgan qudratli harakatlantiruvchi kuch bo'lib hizmat qilmoqda. Prezidentimiz I.A. Karimov "Mamakatimizni modernizatsiya qilish yo'lini izchil davom ettirish – taraqqiyotimizning muhim omilidir", bu to'g'risida juda chiroyli nutq so'zlaganlar. Bosib o'tgan yo'limizni va mamlakatimizning dunyoda sodir bo'layotgan tub o'zgarishlar jarayonida tutgan o'rnini holis va tanqidiy baholar ekanmiz erishgan yutuqlarimizga mahliyo bo'lib qolmasligimiz, ortiqcha havolanish va hotirjamlik tuyg'usida berilmasligimiz zarur. Bugun biz erishayotgan globallashuv va tobora kuchayib borayotgan raqobat asrida faqat chuqur islohot va modernizatsiya yo'lidan tinimsiz va qattiyat bilan rivojlanib borish natijasida o'z oldimizga qo'ygan istiqbolli maqsadlarga – taraqqiy topgan, farovon yashayotgan demokratik davlatlar qatoriga kirish, xalqimiz uchun munosib hayot darajasini ta'minlashga erisha olamiz va bunda quyidagi masalalar bizning eng muhim ustuvor yo'nalishlarimizga aylanishi darkor:

- davlat hokimiyati va boshqaruvini demokratlashtirishga qaratilgan konstitutsiyaviy islohotlarni yanada chuqurlashtirish, ya'ni hokimyatini tashkil qiladigan Prezident – davlat boshlig'i, qonunchilik va ijro hokimiyati o'rtasida muvozanat va barqarorlikni yanada mustahkamlash, sud tizimining mustaqilligi va liberallashtirishni kuchaytirish bo'yicha islohotlarni davom ettirish;

- axborot sohasida fuqarolar va inson huquqlarini kafolatlarini, saylov erkinligini ta'minlash va saylov qonunchiligini takomillashtirish;

- demokratik qadriyatlar va insonlarning qonuniy manfaatlarini himoya qilishning, mamlakatimizda fuqarolik jamiyatining shakllashtirishning amalda muhim omiliga aylanish zarur bo'lgan fuqarolik institutlarini, nodavlat notijorat tashkilotlari, jamoat tuzilmalari va fuqarolarning o'zini – o'zi boshqarish organlari, xususan, mahallaning huquqi va vakolatlarini yanada kengaytirish va mustahkamlash;

O'z – o'zidan ravshanki, biz oldimizga qo'yayotgan bunday murakkab va ulkan vazifalarni amalga oshirish uchun ancha vaqt, balki yillar talab qilinadi va uni biz o'zimizga yaxshi tasavvur etishimiz lozim.



Ma'lumki, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining Respublika Oliy Majlisi IX sessiyasida so'zlagan nutqi (1997 yil 29 avgust) va "Ta'lim tarbiya kadrlar tayyorlash tizimining tubdan isloh qilish barkamol avlodni voyaga yetkazish to'g'risida" gi formasi muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Bu esa oliy maktabda o'qitish sistemasini isloh qilishni taqozo etadi.

Shuning uchun zamon talabiga mos o'quv qo'llanmalar yaratish milliy dasturni amalga oshirish vazifalaridan biri hisoblanadi.

Xalq ta'limi rivojlanishidagi xozirgi davr – muhim davrlardan bo'lib, bu "Ta'lim to'g'risida"gi qonun va "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" Vazirlar Maxkamasining 1998 yil 13 may "Umumiy o'rta ta'limni tashkil etish va singdirishdan iboratdir". Bu xujjatlar ta'lim sohasida jamiyat ehtiyojini to'la qondirishni nazarda tutadi. Bu vazifalarni amalga oshirish uchun mo'ljallangan tadbirlar tizimida matematika ta'limining davlat standartlarini joriy etish katta ahamiyat kasb etadi.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Karimov Oliy Majlis palatalarining 2010 yil 12 noyabr kuni bo'lib o'tgan qo'shma majlisida takdim etgan Konsepsiyada axborot sohasini isloh qilish, axborot va so'z erkinligini ta'minlash borasidagi qonunchilik tashabbuslari ushbu sohaga bosqichma-bosqich amalga oshirilayotgan tadrijiy islohotlarning uzviy davomi bo'lib, axborot olishning erkin va teng huquqliligini ta'minlash, davlat hokimiyati va boshqaruvi organlari faoliyatiniig ochiqqligi prinstiplarini amalga oshirish, sohada bozor mexanizmlarini yanada takomillashtirish va axborot texnologiyalarini keng joriy etish, fuqarolik jamiyati institutlari tizimida OAVning rolini yanada kuchaytirishga qaratilgan samarali mexanizmlarni yaratishni nazarda tutadi.

Ma'lumki, davlat hokimiyati va boshqaruv organlari ustidan jamoatchilik va parlament nazoratini ta'minlash, fuqarolik jamiyatining muhim belgilaridan biri sanaladi. Shu nuqtai nazardan konsepsiyada ommaviy axborot vositalarining davlat hokimiyati va boshqaruv organlari faoliyati ustidan jamoatyailik nazorati ta'minlash, davlat organlari va jamoatchilik o'rtasida mustahkam aloqa o'rnatish borasidagi rolini kuchaytirish maqsadida "Davlat hokimiyati va boshqaruv

organlari faoliyatining ochiqligi to'g'risida" gi O'zbekiston Respublikasi Qonunini qabul qilish taklif etildi. Bu qonunning hayotga joriy etilishi davlat hokimiyati organlari faoliyati haqida jamoatchilikni xabardor qilib borishning xuquqiy mexanizmlarini yaratib, davlat organlarining axborot xizmatlari va media tuzilmalari ishini faollashtirishga, ular tomonidan ma'lum bir muddatlarda brifing hamda matbuot anjumanlari tashkil etishga, yurtimizda amalga oshirilayotgan islohotlarning ochiqligi va oshkoraligini ta'minlashga, ommaviy axborot vositalarining axborot olish yuzasidan murojaatlarini ko'rib chiqish muddatlarini qisqartirishga, axborot olish sohasidagi qonunchilik talablarini buzganlik uchun yuridik va mansabdor shaxslarning ma'muriy javobgarligini kuchaytirishga xizmat qiladi.

Prezidentimiz I.A.Karimovning "Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch" asarida shunday deydilar: "Bugun biz tarixiy bir davrda — xalqimiz o'z oldiga ezgu va ulug' maqsadlar qo'yib, tinch-osoyishta hayot kechirayotgan, avvalambor o'z kuch va imkoniyatlariga tayanib, demokratik davlat va fuqarolik jamiyati qurish yo'lida ulkan natijalarni qo'lga kiritayotgan bir zamonda yashamoqdamiz.

Biz o'z taqdirimizni o'z qo'limizga olib, azaliy qadriyatlarimizga suyanib, shu bilan birga, taraqqiy topgan davlatlar tajribasini hisobga olgan holda, mana shunday olijanob intilishlar bilan yashayotganimiz, xalqimiz asrlar davomida orziqib kutgan ozod, erkin va farovon hayotni barpo etayotganimiz, bu yo'lda erishayotgan yutuqlarimizni xalqaro hamjamiyat tan olgani — bunday imkoniyatlarning barchasini aynan mustaqillik berganini bugun hammamiz chuqur anglaymiz.

Ana shu haqiqatni xalqimiz har tomonlama to'g'ri tushunib, tanlagan taraqqiyot yo'limizni ongli ravishda qabul qilgani va qo'llab-quvvatlayotgani oldimizga qo'ygan maqsadlarga erishishning asosiy manbai va garovi ekanini hayotning o'zi tasdiqlamoqda.

Biz xalqimizning dunyoda hech kimdan kam bo'lmasligi, farzandlarimizning bizdan ko'ra kuchli, bilimli, dono va albatta baxtli bo'lib

yashashi uchun bor kuch va imkoniyatlarimizni safarbar etayotgan ekanmiz, bu borada ma'naviy tarbiya masalasi, hech shubhasiz, beqiyos ahamiyat kasb etadi. Agar biz bu masalada hushyorlik va sezgirligimizni, qat'iyat va mas'uliyatimizni yo'qotsak, bu o'ta muhim ishni o'z holiga, o'zibo'larchilikka tashlab qo'yadigan bo'lsak, muqaddas qadriyatlarimizga yo'g'rilgan va ulardan oziqlangan ma'naviyatimizdan, tarixiy xotiramizdan ayrilib, oxir-oqibatda o'zimiz intilgan umumbashariy taraqqiyot yo'lidan chetga chiqib qolishimiz mumkin.

El-yurtimiz o'zining ko'p asrlik tarixi davomida bunday mash'um xatarlarni necha bor ko'rgan, ularning jabrini tortgan. Shunday asoratlarni tufayli tilimiz, dinimiz va ma'naviyatimiz bir paytlar qanday xavf ostida qolganini barcha-miz yaxshi bilamiz. Ana shu fojiali o'tmish, bosib o'tgan mashaqqatli yo'limiz barchamizga saboq bo'lishi, bugungi voqelikni teran taxdil qilib, mavjud tahdidlarga nisbatan doimo ogoh bo'lib yashashga da'vat etishi lozim. O'z tarixini bilmaydigan, kechagi kunini unutgan millatning kelajagi yo'q. Bu haqiqat kishilik tarixida ko'p bora o'z isbotini topgan. Ma'lumki, biz boshimizdan kechirgan sobiq mustabid tuzum davrida milliy ma'naviyatni rivojlantirishga mutlaqo yo'l qo'yilmagan. Aksincha, xalqimizning tabiati, yashash tarziga yot bo'lgan kommunistik mafkurani har qanday yo'llar va zo'ravonlik bilan joriy etishga harakat qilingan. Shuning uchun ham istiklolning dastlabki kunlaridanoq bu sohadagi ahvolni tubdan o'zgartirish yurtimizda eng dolzarb va hal qiluvchi vazifalardan biriga aylandi.

Zaminimizda yashab o'tgan buyuk allomalarimiz, mutafakkir bobolarimizning ibratli hayoti va faoliyati, bemisl ilmiy-ijodiy kashfiyotlari bugun ham jahon ahlini hayratga solayotganini g'urur bilan ta'kidlash lozim.

O'zbek xalqi dunyo maydonida kuni kecha tasodifan paydo bo'lib qolgani yo'q. Biz — boy tarix, yuksak madaniyat, buyuk ma'naviyat vorislarimiz. Qadimiy tariximizni har tomonlama o'rganib, shunday xulosaga kelish mumkinki, eng qaltis va taxlikali davrlarda millatimizga umid va ishonch bergan, uni yovlarga qarshi kurashga undagan, ajdodlarimizni ilmiy

kashfiyotlar, harbiy zafarlarga, ma'rifat mash'alini baland ko'tarib jaholatga qarshi chiqishga chorlagan beqiyos kuch ham aynan ma'naviy jasorat tuyg'usidir.

Manaviyatning hayotimizdagi o'rni va ahamiyati haqidagi fikr-mulohazalarimizga yakun yasar ekanmiz, avvalambor, shuni chuqur anglab olishimiz darkorki, ma'naviy yuksalishga erishish — bu bir yillik yoki besh-o'n yillik ish emas. Xalq, millat o'z milliy ma'naviyatini yillar, asrlar davomida kjsaltirib, boyitib boradi. Chunki ma'naviyat qotib qolgan aqidalar yig'indisi emas, aksincha, doimiy harakatdagi uzluksiz jarayon bo'lib, taraqqiyot davom etar ekan, uning shiddatli yurishi tufayli ma'naviy hayot oldiga qo'yiladigan talablar ham muttasil paydo bo'laveradi.

Ya'ni, mamlakatimiz taraqqiyot pillapoyasidan yangi-yangi cho'qqilar sari qadam qo'yar ekan, biz yashayotgan zamon sur'atlari shildat bilan tezlashib, oldimizda yana qancha muammo va mashaqqatlar paydo bo'lar ekan, tabiiyki, ma'naviy hayotimiz ham ana shu sinovlarda toblanib, yuksalib, jamiyatimiz, millatimizning yorug' va sog'lom kelajagini har qanday taxdid va to'fonlardan — davr o'zgarishi bilan ularning ko'rinishi va shakli o'zgarishiga qaramasdan — bezavol saqlash va asrab qolishga qodir bo'lishi darkor.

Ana shu fikr va xulosalardan kelib chiqqan holda, «Biz kimmiz?» degan savolga javob bermasdan turib, eng muhimi, ma'naviy boylikni, ma'naviyatni yuksaltirishga doimiy intilmasdan turib biz o'z oldimizga qo'ygan ezgu maqsadlarga erishish mumkin emas, desam, qalbimdan chuqur joy olgan fikrni aytgan bo'laman.

Bugungi kunda ma'naviyat dunyosiga nisbatan mavjud bo'lgan xavf-xatarlardan albatta ko'z yumib bo'lmaydi, lekin bizning ishonchimiz komilki, xalqimiz tarixning murakkab jarayonlarida irodasi chiniqib, har qanday hujum va tazyiqlarga qaramasdan, ma'naviy olami kuchayib va yuksalib borayotgani, bizni ko'rolmaydigan kuchlar ham bu haqiqatni tan olayotganini mamnuniyat bilan qayd etamiz.

Chunki xalq — bamisoli ulug' va sharaflı yo'ldan ilgarilab borayotgan ulkan karvon. Uni yo'ldan chalg'itishga urinuvchilar, payt poylab orqasidan hamla qiluvchilar hamisha bo'lgan, bundan keyin ham bo'lishi mumkin. Karvon bexatar bo'lmas, degan gap bejiz aytilmagan. Ammo xalq karvonini hech qanday kuch ortga qaytarolmaydi. Nega deganda, xalqning qalbida ne-ne avlodlardan meros yengilmas kuch — ma'naviyat bor.

Barchamizga g'urur va iftixor bag'ishlaydigan tomoni shundaki, bizning ezgu intilishlarimiz zahirida ham ana shunday pok niyat, buyuk ishonch mujassam. Aniq maqsad yo'lidagi bunyodkorlik ishlarimiz amaliy natijalar bera boshlagan, ko'zlagan rejalarimiz bosqichma-bosqich ro'yobga chiqib, dunyo hamjamiyatidan o'zimizga munosib o'rin egallab borayotgan hozirgi kunda xalqimiz, millatimiz qalbidagi ana shu ishonch yanada mustahkamlanmoqda.

Shu bois men shonli tarixiga sadoqat bilan qarab, bugungi ozod hayotini qadrlab, o'z kelajagiga katta umid bilan intilayotgan xalqimizning donishmandligi va matonati, uning iymon-e'tiqodi, mustahkam irodasi va yuksak ma'naviy ruhi doimo barqaror yashaydi, deb ishonaman.

Aholi bandligini ta'minlash va yangi ish o'rinlarini tashkil qilish muammosini hal etish 2011 yil va yaqin istiqbolda mamlakatimizni muvaffaqiyatli va barqaror rivojlantirishni alohida ustuvor yo'nalishi hech mubolag'asiz eng muhim shartidir.

Bilamizki o'tgan yilga O'zbekiston Respublikasi mustaqilligining 20 – yilligini nishonladik. Prezidentimiz I.A.Karimovning 2011 yil 6 apreldagi “O'zbekiston Respublikasining 20 – yilligiga bag'ishlangan” qarorida ham mamlakatimizning 20 yilligini munosib ravishda kutib olishda vatanimiz yoshlarini o'rni beqiyosligini, ularni aqlan va jismonan rivojlanishi uchun sharoitlar yaratib berish kerakligini aytib o'tganlar. Bunga misol qilib “Barkamol avlod” sport o'yinlarini, mamlakatimiz yoshlari ishtirokida “Biz – yigirma yoshdamiz” forumini, mehnat va o'quv jamoalari o'rtasida sport turlari bo'yicha “Mustaqillik kubogi” musobaqalari, an'anaviy “Sharq taronalari” xalqaro musiqa festivalini,

yosh ijrochilar o'rtasida "Nihol", iste'dodli yoshlar o'rtasida "Kelajak ovozi", jurnalistika sohasida "Eng ulug', eng aziz", "Oltin qalam", "Ozod yurt to'liqlari", shuningdek, yangitdan tashkil etilayotgan "Istiqlol tarix ko'zgusida" (mustaqillik tarixini yoritishga bag'ishlangan eng yaxshi ilmiy va ilmiy – ommabop ishlar uchun). "Istiqlol solnomasi" (kino san'ati sohasidagi eng yaxshi asarlar uchun) kabi tanlovlarini yuqori darajada o'tkazish, tashkillashtirishni ta'kidlab o'tganlar.

2013 yil "Obod turmush yili"da bajarilgan ishlar ko'lami ham juda katta bo'lib, rejalashtirilgan vazifalarni amalga oshirishda ilm – fan yutuqlaridan foydalanish bosh vazifa bo'lib qoladi, bunday ulkan ishlarni muvaffaqiyat bilan uddalash uchun aniq hisob – kitoblar, xullas matematika faning yutuqlaridan ustalik, izchillik bilan foydalanish lozim bo'ladi.

Ma'lumki, matematika moddiy dunyoning ob'ektlarini o'rganadi. Lekin boshqa fanlardan farqli ravishda uning miqdoriy munosabatlari va fazoviy shakllari asosiy ob'ekt sifatida qoraladi. Matematika o'sib kelayotgan yosh avlodni kamol toptirishda o'quv fani sifatida keng imkoniyatlarga ega. U o'quv tafakkurini rivojlantirib, ularning aqlini charxlaydi, uni tartibga soladi. O'quvchilarga maqsadga yo'nalganlik, mantiqiy fikrlash, topqirlik xislatlarini tarbiyalab boradi.shakllantiradi. Shu bilan bir qatorda teoremani isbotlash va mulohazalarning to'g'ri, go'zal tuzilganligi o'quvchilarni didi, go'zallikka ehtiyotli qilishdan iborat.

### **Bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi.**

"Ilmga intilish yo'qolsa, fan taraqqiy etmaydi, ilm fan rivojlanmasa jamiyatning kelajagini tasavur etib bo'lmaydi".

Prezidentimizning bu so'zlari faqatgina mustaqil respublikamizning yoshlariga qaratilgan bo'libgina qolmay, nafaqat jahon hamjamiyati dasturi amal qiladi deyish mumkin.

"Ilmu fan taraqqiyoti biz uchun eng ustuvor sohalardan biridir. Bu sohada hizmat qiladigan odamlarning saviyasi, obro'si haqida g'amxo'rlik qilishimiz ularning hayotimizga qo'shadigan xissasiga qarab, e'tibor berishimiz shart. O'zining kelajagini o'ylaydigan jamiyat, davlat avvalambor

o'z olimlarini , ilm-ziyo ahliga xizmat qilishi kerak, ularni yuksak darajaga ko'tarish kerak.

Differensial tenglama fanining asisiy va muhim obyektlaridan biri chiziqli differensial tenglamalar sistemasi alohida bir obyekt sifatida qaraladi. Chunki matematikaning boshqa sohalari, matematika fizika tenglamalari, variatsion hisob, hisoblash usullari va chegaraviy masalalar fanlarining ko'pgina misol va masalalari bilan chambarchas bog'langan. Differensial tenglamalar sistemasi, chiziqli differensial tenglamalar sistemasining turg'unligini tahlil etish usullarini jiddiy o'rganish boshqa umumiyroq obyektlarni –differensial tenglamalar yoki matematik fanlarning boshqa muhim yo'nalishlarini ochib berishga va o'rganishga olib keldi.

### **Bitiruv malakaviy ishining maqsad va vazifalari.**

Matematika inson faoliyatining barcha jabhalarida qo'llanilishi mumkin bo'lgan unversialdir. Matematika biror sohaga tadbiq qilinadigan bo'lsa, u bu sohaga shu qadar kirib ketadiki, natijada matematikaning yoki tadbiq qilayotgan faningizni yoki yangi fan kelib chiqdimi bilmay qolasiz-hozirgi fan rivojlanishi ana shunda .

Bitiruv Malakviy ishining maqsadi va vazifasi differensial tenglamalar, differensial tenglamalar sistemasi, chiziqli differensial ttenglamalar sistemasining turg'unligimi tahlil etish usullarini va uning tadbiqlarini o'rganishdan iborat.

### **Tadqiqot ob'yekti va tadqiqot usullari.**

Tadqiqot obyekti chiziqli differensial tenglamalar va sistemalarni yechimlari turg'unligi tahlili usullariga oid manba, adabiyotlar chiziqli differensial tenglamalar sistemasini o'rganishga bag'ishlangan yurtimizdagi va horijdagi ilmiy tadqiqot ishlari, internet ma'lumotlardan foydalanish.

### **Tadqiqotning ilmiy yangiligi.**

Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega bo'lib, masalalar izchil, ketma-ketlikda bayon qilingan.

### **Ishning amaliy ahamiyati.**

Ushu bitiruv malakaviy ishi ham amaliy, ham nazariy va metodologik ahamiyatga ega bo'lib, mustaqil tadqiqotlarda, bitiruv malakaviy ishlari tayyorlashda, maktabda, kollej va litseylarda maxsus kurslar o'qitishda, to'garaklarda, matematik kechalarda foydalanilishi mumkin.

### **Bitiruv malakaviy ishining tarkibiy tuzilishi.**

Bitiruv malakaviy ishi kirish, asosiy qism, xulosa, foyalanilgan adabiyotlar ro'yxati va internet ma'lumotlaridan iborat.



## I-BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNING SISTEMASI HAQIDA MA'LUMOTLAR.

### 1§ Differensial tenglama ta'rifi va uning turlari.

Tabiatda va texnologiyada uchraydigan ko'pgina masalalar qaralayotgan hodisa yoki jarayonni tavsiflaydigan noa'lum funksiyani topishga keltiriladi.

Masalan. 10 l suv idishda har minutda 2 l dan shunday eritma muntazam quyilib turiladiki, bu eritmaning har-bir litrining tarkibida 0,3 kg tuz bor. Bu eritma bilan idishdagi suv aralashib, o'sha tezlikda idishdan oqib chiqib turadi.

