

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

MATEMATIKA YO'NALISHI

BURXONOVA ZULXUMOR ATAVALIXON QIZINING

« OZOD POPULYATSIYANING KVADRATIK DINAMIK
SISTEMALARI » MAVZUSIDAGI

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

NAMANGAN – 2016

OZOD POPULYATSIYANING KVADRATIK DINAMIK SISTEMALARI.

REJA:

I. KIRISH.

II. ASOSIY QISM.

I BOB. KVADRATIK STOXAСТИK OPERATOR.

1.1§ Ozod populyatsiyaning evolutsion operatori.

1.2§ Volterraning diskret modelining kanonik ko'rinishi.

1.3§ Lyapunov funksiya metodi.

1.4§ "Manfiy" yaqinlashish traektoriyasi.

1.5§ Qo'zg'almas nuqtalar.

1.6§ Olingan natijalarni biologik sharhi.

III. XULOSA.

IV. FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

K I R I S H.

“Har qanday millatning rivoji umumbashariyat tarixida tutgan o’rni, mavqeyi va shuhrati bevosita o’z farzandlarining aqliy va jismoniy yetukligiga bog’liqdir”

I.A.Karimov.

Ma'lumki, O'zbekiston Respublikasi mustaqillikka erishgan kunlardan boshlab Respublikamiz Prezidenti Islom Abdug'aniyevich Karimov mamlakatimizdagi kadrlar tayyorlash masalasiga asosiy e'tiborni qaratib kelmoqda. Xususan, 1997 yilning 29 avgustida O'zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining IX sessiyasida “Ta'lim to'g'risida”gi qonuniga asoslangan “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” qabul qilindi. Bu dastur uch bosqichdan iborat:

1-bosqich: 1997-2001 yillar. Bunda kadrlar tayyorlash milliy dasturining amalga oshirish uchun zarur shart sharoitlar yaratish.

2-bosqich: 2001-2005 yillar. Bunda huquqiy me'yoriy hujjatlar asosida barkamol avlodni Davlat ta'limi standartiga javob beradigan qilib tayyorlash maqsad qilib qo'yilgan.

3-bosqich: 2005 yil va undan keyingi yillar. Bunda davr talabiga mos bo'lgan barkamol avlodni jamiyatimizning rivojlanishi darajasida tarbiyalab voyaga yetkazish maqsad qilib qo'yilgan.

Hozirgi paytda Respublikamizda “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”da nazarda tutilgan barcha rejalar muvaffaqiyat bilan amalga oshirildi va davom ettirilmoqda.

Mamlakatimizda uzluksiz ta'lim “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” va “Ta'lim to'g'risida”gi Qonunga muvofiq holda tayyorlangan bo'lib, milliy tajribaning tahlili va ta'lim tizimidagi jahon miqyosidagi yutuqlar asosida tayyorlangan hamda yuksak umumiy va kasb-hunar

madaniyatiga, ijodiy va ijtimoiy faollikka, ijtimoiy siyosiy hayotda mustaqil ravishda mo'ljalni to'g'ri ola bilish mahoratiga ega bo'lgan istiqbol vazifalarini ilgari surish va hal etishga qodir kadrlarning yangi avlodni shakllantirishga yo'naltirilgan.

Barchamizga ma'lumki, hayotimizni barcha sohalarida islohotlarni o'tkazish, "O'zbek modeli" deb nom olgan islohatlar siyosatning asoslari bo'lmish besh tamoyilning birida islohatlarni bosqichma-bosqich o'tkazish vazifasi qo'yilgan.

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining Respublika Oliy Majlisi IX sessiyasida so'zlagan nutqi (1997 yil 29 avgust) va "Ta'lim tarbiya kadrlar tayyorlash tizimining tubdan isloh qilish barkamol avlodni voyaga yetkazish to'g'risida" gi formasi muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Bu esa oliy maktabda o'qitish sistemasini isloh qilishni taqozo etadi. Shuning uchun zamon talabiga mos o'quv qo'llanmalar yaratish milliy dasturni amalga oshirish vazifalaridan biri hisoblanadi.

Xurmatli Prezidentimiz I.A.Karimovning "Jahon moliyaviy iqtisodiy inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo'llari va choralari" nomli asarida hozirgi davrdagi jahon moliyaviy iqtisodiy inqirozining mazmuni, kelib chiqish sabablari va salbiy ta'siri oqibatlari, O'zbekiston inqiroz ta'siri oqibatlarining oldini olish va yumshatishga asos bo'luvchi omillar, mamlakatimiz iqtisodiyotini modernizatsiyalash va yangilashni izchil davom ettirish borasida qo'lga kiritilayotgan yutuqlar, ustuvor yo'nalishlar, mavjud muammolar va ularni hal etish yo'llari to'g'risida talabalarga bilim berish maqsadida asosiy masalalar atroflicha yoritib berilgan. Biz oliy o'quv yurti talabalari va professor o'qituvchilari prezidentimiz tomonidan yozilgan ushbu asarni atroflicha o'rganib, dars berish jarayonida talabalarga uni mohiyatini ochib berish va ulardan kelib chiqadigan muammolarni kundalik tarbiyaviy ta'limiy ishlarimizdagi

elementar muammolarni hal qilishga dasturil amal qilishimiz lozim bo'ladi.¹ Yana biz o'quvchi talabalarga shuni o'rgatishimiz va har bir qiladigan ishlarimizda Prezidentimizning O'zbekiston Respublikasi Oliy majlisi qonunchilik palatasi va Senatining qo'shma majlisidagi 2010-yil 12-noyabrda qilgan "Mamlakatimizda demokratik islohotlarni yanada chuqurlashtirish va fuqarolik jamiyatini rivojlantirish konsepsiyasi" nomli ma'ruzalarida davlat hokimiyati va uni boshqaruvini demokratlashtirish, sud huquq tizimini isloh etish, axborot sohasini isloh qilish va so'z erkinligini ta'minlash, O'zbekistonda saylov erkinligini ta'minlash va saylov qonunchiligini rivojlantirish, fuqarolik jamiyati instituti shakllantirish va rivojlantirish, demokratik bozor islohotlarini va iqtisodiyotini liberallashtirish va yanada chuqurlashtirish kabi masalalar to'g'risida atroflicha ma'ruza qildilar.²

Hozirgi davrda axborot – kommunikatsiya texnologiyalari orqali uzatiladigan axborot jamiyat rivojining eng muhim shartlaridan biri bo'lib qoldi. U ishlab chiqarish resursi, insonlar orasidagi aloqani ta'minlovchi qudratli vositaga aylandi. O'zbekiston Umuman, mazkur sohada samarali huquqiy mexanizmlarni yaratilishi hamda joylardagi sohaga oid qonun hujjatlari ijrosini ta'minlash iste'molchilarning barcha qatlamlari hamda jadallik bilan rivojlanib borayotgan zamonaviy axborot – kommunikatsiya texnologiyalariga mos tushadigan, tubdan yangilangan axborot – kommunikatsiya tarmoqlari vujudga kelishiga zamin yaratib, mamlakatimizda axborotlashtirish jarayonlarini jadallashtirish hamda O'zbekistonning butun jahon axborot hamjamiyatida munosib o'rin egallashiga hizmat qiladi.

¹ Karimov I.A. "Jahon moliyaviy iqtisodiy-inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf etish yo'llari va choralari" Toshkent., "Iqtisodiyot". 2009-yil

² Karimov I.A. "Mamlakatimizda demokratik islohotlarni yanada chuqurlashtirish va fuqarolik jamiyatini rivojlantirish konsepsiyasi". Toshkent., O'zbekiston 2010-yil

Bugun O'zbekistonimiz bosib o'tgan mustaqil taraqqiyot yo'lini holisona baxolar ekanmiz, o'tgan davr mobaynida biz erishgan, dunyo jamiyatchiligi tan olgan olamshumul yutuq va marralar, avvalambor, izchil rivojlanayotgan iqtisodiyotimiz va uning barqaror o'sish sur'atlari, aholi farovonligining yildan–yilga oshib, jahon hamjamiyatida mamlakatimiz obro'-e'tiborining toboro yuksalib borayotgani–bularning barchasi Konstitutsiyamizning asosiga qo'yilgan , chuqur va puxta o'ylangan maqsad, prinsip va normalarning hayotbaxsh samarasi desak, hech qanday mubolag'a bo'lmaydi.³

Muhtaram Prezidentimiz Islom Abdug'aniyevich Karimov, muntazam ravishda yosh avlodning barkamol bo'lib yetishishi va mustaqil O'zbekistonimizning fidoiy kadrlari bo'lmog'i uchun sharoitlar yaratib bermoqdalar, o'zlarining har bir nutqida yoshlarning ta'lim tarbiyasi, bilim saviyasi, dunyoqarashini shakllantirish kabi dolzarb muammolarga alohida e'tibor qaratmoqdalar.

Tabiiyki, bu maqsadlarni yuqori saviyada amalga oshirish uchun oliygohlar, kollej va litseylarning bitiruvchilari har tomonlama yetuk kadrlar bo'lib yetishmog'i – zamon talabidir. Oliygozlarda magistrilar tayyorlashni yuqori saviyada tashkil etish ham shu programmaning bir qismidir.

Muxtarom Prezidentimiz I.A.Karimov, muntazam ravishda yosh avlodning bilimli, barkamol bo'lib yetishishi va mustaqil O'zbekistonimizning fidoyi kadrlari bo'lmog'i uchun sharoitlar yaratib bermoqdalar, o'zlarining har bir nutqlarida yoshlarning ta'lim tarbiyasi, bilim saviyasi, dunyoqarashini shakllantirish kabi dolzarb muammolarga alohida e'tibor qaratmoqdalar. Biz quyida Prezidentimiz I.A.Karimovning turli paytlarda so'zlagan nutqlaridan iqtiboslar keltiramiz.