Idishdagi tuz miqdorining o'zgarish qonunini quyidagicha topamiz:

$t$  vaqt erkli o'zgaruvchi,  $y(t)$  tajriba boshlangandan  $t$  vaqt o'tgandan keyingi tuz miqdori deb belgilash kiritamiz. Avval,  $t$  vaqtdan  $t + \Delta t$  vaqtgacha ( $\Delta t > 0$ ) idishdagi tuz miqdori qanchaga o'zgarganini topaylik. Bir minutda 2l eritma quyilgan bo'sa,  $\Delta t$  minutda  $2\Delta t$  eritma quyiladi. Shu eritmada  $0,3 \cdot \Delta t = 0,6\Delta t$  kg tuz bor.  $t$  vaqtda 10 litrli idishda  $y(t)$  kg tuz bor; demak, oqib chiqayotgan  $2\Delta t$  l eritmada  $0,2\Delta t y(t)$  kg tuz boladi (agar  $\Delta t$  vaqt davomida idishdagi tuz miqdori o'zgarmasa) Ammo aslida  $\Delta t$  vaqt davomida idishdagi tuz miqdori  $\Delta t \rightarrow 0$  da 0ga intiluvchi  $a$  miqdorga o'zgaradi. Shuning uchun oqib chiqayotgan  $2\Delta t$  aralashmada  $0,2\Delta t (y(t) + a)$  kg tuz bo'ladi. Bunda agar  $\Delta t \rightarrow 0$  bo'lsa,  $a \rightarrow 0$  shunday qilib,  $(t, t + \Delta t)$  vaqt davomida idishga quyiladigan eritma  $0,6\Delta t$  kg tuz bo'lib, idishdan oqib chiqayotgan aralashmada  $0,2\Delta t (y(t) + a)$  kg tuz bor. Endi funksiya ortirmasini tuzsak,  $y(t + \Delta t) - y(t) = 0,6\Delta t - 0,2\Delta t (y(t) + a)$  bu tenglamaning ikki tomonini  $\Delta t$  ga bo'lib,  $\Delta t \rightarrow 0$  da limitga o'tsak, u holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y'(t) = 0,6 - 0,2y(t)$$

Yana bir misol. Massasi  $m$  bo'lgan biror moddiy nuqta ( $G$  nuqta) to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda, shu nuqtaning harakat qonunini quyidagicha topamiz: Har bir  $t$  momentda  $G$  nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofa  $x(t)$  bo'lsa,

nuqtaning tezligi  $v$  bo'ladi ya'ni  $v = \frac{dx}{dt}$  bo'ladi.

Moddiy nuqtaga 2 tashqi kuch: Ishqalanish kuchi  $-bx, b>0$  va taranglik kuchi  $-kx, k>0$  ta'sir etadi deylik. Nyutonning 2-qonuniga asosanvaqt o'tishi bilan  $G$  nuqtaning harakati quyidagi  $m\ddot{x} = -bx - kx$  ko'rinishda aniqlanadi. Bunda

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ bo'ladi.}$$

Bu tenglama ham differensial tenglamadir.

Ta'rif. Erkli o'zgaruvchi va noma'lum funksia hamda uning xosilalari yoki differensiallarini bog'lovchi munosabat differensial tenglama deyiladi, yoki boshqacha qilib aytganda agar tenglamada noma'lum funksiya xosila yoki differensial ishorasi ostida qatnashsa, bunday tenglama differensial tenglama deyiladi.

Jumldan  $\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0$  differensial tenglamadir, unda noma'lum funksiya  $y$  birinchi tartibli xosila ishorasi ostida qatnashmoqda.

Ta'rif. Differensial tenglamadagi xosila yoki differensialning eng yuqori tartibi differensial tenglamaning tartibi deyiladi, masalan yuqoridagi tenglama birinchi tartibli differensial tenglama. Ammo  $y'' + Q(x)y = 0$  ikkinchi tartibli,  $y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0$  uchinchi tartibli differensial tenglamadir.

Ta'rif. Agar differensial tenglamada noma'lum funksiya bir argumentli bo'lsa, yoki noma'lum funksiya faqat bitta o'zgaruvchiga bo'liq bo'lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi. Yuqoridagi tenglamalar oddiy differensial tenglamalardir. Agar noma'lum funksiya ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglama xususiy xosilali differensial tenglama deyiladi.

$$x \frac{dz}{dx} = y \frac{dz}{dy}$$

Differensial tenglama birinchi tartibli xususiy xosilali differensial tenglama.

Ushbu

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

tenglama umumiy ko'rinishdagi n-tartibli differensial tenglama deyiladi. Bu yerda x-erkli o'zgaruvchi, y-noma'lum funksiya va  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  lar noma'lum funksiyaning xosilalaridir. Xususiyl hollarda xollarda n-tartibli tenglamada n dan past taribli xosilalar etmasligi mumkin. SHuningdek noma'lum funksiyaning o'zi yoki erkli o'zgaruvchi ham bo'lmasligi mumkin.

Ta'rif. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb tenglamaga qo'yilganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday differensiallanuvchi  $y = j(x)$  funksiyaga aytiladi.

Misol.  $y' = y$        $\frac{dy}{dx} = y, \frac{dy}{y} = dx \int \frac{1}{y} dy = \int dx, \ln y = x + c.$

$\ln y = \ln c = x$        $x = \ln y$        $yc = e^x$        $y = c_1 e^x$  topilgan yechimni berilgan tenglamaga olib borib qo'yamiz:  $(ce^x)' = ce^x$        $ce^x = ce^x$  ayniyat xosil bo'ldi. Bu yerda  $c = \text{const.}$

Ta'rif. Differensial tenglama yechimining grafigi integral chiziq deyiladi. Differensial tenglamaning yechimini toppish jarayoni ko'pincha integrallash deb yuritiladi.

$F(x, y, y') = 0$  ni  $y'$  ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, bu quyidagich yoziladi:  $y' = f(x, y)$  xosilaga nisbatan yozilgan bu shakldan differensiallar ishtirok etgan shaklga o'tish oson:  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  bu yozuv simmetrik yozuv deyiladi, chunki bu yozuvda  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar teng huquqlidir.

Differensial tenglamani umuman aytganda bitta funksiya emas, balki funksiyalarning butun bir to'plami qanoatlantirishi mumkin. Ulardan birini ajratib ko'rsatish uchun uning argumenti birorta qiymatga mos qiymatini ko'rsatish kerak, ya'ni  $x = x_0$  bo'lganda  $y = y_0$  ko'rinishdagi shart berilishi kerak. Boshart boshlang'ich shart deyiladi. U ko'pinch quyidagicha yoziladi  $y|_{x=x_0} = y_0$

Ta'rif. Differensial tenglamaning umumiy yechimi deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi  $y = (x, C_0)$  bunda  $C$ -ixtiyoriy o'zgarmas son, funksiyaga aytiladi.

a) U ixtiyoriy o'zgarmas  $C$  ning har qanday qiymatida differensial tenglamani qanoatlantiradi.

b) Boshlang'ich  $y|_{x=x_0} = y_0$  shart har qanday bo'lganda ham ixtiyoriy o'zgarmas  $C$  ning shunday  $C_0$  qiymatini topish mumkinki,  $y = j(x, C_0)$  funksiya berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiradi. Ya'ni  $y_0 = j(x_0, C_0)$ .

Ta'rif. Differensial tenglamaning umumiy yechimidan ixtiyoriy o'zgarmaning mumkin bo'lgan qiymatlarida xosil qilinadigan yechimlar xususiy yechimlar deyiladi. Umumiy yechim geometrik jihatdan bitta  $C$  parametrga bog'liq integrall egri chiziqlar oilasi ko'rinishida tasvirlanadi. Xususiy yechim bu oilaning integral chiziqlaridan biridir. Differensial tenglamaning yechimlarini topishning yagona usuli mavjud emas, shuning uchun differensial tenglamalarni turlarga ajratib ularni yechishning xususiy usullari topilgan.

## 1.2. Differensial tenglamaning turlari.

### 1. O'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamalar.

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad \int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

Misol.  $x dx + y dy = 0$

$$\int x dx + \int y dy = C \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

$x^2 + y^2 = C^2$  bu markazi koordinata boshida, radiusi  $C$  bo'lgan konsentrik aylanalar oilasidan iborat.

Ixtiyoriy o'zgarmasni berilgan tenglama uchun qulay bo'lgan istalgan ko'rinishda olish mumkin.

### 2. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama.

$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y) = 0$  ko'rinishdagi tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir.

$N_1(y) \cdot M_2(x) \neq 0$  ifodaga bo'lib, uni o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga keltirish mumkin.

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0$$

buni integrallab umumiy integralni xosil qilamiz.

Ushbu

$$y' = f_1(x) f_2(y)$$

ko'rinishdagi tenglama ham o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir.

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \quad dy = f_1(x) f_2(y) dx$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx, \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C \quad \text{bo'ladi.}$$

$$\text{Misol. } x(1+y^3)dx - y^2(1+x^2)dy = 0$$

Yechish. Tenglamani  $(1+x^2)(1+y^3) \neq 0$  ga bo'lib, o'zgaruvchilarni ajratamiz.

$$\frac{x}{1+x^2} dx - \frac{y^2}{1+y^3} dy = 0$$

Ifodani integrallab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{1}{2} \ln|1+x^2| - \frac{1}{3} \ln|1+y^3| = \frac{1}{6} \ln C$$

Ushbu ifodani potensirlab, umumiy yechimni xosil qilamiz:

$$\frac{(1+x^2)^3}{(1+y^3)^2} = C$$

### 3. Bir jinsli differensial tenglama.

Bir jinsli tenglamaga ta'rif berishdan oldi avval bir jinsli funksiyaga ta'rif beramiz.

Ta'rif. Agar  $f(x,y)$  funksiyada  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilarni mos ravishda  $tx$  va  $ty$  ga almashtirganda (bu yerda  $t$ -ixtiyoriy parametr)  $t^n$  ga ko'paytirilganda yana o'sha funksiya xosil bo'lsa, ya'ni  $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$  shart bajarilsa,  $f(x,y)$  funksiya  $n$  o'lchovli bir jinsli funksiya deb ataladi.

Misol.  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  funksiya bir o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki

$$f(tx,ty) = \sqrt{t^2 x^2 + t^2 y^2} = t \sqrt{x^2 + y^2} = t f(x,y)$$

$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$  funksiya nol o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki

$$f(tx,ty)=\frac{tx-ty}{tx+ty}=\frac{x-y}{x+y} \quad \text{ya'ni} \quad f(tx,ty)=t^0 f(x,y).$$

Ta'rif. Agar birinchi tartibli  $y'=f(x,y)$  differensial tenglamaning o'ng tomoni  $x$  va  $y$  ga nisbatan nol o'lchovli bir jinsli funksiya bo'lsa, bunday tenglama bir jinsli tenglama deyiladi ya'ni  $y'=j\left(\frac{y}{x}\right)$  ko'rinishda yozish mumkin.

Bir jinsli tenglamani  $\frac{y}{x}=u(x)$  o'rniga qo'yish yordamida o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltirish mumkin, u hoda  $y=ux$ ; bu yerda  $u$ -yngi izlanayotgan funksiya.  $y=ux$  ni differensiallab,  $y'=u'x+u$  ni xosil qilamiz.  $y$  va  $y'$  ning qiymatlarini  $y'=j\left(\frac{y}{x}\right)$  tenglamaga qo'yib, quyidagini xosil qilamiz.

Ushbu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani oldik:

$$u'x = j(u) - u \quad \text{yoki differensiallarda: } xdu = (j(u) - u)dx \quad \text{o'zgaruvchilarni}$$

$$\text{ajratamiz: } \int \frac{du}{j(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Integrallasdan keyin  $u$  o'rniga  $\frac{y}{x}$  nisbatni qo'yib,  $y'=j\left(\frac{y}{x}\right)$  tenglamaning umumiy yechimini (integralini) xosil qilamiz.

Ushbu  $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$  tenglamada  $M(x,y), N(x,y)$  lar bir xil o'lchovli bir jinsli funksiyalar bo'lgandagina bir jinsli tenglama bo'ladi. Bu ikkita bir xil o'lchovli bir jinsli funksiyalar nisbati nol o'lchovli funksiya bo'lishi kelib chiqadi.

Misol.  $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$  tenglama bir jinslidir, chunki

$y^2 - 3x^2$  va  $2xy$  funksiyalar ikki o'lchovli bir jinslidir.

Tenglamani yechishga kirishishdan avval uni xosilaga nisbatan yechilgan ko'rinishga keltirish kerak:

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = \frac{\frac{2xy}{x^2}}{\frac{3x^2 - y^2}{x^2}} = \frac{2\frac{y}{x}}{3 - \frac{y^2}{x^2}}.$$

$$\frac{y}{x} = u \quad y = ux \quad y' = u'x + u \quad u'x + u = \frac{2u}{3 - u^2}$$

$$u'x = \frac{2u}{3 - u^2} - u = \frac{2u - 3u - u^3}{3 - u^2} = -\frac{u + u^3}{3 - u^2}$$

$$u'x = \frac{-u(u^2 + 1)}{-(u^2 - 3)} \quad u'x = \frac{u(u^2 + 1)}{(u^2 - 3)} = \int \frac{(u^2 - 3)}{u(u^2 + 1)} du = \int \frac{1}{x} dx + C$$

$$(y^2 + x^2)^2 = y^3 x^2 C \text{ ga kelamiz.}$$

4. Bir jinsli tenglamalarga keltiriladigan tenglamalar.

Bir jinsli tenglamalarga quyidagi ko'rinishdagi tenglamalar keltiriladi.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \quad \text{agar } c = c_1 = 0 \text{ bo'lsa, tenglama bir jinsli bo'ladi.}$$

$C \neq 0, C_1 \neq 0$  yoki ulardan biri noldan farqli bo'lsa, quyidagicha almashtirish kiritamiz:

$$\begin{cases} x = x_1 + a \\ y = y_1 + b \end{cases} \quad \text{u holda} \quad dx = dx_1, dy = dy_1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}.$$

Bularni berilgan tenglamaga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + aa + by_1 + bb + c}{a_1x_1 + a_1a + b_1y_1 + b_1b + c_1} = \frac{(ax_1 + by_1) + (aa + bb + c)}{(a_1x_1 + b_1y_1) + (a_1a + b_1b + c_1)}$$

Quyidagi tengliklar bajarilsa, yuqoridagi tenglama bir jinsli bo'ladi.

$$\begin{cases} aa + bb + c = 0 \\ a_1a + b_1b + c_1 = 0 \end{cases}$$

Bu sistemani  $a$  va  $b$  ga nisbatan yechib,  $a$  va  $b$  ning o'rniga qo'yib, berilgan tenglamani bir jinsli bo'ladigan qiymatlarini aniqlaymiz:

Agar  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$  bo'lsa, quyidagi sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Bunday holda berilgan tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga  $z=ax+by$  o'rniga qo'yish orqali keltiriladi.

Agar  $\Delta \neq 0$  va  $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$  bo'lsin. Bu holda  $x = x - a, h = y - b$  almashtirish bilan  $c=c_1=0$  bo'lgan holga keltiriladi.

Misol.  $y' = \frac{x+y-3}{x-y-1}$  tenglamaning umumiy entegralini toping.

Yechish. Determinant  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$  quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$\begin{cases} x = x_1 + a \\ y = y_1 + b \end{cases}$  u holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + a + b - 3}{x_1 - y_1 + a - b - 1}; \begin{cases} a + b - 3 = 0 \\ a - b - 1 = 0 \end{cases}, \quad a = 2, b = 1$$

demak, bir jinsli  $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$  tenglamaga ega bo'lamiz, uni  $\frac{y_1}{x_1} = u$  o'rniga

qo'yish yordamida tozlamiz:  $y_1 = ux_1, y_1' = u'x_1 + u, u'x + u = \frac{1+u}{1-u}$

soddalashtirishdan so'ng o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz:

$\frac{1-u}{1+u} du = \frac{1}{x_1} dx_1$  tenglamani integrallab, topamiz:

$$\arctgu - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln|x_1| + \ln c_1 \text{ yoki } cx_1 \sqrt{1+u^2} = e^{\arctgu} \text{ endi } \frac{y_1}{x_1} = u \text{ ni}$$

o'rniga qo'ysak, quyidagiga ega bo'lamiz:  $c\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\arctg \frac{y_1}{x_1}}$  nihoyat

$x_1 = x - 2, y_1 = y - 1$  almashtirishlarni bajarib,  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilarga o'tamiz:

$$c\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\arctg \frac{y-1}{x-2}}$$

5. Chiziqli differensial tenglama.



Ta'rif. Noma'lum funksiya va uning xosilasiga nisbatan chiziqli (birinchi darajali) bo'lgan tenglamalar birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar deyiladi. Chiziqli differensial tenglamaning ko'rinishi quyidagicha:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Bu yerda  $P(x)$  va  $Q(x)$  lar  $x$  ning noma'lum uzluksiz funksiyalaridir, yoki o'zgarmasdir.

Agar tenglamaning o'ng tomoni  $Q(x)=0$  bo'lsa, berilgan chiziqli tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo'lib qoladi.  $Q(x) \neq 0$  deb faraz qilamiz.

Berilgan tenglamaning yechimini  $x$  ning ikkita funksiyasi ko'paytmasi ko'rinishda izlaymiz:  $y=u(x)v(x)$ . Bu funksiyalarning birinchi ixtiyoriy qilib olish mumkin, ikkinchisi esa berilgan chiziqli tenglama asosida aniqlanadi.

$y=u(x)v(x)$  dan  $y'$  ni hisoblaymiz:  $y' = u'v + v'u$   $y$  va  $y'$  ni berilga chiziqli tenglamaga qo'yamiz, natijada quyidagi ko'rinishga keladi.

$u'v + u(v' + Pv)u = Q$  funksiyalardan birini ixtiyoriy tanlab olish mumkin bo'lgani uchun  $v$  funksiyani qavs ichida turgan ifoda nolga teng bo'ladigan qilib olamiz, ya'ni  $v' + Pv = 0$  bo'lishini talab qilamiz. U hoda  $u$  funksiyani topish uchun  $v' + Pv = 0$  ligidan  $u'v = Q$  tenglamani xosil qilamiz. Dastlab, esa

$v' + Pv = 0$  tenglamadan  $v$  ni topamiz.  $\frac{dv}{v} = -pdx$   $\ln v = -\int pdx + \ln c$ , bu

yerda  $v = e^{-\int pdx}$  ni olamiz. Bu yerda  $\int Pdx$  birorta boshlang'ich funksiya  $v$  ning topilgan qiymatini  $u'v = Q$  tenglamaga qo'yib,  $u$  funksiya uchun

o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani xosil qilamiz:  $u'e^{\int Pdx} = Q$

Bu yechamiz:  $du = Qe^{\int P(x)dx} dx$

$$u = \int Qe^{\int P(x)dx} dx + c$$

topilgan  $u$  va  $v$  ning  $x$  orqali ifodalarini  $y=uv$  ga qo'yib, uzil kesil umumiy yechimni hosil qilamiz:

$$y = e^{-\int P(x)dx} (c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx)$$

Chiziqli differensial tenglamalarni bunday yechish usuli o'rniga qo'yish usuli deyiladi.

Misol. Ushbu chiziqli tenglamani o'rniga qo'yish usuli bilan yeching.

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$$

Yechish.  $y=uv$  deymiz,  $y' = u'v + v'u$  bo'lib, quyidagiga egamiz:

$$y' = u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{\sin x}{x} \quad \text{yoki} \quad u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = \frac{\sin x}{x} \quad v' + \frac{v}{x} = 0 \quad \text{bo'lsin, u holda}$$

$$u'v = \frac{\sin x}{x} \quad \text{bulardan birinchisini yechamiz:}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \quad \ln v = \ln x, \quad \text{ya'ni} \quad \int du = \int \sin x dx \quad \text{demak,} \quad u = -\cos x + c$$

Uzil-kesil quyidagini hosilqilamiz:

$$y = uv = \frac{1}{x}(c - \cos x).$$

Chiziqli differensial tenglamalarni yana bir usul ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli bilan yechiladi. Bu usulning hisoblash texnikasi quyidagicha.

Bu usulda bir jinsli bo'lmagan  $y' + P(x)y = Q(x)$  tenglamani ( $Q(x) \neq 0$ )

yechimini izlash o'rniga dastlab, unga mos bir jinsli  $y' + P(x)y = 0$

tenglamani yechamiz, bu tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Uning

umumiy yechimi:  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \frac{dy}{y} = -P(x)dx, y = ce^{-\int P(x)dx}$

Bu yerda  $c$  o'zgarmasni  $c=c(x)$  funksiya deb qaraydigan bo'lsak, u holda  $c(x)$  formulani shunday tanlab olish kerakki,  $y = ce^{-\int P(x)dx}$  funksiya bir jinsli bo'lmagan berilgan chiziqli tenglamaning yechimi bo'lar ekan.

$C(x)$  funksiyaning topish uchun  $y = c(x)e^{-\int P(x)dx}$  funksiyaning hosilasini topamiz,  $y$  va  $y'$  ning ifodalarini berilgan chiziqli tenglamaga qo'yamiz, ya'ni

$$y' = c'(x)e^{-\int P(x)dx} - c(x)e^{-\int P(x)dx} \quad \text{bo'lgani uchun berilgan chiziqli tenglama}$$

$$\text{ushbu tenglamaga o'tadi:} \quad c'(x)e^{-\int P(x)dx} - c(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)c(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$c'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$  Biz yana o'zgaruvchilari ajraladigan va noma'lum funksiya  $c(x)$  bo'lgan tenglamani hal qilishga keldik. Oxirgi tenglikdan

$$c'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} \quad dc(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \quad c(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c_1$$

kelib chiqadi. Bu tenglik  $c'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$  ning umumiy yechimi bo'ladi.  $C(x)$  ning tanlangan ifodasini  $y = c(x)e^{-\int P(x)dx}$  tenglikka qo'yib, bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamaning izlanayotgan yechimini xosil qilamiz:

$$y = c(x)e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c_1 \right)$$

Demak, o'rniga qo'yish usulida ham, ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usulida ham bir xil bo'lar ekan.

Bu usulning nomi  $c$  o'zgarmasni  $x$  ning funksiyasi deb qarab, uni variatsiyalaganimizdan (o'zgartirganimizdan) kelib chiqqan.

Misol.  $y' - y \cot x = \sin x$  ushbu chiziqli tenglamani ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli bilan yeching.  $y' - y \cot x = 0$ ,  $y' = y \cot x$ ,

$$\frac{dy}{y} = \cot x dx; \quad \int \frac{1}{y} dy = \int \cot x dx, \quad \ln y = \ln |\sin x| + c, \quad \ln y = \ln |\sin x| + \ln c_1,$$

$$y = c_1 \sin x \quad c_1 = c_1(x) \quad y = c_1(x) \sin x, \quad y' = c_1'(x) \sin x + c_1(x) \cos x$$

$$c_1'(x) \sin x + c_1(x) \cos x - c_1(x) \cos x = \sin x, \quad c_1'(x) = 1, \quad \int dc_1 = \int dx, \quad y = (x+c) \sin x$$

## 6. Bernulli tenglamasi.

$y' + Py = Qy^n$  ko'rinisdagi tenglamani qaraymiz, bunda  $P$  va  $Q$  lar  $x$  ning

Uzluksiz funksiyalari hamda  $n \neq 0$  va  $n \neq 1$ . Bu tenglama Bernulli tenglamasi deb ataladi va u quyidagicha almashtirish yordamida chiziqli tenglamaga keltiriladi. Tenglamaning barcha hadlarini  $y^n$  ga bo'lamiz:

$$y^{-n} y' + P y^{-n+1} = Q$$

Endi  $z = y^{-n+1}$  almashtirish bajaramiz. U hoda  $z' = (-n+1)y^{-n} y'$ .

Bu qiymatlarni berilgan tenglamaga qo'ysak,  $z' + (-n+1)Pz = (-n+1)Q$  chiziqli tenglama hosil bo'ladi. B uning umumiy integralini topib,  $z$  o'rniga  $y^{-n+1}$  ifodani qo'yib, Bernulli tenglamasining umumiy integralini topamiz.

Eslatma. Bernulli tenglamasida  $n=0$  bo'lganda chiziqli tenglama,  $n=1$  bo'lganda esa, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama xosil bo'ladi.

Bernulli tenglamsini bevosita  $y=uv$  o'rniga qo'yish orqali yechish ham mumkin.

## 7. Rikkati tenglamasi.

Ba'zi tenglamalar o'zgaruvchini almashtirish yordamida Bernulli tenglamasiga keltiriladi. Masalan, Rikkati tenglamasi, uning bitta xususiy yechimi ma'lum bo'lganda Bernulli tenglamasiga keltiriladi. Ushbu

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x)$$

ko'rinishdagi tenglama Rikkati tenglamasi deyiladi.

$y = y_1(x)$  funksiya Rikkati tenglamasining xususiy yechimi bo'lsin. Agar

$y = y_1(x) + z$  almashtirishni bajarsak,

$$y' = y_1'(x) + z' \quad y_1'(x) + z' + P(x)(y_1 + z) + Q(x)(y_1 + z)^2 = f(x) \text{ kelib chiqadi.}$$

$$y_1' + P(x)y_1 + Q(x)y_1^2 = f(x) \text{ ekanligini e'tiborga olib, ushbu}$$

$$z' + (P(x) + 2Q(x)y_1)z + Q(x)z^2 = 0 \text{ Bernulli tenglamasi xosil bo'ladi.}$$

## 2-§. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.

### Chiziqli differensial tenglamalarning normal sistemasi. Mavjudlik va yagonalik teoremasi.

Differensial tenglamalarning normal sistemasida  $f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n)$  funksiyalar  $x_1, x_2, \dots, x_n$  argumentlari bo'yicha chiziqli, ya'ni  $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + b_i(t), \quad i=1, 2, \dots, n$

Ko'rinishda bo'lsa, biz normal sistemalarning muhim xususiy ko'rinishiga ega bo'lamiz. Bunday sistemalarni chiziqli differensial tenglamalarning normal sistemasi, qisqacha, chiziqli sistema deb ataladi.

Ushbu

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + b_i(t), \quad i=1,2,\dots,n$$

(5)

Sistema chiziqli differensial tenglamalarning normal sistemasi deyiladi.

Bunda  $a_{ij}(t)$  funksiyalar sistemaning koeffitsiyentlari,  $b_i(t)$  funksiyalar esa ozod hadlari deyiladi. Barcha  $a_{ij}(t)$ ,  $b_i(t)$ ,  $i,j=1,2,\dots,n$  funksiyalar biror  $I$  intervalda aniqlangan va uzluksiz. Agar  $a_{ij}(t) = a_{ij} = \text{const}$  bo'lsa, u holda (5) sistema chiziqli o'zgarmas koeffitsiyentli deb yuritiladi.

Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{pmatrix} = (b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t))^*$$

(bunda  $*$  belgi transponirlashni anglatadi). Shu  $A(t)$  matritsa va  $b(t)$  ustunvektor yordamida (5) sistema

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t) \quad (6)$$

ko'rinishda yoziladi. Agar sistema (6) ko'rinishda yozilgan bo'lsa, u vektor-matritsa ko'rinishda berilgan deyiladi.

Agar  $b(t) \neq 0, t \in I$  munosabat o'rinli bo'lsa, (6) tenglama chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglama deyiladi.

Ushbu

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

(7)

tenglama esa chiziqli bir jinsli bo'lmagan (6) tenglamaga mos chiziqli bir jinsli tenglama deyiladi.

Agar  $A(t)$  matritsaning barcha elementlari, ya'ni  $a_{ij}(t)$ ,  $i, j=1, 2, \dots, n$  funksiyalar biror  $I$  intervalda uzluksiz bo'lsa, u holda  $A(t)$  matritsa shu  $I$  intervalda uzluksiz deyiladi. Yana  $b(t)$  vektorning koordinatalari biror  $I$  intervalda uzluksiz bo'lganda, shu  $b(t)$  vektor  $I$  intervalda uzluksiz deb yuritiladi.

Teorema: Bizga (6) vektor-matritsali chiziqli sistema berilgan bo'lib,  $A(t)$  matritsa va  $b(t)$  vektor-funksiya biror  $I$  intervalda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. U holda ixtiyoriy boshlang'ich qiymatlar

$$t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t_0 \in I \text{ yoki qisqacha } t_0, x_0, t_0 \in I \quad (8)$$

uchun (6) tenglamaning shu boshlang'ich qiymatlarga ega bo'lgan va  $I$  intervalda aniqlangan yagona yechim mavjud.

Xususan, agar  $A(t)$  va  $b(t)$  lar  $-\infty < t < \infty$  intervalda uzluksiz bo'lsa, u holda ham ixtiyoriy (8) boshlang'ich qiymatlarga ega bo'lgan va shu  $-\infty < t < \infty$  Intervalda aniqlangan yagona yechim mavjud bo'ladi.

Isbot. Bu teoremaning isboti yuqorida keltirilgan Koshi teoremasidan kelib chiqadi. Undagi  $f(t, x)$  vektor-funksiya ko'rilayotgan holda  $f(t, x) = A(t)x + b(t)$

Vektor funksiyadan iborat. Ravshanki,

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = A(t) \left( \frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x_j} = a_{ij}(t), i, j = 1, 2, \dots, n \right)$$

va  $A(t)$  matritsaning barcha  $a_{ij}(t)$  elementlari  $I$  intervalda uzluksiz.

Chiziqli sistemalar uchun yechimning aniqlanish intervali  $A(t)$  va  $b(t)$  larning aniqlanish intervali bilan bi xil bo'ladi.

Demak, sh  $I$  interval yechim mavjudligining maksimal intervali bo'ladi.

Boshqacha aytganda (5) sistemaning yechimi  $I$  intervalda aniqlangan davomsiz yechim bo'ladi. Bu chiziqli sistemalarning muhim xossalardan biridir.

## Chiziqli bir jinsli o'zgaruvchi koeffitsiyentli differensial tenglamalar sistemi.

Differensial tenglamalarning

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j, \quad i = \overline{1, n} \quad (9)$$

sistemi  $a_{ij}(t)$  o'zgaruvchi koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli sistema deyiladi. (9)

sistemi vektor ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (10)$$

bu erda

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

(10) sistemaning  $n$  ta chiziqli erkli echimlari chiziqli bir jinsli sistemaning *fundamental yechimlari sistemasini* tashkil etadi.

Har bir ustuni (10) vektor tenglamaning yechimlaridan iborat bo'lgan

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (11)$$

matritsa shu *tenglamaning integral matritsasi* yoki *fundamental matritsasi* deyiladi. Bu matritsa ba'zida *Vronskiy matritsasi* deb ham yuritiladi. Agar  $X(t)$  fundamental matritsa biror  $t=t_0$  nuqtada birlik matritsaga teng bo'lsa, ya'ni  $x(t_0) = E$  bo'lsa, u holda  $X(t)$  matritsa *matritsant* deyiladi.

(10) sistemaning xususiy yechimlaridan tuzilgan

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \quad (12)$$

determinant *Vronskiy determinanti* deyiladi.

Har qanday (10) tenglama  $j_1(t), j_2(t), \dots, j_n(t)$  fundamental yechimlar sistemasiga ega.

(10) sistemaning ixtiyoriy yechimi fundamental sistema yechimlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi.

(10) sistemaning ixtiyoriy  $n+1$  ta yechimi chiziqli bog'liq bo'ladi.

(10) tenglama  $j_1(t), j_2(t), \dots, j_n(t)$  yechimlarining sistemasi fundamental sistema bo'lishi uchun uning Vronskiy determinanti biror  $t$  nuqtada noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli. Agar (10) tenglama yechimlari sistemasining Vronskiy determinanti biror nuqtada nolga teng bo'lsa, u holda u hamma  $t$  larda nolga teng bo'ladi. (10) tenglama yechimlari sistemasining Vronskiy determinanti uchun *Liuvill-Ostrogradskiy formulasi* o'rinli:

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t a(r) dr\right),$$

$$\text{bu yerda } a(t) = \text{Sp } A(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t).$$

(10) sistemaning umumiy yechimi  $x = X(t)C$  ko'rinishda topiladi, bu erda

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} - \text{ixtiyoriy o'zgarmas vektor.}$$

**Misol. 1.**  $\frac{dx}{dt} = \frac{y}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = 3x + \frac{3}{t}y$  tenglamalar sistemasining  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}, \quad x_1(t) = 1,$

$y_1(t) = -1, \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = 1, \quad y_2(t) = 3$  yechimlaridan tuzilgan Vronskiy determinantini yozing.

Liuvill-Ostrogradskiy formulasidan foydalanamiz. Bizda

$$t_0 = 1, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t^2} \\ 3 & \frac{3}{t} \end{pmatrix}, \quad \text{Sp}A(t) = \frac{3}{t}.$$



Endi  $W(1) = \begin{vmatrix} x_1(1) & x_2(1) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$  va  $\int_1^t SpA(r)dr = \int_1^t \frac{3}{t} dt = t^3$  ekanligini

hisobga olsak, berilgan sistemaning Vronskiy determinanti  $W(t) = 4t^3$  ga teng bo'ladi.

## 2. Ushbu

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t(1-t)x + (t^3 - t^2 + t + 1)y \\ \frac{dy}{dt} = (1-t)x + (t^2 - t + 1)y \end{cases}$$

chiziqli sistemaning bitta  $x(t) = 1 + t^2$ ,  $y(t) = t$  yechimini bilgan holda shu sistemaning umumiy yechimini toping.

$x = j(t)$ ,  $y = y(t)$  – funksiyalar berilgan sistemaning  $j(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$  boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo'lsin. U holda Liuvill-Ostrogradskiy formulasiga binoan

$$\begin{vmatrix} 1+t^2 & j(t) \\ t & y(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \exp \left( \int_0^t [t(1-t) + (t^2 - t + 1)] dt \right) = e^{\int_0^t dt} = e^t$$

bo'ladi. Bu yerdan  $(1+t^2)y(t) - tj(t) = e^t$ . Bu tenglikni hisobga olsak, sistemaning ikkinchi tenglamasidan

$$y'(t) = j(t) - ty(t) + e^t$$

tenglik,  $t \neq 0$  bo'lganda esa

$$ty'(t) = y(t) + (t-1)e^t$$

tenglik kelib chiqadi. Endi  $y(0) = 1$  ekanligini e'tiborga olib, topamiz:

$$j(t) = t^2 e^t, \quad y(t) = e^t.$$

Demak, sistemaning fundamental matritsasi

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2 & t^2 e^t \\ t & e^t \end{pmatrix}$$

va berilgan sistemaning umumiy yechimi  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ , ya'ni

$x(t) = C_1(1+t^2) + C_2 t^2 e^t$ ,  $y(t) = C_1 t + C_2 e^t$  ko'rinishda bo'ladi, bu erda  $C_1$  va  $C_2$  – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

## Chiziqli o'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli differensial tenglamalar sistemasi.

(7) tenglamada  $A$  matritsa o'zgarmas bo'lsin. Bu holda biz ushbu

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \text{const} \quad (21)$$

Chiziqli o'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli differensial tenglama bo'lishini ko'ramiz.

Agar  $L = A - pE$ ,  $p = \frac{d}{dt}$  operatoridan foydalansak, (21) tenglamani ushbu

$$(A - pE)x = 0 \quad (22)$$

Ko'rinishda yozish mumkin. Bunda  $E$  - birlik matritsa. Ravshanki,  $A - pE = L(p)$  va bu  $L(p)$  operator  $p$  ga nisbatan  $n$ - tartibli matritsadan iborat. Uni koordinatalarda yozmiz:

$$L(p) = \begin{pmatrix} a_{11} - p & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - p & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - p \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Demak, (21) ni yana

$$L(p)x = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin. Endi  $\det L(p) = D(p)$  deb belgilaymiz. Shu  $D(p)$  determinant yordamida tuzilgan tenglama (21) tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi. Keyingi mulohazalarimiz xarakteristik tenglamaning ildizlariga qarab (21) tenglamaning  $n$  ta chiziqli erkli vektor yechimlarini topishga qaratilgan bo'ladi.

Qulaylik uchun ikki noma'lumli o'zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar sistemasini ko'raylik.

Ikki noma'lumli  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  funksiyalar uchun chiziqli sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (13)$$

ko`rinishga ega bo`lib, umuman olganda,  $\alpha_{ij}$  koeffitsiyentlar erkli o`zgaruvchi  $t$  ning uzluksiz funksiyalaridir.

(13) sistemani integrallash usullaridan biri, bir noma`lumli ikkinchi darajali differensial tenglamaga keltirishdir. (13) sistemaning birinchi tenglamasi ikkala qismini  $x$  bo`yicha differensiallaymiz,

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \alpha_{11} \frac{dx_1}{dt} + \alpha_{12} \frac{dx_2}{dt} + \frac{d\alpha_{11}}{dt} x_1 + \frac{d\alpha_{12}}{dt} x_2$$

tenglamada  $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}$  hosilalar sistemadagi ifodasi bilan almashtirilganda,

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \alpha_{11}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2) + \alpha_{21}(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) + \frac{d\alpha_{11}}{dt}x_1 + \frac{d\alpha_{12}}{dt}x_2$$

tenglama o`ng qismida  $x_1$  va  $x_2$  qatnashgan hadlar guruhlanganda

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = b_1 x_1 + b_2 x_2 \quad (14)$$

ko`rinishni oladi, bu yerda  $\beta_1$  va  $\beta_2$  koeffitsiyentlar  $\alpha_{ij}$  koeffitsiyentlar va ularning hosilalari orqali aniq va ravshan ifodalanadi.

(14) tenglamani (13) sistemaning birinchi tenglamasi bilan birgalikda qarab,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} = b_1x_1 + b_2x_2 \end{cases} \quad (15)$$

sistemani olamiz.

Erkli o`zgaruvchi  $x$  ning qaralayolgan sohasida  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$  muno-sabat

o`rinli bo`lsa, (15) sistemani  $x_1$  va  $x_2$  ga nisbatan yechish, ya`ni

$\frac{dx_1}{dt}$  va  $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$  lar orqali ifodalash mumkin. Natijada,

$$x_1 = a \frac{dx_1}{dt} + b \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

(16)

$$x_2 = c \cdot \frac{dx_1}{dt} + d \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

(17)

tenglamalarga ega bo'lamiz. (16) tenglama yagona  $x_1(t)$  noma'lum funktsiyali, ikkinchi tartibli chiziqli tenglamadir. Agar dastlabki (13) sistemada  $\alpha_{ij}$  koeffitsiyentlar o'zgarmas bo'lsa, (16) tenglama ham o'zgarmas koeffitsiyentli bo'lib, ushbu tenglamani yuqorida ko'rilgan qulay usulda yechish mumkin.

Misol. Sistemani yeching.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Birinchi tenglamani ikkala qismini differensiallaymiz, natijada

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{dx_1}{dt} - 2 \cdot \frac{dx_2}{dt} = -(-x_1 - 2x_2) - 2 \cdot (2x_1 + 3x_2) = -3x_1 - 4x_2.$$

sistemaning birinchi tenglamasi bilan birgalikda

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_2 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -3x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

ko'rinishni oladi.

Oxirgi sistemani  $x_1$  va  $x_2$  larga nisbatan yechamiz:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \frac{dx_1}{dt} - \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ x_2 = -\frac{3}{2} \frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 x_1}{dt^2} \end{cases}$$

Natijada, noma'lum  $x_1(t)$  funksiyaga nisbatan

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - 2 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0$$

tenglama hosil boladi. Ushbu tenglamani ma'lum usulda yechamiz va

$$x_1 = (c_1 + c_2 t) e^t$$

funksiyani olamiz. Oxirgi sistema ikkinchi tenglamasi yordamida

$$x_2 = -\frac{1}{2} (2c_1 + c_2 + 2c_2 t) \cdot e^t$$

yechim ham kelib chiqadi.

Quyidagi almashtirishlarni kiritamiz:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Yuqoridagi almashtirishlar yordamida, (13) sistemani ixcham

$$\dot{X} = A \cdot X \tag{18}$$

matritsali tenglama ko'rinishida yozish mumkin.

Masalan, quyidagi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

sistemaning matritsa ko`rinishi

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(13) sistemaning  $\alpha_{ij}$  koeffitsiyentlari o`zgarmas bo`lsa, sistemani yechishda chiziqli algebra usullarini qo`llash imkoni mavjud.

Dastlab boshida (13) sistema Trivial (nol)  $x_1(t)=0$ ,  $x_2(t)=0$  yechimlarga ham ega ekanligini tekshirib ko`rish qiyin emas. Sistemamng notrivial (nolmas)

yechimlarini  $x_1 = P_1 e^{\lambda t}$ ,  $x_2 = P_2 e^{\lambda t}$  yoki matrisa  $x = P e^{\lambda t}$ , bu yerda,  $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$

ko`rinishida qidiramiz.

$X = \lambda P \cdot e^{\lambda t}$  bo`lganidan,  $X$  va  $t$  larni (18) tenglamaga qo`yib,  $e^{\lambda t}$  ga qisqartirilgandan so`ng,  $\lambda$ ,  $P$  juftliklarni topish uchun matritsali

$$A \cdot P = \lambda \cdot P \quad (19)$$

tenglamani olamiz. (19) tenglamani yechish  $A$  matritsaning xos  $P$  vektorlari va  $t$  qiymatlarini topish masalasidir.  $A$  matritsaning xos qiymatlari

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (20)$$

xarakteristik tenglama ildizlari bo`lib, so`ngra xos qiymatlarining har biriga tegishli xos vektorlar quriladi.

$\lambda_1$  va  $\lambda_2$  sonlar (20) xarakteristik tenglamaning turli haqiqiy ildizlari bo`lsin. Agar  $P_1$  vektor  $\lambda_1$  xos qiymatga tegishli biror-bir xos vektor,  $P_2$  esa  $\lambda_2$  xos qiymatga mos biror xos vektor bo`lsa, u holda (18) tenglama-ning ikki xususiy yechimlari  $X_1 = P_1 e^{\lambda_1 t}$ ,  $X_2 = P_2 e^{\lambda_2 t}$  formulalardan aniqlanadi.

Umumiy yechim

$$X = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2,$$

ko`rinishga ega, bu yerda  $C_1$  va  $C_2$  ixtiyoriy o`zgarmaslar.

Agar  $\lambda_1 = \lambda_2$  bo`lsa, unda ikki  $X_1$  va  $X_2$  xususiy yechimlarning o`rniga birgina  $X_1$  yechimni olamiz. Ushbu holda ikki xususiy yechim sifatida  $X_1$  va  $t \cdot X_1$  lar tanlanadi.

Agarda  $t_1$  va  $t_2$  sonlar haqiqiy sonlar bo`lmasa, u holda  $\lambda_1 = \alpha + \beta \cdot i$ ,  $\lambda_2 = \alpha - \beta \cdot i$  - bu yerda  $\beta \neq 0$ .  $\lambda_1$  va  $\lambda_2$  kompleks xos qiymatlarga mos xos vektorlar quriladi. Xususiy  $x_1 = P_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$ ,  $x_2 = P_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$  yechimlar ham o`zaro qo`shma kompleks bo`ladi. Haqiqiy yechimlarni olish uchun  $X_1$  va  $X_2$  larning chiziqli kombinatsiyasini quyidagi ko`rinishda

$$X_{10} = X_1 + X_2, \quad X_{20} = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)i \quad \text{quramiz.}$$

Misol. Sistemani yeching.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 4x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -3x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Ushbu sistema uchun

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

A matritsaning xos qiymatlari  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 6$  va ularga tegishli xos  $P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  vektorlar qurilgan

Xususiy yechimlar  $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^t$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$

Matritsa ko`rinishda umumiy yechim  $X = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{6t}$

ko`rinishda yozilib, undan esa

$x_1(t) = -2C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{6t}$ ,  $x_2(t) = 3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{6t}$  umumiy yechimlar olinadi.

Endi umumiy holda chiziqli o'zgaras koefitsiyentli bir jinsli differensial tenglamalar sistemasini ko'raylik.

### **Chiziqli o'zgaras koefitsiyentli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar sistemi.**

Chiziqli bir jinsli bo'lmagan sistemalarda  $A$  matritsa o'zgaras bo'lgan holni ko'rib chiqmoqdamiz. Bizga ushbu

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b(t) \quad A = \text{const}$$

(24)

Chiziqli o'zgaras koefitsiyentli (o'zgaras matritsali) vektor-matritsali

tenglama berilgan bo'lsin. Unda  $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$  vektor-funksiya biror  $I$

intervalda aniqlangan va uzluksiz funksiya. Bu holda (24) sistemaga mos bir jinsli sistemaning umumiy yechimiga ko'ra Lagranjning o'zgarasni variatsiyalash usuli yordamida bir jinsli bo'lmagan sistemaning umumiy yechimini topish mumkin. Bundan tashqari (24) sistemani integrallash uchun Koshi formulasini qo'llash mumkin.

Agar bir jinsli bo'lmagan sistemada  $b(t)$  vektor-funksiya ixtiyoriy bo'lmay, uning har bir koordinatasi kvaziko'phaddan iborat bo'lsa, u holda bir jinsli bo'lmagan sistemaning xususiy yechimini topish va quyidagi teoremdan foydalanib umumiy yechimni yozish

Mumkin.



Teorema: (umumiy yechi haqida). Chiziqli bir jinsli bo'lmagan sistemaning umumiy yechimi uning biror xususiy yechimi bilan mos bir jinsli sistema umumiy yechimining yig'indisidan iborat.