³ Karimov I.A. "Mamlakatimizni modernizatsiya qilish yo'lini izchil davomi – taraqqiyotimizning muhim omilidir" "Ishonch" gazetasi: 2010 yil, 8 dekabr.

O'zbekiston mustaqillikka erishgach butun ta'lim tizimini tubdan isloh qilish rejalari ishlab chiqildi, bunda asosiy e'tibor Respublika uchun ilmiy kadrlar tayyorlashni kengaytirishga qaratilgandir. Bu haqda Prezidentimiz I.A.Karimovning quyidagi fikrlarini keltirish joizdir:

- "Yoshlarni zamonaviy fan – texnikaning, umuman ilm – fanning yutuqlaridan bahramand qilmasdan turib, ularga yuqori malakali mutaxassislar bo'lib yetishishga sharoit tug'dirmay turib, biz respublikamiz xalq xo'jaligini, sanoat ishlab chiqarish sohalarini tubdan o'zgartira olmaymiz, buni har doim yodda tutish kerak. Chunki ishsizlik, maosh kamligi, mutaxassislar yetishmasligi va boshqa ko'p yetishmovchiliklar ana shundan deb o'ylayman. ...Demak, xalq saylab qo'ygan deputatlarning birinchi navbatdagi vazifalaridan biri – yoshlarimiz tarbiyasi. Milliy siyosatni, harakat dasturini ishlab chiqish masalasidir."

- "Ayniqsa, o'sib kelayotgan avlod taqdiriga hyech kim befarq qaray olmaydi. Bunda oliy o'quv yurtlarining ahamiyati kattadir. Yoshlarni qay usulda o'qitish, ularni tarbiyalash, mustaqil mamlakatning yetuk mutaxassislari bo'lishiga qayg'urish har birimizning muqaddas burchimizdir. Bunda oliy va o'rta maxsus ta'lim tizimi saviyasini jahon andozalari darajasiga yetkazish, xalq xo'jaligida kadrlarga bo'lgan talab va ehtiyojlarni ilmiy tahlil asosida aniqlash, xorijiy mamlakatlar tajribasidan oqilona foydalanish shu kunning dolzarb vazifalaridandir..."⁴ – deb ta'kidlagan Prezidentimiz I.A.Karimov.

Kasb – hunar kollejlari, litsey talabalari, oliy o'quv yurtini tamomlayotgan har bir yosh mutaxassisni o'z kasbining bilimdoni va jonkuyar qilib tayyorlash shu kunning eng birinchi talabidir. Bu o'rinda Prezidentimiz I.A.Karimovning ushbu so'zlarini keltirish joizdir:

⁴ Karimov I.A. "Ilm – ziyo salohiyati – yurt boyligi" nutqidan. "Ma'rifat" gazetasi. 1993 yil, 21 iyul

- “Hukumatimiz fan, ma’rifat va madaniyat sohasiga jiddiy e’tibor bilan qaramoqda. O’tish davrining eng qiyin va murakkab paytida ham davlat maorifni takomillashtirish, bilimli va har tomonlama barkamol avlodni voyaga yetkazish uchun hech narsani ayamayapti.

Axir, o‘ylab ko‘raylik, birodarlar, biz bugun ne – ne mashaqqatlar bilan qurayotgan davlatimiz, mustaqil va har jihatdan mustahkam mamlakatimiz ertaga kimning qo‘lida qoladi?

Bugungi katta islohotlar evaziga qo‘lga kiritayotgan yutuqlarimizni ertaga farzandlarimiz davom ettirishga qodir bo‘ladimi – yo‘qmi?...

Islohotning taqdiri, uning qay darajada amalga oshirish, birinchi navbatda kadrlarning malakasiga, ularning o‘z ishlarini qay darajada o‘zlashtirib olganligiga, yurtparvarligi va fidoiyligiga bog‘liq’⁵.

O‘zbekiston Respublikasi inson huquqlari va erkinligiga rioya etilishini, jamiyatning ma’naviy yangilanishi, ijtimoiy yo’naltirilgan bozor iqtisodiyotini shakllantirishni, jahon hamjamiyatiga qo‘shilishni ta’minlaydigan demokratik huquqiy davlat va ochiq fuqorolik jamiyati qurilmoqda.

Inson, uning har tomonlama uyg‘un kamol topishi va farovonligi, shaxs manfaatlarni ro‘yobga chiqarishning sharoitlarini yaratish, eskirgan tafakkur va ijtimoiy xulq atvorining andozalarini o‘zgartirish respublikada amalga oshirilayotgan islohotlarning asosiy maqsadi va harakatlantiruvchi kuchidan xalqning boy intellektual merosi va umumbashariy qadriyatlar asosida, zamonaviy madaniyati, iqtisodiyot, fan, texnika va texnologiyalarning yutuqlari asosida kadrlar tayyorlashning mukammal tizimini shakllantirish O‘zbekiston taraqqiyotining muhim shartidir.

⁵ Karimov I.A. Xalq Daputatlari Samarqand viloyati kengashi sessiyasida so‘zlagan nutqidan, “Ma’rifat” gazetasi. 1995 yil 29 noyabr

Prezidentimizni O'zbekiston Respublikasi Oliy Majlisi qonunchilik palatasi va senatining 2010 yil 27 yanvarda bo'lib o'tgan qo'shma majlisidagi "Mamlakatimizni modernizastiya qilish va kuchli fuqarolik jamiyati barpo etish ustivor maqsadimiz" ma'ruzalari har qanday fanni rivojlantirishda uni zamonga mos va xos qolipga tushirish ko'rsatib o'tilgan.

Prezidentimiz I.A.Karimovning "Yuksak ma'naviyat – yengilmas kuch" asarlarida ma'naviyat haqida quyidagicha so'z boradi: "Bugun biz tarixiy bir davrda — xalqimiz o'z oldiga ezgu va ulug' maqsadlar qo'yib, tinch-osoyishta hayot kechirayotgan, avvalambor o'z kuch va imkoniyatlariga tayanib, demokratik davlat va fuqarolik jamiyati qurish yo'lida ulkan natijalarni qo'lga kiritayotgan bir zamonda yashamoqdamiz.

Biz o'z taqdirimizni o'z qo'limizga olib, azaliy qadriyatlarimizga suyanib, shu bilan birga, taraqqiy topgan davlatlar tajribasini hisobga olgan holda, mana shunday olijanob intilishlar bilan yashayotganimiz, xalqimiz asrlar davomida orziqib kutgan ozod, erkin va farovon hayotni barpo etayotganimiz, bu yo'lda erishayotgan yutuqlarimizni xalqaro hamjamiyat tan olgani — bunday imkoniyatlarning barchasini aynan mustaqillik berganini bugun hammamiz chuqur anglaymiz.

Ana shu haqiqatni xalqimiz har tomonlama to'g'ri tushunib, tanlagan taraqqiyot yo'limizni ongli ravishda qabul qilgani va qo'llab-quvvatlayotgani oldimizga qo'ygan maqsadlarga erishishning asosiy manbai va garovi ekanini hayotning o'zi tasdiqlamoqda.

Biz xalqimizning dunyoda hech kimdan kam bo'lmasligi, farzandlarimizning bizdan ko'ra kuchli, bilimli, dono va albatta baxtli bo'lib yashashi uchun bor kuch va imkoniyatlarimizni safarbar etayotgan ekanmiz, bu borada ma'naviy tarbiya masalasi, hech shubhasiz, beqiyos

ahamiyat kasb etadi. Agar biz bu masalada hushyorlik va sezgirligimizni, qat'iyat va mas'uliyatimizni yo'qotsak, bu o'ta muhim ishni o'z holiga, o'zibo'larchilikka tashlab qo'yadigan bo'lsak, muqaddas qadriyatlarimizga yo'g'rilgan va ulardan oziqlangan ma'naviyatimizdan, tarixiy xotiramizdan ayrilib, oxir-oqibatda o'zimiz intilgan umumbashariy taraqqiyot yo'lidan chetga chiqib qolishimiz mumkin.

Xalqimiz o'zining ko'p asrlik tarixi davomida bunday mash'um xatarlarni necha bor ko'rgan, ularning jabrini tortgan. Shunday asoratlardan tufayli tilimiz, dinimiz va ma'naviyatimiz bir paytlar qanday xavf ostida qolganini barchamiz yaxshi bilamiz. Ana shu fojiali o'tmish, bosib o'tgan mashaqqatli yo'limiz barchamizga saboq bo'lishi, bugungi voqelikni teran taxlil qilib, mavjud tahdidlarga nisbatan doimo ogoh bo'lib yashashga da'vat etishi lozim. O'z tarixini bilmaydigan, kechagi kunini unutgan millatning kelajagi yo'q. Bu haqiqat kishilik tarixida ko'p bora o'z isbotini topgan. Ma'lumki, biz boshimizdan kechirgan sobiq mustabid tuzum davrida milliy ma'naviyatni rivojlantirishga mutlaqo yo'l qo'yilmagan. Aksincha, xalqimizning tabiati, yashash tarziga yot bo'lgan kommunistik mafkurani har qanday yo'llar va zo'ravonlik bilan joriy etishga harakat qilingan. Shuning uchun ham istiqlolning dastlabki kunlaridanoq bu sohadagi ahvolni tubdan o'zgartirish yurtimizda eng dolzarb va hal qiluvchi vazifalardan biriga aylandi.