Shuning uchun biz xususiy yechimni topish masalasi bilan shug'ullanamiz:

$b(t)$  vektor-funksiyaning har bir  $b_i(t)$ ,  $i=1,2,\dots,n$  koordinatasi kvazi ko'phad bo'lsin, ya'ni

$$b_i(t) = b_i^{(1)}(t)e^{l_1 t} + b_i^{(2)}(t)e^{l_2 t} + \dots + b_i^{(m)}(t)e^{l_m t}$$

Bunda  $l_1, l_2, \dots, l_m$  lar o'zaro har xil haqiqiy kompleks sonlar,  $b_i^{(k)}(t)$ ,  $k=1,2,\dots,m$ -biror ko'phad.

Xususiy vektor-yechimning ko'rinishini yozish uchun  $\max(m_1, \dots, m_n) = m$  deylik.

1)  $l$  son mos bir jinsli sistemaning matritsasi uchun xos son emas, ya'ni  $L(l) \neq 0$  Bu holda xususiy yechim quyidagi

$$y_i(t) = x_i(t) = Q_m^{(i)}(t)e^{lt}, \quad i=1,2,\dots,n$$

(25)  $(Q_m^{(i)}(t))$ - $m$ - tartibli ko'phad) ko'rinishda aniqlanadi. Noma'lum  $Q_m^{(i)}(t)$ ,  $i=1,2,\dots,n$  ko'phadning koeffitsiyentlari noma'lum koeffitsiyentlar usuli bilan topiladi.

2)  $l$  soni mos birjinsli sistemaning xarakteristik tenglamasi uchun  $s$  karrali ildiz.

Xususiy yechim ushbu

$$y_i(t) = Q_{m+s}^{(i)}(t)e^{lt}, \quad i=1,2,\dots,n$$

(26)

$(Q_{m+s}^{(i)}(t))$ -( $m+s$ )- tartibli ko'phad) ko'rinishda izlanadi. Xususiy yechim  $y_i(t) = t^s Q_{m+s}^{(i)}(t)e^{lt}$  ko'rinishda emas, (26) ko'rinishda izlanishi lozim. Bu holda ham ko'phadning koeffitsiyentlari aniqmas koeffitsiyentlar usuli bilan topilad.

**Misol.**  $\dot{x} = 2x + y + 2e^t$ ,  $\dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}$ .

Xarakteristik tenglamaning ildizlari  $l_1=1$  va  $l_2=3$  bo'lganligi uchun tegishli bir jinsli sistemaning umumiy echimi  $x_0 = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$ ,  $y_0 = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}$  ko'rinishda bo'ladi.

Endi bir jinsli bo'lmagan berilgan sistemaning ikkita sistemaga ajratamiz:

$$\dot{x} = 2x + y + 2e^t, \quad \dot{y} = x + 2y;$$

$$\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}.$$

1-sistemada  $f_1(t) = 2e^t$  bo'lib  $m=0$ ,  $s=1$  bo'lganligi uchun sistemaning xususiy yechimini  $x_1 = (at+b)e^t$ ,  $y_1 = (ct+d)e^t$  ko'rinishda izlaymiz va uni topamiz:  $x_1 = te^t$ ,  $y_1 = -(t+1)e^t$ .

2- sistemada  $g_1(t) = -3e^{4t}$  bo'lib,  $m=0$ ,  $s=0$  bo'lganligi uchun bu sistemaning xususiy yechimini  $x_2 = ae^{4t}$ ,  $y_2 = be^{4t}$  ko'rinishda izlaymiz va uni  $x_2 = -e^{4t}$ ,  $y_2 = -2e^{4t}$  ko'rinishda topamiz.

Olingan natijalar asosida berilgan sistemaning umumiy yechimini yozamiz:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + t e^t - e^{4t}, \quad y = -C_1 e^t + C_2 e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t}.$$

## II BOB DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNING HOATLAR TEKISLIGI. LYAPUNOV MA'NOSIDA TURG'UNLIK .

### 1-§. ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli sistemaning holatlar tekisligi.

Bizga ushbu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

chiziqli o'zgaras koeffitsientli bir jinsli sistema berilgan bo'lsin. Bu sistemaning

determinanti  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  ( $ax = l$ ,  $l$  - xos son,  $x$  - xos vektor,  $a$  - o'zgaras matrisa)

bo'lib, (3.1) sistema uchun koordinata boshi  $(0,0)$  muvozanat nuqta bo'ladi. Ammo undan boshqa muvozanat nuqtalar ham bo'lishi mumkin. Agar  $D \neq 0$  bo'lsa, (3.1) sistemaning koordinata boshidan boshqa muvozanat nuqtasi bo'la olmaydi. Agar  $D = 0$  bo'lsa, ravshanki,  $A(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$  matrisaning har ikki xos sonlari 0 dan farqli bo'ladi.

Hozir biz  $A$  matrisa xos sonlariga qarab, (3.1) sistemaning ko'rinishini soddalashtirish bilan shug'ullanamiz.

A)  $A$  matrisaning xos sonlari haqiqiy, har xil va 0 dan farqli.

$$(l_1, l_2 \in \mathbb{R}; l_1 \neq l_2, l_1 \neq 0, l_2 \neq 0)$$

Ularni (xos sonlarni)  $l_1$  va  $l_2$  deylik. Bu holda (3.1) sistemani maxsusmas almashtirish yordamida

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = l_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = l_2 y_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

ko'rinishga keltirish mumkin.

Buni ko'rsataylik. Quyidagicha almashtirish bajaramiz:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 \\ y_2 = gx_1 + dx_2 \end{cases}; \quad ad - bg \neq 0 \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{array} \right| = \begin{vmatrix} a & b \\ g & d \end{vmatrix} = ad - bg \neq 0$$

Hosilalarni hisoblab, (3.1)dan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a\dot{x}_1 + b\dot{x}_2 = a(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = (a_{11}a + a_{21}b)x_1 + (a_{12}a + a_{22}b)x_2 \\ \dot{y}_2 &= g\dot{x}_1 + d\dot{x}_2 = g(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + d(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = (a_{11}g + a_{21}d)x_1 + (a_{12}g + a_{22}d)x_2 \end{aligned}$$

Bu ifodalarni mos ravishda  $l_1 y_1$  va  $l_2 y_2$  larga tenglashtiramiz:

$$\begin{aligned}(a_{11}a + a_{21}b)x_1 + (a_{21}a + a_{22}b)x_2 &= l_1(ax_1 + bx_2) \\ (a_{11}g + a_{21}d)x_1 + (a_{12}g + a_{22}d)x_2 &= l_2(gx_1 + dx_2)\end{aligned} \quad (3.3)$$

Endi  $x_1$  va  $x_2$  lar oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirsak, ushbu

$$\begin{cases} (a_{11} - l_1)a + a_{21}b = 0 & x_1 \\ a_{12}a + (a_{22} - l_1)b = 0 & x_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} (a_{11} - l_1)g + a_{21}d = 0 & x_1 \\ a_{12}g + (a_{22} - l_2)d = 0 & x_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

sistemalarni hosil qilamiz. Ravshanki  $l_1, l_2$ -xos sonlar bo'lgani uchun

$$\Delta(l_j) = \begin{vmatrix} a_{11} - l_j & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - l_j \end{vmatrix} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Shuning uchun  $\Delta^*(l_j) = \begin{vmatrix} a_{11} - l_j & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - l_j \end{vmatrix} = 0$ . Bu tenglikka asosan (3.4) va (3.5)

sistemalar  $a, b$  va  $g, d$  larga nisbatan trivial bo'lmagan (0 dan farqli) yechimlarga ham ega (algebradan ma'lumki, bir jinsli tenglamalar sistemasi 0 dan farqli yechimga ega bo'lishi uchun bu sistemaning determinanti  $\Delta = 0$  bo'lishi zarur va yetarli) xususan

$$a = a_{11}^{\pm 0}, b = -(a_{11} - l_1); g = a_{21}, d = -(a_{11} - l_2), \quad (3.6)$$

deb tanlasa bo'ladi. Agar (3.6) tengliklardan foydalansak, (3.3) almashtirish maxsusmas (bir qiymatlik) almashtirish bo'la oladimi? Shuni tekshiraylik. Quyidagiga egamiz:

$$ad - bg = -a_{21}(a_{11} - l_2) + a_{21}(a_{11} - l_1) = a_{21}(a_{11} - l_1 - a_{11} + l_2) = a_{21}(l_2 - l_1).$$

Bundan  $a_{21} \neq 0$  bo'lganda  $ad - bg \neq 0$  ekani kelib chiqadi, ya'ni (3.3) almashtirish maxsusmas. SHunday qilib, (3.1) sistemani uning matrisasi haqiqiy har xil va 0 dan farqli xos sonlarga ega bo'lganda (3.2) ko'rinishida yozish mumkin. Bu (3.2) sistema ko'rilayotgan holda (3.1) sistemaning kanonik ko'rinishi deyiladi.

B) A matrisaning xos sonlari qo'shma kompleks.

Ularni  $l_1 = m + in, l_2 = m - in, n \neq 0$  deylik. Avvalo (3.6) qiymatlardan foydalansak, (3.3) almashtirishni bunday yozish mumkin:

$$\begin{cases} y_1 = a_{21}x_1 - (a_{11} - l_1)x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 - (a_{11} - l_2)x_2 \end{cases}$$

Shu almashtirish formulalari  $l_1, l_2$  lar kompleks bo'lganda ham o'rinli,  $l_1$  va  $l_2$  lar o'rniga o'zgarma ifodalarini qo'yamiz:

$$\begin{cases} y_1 = a_{21}x_1 - (a_{11} - m - in)x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 - (a_{11} - m + in)x_2 \end{cases} \quad (3.7)$$

Bundan agar  $\begin{cases} y_1 = U_1 + iV_2 \\ y_2 = U_1 - iV_2 \end{cases}$  deb belgilasak, u holda (3.7) dan, ya'ni

$$\begin{cases} y_1 = a_{21}x_1 - (a_{11} - m)x_2 + inx_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 - (a_{11} - m)x_1 - inx_2 \end{cases} \quad (3.7')$$

Shundan

$$\begin{cases} U_1 = a_{21}x_1 - (a_{11} - m)x_2 \\ U_2 = nx_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

kelib chiqadi. Sodda hisoblashlar yordamida (3.2), (3.7) va (3.8)larga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dU_1}{dt} + i \frac{dU_2}{dt} = (m + in)y_1 \quad (y_1 = l_1 y_1 \text{ dan})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial t} + i \frac{\partial U_2}{\partial t} &= (m + in)[a_{21}x_1 - (a_{11} - m - in)x_2] = (m + in)[a_{21}x_1 - (a_{11} - m)x_2 + inx_2] = \\ &= (m + i)(U_1 + U_2) = mU_1 - nU_2 + i(nU_1 + mU_2) \end{aligned}$$

shunday qilib, ushbu

$$\frac{dU_1}{dt} + i \frac{dU_2}{dt} = mU_1 + nU_2 + i(nU_1 + mU_2) \quad x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$$

tenglikdan

$$\begin{cases} \frac{dU_1}{dt} = mU_1 - nU_2 \\ \frac{dU_2}{dt} = nU_1 + mU_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

munosabatni hosil qilamiz. Shu (3.9) sistema berilgan sistemaning xos sonlari kompleks bo'lgan holda kanonik ko'rinishdan iborat.

**Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli sistemaning holatlar tekisligi.** Xos sonlar haqiqiy va kompleks bo'lgan hollarni alohida tekshiramiz.

A)  $A$  matrisaning xos sonlari haqiqiy, har xil va 0 dan farqli.

Xos sonlarni  $\lambda_1$  va  $\lambda_2$  desak, ularga mos kelgan chiziqli erkli xos vektorlarni topish mumkin. (ya'ni echish  $(A - \lambda E)x = 0$  dan  $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}$  va  $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}$  topiladi, yechimni  $x_i = h^{(i)} e^{\lambda_i t}$   $i = 1, 2$  ko'rinishida qidiriladi). Shuning uchun (3.1) sistemaning umumiy yechimi

$$x = c_1 h^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 h^{(2)} e^{\lambda_2 t} \quad (3.10)$$

ko'rinishda yoziladi. Uni yana

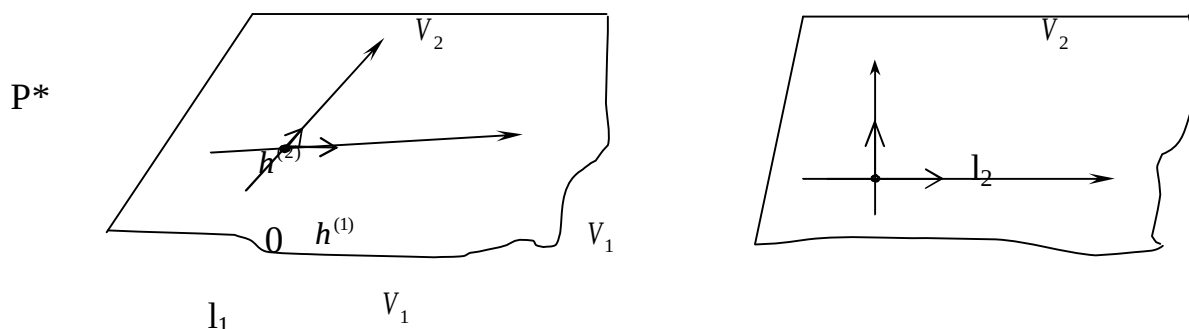
$$x = V_1 h^{(1)} + V_2 h^{(2)} \quad (3.11)$$

bunda

$$V_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, V_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.12)$$

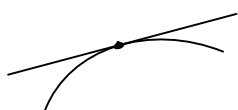
ko'rinishda  $h^{(1)}$  va  $h^{(2)}$  vektorlar bo'yicha yoyib yozish mumkin.  $V_1$  va  $V_2$  sonlar holat tekisligida to'g'ri burchakli Dekart koordinatalaridan iborat bo'lishi shart emas, bu  $h^{(1)}$  va  $h^{(2)}$  vektorlar bo'yicha yo'nalgan o'qlarga bog'liq.

Holatlar tekisligini  $P$  deylik. Unda  $V_1$  va  $V_2$  o'qlar  $h^{(1)}$  va  $h^{(2)}$  vektorlar bo'yicha yo'nalgan bo'ladi.



Affin almashtirish yordamida  $P$  holat tekisligini shunday  $P^*$  tekislikka akslantirish mumkinki, unda  $h^{(1)}$  va  $h^{(2)}$  vektorlar o'zaro perpendikulyar  $\mathbf{l}_1$  va  $\mathbf{l}_2$  birlik vektorlarga o'tadi.  $P$  tekislikning  $(V_1, V_2)$  nuqtasi  $P^*$  tekislikning to'g'ri burchakli dekart koordinatalariga o'tadi, ya'ni  $X = V_1 h^{(1)} + h^{(2)} V_2$  bo'lsa,  $P^*$  da  $X = V_1 \mathbf{l}_1 + V_2 \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_1 \perp \mathbf{l}_2$  bo'ladi. Ko'rilyotgan holda (3.1) sistemani (3.2) kanonik ko'rinishda yozish mumkin. (3.2) sistemaning traektoriyalari  $P^*$  tekislikda chiziladi, chunki unig xos vektorlari  $(1, 0)$  va  $(0, 1)$  dan iborat. Endi (3.1)

sistemaning traektoriyalarini tasvirlashga o'tamiz. Avval  $|l_1| < |l_2|$  va  $l_2 < l_1 < 0$  yoki  $l_2 > l_1 > 0$  tengsizliklar o'rinli bo'lsin. (3.12) dan ko'rinib turibdiki, birinchi chorakda chizilgan traektoriyalarni ham yozish mumkin. Undan tashqari,  $l_2 < l_1 < 0$  bo'lgan holda  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2 = 0$  bo'lsa,  $V_1 = C_1 l_1 t$ ,  $V_2 = 0$ , ya'ni  $V_1$  o'qiga egamiz. Unda  $C_1 > 0$  bo'lganda harakat o'ngdan chapga,  $C_1 < 0$  bo'lganda esa chapdan o'ngga bo'ladi. Boshqacha aytganda,  $t \rightarrow +\infty$  da  $C$  ning ishorasidan qat'iy nazar,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} C_1 e^{l_1 t} = 0$  va koordinata boshidan ikki tomonda harakat shu nuqtaga ((0,0) nuqta) yo'nalgan bo'ladi. Xuddi shu xususiyat  $V_2$  o'qiga ham tegishli. Endi  $C_1 < 0$ ,  $C_2 > 0$  bo'lganda, ya'ni I chorakda traektoriyalarning qavariqligini tekshiraylik. Ravshanki,



$$f''(x) < 0 \quad \frac{dV_2}{dV_1} = \frac{C_2}{C_1} (l_2 - l_1) e^{(l_2 - l_1)t}$$

*каварик*



$$f''(x) > 0 \quad \frac{d^2 V_2}{dV_1^2} = \frac{C_2}{C_1} (l_2 - l_1) e^{(l_2 - l_1)t} > 0.$$

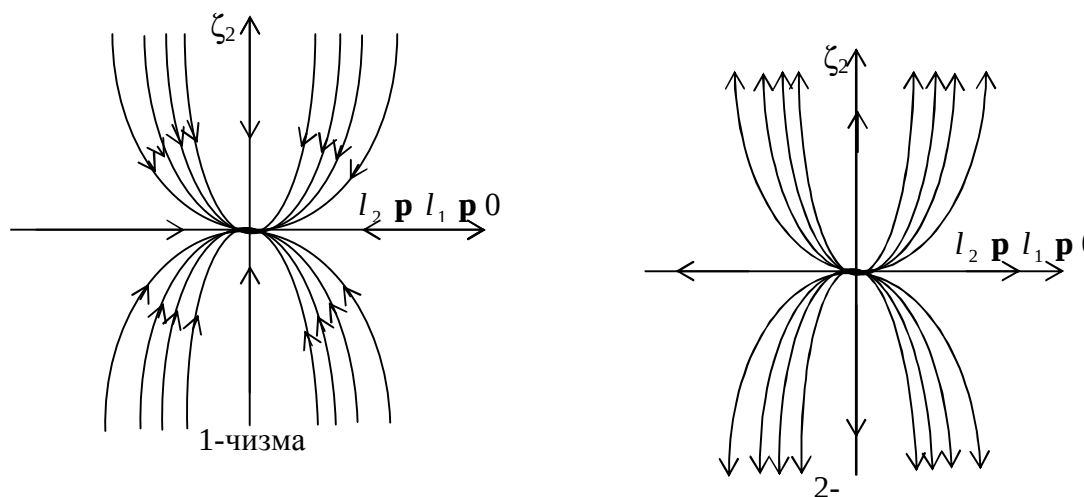
*богнук*

Bundan I chorakda traektoriyalarning qavariqligi pastga qaraganligi (ya'ni botiqligi) kelib chiqadi. Ushbu

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dV_2}{dV_1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_1}{C_2} (l_2 - l_1) e^{l_1 t} = 0$$

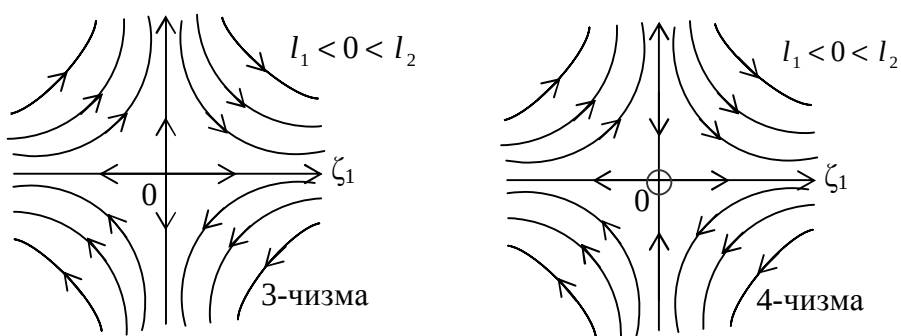
munosabatdan  $t \rightarrow +\infty$  da trektoriyalar absissa o'qiga urinish chiqadi. I chorakda  $\frac{dV_1}{dt} = C_1 l_1 e^{l_1 t} < 0$ ,  $\frac{dV_2}{dt} = C_2 l_2 e^{l_2 t} < 0$  bo'lgani uchun  $V_1$  va  $V_2$  lar  $t$  ortirish bilan kamayadi va demak, harakat yuqoridan pastga hamda o'ngdan chapga yo'nalgan bo'ladi. (1-chizma) Traektoriyalar chekli vaqtda koordinata boshiga kela olmaydi. Koordinata boshi berilgan sistema uchun yagona muvozanat nuqtasidan iborat bo'lib, u mustaqil yechimdir. Qolgan choraklardagi traektoriyalarni shu chizilgan traektoriyalardan ularni  $V_2$  va  $V_1$  o'qlarga nisbatan simmetrik aylantirish yordamida hosil qilamiz. Shunday qilib, butun tekislikda traektoriyalar chizildi deyish

mumkin. (1-chizma)  $l_2 > l_1 > 0$  bo'lganda ham xuddi shu usul bilan traektoriyalar chiziladi. Traektoriyalar avvalgisidan farq qilmasada, ularda yo'nalish teskari bo'ladi. (2-chizma)



Xos sonlarning  $l_2 > l_1 > 0$  qiymatlariga mos manzara (1-chizma) turg'un tugun deyiladi.  $l_2 < l_1 < 0$  qiymatlarga mos manzara esa (2-chizma) noturg'un tugun deyiladi.

Xos sonlar uchun  $l_1 < 0, l_2 > 0$  va  $l_2 < 0, l_1 > 0$  tengsizliklar o'rinli bo'lgan holda ham xuddi yuqoridagiga o'xshash mulohazalar yuritib butun tekislikda traektoriyalarni chizish mumkin. Ularni chizmalari quyidagicha bo'ladi: (3,4-chizma)



Har ikki holda ham hosil bo'lgan manzara egar deyiladi. Misollar. 1-misol.



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} -3, 1 \\ 4, -3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 \neq 0$$

sistemaning traektoriyalari chizilsin va muvozanat nuqtasi atrofidagi manzara aniqlansin.

A matrisani yozamiz:  $A = \begin{pmatrix} -3, 1 \\ 4, -3 \end{pmatrix}$  Bu matrisani xos sonlarini topamiz:

$$\begin{vmatrix} -3-l & 1 \\ 4 & -3-l \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad (3+l)^2 - 4 = 0. \quad \text{Bundan} \quad 3+l = \pm 2 \Rightarrow l_1 = -1, l_2 = -5.$$

Ravshanki,  $l_2 < l_1$ ,  $|l_2| > |l_1|$  xos sonlar har xil va manfiy bo'lgani uchun biz turg'un tugunga egamiz. Endi shu manzarani chizaylik. Buning uchun xos

vektorlarni topish kerak.  $l_1 = -1$  ga mos vektor  $h^{(1)} = \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix}$  ushbu

$$Ah^{(1)} = (-1)h^{(1)} \quad \text{yoki} \quad \begin{pmatrix} -3h_1^{(1)} + h_2^{(1)} \\ 4h_1^{(1)} - 3h_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1^{(1)} \\ -h_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{sistemadan topiladi. Ravshanki, biz}$$

$$-2h_1^{(1)} + h_2^{(1)} = 0 \quad \text{tenglamaga egamiz va undan} \quad h_1^{(1)} = 1, h_2^{(1)} = 2 \quad \text{deb olish mumkin.}$$

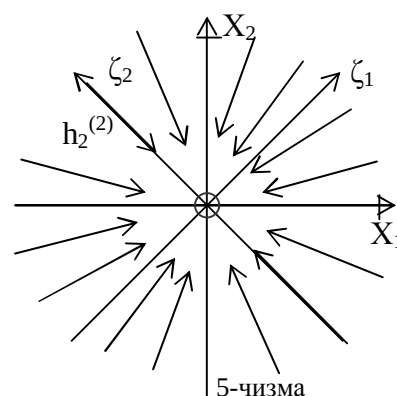
Agar  $h_1^{(1)} = 1, h_2^{(1)} = 2$  desak ham o'sha yo'nalish chiqariladi. Shunga o'xshash  $l_2 = -5$  xos songa mos

xos vektor topiladi.

$$h^{(2)} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Endi tekislikda koordinata boshidan shu vektorlar yo'nalishida to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Absolyut qiymati bo'yicha kichik xos son  $l_1 = -1$  bo'lgani

uchun traektoriyalar shu xos songa mos  $h^{(1)}$  vektor yo'nalishiga  $t \rightarrow +\infty$  da urinadi (5-chizma).



B) A matrisaning xos sonlari kompleks .

Bu holda xos sonlar qo'shma kompleks bo'lib, ularni  $l = m + ig, \bar{l} = m - ig, g \neq 0$  deb belgilaymiz.  $g$  ni doim  $g < 0$  deb qarash mumkin. Agar  $h^{(1)}$  va  $h^{(2)}$  lar haqiqiy

vektor bo'lsa, mos xos vektorlarni  $h$  va  $\bar{h}$  deb belgilanadi va bunday aniqlanadi:

$h = \frac{1}{2}(h^{(1)} - ih^{(2)})$  bunda  $h^{(1)}$  va  $h^{(2)}$  lar chiziqli erkli aks holda  $h$  va  $\bar{h}$  lar chiziqli

bog'liq bo'lar edi. Shuning uchun  $h^{(1)}$  va  $h^{(2)}$  haqiqiy vektorlarni  $P$  tekislikda ( $z_1$  va  $z_2$  larni) xos yo'nalishlar deb qarash mumkin. Endi  $P^*$  tekislikda traektoriyalarlarni quramiz. Ko'rilayotgan holda berilagan sistemaning kanonik shakli ma'lum.

Uni yozaylik : ((3.9) da  $U_1 = z_1, U_2 = z_2$  desak)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = mx_1 - gx_2 \\ \dot{x}_2 = gx_1 - mx_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

bu sistemaning umumiy yechimi  $\begin{cases} x_1(t) = Ce^{mt} \cos(gt+n) \\ x_2(t) = Ce^{mt} \sin(gt+n) \end{cases}$  ko'rinishda yoziladi. Unda

$t$  ni parametr deb qarasak biz traektoriyalarning parametrik tenglamasiga egamiz.

Ularni qurish uchun qutb koordinatalariga o'tish qulaylik tug'diradi. SHu maq

sadda  $V_1 = p \cos j, V_2 = p \sin j$  ( $p, j$  qutb koordinatalari) deylik. SHuning uchun

yuqorida yozilgan umumiy yechim  $r = Ce^{mt} (c \neq 0), j = gt + n (n \neq 0)$

ko'rinishini oladi. Bu munosabatlarga ko'ra to'sishi bilan burchak ham o'sadi.

(chunki  $l < 0$  deb qarayapmiz). Boshqacha aytganda koordinata boshidan

chiqadigan nur  $(V_1(t), V_2(t))$  nuqtadan o'tib sekundiga  $l$  radian tezlik bilan soat

stelkasiga qarshi yo'nalishda buriladi. (ya'ni uning grafigi logorifimik spiraldan

iborat).(3.13) dan  $t$  ni chiqaramiz:  $j = gt + n \rightarrow gt = j - n \rightarrow t = j - n / g$

$$r = Ce^{mt} = Ce^{\frac{m}{g}(j-n)} = Ce^{\frac{m}{g}j} \cdot e^{-\frac{m}{g}n} = Ke^{\frac{m}{g}j}, K = Ce^{-\frac{m}{g}n} = \text{const ya'ni}$$

$$r = Ke^{\frac{m}{g}j} \quad (3.14)$$

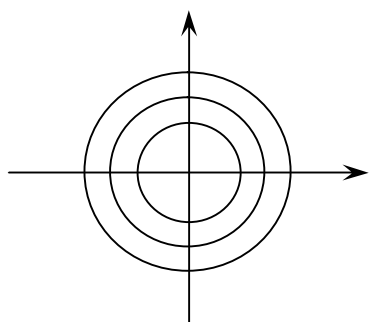
traektoriyalarning ko'rinishi  $m > 0, m < 0, m = 0$  qiymatlarga qarab har xil bo'ladi.

$m < 0$  bo'lsin.  $g \neq 0$  bo'lgani uchun  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r = 0$ , chunki,  $\frac{m}{g} < 0$  va  $\lim_{t \rightarrow +\infty} j = +\infty$ ,

Demak,  $t \rightarrow +\infty$  da holat nuqtasi koordinata boshiga yaqinlashadi.(6-chizma) hosil

bo'lgan manzara turg'un fokus deyiladi. Agar  $m > 0$  bo'lsa, yuqoridagi kabi

mulohazalar yordamida noto'g'ri fokus manzarasini qurish mumkin. (7-chizma). Agar  $m = 0$  bo'lsa, (3.14) formulada  $r = K$  ( $K = \text{const}$ ) kelib chiqadi. Bu esa, markaziy koordinata boshida bo'lgan konsentrik aylanalardan iborat (8-chizma) hosil bo'lgan manzara markaz deyiladi.



Misollar. 1-misol.

Ushbu 
$$\begin{cases} x_1 = 3x_1 - x_2 \\ x_2 = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$$
 sistema uchun  $A = \begin{pmatrix} 31 \\ 43 \end{pmatrix}$  va

$\begin{vmatrix} 3-l & 1 \\ 43-l \end{vmatrix} = 0$  tenglamadan  $\lambda = 3 \pm 2i$ . Demak,  $\mu = 3$ ,  $\nu = 2$ .

$\lambda = 3 + 2i$  xos son uchun xos vektorni izlaymiz.

$$\begin{pmatrix} 3-1 \\ 43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (3+2i) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \text{ yoki } \begin{pmatrix} 3h_1 - h_2 \\ 4h_1 + 3h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+2i)h_1 \\ (3+2i)h_2 \end{pmatrix}. \quad \text{Bundan}$$

$$\begin{cases} 3h_1 - h_2 = 3h_1 + 2ih_1 \\ 4h_1 + 3h_2 = 3h_2 + 2ih_2 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} -h_2 = 2ih_1 \\ 4h_1 = 2ih_2 \end{cases}. \text{ Oxirgi 2 tenglamaning biri 2-sidan hosil}$$

qilinishi mumkin. Shuning uchun  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = -2i$  deb tanlansa bo'ladi. Endi

$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$  vektorni bunday tasvirlaymiz.

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \text{ ko'rinadiki, } h^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, h^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ vektorlar izlangan}$$

bo'lib, ular absissa va ordinata o'qlari bo'yicha yo'nalgandir. Ko'rilayotgan holda  $m = 3 > 0$  bo'lgani uchun biz noturg'un fokus manzaraga egamiz.

**3.1- misol.** 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$
 avtonom sistemaning muvozanat nuqtalari

turg'unligini tekshiring.

$$\blacktriangleleft A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3-l & 0 \\ 2 & 1-l \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(3+l)(1-l) = 0 \Rightarrow l_1 = -3, l_2 = 1.$$

$l_2 > 0$ ,  $l_1 < 0 \Rightarrow (0, 0)$  - *egar* muvozanat nuqta ekan.

$l_1 = -3$  ga mos xos vektorni topamiz.

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad A \cdot h = I h.$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix} = (-3) \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3h_1^{(1)} = -3h_1^{(1)} \\ 2h_1^{(1)} + h_2^{(1)} = -3h_2^{(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1^{(1)} = h_1^{(1)} \\ 2h_1^{(1)} = -4h_2^{(1)} \end{cases}$$

$$h_1^{(1)} = -2h_2^{(1)} \Rightarrow h_2^{(1)} = 1 \Rightarrow h_1^{(1)} = -2.$$

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

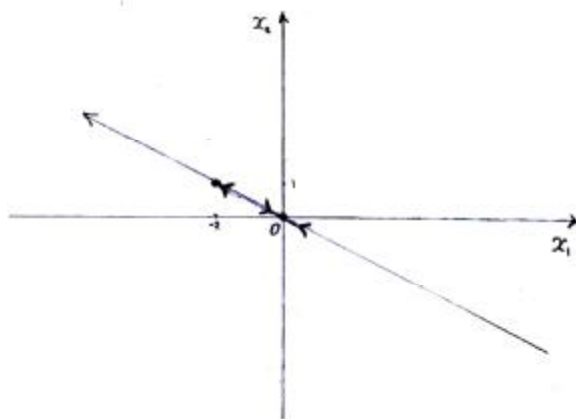
xos vektorlarning topamiz.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3h_1^{(2)} = h_1^{(2)} \\ 2h_1^{(2)} + h_2^{(2)} = h_2^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1^{(2)} = 0 \\ h_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

$$h^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Buning manzarasi quyidagicha bo‘ladi.



1-chizma. ►

**3.2- misol.**  $\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + 5x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 \end{cases}$  avtonom sistemaning muvozanat nuqtalari

turg‘unligini tekshiring.

$$\blacktriangleleft \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -5-l & 5 \\ -2 & 1-l \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(5+l)(1-l)+10=0. \Rightarrow (-5-5l+l-l^2)+10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2+4l+5=0 \Rightarrow l_{1,2}=-2 \pm \sqrt{4-5}=-2 \pm i.$$

$m=-2 < 0 \Rightarrow (0, 0)$ - muvozanat nuqta *turg'un fokus* bo'ladi.

$l_1=-2+i$  xos songa mos xos vektorni topaylik, ya'ni  $h=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}=?$

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (-2+i) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5h_1+5h_2=(-2+i)h_1 \\ -2h_1+h_2=(-2+i)h_2 \end{cases} \Rightarrow$$

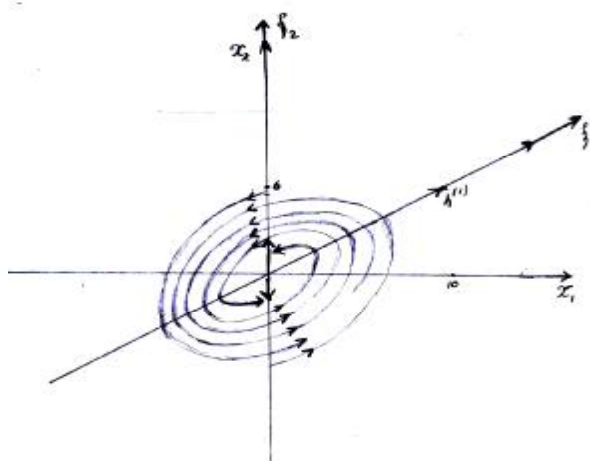
$$\Rightarrow \begin{cases} -5h_1+5h_2=-2h_1+ih_1 \\ -2h_1+h_2=-2h_2+ih_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5h_2=3h_1+ih_1 \\ -2h_1=-3h_2+ih_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5h_2=(3+i)h_1 \\ -2h_1=(-3+i)h_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5h_2=(3+i)h_1 \\ -2(3+i)h_1=-10h_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5h_2=(3+i)h_1 \\ 5h_2=(3+i)h_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1=5 \\ h_2=3+i \end{cases}$$

$$h=\begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}-i\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

$$h^{(1)}=\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Buning manzarasi quyidagicha bo'ladi.



2-chizma. ►

**3.3- misol.**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

avtonom sistemaning muvozanat nuqtalari

turg'unligini tekshiring.

$$\blacktriangleleft A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-l & -4 \\ 2 & -3-l \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(1-l)(3+l)+8=0 \Rightarrow -(3+l-3l-l^2)+8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2 + 2l + 5 = 0 \Rightarrow l_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i.$$

$m = -1 < 0 \Rightarrow (0, 0)$  - muvozanat nuqta *turg'un* fokus bo'ladi.

$l_1 = -1 + 2i$  xos songa mos xos vektorni  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$  topaylik.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (-1+2i) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} h_1 - 4h_2 = (-1+2i)h_1 \\ 2h_1 - 3h_2 = (-1+2i)h_2 \end{cases} \Rightarrow$$

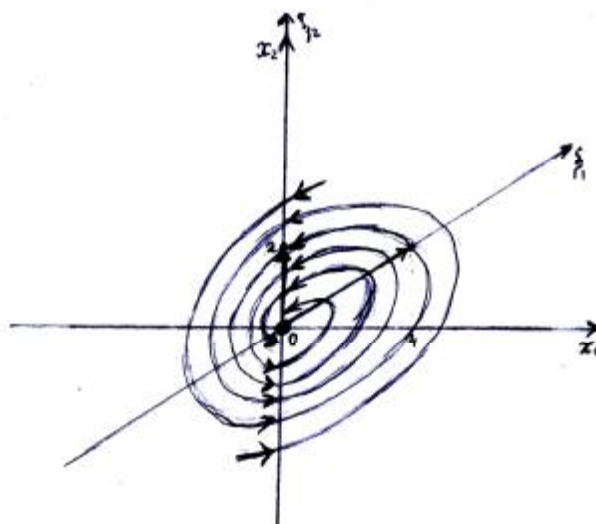
$$\Rightarrow \begin{cases} -4h_2 = -2h_1 + 2ih_1 \\ 2h_1 = 2h_2 + 2ih_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4h_2 = -2(1-i)h_1 \\ 2h_1 = 2(1+i)h_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4h_2 = -2(1-i)h_1 \\ (1-i)h_1 = 2h_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2h_2 = (1-i)h_1 \\ 2h_2 = (1-i)h_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 2 \\ h_2 = 1-i \end{cases}$$

$$h = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Buning manzarasi quyidagicha bo'ladi.



3-chizma. ►

**3.4- misol.**  $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 7x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 6x_2 \end{cases}$  avtonom sistemaning muvozanat nuqtalari

*turg'unligini tekshiring.*

$$\blacktriangleleft A = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1-l & -7 \\ 2 & 6-l \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(1+l)(6-l)+14=0 \Rightarrow -(6-l+6l-l^2)+14=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2 - 5l + 8 = 0 \Rightarrow l_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-32}}{2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{-7}}{2} = \frac{5}{2} \pm \frac{i\sqrt{7}}{2}.$$

$m = \frac{5}{2} > 0 \Rightarrow (0, 0)$  - muvozanat nuqta *noturg'un* fokus bo'ladi.

$l_1 = \frac{5}{2} \pm \frac{i\sqrt{7}}{2}$  xos songa mos xos vektorni  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$  topaylik.

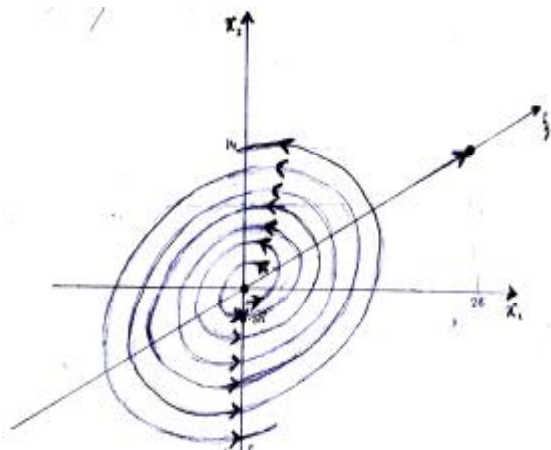
$$\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \left( \frac{5}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2} \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -h_1 - 7h_2 = \frac{5}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2} h_1 \\ 2h_1 + 6h_2 = \frac{5}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2} h_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7h_2 = \left( \frac{5}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2} + 1 \right) h_1 \\ 2h_1 = \left( \frac{5}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2} - 6 \right) h_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7h_2 = \frac{7+i\sqrt{7}}{2} h_1 \\ 2h_1 = \frac{7+i\sqrt{7}}{2} h_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -14h_2 = (7+i\sqrt{7})h_1 \\ 4(7+i\sqrt{7})h_1 = -56h_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14h_2 = (7+i\sqrt{7})h_1 \\ -14h_2 = (7+i\sqrt{7})h_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 14 \\ h_2 = -(7+i\sqrt{7}) \end{cases}$$

$$h = \begin{pmatrix} 14 \\ -(7+i\sqrt{7}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 28 \\ -14 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{7} \end{pmatrix} \right)$$

$h^{(1)} = \begin{pmatrix} 28 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{7} \end{pmatrix}.$  Buning manzarasi quyidagicha bo'ladi.



4-chizma. ►

**3.5- misol.**  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 5x_1 + x_2 \end{cases}$  avtonom sistemaning muvozanat nuqtalari

turg'unligini tekshiring.

$$\blacktriangleleft A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-l & 2 \\ 5 & 1-l \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-l)(1-l) - 10 = 0 \Rightarrow l^2 - 5l - 6 = 0 \Rightarrow l_1 = -1, \quad l_2 = 6.$$

$l_1 < 0 < l_2$  bo'lgani uchun  $\Rightarrow (0, 0)$  - *egar* muvozanat nuqta bo'ladi.

$l_1 = -1$  ga mos xos vektorni topamiz.

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad Ah = l h, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4h_1^{(1)} + 2h_2^{(1)} = -h_1^{(1)} \\ 5h_1^{(1)} + h_2^{(1)} = -h_2^{(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2h_2^{(1)} = -5h_1^{(1)} \\ 5h_1^{(1)} = -2h_2^{(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2h_2^{(1)} = -5h_1^{(1)} \\ 2h_2^{(1)} = -5h_1^{(1)} \end{cases}$$

$$2h_2^{(1)} = -5h_1^{(1)} \Rightarrow h_2^{(1)} = -5 \Rightarrow h_1^{(1)} = 2. \quad h^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Endi  $l_1 = 6$  ga mos  $h^{(2)} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix}$  xos vektorni topamiz.

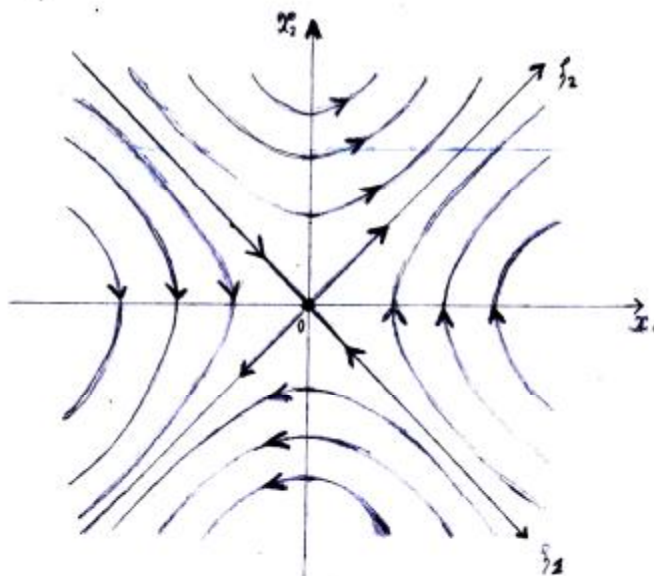
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4h_1^{(2)} + 2h_2^{(2)} = 6h_1^{(2)} \\ 5h_1^{(2)} + h_2^{(2)} = 6h_2^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2h_2^{(2)} = 2h_1^{(2)} \\ 5h_1^{(2)} = 5h_2^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1^{(2)} = 1 \\ h_2^{(2)} = 1 \end{cases}$$

$$h^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Buning manzarasi quyidagicha bo'ladi.





5-chizma. ►

**3.6- misol.**  $\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$  avtonom sistemaning muvozanat nuqtalari

turg'unligini tekshiring.

$$\blacktriangleleft A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3-l & 4 \\ 3 & -2-l \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3+l)(2+l) - 12 = 0 \Rightarrow l^2 + 5l - 6 = 0 \Rightarrow l_1 = 1, \quad l_2 = -6.$$

$l_1 < 0 < l_2$  bo'lgani uchun  $\Rightarrow (0, 0)$  - *egar* muvozanat nuqta bo'ladi.

$l_1 = 1$  ga mos xos vektorni topamiz.

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad A \cdot h = l h.$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix} = (1) \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3h_1^{(1)} + 4h_2^{(1)} = h_1^{(1)} \\ 3h_1^{(1)} - 2h_2^{(1)} = h_2^{(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4h_2^{(1)} = 4h_1^{(1)} \\ 3h_1^{(1)} = 3h_2^{(1)} \end{cases} \Rightarrow$$

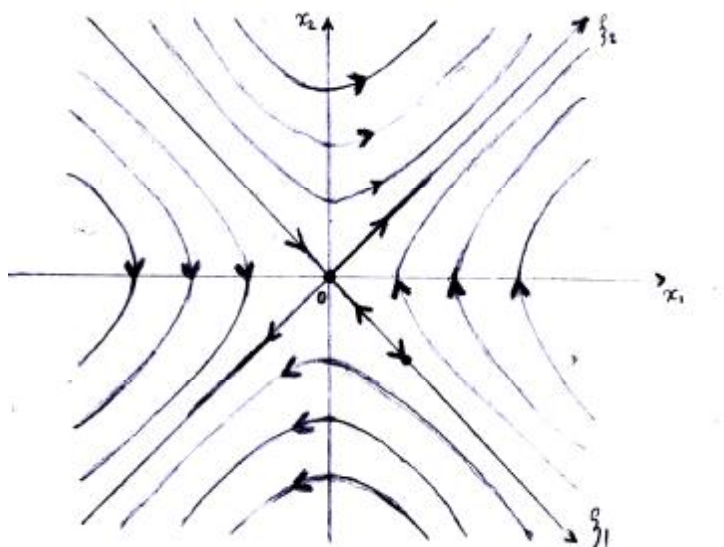
$$\Rightarrow h_2^{(1)} = 1 \Rightarrow h_1^{(1)} = 1. \quad h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Endi  $l_1 = -6$  ga mos  $h^{(2)} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix}$  xos vektorni topamiz.