Zaminimizda yashab o'tgan buyuk allomalarimiz, mutafakkir bobolarimizning ibratli hayoti va faoliyati, bemsiz ilmiy-ijodiy kashfiyotlari bugun ham ja-hon ahlini hayratga solayotganini g'urur bilan ta'kidlash lozim.

Masalan, Muhammad Muso Xorazmiyning o'nlik sanoq sistemasini, algoritm va algebra tushunchalarini dunyoda birinchi bo'lib ilm-fan sohasiga joriy etgani va shu asosda aniq fanlar rivoji uchun o'z vaqtida mustahkam asos yaratgani umuminsoniy taraqqiyot rivojida qanday katta

ahamiyatga ega bo'lganini barchamiz yaxshi bilamiz. Bugungi kunda odamzotning ilm-fan va zamonaviy texnologiyalar borasida erishayotgan ulkan yutuqlarini ko'z oldimizga keltirar ekanmiz, beixtiyor ana shu buyuk bobomiz misolida bunday yuksak marralarga erishishda o'zbek xalqining ham munosib hissasi borligidan qalbimiz iftihorga to'ladi.

Shuni alohida ta'kidlash joizki, xalqimiz tarixning har qanday to'fon va suronlariga qaramasdan, milliy o'zligi va azaliy qadriyatlarini saqlab olib, bugungi dorilomon zamonlarga bezavol etib kelishida uning qon-qoni, suyak-suyagida bo'lgan ma'naviy jasorat tuyg'usi, hech shubhasiz, hal qiluvchi ta'sir o'tkazib kelmoqda.

Chunki, o'zbek xalqi dunyo maydonida kuni kecha tasodifan paydo bo'lib qolgani yo'q. Biz — boy tarix, yuksak madaniyat, buyuk ma'naviyat vorislarimiz. Qadimiy tariximizni har tomonlama o'rganib, shunday xulosaga kelish mumkinki, eng qaltis va taxlikali davrlarda millatimizga umid va ishonch bergan, uni yovlarga qarshi kurashga undagan, ajdodlarimizni ilmiy kashfiyotlar, harbiy zafarlarga, ma'rifat mash'alini baland ko'tarib jaholatga qarshi chiqishga chorlagan beqiyos kuch ham aynan ma'naviy jasorat tuyg'usidir.

Manaviyatning hayotimizdagi o'rni va ahamiyati haqidagi fikr-mulohazalarimizga yakun yasari ekanmiz, avvalambor, shuni chuqur anglab olishimiz darkorki, ma'naviy yuksalishga erishish — bu bir yillik yoki besh-o'n yillik ish emas. Xalq, millat o'z milliy ma'naviyatini yillar, asrlar davomida yuksaltirib, boyitib boradi. Chunki ma'naviyat qotib qolgan aqidalar yig'indisi emas, aksincha, doimiy harakatdagi uzluksiz jarayon bo'lib, taraqqiyot davom etar ekan, uning shiddatli yurishi tufayli ma'naviy hayot oldiga qo'yiladigan talablar ham muttasil paydo bo'laveradi.

Ya'ni, mamlakatimiz taraqqiyot pillapoyasidan yangi-yangi cho'qqilar sari qadam qo'yar ekan, biz yashayotgan zamon sur'atlari shiddat bilan tezlashib, oldimizda yana qancha muammo va mashaqqatlar paydo bo'lar ekan, tabiiyki, ma'naviy hayotimiz ham ana shu sinovlarda toblanib, yuksalib, jamiyatimiz, millatimizning yorug' va sog'lom kelajagini har qanday taxdid va to'fonlardan–davr o'zgarishi bilan ularning ko'rinishi va shakli o'zgarishiga qaramasdan bezavol saqlash va asrab qolishga qodir bo'lishi darkor.

Ana shu fikr va xulosalardan kelib chiqqan holda, «Biz kimmiz?» degan savolga javob bermasdan turib, eng muhimi, ma'naviy boylikni, ma'naviyatni yuksaltirishga doimiy intilmasdan turib biz o'z oldimizga qo'ygan ezgu maqsadlarga erishish mumkin emas, desam, qalbimdan chuqur joy olgan fikrni aytgan bo'laman.

Bugungi kunda ma'naviyat dunyosiga nisbatan mavjud bo'lgan xavf-xatarlardan albatta ko'z yumib bo'lmaydi, lekin bizning ishonchimiz komilki, xalqimiz tarixning murakkab jarayonlarida irodasi chiniqib, har qanday hujum va tazyiqlarga qaramasdan, ma'naviy olami kuchayib va yuksalib borayotgani, bizni ko'rolmaydigan kuchlar ham bu haqiqatni tan olayotganini mamnuniyat bilan qayd etamiz.

Chunki xalq bamisoli ulug' va sharaflil yo'ldan ilgarilab borayotgan ulkan karvon. Uni yo'ldan chalg'itishga urinuvchilar, payt poylab orqasidan hamla qiluvchilar hamisha bo'lgan, bundan keyin ham bo'lishi mumkin. Karvon bexatar bo'lmas, degan gap bejiz aytilmagan. Ammo xalq karvonini hech qanday kuch ortga qaytarolmaydi. Nega deganda, xalqning qalbida ne-ne avlodlardan meros yengilmas kuch – ma'naviyat bor.”⁶

⁶ Karimov I.A. “Yuksak ma'naviyat – yengilmas kuch”. Toshkent., “Ma'naviyat”. 2008 yil.

Barchamizga g'urur va iftixor bag'ishlaydigan tomoni shundaki, bizning ezgu intilishlarimiz zamirida ham ana shunday pok niyat, buyuk ishonch mujassam. Aniq maqsad yo'lidagi bunyodkorlik ishlarimiz amaliy natijalar bera boshlagan, ko'zlagan rejalarimiz bosqichma-bosqich ro'yobga chiqib, dunyo hamjamiyatidan o'zimizga munosib o'rin egallab borayotgan hozirgi kunda xalqimiz, millatimiz qalbidagi ana shu ishonch yanada mustahkamlanmoqda.

Shu bois men shonli tarixiga sadoqat bilan qarab, bugungi ozod hayotini qadrlab, o'z kelajagiga katta umid bilan intilayotgan xalqimizning donishmandligi va matonati, uning iymon-e'tiqodi, mustahkam irodasi va yuksak ma'naviy ruhi doimo barqaror yashaydi, deb ishonaman.

Prezidentimiz Islom Abdug'aniyevich Karimovning quyidagi "MATEMATIKA" fanidagi erishilayotgan yutuqlar haqida aytgan so'zlarini doimo yodda tutishimiz lozim: " ... Respublikamizda quyidagi yo'nalishlar bo'yicha jahon darajasidagi ilmiy maktablar yaratilgan bo'lib, ularda tadqiqotlar muvaffaqiyatli olib borilmoqda. Jumladan, matematika, ehtimollar nazariyasi, tabiiy va ijtimoiy jarayonlarni matematik modellash, informatika va hisoblash texnikasi sohasidagi tadqiqotlar. Matematika fanining ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, differentsial tenglamalar va matematik fizika, funksional tahlil sohasidagi yutuqlari respublikadan ancha uzoqda ham mashhur".⁷

Bilamizki, 2011 yili O'zbekiston Respublikasi mustaqilligining 20 – yilligini nishonladik. Prezidentimiz I.A.Karimovning 2011 yil 6 apreldagi "O'zbekiston Respublikasining 20 – yilligiga bag'ishlangan" qarorida ham mamlakatimizning 20 yilligini munosib ravishda kutib olishda vatanimiz yoshlarini o'rni beqiyosligini, ularni aqlan va jismonan rivojlanishi uchun

⁷ Karimov I.A. "O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida: xavfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari". Toshkent, "O'zbekiston". 1997-yil

sharoitlar yaratib berish kerakligini aytib o'tganlar. Bunga misol qilib "Barkamol avlod" sport o'yinlarini, mamlakatimiz yoshlari ishtirokida "Biz – yigirma yoshdamiz" forumini, mehnat va o'quv jamoalari o'rtasida sport turlari bo'yicha "Mustaqillik kubogi" musobaqalari, an'anaviy "Sharq taronalari" xalqaro musiqa festivalini, yosh ijrochilar o'rtasida "Nihol", iste'dodli yoshlar o'rtasida "Kelajak ovozi", jurnalistika sohasida "Eng ulug', eng aziz", "Oltin qalam", "Ozod yurt to'liqlari", shuningdek, yangitdan tashkil etilayotgan "Istiqlol tarix ko'zgusida" (mustaqillik tarixini yoritishga bag'ishlangan eng yaxshi ilmiy va ilmiy – ommabop ishlar uchun). "Istiqlol solnomasi" (kino san'ati sohasidagi eng yaxshi asarlar uchun) kabi tanlovlarini yuqori darajada o'tkazish, tashkillashtirishni ta'kidlab o'tganlar.

2015 yil "Keksalarni e'zozlash yili"da bajariladigan ishlar ko'lami ham juda katta bo'lib, rejalashtirilgan vazifalarni amalga oshirishda ilm – fan yutuqlaridan foydalanish bosh vazifa bo'lib qoladi, bunday ulkan ishlarni muvaffaqiyat bilan uddalash uchun aniq hisob – kitoblar, xullas matematika faning yutuqlaridan ustalik, izchillik bilan foydalanish lozim bo'ladi.

BITIRUV MALAKAVIY ISHNING DOLZARBLIGI

Vatanimiz mustaqillikka erishgandan so'ng xalq xo'jaligining juda ko'p sohalarida ulkan yaratuvchilik ishlari amalga oshirilmoqda, meditsinada, biologiyada va boshqa sohalarda ishlab chiqarishda sezilarli yutuqlarga erishish maqsad qilib qo'yilgan. Tabiiyki, oldimizga qo'ygan maqsadlarni amalga oshirishda hayotiy jarayonlarni ilmiy asosda tashkil etish, genetik muammolarni zamon talablari darajasida hal etish dolzarb masaladir. Bu esa ushbu bitiruv malakaviy ishning dolzarbligini ifodalaydi.