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} = (-6) \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3h_1^{(2)} + 4h_2^{(2)} = -6h_1^{(2)} \\ 3h_1^{(2)} - 2h_2^{(2)} = -6h_2^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4h_2^{(2)} = -3h_1^{(2)} \\ 4h_1^{(2)} = -3h_2^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1^{(2)} = 4 \\ h_2^{(2)} = -3 \end{cases}$$

$h^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Buning manzarasi quyidagicha bo'ladi.



6-chizma. ►

**3.7- misol.**  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$  avtonom sistemaning muvozanat nuqtalari

turg'unligini tekshiring.

$$\blacktriangleleft A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-l & -1 \\ 5 & 3-l \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-l)^2 + 5 = 0 \Rightarrow 9 - 6l + l^2 + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2 - 6l + 9 = 0 \Rightarrow l_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}i.$$

$m = 3 > 0 \Rightarrow (0, 0)$  - muvozanat nuqta *noturg'un* fokus bo'ladi.

$l_1 = 3 + \sqrt{5}i$  xos songa mos xos vektorni  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$  topaylik.

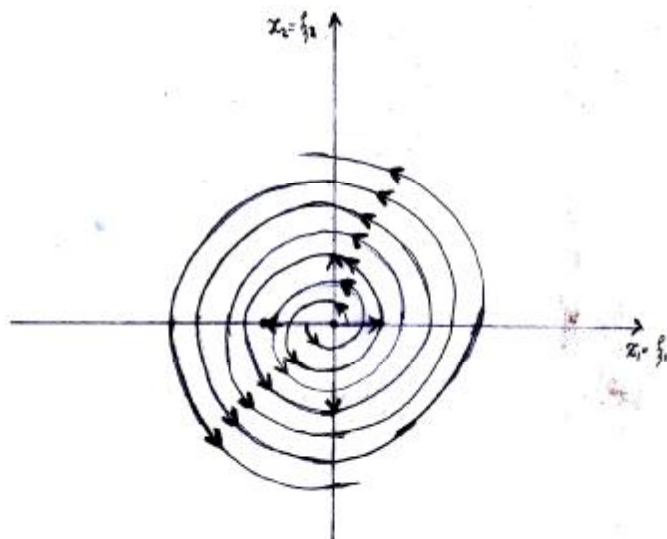
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (3 + \sqrt{5}i) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3h_1 - h_2 = 3h_1 + \sqrt{5}ih_1 \\ 5h_1 + 3h_2 = 3h_2 + \sqrt{5}ih_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_2 = -\sqrt{5}ih_1 \\ 5h_1 = \sqrt{5}ih_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_2 = -\sqrt{5}ih_1 \\ \sqrt{5}h_1 = ih_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1 = -1 \\ h_2 = \sqrt{5}i \end{cases}, \quad h = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5}i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{5} \end{pmatrix} \right),$$

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Buning manzarasi quyidagicha bo'ladi.



7-chizma. ►

**3.8-misol.**  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$  avtonom sistemaning muvozanat nuqtalari

turg'unligini tekshiring.

$$\blacktriangleleft A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-l & -1 \\ 5 & 2-l \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (l-4)(l-2)+5=0 \Rightarrow l^2-2l-4l+8+5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2-6l+13=0 \Rightarrow l_{1,2} = 3 \pm 2i.$$

$m = 3 > 0 \Rightarrow (0, 0)$  - muvozanat nuqta *noturg'un* fokus bo'ladi.

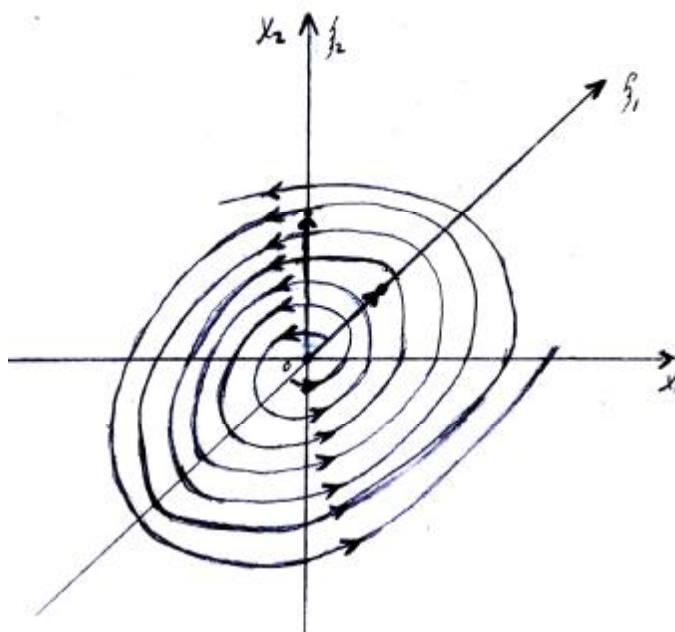
$l_1 = 3 + 2i$  xos songa mos xos vektorni  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$  topaylik.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (3+2i) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4h_1 - h_2 = 3h_1 + 2ih_1 \\ 5h_1 + 2h_2 = 3h_2 + 2ih_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -h_2 = (-1+2i)h_1 \\ 5h_1 = (1+2i)h_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -h_2 = (2i-1)h_1 \\ -h_2 = (2i-1)h_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = -1 \\ h_2 = -1+2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = 1-2i \end{cases}$$

$$h = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-2i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right), \quad h^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad m > 0$$

(0,0) noturg'un fokus. Buning manzarasi quyidagicha bo'ladi.



10-chizma. ►

## 2-§. Turg'unlik. Lyapunov ma'nosidagi turg'unlik. asimptotik turg'unlik.

Ko'pchilik differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasining yechimlarini elementar funksiyalar yoki kvadraturalar bilan ifodalab bo'lmaydi, shuning uchun bunday hollarda tayin differensial tenglamalarni echishda integrallashning taqribiy usullari qo'llaniladi.

Bu usullarning kamchiligi shundaki, ular faqat bittagina xususiy yechimni beradi; boshqa xususiy yechimlarni topish uchun barcha hisoblashlarni yana qaytadan bajarish kerak bo'ladi. Bitta xususiy yechimni bilgan holda boshqa xususiy yechimlarning xususiyati haqida biror hukm chiqarish mumkin bo'lmaydi.

Mexanika va texnikaning juda ko'p masalalarida argumentning berilgan tayin qiymatida yechimning aniq qiymatini bilish muhim bo'lmay, balki argument o'zgarib borganda va xususan, argumentning cheksiz o'sib borishida yechimning holatining harakteri muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Masalan, berilgan

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarning davriy bo'lishini, ularning biror ma'lum funksiyaga asimptotik yaqinlashishini va hokazolarni bilish muhim bo'ladi. Bu masalalar bilan differensial tenglamalarning sifat nazariyasi shug'ullanadi.

Sifat nazariyasining asosiy masalalaridan biri yechimning yoki harakatning turg'unligi haqidagi masaladir; bu masalani mashhur matematik A.M.Lyapunov (1857-1918) mufassal tekshirgan.

Ushbu differensial tenglamalar sistemasi

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \quad (4.1)$$

$t_0 \leq t < \infty$  da aniqlangan va

$$j_j(t_0) = x_{j_0}, \quad j = \overline{1, n} \quad (4.2)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan  $x_j = j_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$  yechimlarga ega bo'lsin, bu erda  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Hamma  $f_j$  funksiyalar va ularning  $\partial f_j / \partial x_k$  xususiy hosilalari  $t_0 \leq t < \infty$  da uzluksiz bo'lsin.

Agar ixtiyoriy  $e > 0$  uchun shunday  $d(e) > 0$  mavjud bo'lsaki, {(4.1)-(4.2)} differensial masalaning

$$\|x(t_0) - j(t_0)\| < d(e) \quad (4.3)$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan har qanday  $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  yechimi uchun barcha  $t > t_0$  larda

$$\|x(t) - j(t)\| < e \quad (4.4)$$

tengsizlik bajarilsa, {(4.1)-(4.2)} masalaning  $j(t) = (j_1(t), j_2(t), \dots, j_n(t))$  yechimi *Lyapunov ma'nosida turg'un* deyiladi.

Bu erda va bundan keyin  $\|\cdot\|$  bilan vektorning normasi belgilangan. Ko'pincha quyidagi normalardan foydalaniladi:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}, \quad \|x(t)\| = \max_k |x_k(t)|, \quad \|x(t)\| = \sum_{k=1}^n |x_k|. \quad (4.5)$$

Agar shunday  $\varepsilon > 0$  topilsaki, ixtiyoriy  $d > 0$  uchun shunday bir  $t > t_0$  mavjud bo'lib, (4.3) tengsizlikdan (4.4) tengsizlik kelib chiqmasa, u holda  $j(t)$  yechim *Lyapunov ma'nosida turg'unmas (noturg'un) yechim* deyiladi.

Agar  $j(t)$  yechim Lyapunov ma'nosida turg'un bo'lsa va, bundan tashqari, boshlang'ich shartlari bir-birlariga yetarlicha yaqin bo'lgan hamma yechimlar  $t \rightarrow +\infty$  da  $j(t)$  yechimga cheksiz yaqinlashsa, ya'ni (4.3) tengsizlikdan  $t \rightarrow +\infty$  da  $x(t) - j(t) \rightarrow 0$  kelib chiqsa,  $j(t)$  yechim *asimptotik turg'un yechim* deyiladi.

Yechimning turg'un yoki turg'unmasligi  $t_0$  ning tanlanishiga bog'liq emas.

Turg'unlik nazariyasida tenglamalar sistemasining muvozanat holati muhim ahamiyatga ega. (4.1) sistemaning *muvozanat holati* deb shunday  $x \in R^n$  nuqtaga aytiladiki,  $x = x$  funksiya (4.1) sistemaning (vaqt bo'yicha o'zgarmas) yechimi bo'ladi.  $x \in R^n$  nuqta (4.1) sistemaning muvozanat holati bo'lishi uchun barcha  $t$  larda  $f(t, x) = 0$  bo'lishi zarur va yetarli.

$x = j(t)$  - (4.1) sistemaning ixtiyoriy yechimi bo'lsin. O'zgaruvchilarni  $x = j(t) + y$  ko'rinishda almashtirish yordamida (4.1) sistemaning  $x = j(t)$  muvozanat holatini tekshirish masalasi

$$\dot{y} = F(t, y), \quad F(t, y) = f(t, j(t) + y) - f(t, j(t))$$

sistemaning  $y = 0$  muvozanat holatini o'rganishga keltiriladi. Shuning uchun umumiyatga zarar etkazmagan holda (4.1) sistemaning koordinatalar boshidagi muvozanat holatini o'rganish yetarli.

(4.1) sistemaning  $x = 0$  muvozanat holati ko'pincha *trivial yechim*, yoki *nol yechim* deyiladi. Nol yechim *muvozanat nuqtasi* deb ham ataladi.

Lyapunov ma'nosida turg'unlik ta'rifidan foydalanib quyida berilgan tenglamalarning ko'rsatilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan yechimlarini turg'unlikka tekshiring.

**4.1-misol.**  $\dot{x} = 3(4 - t^2)x, \quad x(0) = 0.$

◀  $j(t) \equiv 0$  funksiya berilgan masalaning yechimi ekanligi ochiq ravshan. O'zgaruvchilarga ajratib va integrallab, tenglamaning boshqa yechimlarini ham topamiz:

$$x(t) = C \exp(12t - t^3).$$

Ta'rifdan foydalanamiz:

$$\|x(t_0) - j(t_0)\| = |x(0) - j(0)| = |C|,$$

$$\|x(t) - j(t)\| = |x(t) - j(t)| = |x(t)| = C \exp(12t - t^3).$$

Belgilash kiritamiz:

$$M = \max_{t \geq 0} \exp(12t - t^3) = e^{16}.$$

Ixtiyoriy  $e > 0$  berilgan bo'lsin.  $d(e)$  sifatida  $e/M$  ni olamiz, ya'ni  $d(e) = e \cdot e^{16}$ . Shunday qilib,  $j(t) \equiv 0$  yechim Lyapunov ma'nosida turg'un yechim bo'ladi. Bundan tashqari,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} C \exp(12t - t^3) = 0$$

bo'lganligi uchun bu yechim asimptotik turg'un hamdir. ▶

**4.2-misol.**  $3(t-1)\dot{x} = x$ ,  $x(2) = 0$ .

◀ Bu erda  $j(t) \equiv 0$  funksiya masalaning yechimi bo'ladi. Berilgan tenglamaning qolgan hamma yechimlari  $x(t) = C(t-1)^{1/3}$  formula bilan yoziladi. So'ngra,  $d > 0$  berilgan bo'lsin.  $e = 1$  deb olamiz. Bu holda,

$$\|x(t_0) - j(t_0)\| = |x(t_0) - j(t_0)| = |x(t_0)| = |C| < d$$

tengsizlik bajarilishiga qaramasdan  $t > 1 + \frac{1}{|C|^3}$  bo'lganda baribir

$$\|x(t) - j(t)\| = \|x(t)\| = |x(t)| = |C| (t-1)^{1/3} > 1$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, nol yechim turg'un emas. ▶

**4.3-misol.**  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = 2x^3$ ;  $x(0) = y(0) = 0$ .

◀Ikkinchi tenglamani birinchi tenglamaga bo'lamiz va integrallaymiz, natijada  $Oxy$  tekislikdagi moddiy nuqta harakatining traektoriyalari oilasini hosil qilamiz:  $x^4 + y^2 = C$ , bu erda  $C$  - ixtiyoriy parametr. Koordinatalar boshida muvozanat holatida bo'lgan moddiy nuqtani turg'unlikka tekshirish uchun uni  $(0, 0)$  nuqtadan  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  koordinatali nuqtaga o'tkazamiz. Bu aytilganlardan moddiy nuqtaning  $x^4 + y^2 = x_0^4 + y_0^2$  traektoriya bo'yicha harakat qilishi kelib chiqadi. Bu traektoriya yopiq va yetarlicha kichik  $x_0$  va  $y_0$  larda  $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  ( $x_0^4 + y_0^2 \leq x_0^2 + y_0^2$ ,  $|x_0| \leq 1$ ) doiradan chiqib ketmaydi. Shuning uchun  $(0, 0)$  muvozanat nuqtasi turg'un bo'ladi (lekin asimptotik turg'un emas). ▶

**4.4-misol.** Tenglamalar sistemasining quyidagi

$$x_1(t) = C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t}, \quad x_2(t) = C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2$$

umumiy yechimi berilgan. Shu sistemaning nol yechimini turg'unlikka tekshiring.

◀Ixtiyoriy  $e > 0$  va ixtiyoriy  $t_0$  vaqt momenti berilgan bo'lsin. Berilgan  $e$  ga ko'ra shunday  $d(e) > 0$  ni topish kerakki,

$$\|x(t_0) - j(t_0)\| = \sqrt{(x_1(t_0) - j_1(t_0))^2 + (x_2(t_0) - j_2(t_0))^2} < d$$

tengsizlikdan  $\|x(t) - j(t)\| < e$ ,  $\forall t \geq t_0$  tengsizlik kelib chiqsin. Qisqalik uchun  $t_0 = 0$  deb olib, topamiz:

$$\begin{aligned} \|x(t_0) - j(t_0)\| &= \|x(t_0)\| = \sqrt{(C_1 \cos^2 t_0 - C_2 e^{-t_0})^2 + (C_1 t_0^4 e^{-t_0} + 2C_2)^2} = \\ &= \sqrt{(C_1 - C_2)^2 + 4C_2^2} \leq \sqrt{(|C_1| + |C_2|)^2 + 4C_2^2} < d; \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \|x(t) - j(t)\| &= \|x(t)\| = \sqrt{(C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t})^2 + (C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{(|C_1| + |C_2|)^2 + (256|C_1|e^{-4} + 2|C_2|)^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ammo (4.6) dan  $|C_1| < d$ ,  $|C_2| < d$  ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun (4.7) tengsizlikni quyidagi tarzda davom ettirish mumkin:

$$\|x(t)\| = \sqrt{4d^2 + (256e^{-4} + 2)^2 d^2} = \sqrt{4 + (256e^{-4} + 2)^2} \cdot d.$$

Agar



$$d = \frac{e}{\sqrt{4 + (256e^{-4} + 2)^2}}$$

deb olsak, u holda  $\|x(t)\| < e$  tengsizlik barcha  $\forall t > 0$  larda bir vaqtda bajariladi.

Shunday qilib, ta'rifga binoan, nol yechim Lyapunov ma'nosida turg'undir. ►

**4.5-misol.** Agar chiziqli bir jinsli sistemaning har qanday yechimi  $t \rightarrow +\infty$  da chegaralangan bo'lsa, u holda nol yechim Lyapunov ma'nosida turg'un bo'lishini isbotlang.

◄ Aytaylik,

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

sistemaning integral matrisasi  $Y$  bo'lsin, ya'ni

$$\frac{dY}{dt} = AY, \quad Y(t_0) = E.$$

Bu holda berilgan chiziqli sistemaning hamma yechimlari  $X = YC$  ( $C$  - ixtiyoriy o'zgarmas vektor) ko'rinishda tasvirlanadi. Masala shartiga ko'ra, chiziqli sistemaning har bir yechimi chegaralangan, shuning uchun  $\|Y\| \leq M$  tengsizlik o'rinli ( $M$  - o'zgarmas,  $M \neq 0$ ). Shunga binoan,

$$\|X\| \leq \|Y\| \cdot \|C\| \leq M \cdot \|C\|.$$

Ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  berilgan bo'lsin. Bu holda  $d = \varepsilon / M$  deb olib,

$\|x(t_0)\| = \|C\| < d$  tengsizlikdan  $\forall t \geq t_0$  da  $\|x(t)\| \leq M \cdot \|C\| \leq Md = \varepsilon$  kelib chiqadi. ►

**Birinchi yaqinlashish bo'yicha turg'unlikka tekshirish.**

Ushbu differensial tenglamalar sistemasi

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, \dots, x_n), \quad k = \overline{1, n} \quad (5.1)$$

berilgan bo'lsin va  $x_k(t) \equiv 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ) - (5.1) sistemaning yechimi bo'lsin. Bu yechimni turg'unlikka tekshirish uchun  $x_1 = \dots = x_n = 0$  nuqtaning atrofida  $f_k$  funksiyalarning chiziqli qismini, masalan, Makloren formulasi yordamida, ajratib olish kerak. Hosil bo'lgan sistemani quyidagi teorema yordamida tekshirish mumkin.

**Lyapunovning birinchi teoremasi.** Quyidagi differensial tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\frac{dx_k}{dt} = a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n + y_k(t, x_1, \dots, x_n), \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.2)$$

bu erda  $a_{kj}$  - o'zgarmaslar,  $y_k$  - tartibi birdan yuqori bo'lgan cheksiz kichiklar, aniqrog'i,  $|x| < e_0$  da

$$|y_k| \leq g_k(x) \cdot \|x\|, \quad \|x\| \rightarrow 0 \text{ da } g_k(x) \rightarrow 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.3)$$

Faraz qilaylik, (5.2) sistema trivial (nol) yechimga ega bo'lsin. Bu holda: agar  $(a_{kj})$ ,  $k, j = \overline{1, n}$  matrisaning hamma  $l$  xos sonlari manfiy haqiqiy qismlarga ( $\operatorname{Re} l < 0$ ) ega bo'lsa, u holda (5.2) sistemaning nol yechimi asimptotik turg'un bo'ladi; agar kamida bitta xos son musbat haqiqiy qismga ( $\operatorname{Re} l > 0$ ) ega bo'lsa, u holda nol yechim turg'unmas bo'ladi.

Lyapunovning birinchi teoremasidan foydalanib, sistemaning nol yechimini turg'unlikka tekshiring.

**5.1-misol.**  $\dot{x} = 2xy - x + y$ ,  $\dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y$ .

◀ Har ikkala tenglamaning o'ng tomonidagi funksiyalarning chiziqli qismlarini ajratib olib, berilgan sistemani yozamiz:

$$\dot{x} = -x + y + y_1(x, y), \quad \dot{y} = 2x - 3y + y_2(x, y),$$

bu erda  $y_1(x, y) = 2xy$ ,  $y_2(x, y) = 5x^4 + y^3$ . Chiziqli bo'lmagan hadlar uchun quyidagi baholashlar o'rinli:

$$|y_1| = 2|xy| \leq x^2 + y^2 = g_1(x, y) \cdot \|z\|, \quad |y_2| = |5x^4 + y^3| \leq g_2(x, y) \cdot \|z\|,$$

bu erda

$$g_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad g_2(x, y) = \frac{5x^4 + |y|^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ko'rinib turibdiki,  $\|z\| \rightarrow 0$  da  $g_1(x, y) \rightarrow 0$ ,  $g_2(x, y) \rightarrow 0$ . Shuning uchun ushbu

$$\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = 2x - 3y$$

chiziqli sistemaning nol yechimini turg'unlikka tekshirishda Lyapunovning birinchi teoremasidan foydalanish mumkin. Harakteristik tenglamani tuzib va echib

$$\begin{vmatrix} -1-l & 1 \\ 2 & -3-l \end{vmatrix} = l^2 + 4l + 1 = 0, \quad l_1 = -2 + \sqrt{3}, \quad l_2 = -2 - \sqrt{3}$$

ko'ramizki,  $\operatorname{Re} l_1 < 0$ ,  $\operatorname{Re} l_2 < 0$ . Shunday qilib, berilgan sistemaning nol yechimi asimptotik turg'un bo'ladi. ►

**5.2-misol.**  $\dot{x} = \ln(3e^y - 2 \cos x)$ ,  $\dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8+12y}$ .

◀ Makloren formulasidan foydalanib, berilgan tenglamalar o'ng tomonlarining chiziqli qismlarini ajratamiz:

$$\ln(3e^y - 2 \cos x) = \ln(1 + 3y + 1.5y^2 + o(y^2) + x^2 + o(x^2)) = 3y + o(x^2 + y^2),$$

$$\begin{aligned} 2e^x - \sqrt[3]{8+12y} &= 2 + 2x + x^2 + o(x^2) - \\ -2 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}y - \frac{1}{4}y^2 + o(y^2) \right) &= 2x - y + o(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Berilgan sistemaga mos chiziqli sistema

$$\dot{x} = 3y, \quad \dot{y} = 2x - y$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu sistemaning  $l^2 + l - 6 = 0$  harakteristik tenglamasi  $l_1 = -3$  va  $l_2 = 2$  ildizlarga ega. Ildizlardan bittasi  $\operatorname{Re} l_2 > 0$  bo'lganligi uchun berilgan sistemaning nol yechimi turg'un emas. ►

**5.3-misol.**  $\dot{x} = \operatorname{tg}(z - y) - 2x$ ,  $\dot{y} = \sqrt{9+12x} - 3e^y$ ,  $\dot{z} = -3y$ .

◀ Tenglamalarning o'ng tomonidagi funksiyalarning chiziqli qismlarini ajratib olish uchun Makloren formulasidan foydalanamiz:

$$\operatorname{tg}(y - z) = y - z + o(y^2 + z^2),$$

$$\sqrt{9+12x} = 3 + 2x - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2), \quad e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2).$$

Chiziqli bo'lmagan hadlarga oldingi misoldagi kabi mulohazalarni qo'llab, ushbu

$$\dot{x} = -2x - y + z, \quad \dot{y} = 2x - 3y, \quad \dot{z} = -3y$$

chiziqli sistemaga Lyapunovning birinchi teoremasini qo'llash mumkinligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Bu chiziqli sistemaning  $(l+3)(l^2+2l+2)=0$  harakteristik tenglamasi  $l_1=-3$ ,  $l_{2,3}=-1\pm i$  ildiz-larga ega va  $\operatorname{Re} l_{1,2,3}<0$ . Shunday qilib, berilgan sistemaning nol yechimi asimptotik turg'un bo'ladi. ►

**5.4-misol.**  $a$  va  $b$  parametrlarning qanday qiymatlarida

$$\dot{x} = x + ay + y^2, \quad \dot{y} = bx - 3y - x^2$$

sistemaning nol yechimi asimptotik turg'un bo'ladi?

◄Berilgan sistemaning nol yechimini asimptotik turg'unlikka tekshirish quyidagi

$$\begin{vmatrix} 1-l & a \\ b & -3-l \end{vmatrix} = l^2 + 2l - 3 - ab = 0$$

harakteristik tenglama ildizlarining  $\operatorname{Re} l < 0$  bo'ladigan shartlarini aniqlashga keltirilishini ko'rish qiyin emas. Harakteristik tenglama-ning ildizlari  $l_{1,2} = -1 + \sqrt{4+ab}$  bo'lganligi uchun  $ab+4 \leq 0$  yoki  $0 \leq ab+4 < 1$  shartlar bajarilganda  $\operatorname{Re} l_{1,2} < 0$  bo'ladi.  $a$  va  $b$  ga nisbatan yozilgan bu tengsizliklarni echib,  $ab < -3$  bo'lishi kerak, degan natijani olamiz. ►

**5.5-misol.** Ushbu

$$\dot{x} = y - x^2 - x, \quad \dot{y} = 3x - x^2 - y$$

sistemaning hamma muvozanat holatlarini toping va ularni turg'unlikka tekshiring.

◄Avvalo  $xOy$  tekislikda  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  bo'lgan nuqtalarni (muvozanat nuqtalarini) topamiz. Buning uchun

$$y - x^2 - x = 0, \quad 3x - x^2 - y = 0$$

tenglamalar sistemasini echib, ikkita  $(0,0)$  va  $(1,2)$  muvozanat nuqtalariga ega bo'lamiz. Ularni turg'unlikka tekshirishda Lyapunovning birinchi teoremasidan foydalanamiz.  $(0,0)$  nuqta holida berilgan tenglamalar ning o'ng tomonlaridagi chiziqli bo'lmagan hadlarni tashlab yuboramiz va shu tarzda hosil qilingan chiziqli sistemaning harakteristik tenglamasini tuzamiz. Uning ildizlari:  $l_1 = -1 - \sqrt{3}$ ,  $l_2 = -1 + \sqrt{3}$ . Ildizlardan bittasi  $\operatorname{Re} l_2 > 0$  bo'lganligi uchun  $(0,0)$  muvozanat nuqtasi turg'un emas.

(1,2) muvozanat nuqtasini turg'unlikka tekshirish uchun  $x = 1+x, y = 2+h$  o'zgaruvchilarni almashtiramiz. U holda

$$\dot{x} = h - 3x - x^2, \dot{h} = x - x^2 - h$$

sistemaga ega bo'lamiz. So'ngra, faqat  $x$  va  $h$  ga nisbatan chiziqli bo'lgan hadlarnigina qoldirib,

$$\dot{x} = -3x + h, \dot{h} = x - h$$

chiziqli sistemaga kelimiz. Bu sistemaning  $l^2 + 4l + 2 = 0$  harakteristik tenglamasi  $l_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$  ildizlarga ega.  $\text{Re } l_{1,2} < 0$  bo'lganligi uchun (1,2) muvozanat nuqtasi asimptotik turg'un bo'ladi. ►

### **Lyapunov funksiyalari usuli.**

A.M.Lyapunov XIX ning oxirlarida ushbu

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (6.1)$$

differensial tenglamalar sistemasining yechimlarini turg'unlikka tekshirishning umumiy usulini yaratdi. Bu usul *Lyapunovning ikkinchi usuli* yoki *Lyapunov funksiyalari usuli* nomini oldi.

**Lyapunovning ikkinchi teoremasi.** Agar shunday  $v(x) = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  differensiallanuvchi funksiya (*Lyapunov funksiyasi*) mavjud bo'lsaki, u koordinatalar boshining atrofida

1)  $v(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$  va  $x_i = 0 (i = \overline{1, n})$  bo'lgandagina  $v = 0$ , ya'ni  $v$  funksiya koordinatalar boshida qat'iy minimumga ega bo'lsa;

2)  $t \geq t_0$  bo'lganda  $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$  bo'lsa,

u holda  $x_i \equiv 0 (i = \overline{1, n})$  muvozanat nuqtasi turg'un bo'ladi.

Agar 2) shartning o'rniga  $t \geq t_1 > t_0$  va  $0 < d_1 \leq \|x\| \leq d_2$  bo'lganda

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \leq -b < 0$$

tengsizlik bajarilsa, u holda nol yechim asimptotik turg'un bo'ladi, bu erda  $d_1, d_2, b$  - o'zgarmas sonlar.

**Chetaev teoremasi** (Turg'unmaslik haqida). Faraz qilaylik, quyidagilar bajarilgan bo'lsin:

- 1) (6.1) sistema nol yechimga ega bo'lsin;
- 2) biror  $V \subset R^n$  sohada differensiallanuvchi  $v(x) = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funksiya mavjud bo'lsin;
- 3)  $x_i = 0 (i = \overline{1, n})$  nuqta  $V$  sohaning chegarasiga tegishli bo'lsin;
- 4) shunday  $e_0 > 0$  son mavjud bo'lsinki,  $V$  soha chegarasining  $\|x\| \leq e_0$  tengsizlik o'rinli bo'ladigan qismida  $v = 0$  bo'lsin;
- 5)  $V$  sohada  $v > 0$  bo'lsin,  $t > t_0$  da esa

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \geq w(x) > 0, \quad x \in V$$

bo'lsin, bu erda  $w$  uzluksiz funksiya.

U holda (6.1) sistemaning nol yechimi turg'un bo'lmaydi.

(6.1) sistemaning yechimi oldindan ma'lum bo'lmagan hollarda  $v$  Lyapunov funksiyasini qurishning umumiy usuli mavjud emas. Ba'zi hollarda Lyapunov funksiyasini  $v = \sum_{i,j} b_{i,j} x_i x_j$  kvadratik forma yoki berilgan sistemaning o'ng tomoniga kirgan chiziqli bo'lmagan funksiyalardan olingan integrallar va kvadratik formaning yig'indisi ko'rinishida qurish mumkin bo'ladi.

Nol yechimlarni turg'unlikka tekshiring.

**6.1-misol.**  $\dot{x} = 2y^3 - x^5, \dot{y} = -x - y^3 + y^5$ .

◀  $v = v(x, y) = x^2 + y^4$  differensiallanuvchi funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

- a)  $x^2 + y^2 \neq 0$  da  $v = v(x, y) > 0, v(0,0) = 0$ ;
- b) (0,0) nuqtaning biror kichik atrofida

$$\frac{dv}{dt} = 2x(2y^3 - x^5) + 4y^3(-x - y^3 + y^5) = -2(x^6 + 2y^6 - 2y^8) \leq 0.$$

U holda Lyapunovning ikkinchi teoremasiga binoan nol yechim turg'un bo'ladi. ▶

**6.2-misol.**  $\dot{x} = y - x + xy, \dot{y} = x - y - x^2 - y^3$ .

◀  $v = v(x, y) = x^2 + y^2$  differensiallanuvchi funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

a)  $x^2 + y^2 \neq 0$  da  $v = v(x, y) > 0$ ,  $v(0,0) = 0$ ;

b)  $\frac{dv}{dt} = 2x(y - x + xy) + 2y(x - y - x^2 - y^3) = -2((x - y)^2 + y^4) \leq 0$ .

Shunday qilib, Lyapunovning ikkinchi teoremasiga binoan nol yechim turg'un bo'ladi. Bundan tashqari,  $z = 2((x - y)^2 + y^4)$  sirtning ichi chuqur idish ko'rinishida bo'lganligi uchun shunday bir yetarlicha kichik  $0 < d_1 \leq \|x\| \leq d_2$  atrof topiladiki, bu atrofda  $\frac{dv}{dt} \leq -b < 0$  ( $b$ -son) bo'ladi. Shuning uchun bu holda nol yechim asimptotik turg'un bo'ladi. ▶

**6.3-misol.**  $x = x^3 - y$ ,  $y = x + y^3$ .

◀  $v = v(x, y) = x^2 + y^2$  funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

a)  $V : x^2 + y^2 \neq 0$  sohada  $v = v(x, y) > 0$ .  $V$  sohaning chegarasida  $((0,0),0)$  nuqtada  $v(0,0) = 0$ ;

b)  $(x_1, x_2) \in V$  da  $\frac{dv}{dt} = 2x(x^3 - y) + 2y(x + y^3) = 2(x^4 + y^4) > 0$ .

U holda Chetaev teoremasiga ko'ra, nol yechim turg'un emas ( $w = w(x, y)$  sifatida  $w = 2(x^4 + y^4)$  funksiyani olishimiz mumkin). ▶

**Manfiylik shartlari.** Koeffitsientlari haqiqiy bo'lgan ushbu

$$a_0 l^n + a_1 l^{n-1} + \dots + a_{n-1} l + a_n = 0, \quad a_0 > 0 \quad (6.2)$$

tenglama ildizlarining barcha haqiqiy qismlari manfiy bo'lish shartlarini o'rganamiz.

1) **Zaruriy shart:** barcha  $a_i > 0$  bo'ladi.  $n \leq 2$  bo'lgan holda bu shart etarli hamdir.

2) Ushbu matrisa

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

*Gurvis matrisasi* deyiladi.

Bu matrisaning bosh diagonalida  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sonlar turadi. Har bir satrdagi har bir sonning indeksi o'zidan oldingi sonning indeksidan 1 taga kam.  $i > n$  yoki  $i < 0$  indeksli  $a_i$  sonlar o'rniga nol qo'yiladi.

**Raus-Gurvis kriteriysi:** (6.2) tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismlari manfiy bo'lishi uchun Gurvis matrisasining hamma bosh diagonal minorlarining

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

musbat bo'lishi zarur va yetarli.

3) **Lenar-Shipar kriteriysi:** (6.2) tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismlari manfiy bo'lishi uchun barcha  $a_i > 0$  va  $\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-3} > 0, \Delta_{n-5} > 0, \dots$  bo'lishi zarur va yetarli.

Bu shartlar Raus-Gurvis shartlariga teng kuchli, ammo ular kamroq sondagi determinantlarni o'z ichiga olganligi uchun ham Raus-Gurvis kriteriysidan ko'ra qulayroqdir.

4) **Mixaylov kriteriysi:** (6.2) tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismlari manfiy bo'lishi uchun barcha  $a_n a_{n-1} > 0$  bo'lishi va

$$p(x) = a_n - a_{n-2}x + a_{n-4}x^2 - \dots, \quad q(h) = a_{n-1} - a_{n-3}h + a_{n-5}h^2 - \dots$$

ko'phadlarning ildizlari

$$0 < x_1 < h_1 < x_2 < h_2 < \dots$$

tengsizliklarni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

Ko'phadning hamma ildizlari haqiqiy qismlarining manfiylik shartlaridan, masalan, Raus-Gurvis yoki Mixaylov kriteriylaridan foydalanib, nol yechimni turg'unlikka tekshiring.



**6.4-misol.**  $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0$ .

◀Nol yechimning turg'unligini tekshirishda Raus-Gurvis kriteriysidan foydalanamiz. Bu holda Gurvis matrisasi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi. Uning bosh diagonal minorlari

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

musbat. Shuning uchun, Raus-Gurvis kriteriysiga ko'ra,  $l^3 + 2l^2 + 2l + 3 = 0$  karakteristik tenglamaning hamma ildizlari manfiy bo'ladi. Shunday qilib, nol yechim asimptotik turg'un bo'ladi. ▶

**6.5-misol.**  $y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0$ .

◀Tenglamaning hamma koeffitsientlari musbat ( $a_i > 0$ ) bo'lganda Lenar-Shipar shartlaridan foydalanish qulay bo'ladi. Biz qarayotgan holda  $n = 4$  bo'lganligi uchun  $\Delta_3$  va  $\Delta_1$  minorlarning ishorasini tekshirish kifoya. Bevosita hisoblashlar ko'rsatadiki,

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 36 & 14 & 8 \\ 0 & 45 & 36 \end{vmatrix} = -144 < 0,$$

ya'ni

$$f(l) = l^4 + 8l^3 + 14l^2 + 36l + 45 = 0$$

tenglamaning hamma ildizlari manfiy haqiqiy qismlarga ega emas. Ildizlardan birortasining haqiqiy qismi nolga teng bo'lib qolishi mumkin, deb faraz qilamiz:

$l = iw$ . U holda  $w^4 - 8iw^3 - 14w^2 + 36iw + 45 = 0$ , yoki  $w^4 - 14w^2 + 45 = 0$  va  $-8w^3 + 36w = 0$  bo'lishi lozim. Oxirgi munosabat bunday bo'lishi mumkin emasligini ko'rsatadi. Shunday qilib, kamida bitta ildiz musbat haqiqiy qismga ega. Bu esa nol yechim turg'un emas, degani-dir. ▶

**6.6-misol.**  $y^V + y^{IV} + 8y''' + 6y'' + 15y' + 8y = 0$ .

◀ Mixaylov kriteriysidan foydalanamiz. Bu erda  $p(x) = 8 - 6x + x^2$ ,  $q(h) = 15 - 8h + h^2$ ,  $a_n = 8 > 0$ ,  $a_{n-1} = 15 > 0$ . Bundan tashqari,  $p(x) = 0$ ,  $q(h) = 0$  tenglamalarning ildizlari  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ ,  $h_1 = 3$ ,  $h_2 = 5$ , ular  $0 < x_1 < h_1 < x_2 < h_2$  tengsizliklarni qanoatlantiradi. Shunday qilib, nol yechim asimptotik turg'un bo'ladi. ▶

Quyidagi tenglamalarda  $a$  va  $b$  parametrlarning qanday qiymatlarida nol yechim asimptotik turg'un bo'ladi?

**6.7-misol.**  $y''' + ay'' + by' + 2y = 0$ .

◀ Avvalo  $a > 0$ ,  $b > 0$  zaruriy shart bajarilishi kerak. Endi Gurvis matrisasining bosh diagonal minorlarini tuzamiz:

$$\Delta_1 = a > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{vmatrix} = ab - 2 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & b & a \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2ab - 4 > 0.$$

Bulardan kelib chiqadiki, nol yechim asimptotik turg'un bo'lishi uchun  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $ab > 2$  shartlarning bajarilishi zarur va yetarli. ▶

**6.8-misol.**  $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + ay = 0$ .

◀ Mixaylov kriteriysidan foydalanamiz. Bu erda  $p(x) = a - 3x + x^2$ ,  $q(h) = 2 - 2h$ ,  $a_n = a > 0$ ,  $a_{n-1} = 2 > 0$ . Bundan tashqari,  $p(x) = 0$ ,  $q(h) = 0$  tenglamalarning ildizlari  $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4a}}{2}$ ,  $h_1 = 1$  bo'lib, ular  $0 < x_1 < h_1 < x_2$  tengsizliklarni qanoatlantiradi. Shunday qilib,  $a$  parametr  $0 < 3 - \sqrt{9-4a} < 2$  tengsizliklarni qanoatlantirishi kerak. Bu erdan  $0 < a < 2$  ekanligini ko'rish qiyin emas. ▶

## IV. INTERNET MA'LUMOTLARI

### Глава I

## СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### 1. Основные определения

Система уравнений вида

$$F_i\left(t; x_1(t), x_1'(t), \dots, x_1^{(m_1)}(t); \dots; x_k(t), x_k'(t), \dots, x_k^{(m_k)}(t)\right) = 0, \quad (1)$$
$$i = \overline{1, s}, \quad t \in (a, b),$$

связывающих независимую переменную  $t$ , искомые функции  $x_1(t), \dots, x_k(t)$  и их производные до порядков  $m_1, \dots, m_k$  соответственно, называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений в общей форме*.

Взятая по всем уравнениям системы (1) сумма порядков старших производных  $m_1 + \dots + m_k$  искомых функций определяет *порядок системы*.

Совокупность функций, представимых в виде вектора  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_k(t) \end{pmatrix}$  является *решением* системы (1), если подстановка их в уравнения системы превращает каждое уравнение в тождество.

**Пример.** Система

$$\begin{cases} y'' + 3z = 0, \\ z'' - y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

является системой четвёртого порядка в общей форме; её решение есть вектор  $\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ .

Система записана в нормальной форме, если удаётся разрешить её уравнения относительно первых производных искомых функций:

$$x_q'(t) = f_q(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad q = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Систему можно преобразовать к нормальной форме, обозначив производные искомых функций как дополнительные неизвестные функции.

Федеральное агентство по образованию  
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет УПИ»

---

**А.В. ЗЕНКОВ**

---

**СИСТЕМЫ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
И  
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ**

---

Учебник  
для студентов физических специальностей

Екатеринбург  
2010

- верхнее решение.

Аналогично проверяется неравенство  $\frac{d\alpha}{dt} - f(\alpha(t)) < 0$  (сделайте это самостоятельно), т.е.  $\alpha(t)$  – нижнее решение. Первая часть теоремы 5 доказана.

**2. Неустойчивость.** Пусть  $V_x(x_0) > 0$ . Покажем, что  $\exists \varepsilon > 0$  такое, что для  $\forall \delta > 0 \exists x_\delta, |x_\delta - x_0| < \delta$  такое, что  $t > 0$ , при котором решение задачи (3), (5)  $v(t)$  отклонится от стационарного решения больше чем на  $\varepsilon$ :  $|x(t) - x_0| > \varepsilon$ . Это будет означать, что стационарное решение задачи (3), (4) является неустойчивым.

Рассмотрим интервал  $|x_\delta - x_0| < \delta$  и построим нижнее решение задачи (3), (5) в виде

$$\alpha(t) = x_0 + \rho(1 - \sigma e^{-\mu t}),$$

где  $0 < \rho < \mu$ ,  $0 < \sigma < 1$ ,  $\rho > 0$  – постоянные.

Поскольку  $\alpha(0) = x_0 + \rho(1 - \sigma)$ , то выбирая  $\sigma$  достаточно близким к единице, можно получить  $\alpha(0)$  меньше  $\forall x_\delta$ :  $|x_\delta - x_0| < \delta$ . При  $t \rightarrow \infty$   $\alpha(t) \rightarrow x_0 + \rho$  снизу, и, следовательно, при  $t$  больших некоторого  $t^*$   $\alpha(t) > x_0 + \frac{\rho}{2}$ . Следовательно, решение  $v(t)$  задачи (3), (5) (если оно существует) в силу Теоремы 3 отклонится от стационарного решения больше чем на  $\varepsilon = \frac{\rho}{2}$ .

оно существует) в силу Теоремы 3 отклонится от стационарного решения больше чем на  $\varepsilon = \frac{\rho}{2}$ .

$|x(t) - x_0| > |\alpha(t) - x_0| > \frac{\rho}{2}$ . Это и означает неустойчивость стационарного решения.

Остается проверить, что  $\alpha(t)$  удовлетворяет неравенству для нижнего решения. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} - V(\alpha(t)) &= V'(\alpha(t)) - \rho\sigma\mu e^{-\mu t} = V'(\alpha(t)) - \rho\sigma\mu e^{-\mu t} - V'(\alpha(t)) + V(x_0) - V(x_0) - \\ &= \rho\sigma\mu e^{-\mu t} - [V'(\alpha(t)) - V(x_0)] - V(x_0) - \rho\sigma\mu e^{-\mu t} = -V'(\alpha(t)) - V(x_0) \end{aligned}$$

(по теореме Лагранжа)

$$\begin{aligned} &= \rho\sigma\mu e^{-\mu t} - V'_x(x_0 + \theta\rho(1 - \sigma e^{-\mu t}))\rho(1 - \sigma e^{-\mu t}) = \\ &= -V'_x(x_0)\rho(1 - \sigma e^{-\mu t}) - \rho\sigma\mu e^{-\mu t} - [V'_x(x_0) - V'_x(x_0 + \theta\rho(1 - \sigma e^{-\mu t}))]\rho(1 - \sigma e^{-\mu t}), \end{aligned}$$

где  $0 < \theta < 1$ .

$$\frac{d\alpha}{dt} - f(\alpha(t)) = -V'_x(x_0)\rho(1 - \sigma e^{-\mu t}) + \rho\sigma\mu e^{-\mu t} - [V'_x(x_0) - V'_x(x_0 + \theta\rho(1 - \sigma e^{-\mu t}))]\rho(1 - \sigma e^{-\mu t})$$

Выберем  $\rho$  столь малым, что

$$\rho\sigma\mu e^{-\mu t} + [V'_x(x_0) - V'_x(x_0 + \theta\rho(1 - \sigma e^{-\mu t}))]\rho(1 - \sigma e^{-\mu t}) < V'_x(x_0)\rho(1 - \sigma e^{-\mu t}).$$

Тогда получим, что

$$\frac{d\alpha}{dt} - f(\alpha(t)) < 0 \quad \text{Этим завершается доказательство второй части теоремы 5}$$

**Пример.** Рассмотрим уравнение (3) в случае, когда  $V(x) = x(x^2 - 1)$  и исследуем устойчивость его стационарных точек. Получаем три стационарные точки:  $x = -1$  и  $x = 0$ . Производная равна  $V'_x(x) = 3x^2 - 1$ . В стационарных точках  $V'_x(-1) = 2 > 0$ ,  $V'_x(0) = -1 < 0$ . Следовательно, стационарные точки  $x = -1$  неустойчивые, а стационарная точка  $x = 0$  асимптотически устойчивая.

$$x(0) = x_0 \quad (5)$$

**Определение.** Стационарное решение  $x(t) = x_*$  задачи (3), (4) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого  $\varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$  такое, что при  $|x_0 - x_*| < \delta$  для  $\forall t \geq 0 \exists x(t)$  – решение задачи (3), (5), такое, что  $|x(t) - x_*| < \varepsilon$ .