BITIRUV MALAKAVIY ISHNING MAQSADI VA VAZIFALARI

Ushbu bitiruv malakaviy ishda biologik, genetik jarayonlarning muhim masalalariga turli xil matematik modellarni tatbiq etish masalalarni ko'rib

chiqish va ularning tadbiq sohalarini aniqlab, foydalanish yo'llarini ko'rsatish maqsad qilib olingan.

Mazkur ishning maqsadi va vazifasi – Populatsiyaning o'zgarishi, Populya-tsiyalar migratsiyasining algebraik strukturalari, Zararlangan mutatsiyalar populatsiyasining o'zgarishi yoki saqlanib qolishi, genetik o'ziga xosliklarning avloddan-avlodga o'tishi, fartalizatsiya masalalari kabi masalalarni matematik tomondan yoritishdir.

TANLANGAN OB'EKT VA TADQIQOT USULLARI

Ishning tadqiqot ob'yekti qilib – genetik masalalarga matematik metodlarni, matematik modellarni qo'llab, tadqiqot ishlarining unumdorligini oshirish yo'llarini izlash, mavjud ilmiy tadqiqotlarda ko'rib o'tilgan mavzularni har tomonlama o'rganib chiqish va tegishli xulosalar chiqarish maqsad qilib olingan.

Ishni yozish jarayonida *tajriba va kuzatish, taqqoslash, analiz va sintez, umumlashtirish, abstraktsiyalash, induksiya va analogiya, xulosa chiqarish metodlaridan umumli foydalanishga harakat qilindi.*

BITIRUV MALAKAVIY ISHNING AHAMIYATI VA TADBIQ

SOHALARI.

Genetik masalalarga matematik metodlarni, matematik modellarni qo'llab, tadqiqot ishlarining unumdorligini oshirish yo'llarini izlash, mavjud ilmiy tadqiqotlarda ko'rib o'tilgan mavzularni har tomonlama o'rganib chiqish va tegishli xulosalar chiqarish malakaviyishning ahamiyatini anglatadi.

Bayon etilgan matematik metodlardan turli genetik jarayonlarni tahlil etishda amaliy jihatdan qo'llash mumkinligi – uning tadbiq etish sohasidir.

ISHNING YANGILIGI

Mazkur bitiruv malakaviy ishda bevosita olingan ilmiy ishlar keltirilmagan bo'lsada, kelgusida ilmiy izlanishlar olib borish uchun tegishli yo'nalishlarni aniqlab olishga harakat qilindi.

Mazkur bitiruv malakaviy ish - referativ xarakterga ega bo'lib, ushbu yo'nalishda erishilgan ilmiy yutuqlarni keltirishga harakat qilindi. Ishni yozishda Genetik masalalarga doir yozilgan adabiyotlardan, asosan ingliz tilidagi kitoblardan va ilmiy maqolalardan foydalanildi, ingliz tilida o'zbek tiliga ko'chirib yozildi. Ishning oxirida matematika va genetik o'ziga xosliklar o'rtasidagi bog'lanishlarni yoritishga bag'ishlangan adabiyotlar ro'yxati va internetdan olingan mos materiallardan namunalar keltirildi.

I BOB.KVADRATIK STOXASTIK OPERATOR.

Bu qismda biz ozod populyatsiyaning evolutsion operatori n ta turdan iborat populyatsiyani muhokama qilaylik $x^0 = (x^0_1, \dots, x^0_m)$ boshlang'ich holatda i -tur ta turlarning tasodifiy taqsimlanishi bilan $x^0_i = P(i)$ i - ning ehtimolligidir. $i = 1, 2, \dots, m$ va $P_{ij,k}$ ehtimollik esa i -tur bilan j -turning chatishtirilishidan hosil bo'lgan k - individ hosil bo'lish ehtimolligi. Aniqki $P_{ij,k} P(k|i, j)$ i - va j - turlarning muvaffaqiyatli chatishtirilishining shartli ehtimolligidir. Bu qisimda biz ozod populyatsiyaning modellarini muhokama qilamiz. Ya'ni bu yerda jinsning farqi yo'q va ixtiyoriy avlodda ij ota-onalar mustaqil. Ya'ni $P(i, j) = P(i)P(j) = x^0_i x^0_j$. Birinchi avlodda $x' = (x'_1, \dots, x'_m)$ turlarning tasodifiy taqsimlanishi umumiy ehtimollik orqali topish mumkin.

$$x^I_k = \sum_{i,j=1}^m P(k|i, j)P(i, j) = \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} x^0_i x^0_j, k=1..m \quad .\text{Bu } x^0 \rightarrow x^I \text{ bog'lanish evolutsion}$$

operator deb atalgan V funksiyani ta'riflashni anglatadi. Populyatsiya ixtiyoriy x^0 holatdan boshlash orqali ko'payadi. So'ngra $x^I = V(x^0)$ holatga o'tadi(keyingi avlodda). So'ngra $x^{II} = V(V(x^0))$ holatga o'tadi va hakazo. Shunday qilib populyatsiyaning holatlari quyidagi diskret vaqt dinamik sistemasi orqali tasvirlanadi. Bu yerda $x^0, x^I = V(x^0), x^{II} = V^2(x^0), x^{III} = V^3(x^0), \dots$
 $V^n(x) = V_n(V_{n-1}(\dots V_1(x)))$ V ning x dagi n marta iteratsiyasini ifodalaydi. Qayd

etish joizki V kvadratik stoxastik operator (k.s.o) va agar $m \geq 3$ bo'lsa u yuqori o'lchovli bo'ladi. Yuqori o'lchovli dinamik sistemalar muhimdir ,biroq nisbatan juda kam dindmik hodisalargina hozirda bizga o'rganilgan.

Berilgan dinamik sistemalar uchun asosiy masala ixtiyoriy berilgan x^0 uchun $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ ning limitini tas'virlashdan iborat. [4] dan biz ushbu masala bo'yicha yaqinda qo'lga kiritilgan natijalarni muhokama qilamiz va yana kvadratik stoxastik operator nazariyasiga oid bir qancha ochiq masalalar ham berilgan . Kvadratik stoxastik operatorlar nazariyasi bo'yicha [12] ga qarang . Bundan tashqari [12] da ozod populyatsiyaga bog'langan A

evolutsion algebra bilan tanishtirilgan va noassotsiativ algebra bilan ishlangan.

Ko'pgina natijalar mukammal shakilda qo'lga kiritilgan. Misol uchun kvadratik operatorlarning mukammal tasviri mavjud bo'lmagan to'plamda chiziqli bo'lmagan evolyutsion tenglamalarning mukammal yechimlari . Shuningdek mavjud to'plamda ekuilibriumga yaqinlashishidagi asosiy teoremlar A algebra yuqoridagidek tariflanadi. Ixtiyoriy $x \in R^m$ dagi vektorni R^m dagi $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_m = (0, 0, \dots, 0, 1) \in R^m$. Endi R^m

da ko'paytirish amali quyidagich aniqlanadi: $e_i e_k = \sum_{j=1}^m P_{ik,j} e_j$. Shunday qilib

,biz A algebraning struktura va constanta sifatida o'tkazish koefitsientlarini aniqladik. Y'ni $R^m \times R^m$ ni R^m ga $x \times y \rightarrow xy$ bichiziqli akslantirish ko'paytirish uchun asosiy formula ko'paytirishning bichiziqilik orqali $xy = \sum_{i,k,j=1}^m (P_{ik,j} x_i y_k) e_j$

Haqiqatdan koordinata shaklida tariflangan evolutsion operatorni $x^I = V(x) = x^2$ kabi yozish mumkin .

1.1§ OZOD POPULYATSIYANING EVOLYUTSION OPERATORI.

R^n o'lchovli fazoda $(n-1)$ o'lchovli $S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n); \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}$ simpleks berilgan bo'lsin.

Ushbu operator

$$V : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}, \quad (V(x))_k = x_k^1 = \sum_{i,j=1}^n P_{ij,k} x_i x_j, k=1..n$$

kvadratik stoxastik operator deyiladi.

bu yerda $P_{ij,k} \geq 0, P_{ij,k} = P_{ji,k}$, $\sum_{k=1}^n P_{ij,k} = 1, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^{n-1}$

Ravshanki, $P_{ij,k}$ koefitsientlariga qo'yilgan shartlar S^{n-1} simpleksni saqlanishini taminlaydi. Kvadratik stoxastik operator tushunchasi G.X. Xardi[6], V.Vaynberg, S.N.Bernshteyn [7] larning matematik genetika bilan bog'liq ishlariga borib taqaladi.

Matematik genetikada V operator populyatsiyaning evolyutsion operatori deb ataladi. Populyatsiya- organizmlar turkumining yopiq nisbiy ko'payishidir. Populyatsiyada ketma-ket $F_1, F_2, F_3, \dots$ avlodlar farqlanadi. Turli avlodlar o'rtasida hech qachon chatishish sodir bo'lmaydi deb olinadi Populyatsiyaga kiruvchi har bir organizm n ta: $1, 2, \dots, n$ turlar ichidan qandaydir yagona turga mansub bo'ladi. Populyatsiya holati bu turlar ehtimolligining $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^{n-1}$ jamlanmasidir.