Стационарное решение называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и удовлетворяет дополнительному требованию  $x(t) \rightarrow x_*$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Решение, не являющееся устойчивым, называется *неустойчивым*. Определение неустойчивости решения может быть дано как отрицание приведенного выше определения устойчивости.

Ответ на вопрос об устойчивости или неустойчивости стационарного решения задачи (3), (4) следует из более общей *теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению*.

**Теорема 5.** Пусть  $V(x_*) = 0$  и функция  $V(x)$  непрерывна вместе с производной в некоторой окрестности  $|x - x_*| \leq \mu$

Тогда решение задачи (3), (4)  $x = x_*$  будет устойчивым, если  $V'_+(x_*) < 0$ , и неустойчивым, если  $V'_+(x_*) > 0$ .

**Доказательство.**

1. **Асимптотическая устойчивость.** Пусть  $V'_+(x_*) < 0$ . Тогда для  $\forall \varepsilon > 0$  выберем  $\delta > 0$  так, что  $\delta < \min(\mu, \varepsilon)$ . Определим функции  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  с помощью следующих выражений:

$$\alpha(t) = x_* - \delta e^{-pt}, \beta(t) = x_* + \delta e^{-pt},$$

где  $p > 0$  – постоянная. Покажем теперь, что при достаточно малых  $\delta$  и  $p$  функции  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  являются соответственно нижним и верхним решениями задачи (3), (5), если  $|x_0 - x_*| < \delta$ . Тогда, в силу Теоремы 4 решение задачи (3), (5) существует и удовлетворяет неравенствам

$$\alpha(t) < x(t) < \beta(t) \text{ при } 0 \leq t < \infty,$$

из которых следует, что для  $x = x_*$  выполняется определение асимптотической устойчивости.

Проверим выполнение соответствующего дифференциального неравенства для  $\beta(t)$ . Имеем, учитывая, что  $V(x_*) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} - V(\beta(t)) &= \delta p e^{-pt} - V(x_* + \delta e^{-pt}) = \delta p e^{-pt} - V(x_* + \delta e^{-pt}) - V(x_*) + V(x_*) = \\ &= -\delta p e^{-pt} - [V(x_* + \delta e^{-pt}) - V(x_*)] = \underbrace{-\delta p e^{-pt}}_{\geq 0} - \underbrace{[V(x_* + \delta e^{-pt}) - V(x_*)]}_{\leq 0} \end{aligned}$$

(по теореме Лагранжа)

$$\begin{aligned} &= \delta p e^{-pt} - V_x(x_*) (\delta \delta e^{-pt}) \delta e^{-pt} = \delta e^{-pt} \left( p - V_x(x_*) V_x(x_* + \delta \delta e^{-pt}) V_x(x_*) \right) = \\ &= \delta e^{-pt} \left( -p - V_x(x_*) - V_x(x_* + \theta \delta e^{-pt}) - V_x(x_*) \right), \end{aligned}$$

где  $0 \leq \theta \leq 1$ . Выберем  $\delta$  таким малым, чтобы

$$|V_x(x_* + \theta \delta e^{-pt}) - V_x(x_*)| \leq \eta < \frac{V_x(x_*)}{2},$$

тогда

$$\frac{d\beta}{dt} - V(\beta(t)) \geq \delta e^{-pt} \left( -p - \frac{V_x(x_*)}{2} \right).$$

Выберем  $0 < p < \frac{-V_x(x_*)}{2}$ . Тогда, поскольку  $V_x(x_*) < 0$ , получим, что  $\frac{d\beta}{dt} - V(\beta(t)) > 0$ , т.е.  $\beta(t)$

**Замечание 1.** Имеет место следующее утверждение о *неустойчивости*.

**Теорема (о неустойчивости).** Пусть задана нормальная система уравнений (2) с постоянной матрицей  $A$ , имеющей хотя бы одно собственное значение с положительной действительной частью. Пусть при  $t \geq t_0$  для достаточно малых значений  $\|\bar{x}\|$  выполнено неравенство  $\|\bar{F}(t, \bar{x})\| \leq M \|\bar{x}\|^\alpha$ , где  $\alpha, M > 0$ .

Тогда положение равновесия  $\bar{x} = 0$  системы уравнений (2) неустойчиво.

**Замечание 2.** При исследовании устойчивости положения равновесия по первому приближению важно иметь возможность установить тот факт, что все собственные значения действительной матрицы  $A$ , т.е. все корни характеристического многочлена, имеют отрицательные действительные части. Известна следующая теорема.

**Теорема (Гурвица)** Для того чтобы у многочлена  $P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$  с действительными коэффициентами все корни имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные (угловые) миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (a_k = 0, \quad k > n)$$

были положительными, т.е. чтобы

$$A_1 = a_1 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_n \end{vmatrix} = A_{n-1} a_n > 0$$

Последнее условие можно заменить условием  $a_n > 0$ , т.е. для многочлена второй степени  $P_2(z) = z^2 + a_1 z + a_2$  имеем  $a_1 > 0, a_2 > 0$ , а для многочлена третьей степени  $P_3(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$  нужно  $a_1 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, a_3 > 0$ .

## §5. Применение теорем Чаплыгина в некоторых задачах теории устойчивости.

Пусть задано автономное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (3)$$

т.е. уравнение, правая часть которого не содержит  $t$  явно. Каждый корень уравнения  $F(x) = 0$  является решением уравнения (3). Не ограничивая общности, будем считать, что уравнение (3) имеет *стационарное решение*  $x = x_0$ , т.е.  $F(x_0) = 0$ . Стационарное решение является решением задачи Коши, когда для уравнения (3) задается начальное условие

$$x(0) = x_0. \quad (4)$$

Естественным является вопрос об *устойчивости* этого решения по *Лиувелю*, т.е. *устойчивости относительно малых возмущений начального условия*, когда вместо условия (4) для уравнения (3) ставится дополнительное условие

## **V. ADABIYOTLAR.**

1. Karimov I. “O‘zbekiston XXI asr bo‘sag‘asida”, T.: 1997 yil.
2. Karimov I. “Barkamol avlod orzusi”, T.: 1999 yil.
3. Karimov I. Jahon moliyaviy – iqtisodiy inqirozi, O‘zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo‘llari va choralari. – T.: O‘zbekiston, 2009. – 56 b.
4. Karimov I. Mamlakatimizda demokratik islohotlarni yanada chuqurlashtirish va fuqarolik jamiyatini rivojlantirish konsepsiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2010. – 56 b.
5. Karimov I. O‘zbekiston Respublikasi mustaqilligining 19 yilliga bag‘ishlangan tantanali marosimda so‘zi, “O‘zbekiston ovozi” gazetasi, 2010 yil 1-sentabr.
6. Karimov I. “Mamlakatimizni modernizatsiya qilish yo‘lini izchil davom – taraqqiyotimizning muhim omilidir”, “Ishonch” gazetasi, 2010 yil 8 dekabr.
7. Karimov I. “Barcha reja va dasturlarimiz vatanimiz taraqqiyotini yuksaltirish, xalqimiz farovonligini oshirishga xizmat qiladi”, “Xalq so‘zi” gazetasi, 2011 yil 22 yanvar.
8. I. Nigmayov, M. Tojiyev ”favqulotda vaziyatlar va fuqoro muhofazasi” Toshkent “Iqtisod-moliya” 2011.
9. O‘zbekiston respublikasi Prezidentining farmoni: “O‘zbekiston Respublikasi favqulotda vaziyatlar vazirligini tashkil etish to‘g‘risida” 1997. 4.03
10. O‘zbekiston Respublikasi qonuni: “Mehnat muhofazasi to‘g‘risida”1993. 6. 05
11. O‘zbekiston Respublikasi qonuni : “Aholi va hududlarni tabiiy va tehnagen hususiyatli favqulotda vaziyatlardan muhofaza qilish to‘g‘risida” 1999. 20. 08
12. O‘zbekiston Respublikasi qonuni: “Fuqoro muhofazasi to‘g‘risida” 2000.20.05
13. O‘zbekiston Respublikasi qonuni : “Terrarizmga qarshi kurash to‘g‘risida” 2000. 15. 12



14. O'zbekiston Respublikasi qonuni :“Yong'in hafsizligi to'g'risida” 2009.30.09.
15. O'zbekiston Respublikasi Vazirlar mahkamasining 427-son Qarori: “O'zbekiston Respublikasida aholini favqulotda vaziyatlardan muhofaza qilishga tayorlash tartibi to'g'risida” 1998. 07. 10
16. O'zbekiston Respublikasi vazirlar mahkamasining 558-son qarori: “O'zbekiston Respublikasi favqulotda vaziyatlarda ularni oldini olish va harakat qilish davlat tizimi to'g'risida” 1997. 23. 12
17. O'zbekiston Respublikasi vazirlar mahkamasining 455-son Qarori: “tehnogen - tabiiy va ekologik tisdagi favqulotda vaziyatlarning tasnifi to'g'risida” 1998.27.10.
18. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Наука, М., 1969.
19. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Наука, М., 1965.
20. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат., 1963.
21. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 4, Физ.-мат-гиз. 1958.
22. Петровский Н.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1964.
23. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Соб.соч.т.и.изд., 1956.
24. Салохитдинов М.С., Наритдинов Ғ.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Т. Ўзбекистон, 1994.
25. Қори Ниёзий Т.Н. Танланган асарлар. 4-том. Дифференциал тенгламалар. Т. Фан. 1968.
26. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. Наука, 1979.
27. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., ВШ, 1978.

## INTERNET SAYTLARI

<http://www.nsu.ru/icem/grants/etfm/>;

<http://www.lib.homelinux.org/math/>;

<http://www.eknigu.com/lib/mathematics/>;

<http://www.rsl.ru/>- Российская государственная библиотека;

<http://www.msu.ru/>- Московский государственный университет;

<http://www.nlr.ru/>- Российская национальная библиотека;

<http://www.namsu.uz/>- Наманган Давлат университети;

<http://www.el.tfi.uz/pdf/enmcoq22.uzk.pdf>;

<http://www.el.tfi.uz/pdf/enmcoq22.uzl.pdf>;

## MUNDARIJA

|                                                                                                                |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>I. KIRISH .....</b>                                                                                         |  |
| <b>II ASOSIY QISM .....</b>                                                                                    |  |
| <b>I-BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNING SISTEMASI<br/>HAQIDA MA'LUMOTLAR. ....</b>                      |  |
| 1§ -Differensial tenglama ta'rifi va uning turlari. ....                                                       |  |
| 2-§. - hiziqli differensial tenglamalar sistemasi.....                                                         |  |
| <b>II BOB DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNING HOATLAR<br/>TEKISLIGI. LYAPUNOV MA'NOSIDA TURG'UNLIK . ....</b> |  |
| 1-§. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli sistemaning holatlar tekisligi. ....                                |  |
| 2-§. Turg'unlik. lyapunov ma'nosidagi turg'unlik. asimptotik<br>turg'unlik.....                                |  |
| <b>III. XULOSA. ....</b>                                                                                       |  |
| <b>IV. FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI. ....</b>                                                            |  |
| <b>V. INTERNET MA'LUMOTLARI.....</b>                                                                           |  |

**NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI**  
**Bakalavr uchun bitiruv malakaviy ishga**  
**TOPSHIRIQ VARAQASI**

Matematika fakulteti 5130100 – Matematika yo`nalishi bo`yicha “Matematika” kafedrasining bitiruvchisi.....ning

1. Bitiruv Malakaviy ishi mavzusi.....

.....

Ilmiy rahbari .....

Universitet rektorining ish mavzusi va rahbarini tasdiqlash to`g`risidagi buyrug`i

№ \_\_\_\_\_ A/s – sonli “\_\_\_\_\_ 20\_\_ yil”.

Bitiruv Malakaviy Ishni topshirish muddati 2015 yil \_\_\_\_ - \_\_\_\_\_.

II. Bitiruv Malakaviy Ishni bajarish uchun zarur ma`lumotlar, mavzuni asoslash, tushuntirish xati 10-15 ming so`zdan iborat yozilishi kerak.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

III. Malakaviy ishni bajarish davomida yechilishi ko`zda tutilayotgan masalalarning qisqacha bayoni.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

IV. Taklif etilayotgan adabiyotlar

.....  
.....  
.....  
.....

Topshiriqni qabul qilish vaqti: 20\_\_ yil ..... sentyabr’.

Bitiruv malakaviy ishni kafedraga topshirish muddati 2015 yil \_\_\_\_ - \_\_\_\_ may.

Ushbu topshiriq reja “Matematika” kafedrasining 20\_\_ yil \_\_\_\_ sentyabridagi majlisida qabul qilindi. (Bayonnoma №..... )

“Matematika”

kafedrasining mudiri, dotsent: .....

N.Xatamov

Ilmiy rahbar:

.....

Topshiriqni bajarish uchun qabul qildim: .....

**Namangan Davlat universiteti**  
**Matematika kafedrası**

«TASDIQLAYMAN»

Kafedra mudiri f.m.f.n.,  
N.Xatamov

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ yil

Talaba \_\_\_\_\_ ga  
(familiyasi, ismi, sharifi)

***BITIRUV MALAKAVIY ISH BO`YICHA TOPSHIRIQ***

1. Bitiruv malakaviy ishning  
mavzusi \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ yil kafedra  
yig`ilishida ma`qullangan.

2. Bitiruv malakaviy ishni topshirish muddati \_\_\_\_\_

3. Bitiruv malakaviy ishni bajarishga doir boshlang`ich ma`lumotlar \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

4. Bitiruv malakaviy ish bo`limlari bo`yicha maslahatchilar.

| № | Bo`lim mavzusi | Maslahatchi o`qituvchi | Imzo, sana        |                     |
|---|----------------|------------------------|-------------------|---------------------|
|   |                |                        | Topshiriq berildi | Topshiriq bajarildi |
|   |                |                        |                   |                     |
|   |                |                        |                   |                     |
|   |                |                        |                   |                     |



|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Bitiruv malakaviy ish rahbari \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_ (familiyasi, ismi, sharifi) (imzo)

Topshiriqni bajarishga oldim \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_ (familiyasi, ismi, sharifi) (imzo)

Topshiriq berilgan sana «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ yil.

Kafedra mudiri \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_ (familiyasi, ismi, sharifi) (imzo)

### BITIRUV MALAKAVIY ISHNING BAJARILISHI

*5130100-Matematika yo`nalishi bo'yicha bakalavriat bosqichi  
 bitiruvchisi*

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

### bitiruv malakaviy ish mavzusi

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

---

Ilmiy rahbari: \_\_\_\_\_

Nam DU rektorining BMI mavzusi va rahbarining biriktirilishi haqidagi buyrug`i  
\_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_ yil.

BMIning kafedraga topshirilgan vaqti «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_y.

Imzolar: Talaba \_\_\_\_\_

Ilmiy rahbar \_\_\_\_\_

Kafedra mudiri \_\_\_\_\_

Ishning taqrizga yuborilgan vaqti: \_\_\_\_\_

Taqriz qilingan vaqti: \_\_\_\_\_

**Ishni himoyaga taqdim qilish haqida kafedra mudirining qarori:**

---

Kafedra mudiri imzosi: \_\_\_\_\_ sana \_\_\_\_\_

Talaba \_\_\_\_\_ ning  
bitiruv malakaviy ishi DAK ning «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ yildagi yig`ilishiga himoyaga  
tavsiya qilindi.

**Fakultet dekani:**

**A.Mirzamov**



# NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulteti \_\_\_\_\_

Ta'lim yo'nalishi \_\_\_\_\_

Bitiruvchi \_\_\_\_\_

ning

Mavzu \_\_\_\_\_

| №   | Bitiruv mala kaviy ishning darajasi                                                                                                      | Ball | To'plagan ball |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|----------------|
| 1.  | Hajmi va sifatli rasmiylashtirish (tushuntirish hajmi 10-15 ming so'z hajmida, chizmalar A 2 formatli qog'ozda 5-6 varoq bo'lishi kerak) |      |                |
|     | a) talabga javob beradi;                                                                                                                 | 10   |                |
|     | b) talabga javob berishi to'la emas;                                                                                                     | 8    |                |
|     | c) rasmiylashtirish sifatli emas.                                                                                                        | 6    |                |
| 2.  | <b>Mavzuning tanlanishi</b>                                                                                                              |      |                |
|     | a) buyurtmachi tashkilot tavsiya qilgan;                                                                                                 | 10   |                |
|     | b) davlat dasturi yoki grant loyihasi bo'yicha;                                                                                          | 8    |                |
|     | c) Nam DU dasturi yoki boshqa muammo.                                                                                                    | 6    |                |
| 3.  | Mavzuning dolzarbligini asoslash:                                                                                                        |      |                |
|     | a) yetarli darajada asoslangan;                                                                                                          | 10   |                |
|     | b) yetarli darajasi asoslanmagan;                                                                                                        | 8    |                |
|     | Noaniq asoslangan.                                                                                                                       | 6    |                |
| 4.  | <b>Maqsad va vazifalarning ifodalanganligi</b>                                                                                           |      |                |
|     | a) aniq;                                                                                                                                 | 10   |                |
|     | b) aniqligi to'la emas;                                                                                                                  | 8    |                |
|     | c) aniq emas.                                                                                                                            | 6    |                |
| 5.  | Ilmiy tadqiqot usullaridan foydalanish                                                                                                   |      |                |
|     | a) to'la;                                                                                                                                | 10   |                |
|     | b) qisman;                                                                                                                               | 8    |                |
|     | c) deyarli foydalanmagan;                                                                                                                | 6    |                |
| 6.  | Olingan natijalarning yangilik va ishonchlik darajasi                                                                                    |      |                |
|     | a) yangi va ishonchli;                                                                                                                   | 10   |                |
|     | b) ilgari olinganga qiyoslangan;                                                                                                         | 8    |                |
|     | c) ishonchliligi to'la emas.                                                                                                             | 6    |                |
| 7.  | Xulosa qismining mazmuni                                                                                                                 |      |                |
|     | a) bevosita qo'llashga tavsiyalar berilgan;                                                                                              | 10   |                |
|     | b) tavsiyalar ishonchli emas;                                                                                                            | 8    |                |
|     | c) tavsiyalar tushunarsiz yoki umuman berilmagan.                                                                                        | 6    |                |
| 8.  | Adabiyotlardan foydalanish                                                                                                               |      |                |
|     | a) Xorijiy, O'zbekiston Respublikasi ilmiy jurnallari, monografiyalar, internet materiallaridan yetarli miqdorda foydalangan;            | 10   |                |
|     | b) Ilmiy adabiyotlardan yetarli foydalangan;                                                                                             | 8    |                |
|     | c) faqat darslik, o'quv qo'llanma, metodik ko'rsatmalar, ma'ruza matnlari, ma'lumotnomalar va boshqalardan foydalangan.                  | 6    |                |
| 9.  | Himoya (ma'ruza) qilish                                                                                                                  |      |                |
|     | a) a'lo;                                                                                                                                 | 10   |                |
|     | b) yaxshi;                                                                                                                               | 8    |                |
|     | c) qoniqarli.                                                                                                                            | 6    |                |
| 10. | Tashqi taqriz                                                                                                                            |      |                |
|     | a) a'lo;                                                                                                                                 | 10   |                |
|     | b) yaxshi;                                                                                                                               | 8    |                |
|     | c) qoniqarli.                                                                                                                            | 6    |                |
|     | <b>Bitiruv malakaviy ish bo'yicha yig'ilgan yakuniy ball</b>                                                                             | 100  |                |

Izoh: Har bir band bo'yicha aniqlangan ball doiraga olib chiqiladi va umumiy yig'ilgan ballni 100 ga nisbatan foiz chiqariladi.

Talabning BMI bo'yicha to'plagan reyting bali \_\_\_\_\_%

**DAK raisi:** \_\_\_\_\_

A'zolari:: \_\_\_\_\_

:

Kotiba :

M.O'. \_\_\_\_\_

sana " \_\_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_\_ yil.

**№ sonli yig'ilishi bayonnomasidan**

**KO`CHIRMA**

**Kun tartibi:** Bitiruv malakaviy ishlarni himoyaga tavsiya etish.

1. Kafedra mudiri N.Xatamov talaba O'.M.Pulatovanning "Chiziqli differensial tenglamalarni turg'unligini tahlili" Bitiruv malakaviy ishini taqdim etdi.
2. O'.M.Pulatova Bitiruv malakaviy ishining mohiyatini qisqacha bayon etdi. (Bitiruv malakaviy ishning mavzusi va unda ko`rilgan ilmiy muammolar hamda ularning yechimi haqida).

**3. Savollar:**

M. Sharipova.-Differensial tenglamalar sistemasining turlarini sanang?

N.Xatamov-Chiziqli differensial tenglamalar turg'unligini ayting.

4. Talabaning ilmiy rahbari Yu.Toshmirzayev talaba Pulatova O'.M. haqida ko`pgina ijobiy fikrlar bildirdi. Bitiruv malakaviy ishning amaldagi nizomga mos kelishini va DAK da himoya qilish uchun tavsiya etishlarini so`radi.

**Kafedra yig'ilishi qaror qiladi:**

Pulatova O'.M. **Chiziqli differensial tenglamalarni turg'unligini tahlili** mavzusida bajarilgan Bitiruv malakaviy ishini DAK da himoya etish uchun tavsiya etilsin.

Bitiruv malakaviy Ishi ichki taqriz uchun kafedra mudiri N.Hatamov, tashqi taqriz uchun NamPI dotsenti M.Olliimovga yo'llansin.

**1. Kafedra mudiri:.....**

**NamDU f.-m.f.n.,**

dotsent **N.Xatamov**