$P_{ij,k}$ irsiyatning koefitsientlari -- bu ayrim i - va j - turlarni chatishtirish mobaynida aynan k -turga qarashli avlod tug'ilish ehtimoli. Panmiksiya (tasodifiy chatishish) mobaynida ota-ona juftligi x holatida $x_i x_j$ tashkil qiladi. Shunday qilib, $x_k^1 = \sum_{i,j=1}^n P_{ij,k} x_i x_j, k=1..n$ -- bevosita avlodlar uchun turning to'liq ehtimolligi bo'ladi. Agar populyatsiyada qandaydir avlodda x holatida bo'lsa, u holda u keyingi avlodda $x^1 = V(x)$ holatida bo'ladi.

$P_{ij,k} = P_{ji,k}$ sharti shuni anglatadiki, turlar jins bilan bog'lanmaganligini (germafroditizm modeli) anglatadi. Matematik genetikaning asosiy masalasi $x^0, V(x^0), V^2(x^0), \dots$, traektoriyasining limit holatini o'rganishdir, ya'ni V akslantirishning iteratsiyasidir.

1.2§ VOLTERRA DISKRET MODELINING KANONIK KO'RINISHI.

Ta'rif: Agar, $k \notin \{i, j\}$ bo'lganda $P_{ij,k} = 0$ (2) tenglik o'rinli bo'lsa, $V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ kvadratik stoxastik operator volterra kvadratik stoxastik operatori deyiladi.

Quyidagi tasdiqlar o'rinli:

1. Agar $V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ akslantirish volterra operatori bo'lsa, quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$x_k^I = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \right), k = 1..n \quad (3)$$

bu yerda $a_{ki} = -a_{ik}, |a_{ki}| \leq 1$.

Isbot. Modomiki $i \neq k$ va $\sum_{i=1}^n P_{kk,i} = 1$ da $P_{kk} = 0$ bo'lsa, u holda $P_{kk,k} = 1$ bo'ladi.

Yana

$$x_k^I = \sum_{i,j=1}^n P_{ij,k} x_i x_j = P_{kk,k} x_k^2 + \sum_{i=1, i \neq k}^n P_{ik,k} x_i x_k + \sum_{j=1, j \neq k}^n P_{kj,k} x_k x_j$$

tenglikdan $P_{ij,k} = P_{ji,k}$ ni e'tiborga olib

$$x_k^I = x_k \left(x_k + 2 \sum_{i=1, i \neq k}^n P_{ik,k} x_i \right)$$

ni olamiz. Binobarin $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ bo'lsa,

$$x_k^I = x_k \left(1 + \sum_{i=1, i \neq k}^n (2P_{ik,k} - 1) x_i \right)$$

bo'ladi. $i \neq k$ va $a_{kk} = 0$ da $2P_{ik,k} - 1 = a_{ki}$ deb olib

$$x_k^I = x_k (1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i), k = 1..n$$

ga ega bo'lamiz. $0 \leq P_{ik,k} \leq 1$ dan $|a_{ki}| \leq 1$ ekani kelib chiqadi.

Nihoyat voltteralikni hisobga olgan holda $P_{ik,k} + P_{ik,i} = 1$ ga ega bo'lamiz. Shu sababli

$$a_{ki} + a_{ik} = 2P_{ik,k} - 1 + 2P_{ik,i} - 1 = 2(P_{ik,k} + P_{ik,i} - 1) = 0$$

Shunday qilib $a_{ki} = -a_{ik}$ kelib chiqdi.

2. S^{n-1} simpleksning ixtiyoriy yoqi V volterra operatori harakatiga nisbatan invariant.

Isbot. Istalgan $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ uchun Γ_I yoq $\Gamma_I = \{x \in S^{n-1} : x_i = 0\}$ (barcha $i \in I$ lar uchun) tenglik bilan aniqlanadi. Agar V voltterra bo'lsa, (3) dan yaqqol ko'rinadiki, $x_i = 0$ bo'lganda $x_i^I = 0$ bo'ladi.

Shuning uchun $V(\Gamma_I) \subset \Gamma_I$.

Natija. Simpleksning uchlari, ya'ni $\bar{I} = n-1$ bo'lgandagi Γ_I yoqlar V voltterra operatorining qo'zg'almas nuqtalari bo'ladi.

Barcha $i \notin I$ lar uchun $\text{ridom} \Gamma_I = \{x \in \Gamma_I : x_i > 0, i \notin I\}$ tenglik orqali aniqlanadigan Γ_I yoqning nisbiy ichligini eslaymiz.

3. Ixtiyoriy S^{n-1} yoqning nisbiy ichligi ham V voltterra operatoriga nisbatan invariantdir.

Isbot. $x_k > 0$ bo'lsin. $a_{kk} = 0$ tenglikni hisobga olgan holda :

$$x_k^I = x_k (1 + a_{k1}x_1 + \dots + a_{kk-1}x_{k-1} + a_{kk+1}x_{k+1} + \dots + a_{kn}x_n) \geq x_k (1 - x_1 - \dots - x_{k-1} - x_{k+1} - \dots - x_n) = x_k^2 > 0$$

ni olamiz. Shunday qilib $x_k > 0$ dan $x_k^I > 0$ kelib chiqadi. Shuning uchun $V(\text{ridom} \Gamma_I) \subset \text{ridom} \Gamma_I$.

J --barcha $V : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ volterra kvadratik stohastik operatorlari to'plami bo'lsin.

4. $\mathbf{J} - R^{\frac{n(n-1)}{2}}$ dagi qavariq markaziy-simmetrik kompakt . $k \neq i$ da $a_{ki} = \pm 1$ shartni qanoatlantiruvchi voltterra kvadratik stoxastik operatorlar $\mathbf{J}$ chetki nuqtalar boladi, ya'ni

$$\text{extr } \mathbf{J} = \{V : a_{ki} = \pm 1, \text{ agar } k \neq i\}.$$

Isbot. Agar voltterra kvadratik stohastik operatori V_1 va V_2 quyidagi ko'rinishga ega bo'lsa:

$$(V_1(x))_k = x_k(1 + \sum_{i=1}^n a_{ki}^I x_i), (V_2(x))_k = x_k(1 + \sum_{i=1}^n a_{ki}^{II} x_i)$$

u holda $V = aV_1 + (1-a)V_2$ ni

$$(V(k))_k = x_k(1 + \sum_{i=1}^n (a a_{ki}^I + (1-a) a_{ki}^{II}) x_i)$$

ko'rinishda yozish mumkin, shu bilan birga

$$|a_{ki}^I| \leq 1, |a_{ki}^{II}| \leq 1 \text{ va } a_{ki}^I = -a_{ik}^I, a_{ki}^{II} = -a_{ik}^{II} \text{ dan } |a_{ki}| \leq 1 \text{ va } a_{ki} = -a_{ik}$$

kelib chiqadi, bu yerda $0 \leq a \leq 1$ bo'lganda $a_{ki} = a a_{ki}^I + (1-a) a_{ki}^{II}$. Shuning uchun $\mathbf{J}$ -qavariq to'plam.

Agar $V \in \mathbf{J}$ $-a_{ki}$ koefitsientiga ham ega bo'lsa, u holda $-a_{ki}$ koefitsientli V^I ham voltterra kvadratik stohastik operatori bo'ladi. Shunday ekan, $\mathbf{J}$ - markaziy simmetrik, shu bilan birga $a_{ki} = 0$ koefitsientli aynan o'xshash operatorlar markaziy simmetriya bo'ladi.

Ba'zi k va i ($k \neq i$) uchun $a_{ki} \neq \pm 1$ bo'lsin. $a_{ki} = a$ deb olamiz. Modomiki $a_{ki} = -a_{ik}$ ekan, u holda zaruriylik holatida k va i ni o'rnini almashtirib, $a \geq 0$ deb hisoblash mumkin. Agar $a > 0$ bo'lsa,

$$a_{ts}^I = \begin{cases} a_{ts}, \text{ agar } (t, s) \neq (k, i) \\ 1, \text{ agar } (t, s) = (k, i) \end{cases} \text{ deb olib, } a_{ts}^{II} = \begin{cases} a_{ts}, \text{ agar } (t, s) \neq (k, i) \\ 0, \text{ agar } (t, s) = (k, i) \end{cases} \text{ ni topamiz.}$$

$$V = aV_1 + (1-a)V_2$$

bu yerda V, V_1, V_2 -- mos ravishda $a_{ts}, a_{ts}^I, a_{ts}^{II}$ koefitsientli voltterra kvadratik stoxastik operatorlari.

Agar $a = 0$ bo'lsa,

$$a_{ts}^I = \begin{cases} a_{ts}, & \text{agar}(t, s) \neq (k, i) \\ 1, & \text{agar}(t, s) = (k, i) \end{cases} \quad a_{ts}^{II} = \begin{cases} a_{ts}, & \text{agar}(t, s) \neq (k, i) \\ -1, & \text{agar}(t, s) = (k, i) \end{cases}$$

deb olish yetarli va $V = \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2$ ni olamiz. Shunday qilib, agar $a_{ki} \neq \pm 1$ hech bo'lmaganda bitta (k, i) juftlikniki bo'lsa (bu yerda $k \neq i$), $0 < \alpha < 1$ da

$$V = \alpha V_1 + (1 - \alpha)V_2$$

ni namoyish etish faqat $V_1 = V_2 = V$ bo'lgandagina mumkin.

Shuning uchun, $k \neq i$ da $\text{extr } J = \{V : a_{ki} = \pm 1, k \neq i\}$.

Kvadratik stoxastik operatorining voltteraligi sodda biologik ma'noga ega:

Har bir avlodagi individ faqatgina uning ota-onasiga tegishli belgi meros bo'lib qolishi mumkin.

Bu nuqtai nazarda 2-tasdiq shuni anglatadiki: boshlang'ich avlodda qolib ketadigan belgilar evolyutsiyaning hech qanday avlodida namoyon bo'lmaydi.

3-tasdiq esa boshlang'ich avlodda qatnashuvchi belgi barcha keyingi avlodlarda ham ishtirok etadi.

Shunday qilib, individlar ega bo'lgan belgilarning ma'lum qismi o'sishi yoki o'lishi mumkin.

1-misol.

Populyatsiya ikkita belgiga ega individlardan tuzilgan va evolyutsiya operatori

$$\begin{cases} x_1^I = x_1(1 - ax_2) \\ x_2^I = x_2(1 + ax_1) \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'lsin, bu yerda $a = 2P_{12,2} - 1 > 0$.

Agar $(x_1^0, x_2^0) \in S^I$ -- boshlang'ich avlodagi belgilarni ehtimollik taqsimoti bo'lsa, $(m+1)$ -avloddagi ehtimollik taqsimoti quyidagicha rekkurent munosabatda joylashadi :

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = x_1^{(m)}(1 - ax_2^{(m)}) \\ x_2^{(m+1)} = x_2^{(m)}(1 + ax_1^{(m)}) \end{cases}, m=1,2,3,\dots$$

Binobarin, ixtiyoriy m da $1 + ax_1^{(m)} \geq 1$ bo'lsa, $\{x_2^{(m)}\}$ — kamaymaydigan ketma-ketlik. $0 \leq 1 - ax_2^{(m)} \leq 1$ dan $\{x_1^{(m)}\}$ — o'smaydigan ketma-ketlik ekani kelib chiqadi, shu bilan birga $0 \leq x_1^{(m)}, x_2^{(m)} \leq 1$.

Shuning uchun

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_1^{(m)} = a, \lim_{m \rightarrow \infty} x_2^{(m)} = b$$

limitlar mavjud. Agar $x_2^0 > 0$ bo'lsa, $b = 1$ va natijada $a = 0$ bo'lishini isbotlash qiyin emas.

Demak, berilgan populyatsiyada birinchi belgilarga ega bo'lgan individlarning ulushi evolyutsiya jarayonida monoton kamayadi, ikkinchi belgilarga ega bo'lgan individlarning ulushi esa monoton o'sadi.

2- misol. (Mensel, Smit, Ulam [8], 1959)

3ta belgiga ega bo'lgan individlardan va quyidagi evolyutsion ko'rinishdagi operatoridan tashkil topgan populyatsiyani ko'rib chiqamiz:

$$V: \begin{cases} x_1^I = x_1(1 - x_2 + x_3) \\ x_2^I = x_2(1 + x_1 - x_3) \\ x_3^I = x_3(1 - x_1 + x_2) \end{cases}$$

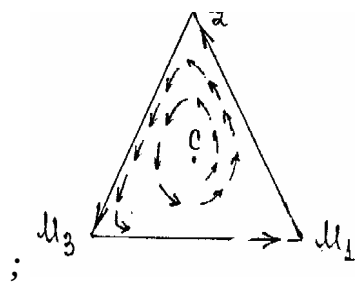
Shubxasiz, $V: S^2 \rightarrow S^2$ akslantirish ham roppa-rosa 4 ta qo'zg'almas nuqtaga ega (populyatsiyaning barqaror holati):

$$M_1(1, 0, 0), M_2(0, 1, 0), M_3(0, 0, 1), C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Mos keluvchi amallarni tushirib, M_1, M_2, M_3 larni osma nuqtalar deb belgilaymiz, C esa itaruvchi fokus bo'ladi. Mensel, Smit, Ulam [8] V operatorning sonli tadqiqoti asosida quyidagi vektor maydonning suratini olishdi:

Teorema (G.Kesten[9], 1970, C. C.Vallander[10], 1972).

S^2 simpleksning ichida joylashgan ixtiyoriy boshlang'ich nuqta $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \neq c$ da trayektoriya yaqinlashmaydi



1-rasm

trayektoriyaning limit nuqtalari to'plami (bu to'plam $w(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ orqali belgilanadi) cheksiz va S^2 simpleksning ∂S^2 chegarasida yotadi.

Isboti. $j(x) = x_1 x_2 x_3$ tenglik bilan aniqlangan $j : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funksional S^2 da uzluksiz va eng katta qiymat $\frac{1}{27}$ ga faqatgina $C(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ nuqtada erishadi. Shubhasiz, faqatgina S^2 simpleks chegarasida $j(x) = 0$ bo'ladi.

Shu kabi

$$\begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= x_1^{(m)}(1 - x_2^{(m)} + x_3^{(m)}) \\ x_2^{(m+1)} &= x_2^{(m)}(1 + x_1^{(m)} - x_3^{(m)}) \\ x_3^{(m+1)} &= x_3^{(m)}(1 - x_1^{(m)} + x_2^{(m)}) \end{aligned}$$

bo'lsa, u holda

$$j(x^{(m+1)}) = j(x^{(m)})(1 - x_2^{(m)} + x_3^{(m)})(1 + x_1^{(m)} - x_3^{(m)})(1 - x_1^{(m)} + x_2^{(m)}) \text{ bu yerda}$$

$$x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}) \in S^2. \quad abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3, \quad a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$$

tengsizlikdan foydalanib

$$(1 - x_2^{(m)} + x_3^{(m)})(1 + x_1^{(m)} - x_3^{(m)})(1 - x_1^{(m)} + x_2^{(m)}) \leq 1, \quad (4)$$

ni olamiz. Shuning uchun $j(x^{(m+1)}) \leq j(x^{(m)})$ dan $\lim_{m \rightarrow \infty} j(x^{(m)}) = l, l \geq 0$

mavjudligi kelib chiqadi, shu bilan birga, $j(x^0) < j(c) = \frac{1}{27}$ kabi

$l < \frac{1}{27}$ bo'ladi.

Agar $l > 0$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{j(x^{(m+1)})}{j(x^{(m)})} = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - x_2^{(m)} + x_3^{(m)})(1 + x_1^{(m)} - x_3^{(m)})(1 - x_1^{(m)} + x_2^{(m)}) = 1.$$

Shunday qilib (4) ni hisobga olgan holda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max \left\{ \left| x_2^{(m)} - x_3^{(m)} \right|, \left| x_3^{(m)} - x_1^{(m)} \right|, \left| x_1^{(m)} - x_2^{(m)} \right| \right\} = 0$$

ya'ni $l < \frac{1}{27}$ tengsizlikni inkor etuvchi traektoriya C nuqtaga yaqinlashadi.

Shunday qilib, $l = 0$. So'nggi tenglik $w(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \subset \partial S^2$ ni anglatadi.

Traektoriya uchga yaqinlashish mumkin emas, binobarin, masalan nuqtalarning $M_1(1, 0, 0)$ nuqtaga yetarlicha yaqinlashishi uchun

$x_2^l = x_2(1 + x_1 - x_2) > x_2$ ga ega bo'lamiz. Shuning uchun $x_2^{(m)} \not\rightarrow 0$.

Shunday qilib traektoriya $M_1(1, 0, 0)$ uchga yaqinlashmaydi.

Traektoriyaning chegaraviy to'plami faqat uchlardan iborat bo'lmaydi, modomiki uchlar qo'zg'almas va 1 dan yuqori siklga kirmaydi.

Shunday qilib S^2 simpleksning qirralaridan biri $w(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ ichki nuqtani saqlaydi. Shu kabi $w(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ — invariant bo'lsa, u holda u ko'rsatilgan nuqtadan boshlanuvchi barcha trayektoriyalarni saqlaydi. Shuning uchun $w(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ — cheksiz to'plam.

S.Ulam [12] bu misol bilan bog'liq gap aytib o'tgan:

Erodik gipoteza.

2-misoldagi $V: S^2 \rightarrow S^2$ kvadratik stohastik operator uchun

$$\frac{1}{m} (x^0 + x^{(1)} + \dots + x^{(m-1)})$$

o'rta arifmatiklar limiti mavjud (barcha $x^0 \in S^2$ uchun).

Shuningdek, M.I.Zaxarovich [13] isbotlagan ixtiyoriy S^2 simpleksdagi ixtiyoriy ichki nuqtasi uchun $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ dan farqli o'rta arifmetiklarning limiti mavjud emas.

Bobning hozirgi masalalaridan biri istalgan o'lchamdagi va istalgan a_{ki} koeffitsientlarga ega volterra kvadratik stoxastik operatorlari holatida G.Kesten, S.S.Vallander, va M.I.Zaxarevichlarning natijalarining jamlanmasidan tuzilgan.

1.3 -§. Lyapunov funksiya metodi.

$V : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ —volterra kvadratik stohastik operatori berilsin.

$$x_k^1 = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \right), k = 1..n \quad (5)$$

bu yerda $x^1 = Vx$, $a_{ki} = -a_{ik}$, $|a_{ki}| \leq 1$.

$x^0 \in S^{n-1}$ markaziy nuqta va

$$\{x^0, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\} — x^0(x^{(m+1)} = Vx^{(m)}, m = 0, 1, \dots)$$

nuqtadan boshlanuvchi trayektoriya bo'lsin. Trayektoriyaning limit nuqtalari to'plamini $w(x^0)$ bilan belgilaymiz. Modomiki $\{x^{(m)}\} \subset S^{n-1}$ va S^{n-1} kompakt bo'lsa, $w(x^0) \neq \emptyset$. Shubxasiz, agar $w(x^0)$ bitta nuqtadan tuzilgan bo'lsa, traektoriya yaqinlashadi, shu bilan birga $w(x^0)$ -V operatorning qo'zg'almas nuqtasi.

Ta'rif: Agar ixtiyoriy $x^0 \in S^{n-1}$ boshlang'ich nuqta uchun $\lim_{m \rightarrow \infty} j(x^{(m)})$ mavjud bo'lsa, $j : S^{n-1} \rightarrow R$ uzluksiz funksional (5) dinamik sistema uchun Lyapunov funksiyasi deb ataladi.

Ravshanki, agar

$$\lim_{m \rightarrow \infty} j(x^{(m)}) = c$$

bo'lsa, $w(x^0) \subset j^{-1}(c)$ bo'ladi.

Quyida (5) dinamik sistema uchun hech bo'lmaganda bitta trivial bo'lmagan Lyapunov funksiyasi mavjudligini isbotlaymiz.

Lemma I. Agar $A = (a_{ki})$ -kososimmetrik matritsa ($A^T = -A$) bo'lsa, unda chiziqli tengsizliklar sistemasi $\sum_{i=1}^n a_{ki} y_i \geq 0, k = 1..n$ (6) hech bo'lmaganda S^{n-1} ga tegishli bitta yechimga ega.

Isbot. $R_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0\}$ berilsin. Agar $R_+^n \cap A(R_+^n) \neq \{0\}$, bo'lsa, u holda $\frac{y}{|y|} \in S^{n-1}$ (6) tengsizliklar sistemasini talab qilingan yechimi bo'ladi, bu yerda

$$y \in R_+^n \cap A(R_+^n), y \neq 0 \text{ va } |y| = \sum_{i=1}^n y_i. \quad R_+^n \cap A(R_+^n) = \{0\}$$

deb olamiz. Modomiki R^n chekli o'lchovli va A uzluksiz bo'lsa, unda $A(R_+^n)$ -yopiq qavariq to'plam bo'ladi. Faqatgina ikkita holat bo'lishi mumkin:

1) $A(R_+^n)$ -konus (agar $l \geq 0$ da $K + K \subset K$, $lK \subset K$ va $K \cap (-K) = \{0\}$ bo'lsa, K konus deyiladi). Unda R_+^n va $A(R_+^n)$ yopiq konuslarni qat'iy ajratuvchi H giper tekislik mavjud, ya'ni

$$H \cap R_+^n = H \cap A(R_+^n) = \{0\}$$

va R_+^n va $A(R_+^n)$ konuslar turli [11] yarim fazolarda yotadi. $H = \{x : (b, x) = 0, b \in R^n, b \neq 0\}$ va $R_+^n \subset H^+$ berilsin, bu yerda $H^+ = \{x : (b, x) \geq 0\}$. Ko'rinib turibdiki $R_+^n \subset H^+$ dan $b \in R^n$ kelib chiqadi.

Modomiki H R_+^n va $A(R_+^n)$ ni qat'iy bo'lsa, unda barcha $x \in A(R_+^n)$ uchun $(b, x) < 0$ va $x \neq 0$. Xususiyligida $(b, Ab) < 0$ (7), vaholanki $R_+^n \cap A(R_+^n) = \{0\}$. farazdan $Ab \neq 0$ kelib chiqadi. Boshqa tomondan A ning kososimmetrikligidan foydalanib, ixtiyoriy $y \in R^n$ uchun quyidagilarni topamiz:

$$(y, Ay) = (A^T y, y) = -(Ay, y) = -(y, Ay),$$

ya'ni $(y, Ay) = 0$. Xususan $(b, Ab) = 0$ (7) ni inkor qiladi. Shunday qilib, agar $A(R_+^n)$ konus bo'lsa, u holda $R_+^n \cap A(R_+^n) \neq \{0\}$ va bundan lemmaning tasdiqi to'g'riligi kelib chiqadi.

2) $A(R_+^n)$ -klin (agar $lK \subset K$, $l \geq 0$ da $K + K \subset K$ va $K \cap (-K) \neq \{0\}$ bo'lsa, K klin deyiladi). U holda $z, -z \in A(R_+^n)$ bo'lganda shunday $z \neq 0$ mavjud.

$u, v \in (R_+^n)$ ni shunday tanlaymizki, $Au = z$ va $Av = -z$ bo'lsin. Unda $A(u+v) = 0$ va natijada

$$\frac{u+v}{|u+v|} \in S^{n-1} \quad (6)$$

tengsizliklarning talab qilingan yechimi bo'ladi.

Natija I.

Agar $A = (a_{ki})$ -kossosimmetrik matritsa bo'lsa, u holda

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} y_i \leq 0, k=1..n \quad (8)$$

chiziqli tengsizliklar sistemasi ham S^{n-1} da yotuvchi kamida bitta yechimga ega.

Isbot bevosita lemmadan kelib chiqadi, chunki $-A$ ham kossosimmetrik. S^{n-1} ga tegishli (6) (yoki (8)) tengsizliklar yechimlari to'plamini P orqali (yoki, Q orqali) ga belgilaymiz. Ko'rinib turibdiki, P va Q qavariq komponentlar.

Natija2.

P va Q V operatorning qo'zg'almas nuqtalaridan tashkil topgan.

Isbot.

$y \in P$ berilsin. Unda $\sum_{i=1}^n a_{ki} y_i \geq 0, k=1..n$ dan

$$y_k^I = y_k \cdot (1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} y_i) \geq y_k, k=1..n \quad (9)$$

kelib chiqadi. Binobarin $\sum_{k=1}^n y_k^I = \sum_{k=1}^n y_k = 1$ bo'lsa, u holda (9) dan $y_k^I = y_k, k=1..n$. ni hosil qilamiz, ya'ni $\forall y \in P, y^I = y$.

$y \in Q$ holda ham isbotni shu tarzda keltiramiz.

[14] Yung tengsizligini esga olamiz:

$$b_1^{p_1} \cdots b_n^{p_n} \leq p_1 \cdot b_1 + \dots + p_n \cdot b_n, \quad (10)$$

istalgan $b_i > 0, p_i \leq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$ uchun o'rinli.

Teorema 1. Agar $p = (p_1, \dots, p_n) \in P$ bo'lsa bu holda $j(x) = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$ (5) dinamik sistemalar uchun Lyapunov funksiyasi bo'ladi.

Isbot. Umumiylik chegarasizligini $x \in \text{ridom}S^{n-1}$ deb hisoblaymiz (5) dan

$$j(x^I) = \left[x_1 \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \right) \right]^{p_1} \dots \left[x_n \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i \right) \right]^{p_n} = j(x) \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \right)^{p_k} \quad (11)$$

ni topamiz. $b_k = 1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i$ deb faraz qilamiz. Shu kabi $x \in \text{ridom}S^{n-1}$ bo'lsa, unda $b_k > 0$.

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \right)^{p_k}$$

baholash uchun yuqoridagi (10) tengsizligidan foydalanamiz:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \right)^{p_k} \leq \sum_{k=1}^n p_k \left(1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \right) = \sum_{k=1}^n p_k + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i p_k = 1 + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} p_k \right) x_i.$$

$a_{ki} = -a_{ik}$ ni hisobga olgan holda, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \right)^{p_k} \leq 1 - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} p_k \right) x_i.$$

Vaholanki $p \in P$, bundan barcha $i=1..n$ uchun $\sum_{k=1}^n a_{ik} p_k \geq 0$. Shunday qilib

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} p_k \right) x_i \geq 0$$

ya'ni barcha $x \in \text{ridom}S^{n-1}$ da $\prod_{k=1}^n \left(1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \right)^{p_k} \leq 1$ (12).

(11) ga qaytib, quyidagini topamiz:

$$j(x^I) \leq j(x) \text{ yoki } j(x^{(m+1)}) \leq j(x^{(m)}), m = 0, 1, \dots$$

Shunday qilib $\lim_{m \rightarrow \infty} j(x^{(m)})$ mavjud va $j(x)$ (5) dinamik sistemaning ixtiyoriy traektoriyasi bo'ylab monoton kamayuvchi Lyapunov funksiyasi bo'ladi. Endi, agar $x^0 \in \text{ridom} S^{n-1}$ va $x^0 \neq Vx^0$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} j(x^{(m)}) = 0$$

bo'lishini isbotlaymiz. Avvalo S^{n-1} simpleksda aniqlangan quyidagi funksionalni ba'zi xossalari o'rnatamiz:

$$j(x) = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n} \text{ va } y(x) = (1 + \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i)^{p_1} \cdots (1 + \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i)^{p_n}$$

[11] kabi malumki, agar $p_i \geq 0$ va $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ bo'lsa, unda funksional $j(x)$ botiq va o'zining eng katta qiymatiga S^{n-1} dagi yagona nuqta $p = (p_1, \dots, p_n)$ da erishadi, ya'ni

$$\max_{x \in S^{n-1}} j(x) = p_1^{p_1} \cdots p_n^{p_n}$$

shu bilan birga $p_i = 0$ bo'lsa $p_i^{p_i}$ ni 1 ga teng deb hisoblaymiz ($\text{ridom} S^{n-1}$ dan j ning davomi S^{n-1} da uzluksizligini saqlanadi). Ko'rinib turibdiki, S^{n-1} dagi $y(x)$ ham botiq funksiya, chunki u

$$x \rightarrow a (1 + \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i, \dots, 1 + \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i)$$

affin akslantirishning kompozitsiyasi va j — botiq funksiya bo'ladi. (12)ga muvofiq (teorema I ga ko'ra) $p \in P$ dan har qanday $x \in S^{n-1}$ uchun quyidagi kelib chiqadi:

$$y(x) = \prod_{k=1}^n (1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i)^{p_k} \leq 1 \quad (13)$$

$\bar{x} \in P$ bo'lsin. Unda $\sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{x}_i \geq 0, k=1..n$ va

$$y(\bar{x}) = \prod_{k=1}^n (1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{x}_i)^{p_k} \geq 1 \quad (14)$$

(13) ni hisobga olgan holda, barcha $\bar{x} \in P$ uchun $y(\bar{x}) = 1$ ni topamiz. Shunday qilib, agar $p \in P$ bo'lsa, unda

$$\max_{x \in S^{n-1}} y(x) = y(\bar{x}) = 1, \bar{x} \in P.$$

Agar $\sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{x}_i \geq 0$, $k=1..n$ bo'lsa, unda

$$\prod_k (1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{x}_i)^{p_k} = 1$$

tenglikdan quyidagi kelib chiqishini payqaymiz:

$$\sum_{i=1}^n a_{k_0 i} \bar{x}_i > 0 \text{ da } p_{k_0} \text{ va } \sum_{i=1}^n a_{k_0 i} \bar{x}_i = 0 \text{ da } p_{k_0} > 0.$$

Shuning uchun

$$p_k \cdot \sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{x}_i = 0, k = 1..n.$$

Modomiki,

$$a_{ki} = -a_{ik}, \sum_{i=1}^n a_{ki} p_i > 0, \sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{x}_i \geq 0$$

bo'lsa, u holda oxirgi tengsizlikdan quyidagilarni olamiz:

$$0 = \sum_k p_k \sum_i a_{ki} \bar{x}_i = - \sum_i (\sum_k a_{ik} p_k) \bar{x}_i = 0 \Rightarrow \bar{x}_k \cdot \sum_{i=1}^n a_{ki} p_i = 0, k = 1..n.$$

Demak $l_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} p_i$ — quyidagi ekstremal masalaning Lagranch ko'paytuvchilari bo'ladi:

$$p \in P, y(x) \rightarrow \sup, x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

U holda tenglik

$$\bar{x}_k \cdot \sum_{i=1}^n a_{ki} p_i = 0, k = 1..n$$

to'ldiruvchi bikiirlik sharti va $l_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} p_i \geq 0, k = 1..n$ nomanfiylik sharti bor [11]. Shunday qilib, agar $p \in P$ bo'lsa

$$1 = \max_{x \in S^{n-1}} y(x) = y(\bar{x}) \Leftrightarrow \bar{x} \in P \quad (15).$$

Eslatma. Isbotlash mumkinki, agarda

$$y(x) = \prod_{k=1}^n (1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i)^{p_k} \leq 1, \forall x \in S^{n-1}$$

bo'lsa, u holda $p = (p_1, \dots, p_n) \in P$ bo'ladi.

Misol 1.

$V: S^2 \rightarrow S^2$ Volterrov kvadratik stoxastik operator ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} x_1^I = x_1 \cdot (1 - ax_2 - bx_3) \\ x_2^I = x_2 \cdot (1 + ax_1 - cx_3) \\ x_3^I = x_3 \cdot (1 + bx_1 + cx_2) \end{cases}$$

bu yerda $0 < a, b, c \leq 1, x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2, \forall x = x^I = (x_1^I, x_2^I, x_3^I) \in S^2$.

Yagona $p = (1, 0, 0)$ nuqta S^2 simpleksdagi

$$\begin{cases} -ax_2 - bx_3 \geq 0 \\ ax_1 - cx_3 \geq 0 \\ bx_1 + cx_2 \geq 0 \end{cases}$$

tengsizlik sistemasining yechimi bo'ladi. Shunday qilib $P = \{(1, 0, 0)\}$. O'z-o'zidan, $Q = \{(0, 0, 1)\}$. Shunday qilib, $j(x) = x_1, y(x) = (1 - ax_2 - bx_3)$. Ravshanki, $j(x) \leq 1, \forall x \in S^2$ va $\max_{x \in S^2} y(x) = y(1, 0, 0) = 1$. Nixoyat, $y(\bar{x}) = 1, \bar{x} \in S^2$ dan $\bar{x} = (1, 0, 0)$ kelib chiqadi.

Agar

$$(1 - ax_2 - bx_3)^{p_1} \cdot (1 + ax_1 - cx_3)^{p_2} \cdot (1 + bx_1 + cx_2)^{p_3} \leq 1, \forall x \in S^2 \quad \text{va}$$

$$(p_1, p_2, p_3) \in S^2$$

bo'lsa, u holda $p_1 = 1, p_2 = p_3 = 0$.

Misol 2.

$$\begin{cases} x_1^I = x_1 \cdot (1 - ax_2 + bx_3) \\ x_2^I = x_2 \cdot (1 + ax_1 - cx_3) \\ x_3^I = x_3 \cdot (1 - bx_1 + cx_2) \end{cases}$$

ko'rinishdagi $V : S^2 \rightarrow S^2$ ni ko'rib chiqamiz

bu yerda

$$0 \leq a, b, c \leq 1, x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2, \forall x = x^I = (x_1^I, x_2^I, x_3^I) \in S^2.$$

Bu holatda

$$P = Q = \left\{ \left(\frac{c}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{a}{a+b+c} \right) \right\}.$$

Shuningdek

$$j(x) = (x_1^c \cdot x_2^b \cdot x_3^a)^{\frac{1}{a+b+c}}, y(x) = [(1-ax_2 + bx_3)^c \cdot (1+ax_1 - cx_3)^b \cdot (1-bx_1 + cx_2)^a]^{\frac{1}{a+b+c}}.$$

Oson tekshirish mumkin

$$1) y(x) \leq 1, \forall x \in S^2.$$

$$2) \max_{x \in S^2} y(x) = y\left(\frac{c}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{a}{a+b+c}\right) = 1$$

$$3) y(\bar{x}) = 1 \Rightarrow \bar{x} = \left(\frac{c}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{a}{a+b+c} \right).$$

$$4) \text{ agar } (1-ax_2 + bx_3)^{p_1} (1+ax_1 - cx_3)^{p_2} (1-bx_1 + cx_2)^{p_3} \leq 1, \forall x \in S^2 \quad \text{va} \\ (p_1, p_2, p_3) \in S^2 \text{ bo'lsa, u holda}$$

$$p_1 = \frac{c}{a+b+c}, p_2 = \frac{b}{a+b+c}, p_3 = \frac{a}{a+b+c}.$$

Teorema 2. Agar $x^0 \in \text{ridom} S^{n-1}$ va $x^0 \neq Vx^0$ bo'lsa:

$$1) \lim_{m \rightarrow \infty} j(x^{(m)}) = 0, \text{ ko'pi bilan } \sum_{m=0}^{\infty} j(x^{(m)}) < \infty, p \in P, j(x) = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n};$$

$$2) w(x^0) \subset \partial S^{n-1}.$$

Isbot. a) $P \cap w(x^0) = \emptyset$ ekanini tekshiramiz. $\bar{p} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n) \in P$ berilgan bo'lsin, u holda $\bar{j}(x) = x_1^{\bar{p}_1} \dots x_n^{\bar{p}_n}$ $\bar{j}(x)$ (5) dinamik sistema uchun Lyapunov funksiyasi bo'ladi va faqatgina $\bar{P}$ nuqtada eng katta qiymatga erishadi. Shu bilan birga $V\bar{P} = \bar{P}$. Chunki $x^0 \neq Vx^0$ dan $j(x^0) < j(\bar{p})$ kelib chiqadi.

$$j(x^0) \geq j(x^{(1)}) \geq j(x^{(2)}) \geq \dots$$

ni hisobga olgan holda har qanday $y \in w(x^0)$ uchun $j(y) < j(\bar{p})$ ni topamiz. Bundan $\bar{p} \notin w(x^0)$ ekani kelib chiqadi. Modomiki ixtiyoriy

$$\bar{p} \in P \text{ da } P \cap w(x^0) = \emptyset.$$

b) Har qanday $j(x) = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$ uchun $\sum_{m=0}^{\infty} j(x^{(m)}) < \infty$ ni isbotlaymiz, bu yerda $p = (p_1, \dots, p_n) \in P$ (a) ga binoan P va $w(x^0)$ kompaktlar kesishmaydi. Funksional

$$y(x) = \prod_{k=1}^n (1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i)^{p_k}$$

o'zining eng katta qiymati 1 ga faqatgina p da erishadi. Chunki $w(x^0)$ kompaktning qandaydir U atrofi uchun quyidagiga ega bo'lamiz: $y(x) \leq c < 1$ barcha $x \in U$ uchun. $\{x^{(m)}\}$ trayektoriya qandaydir m_0 sonidan boshlanib, U da saqlanadi. Shunday qilib,

$$\frac{j(x^{(m+1)})}{j(x^{(m)})} \leq c < 1, \forall m \geq m_0.$$

Binobarin

$$j(x^{(m+1)}) = j(x^{(m)})y(x^{(m)}), \text{ bo'lsa, } y(x^{(m)}) \leq c < 1, \forall m \geq m_0$$

bo'ladi. Shuning uchun $\sum_{m=0}^{\infty} j(x^{(m)}) < \infty$. Nixoyat agar $x \in \text{ridom} S^{n-1}$ bo'lsa

$$j(x) = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} > 0$$

ya'ni $j(x) = 0$ tenglik faqatgina ∂S^{n-1} da bajarilishi mumkin. Demak, $w(x^0) \subset \partial S^{n-1}$. Shunday qilib, agar $p \in P$ bo'lsa, $j(x) = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$ (5)- dinamik sistema uchun Lyapunov funksiyasi bo'ladi. Shu bilan birga, u har qanday trayektoriya atrofida monoton kamayadi.

$$\sum_{m=0}^{\infty} j(x^{(m)}) < \infty$$

tengsizlikni hisobga olgan holda, $p = (p_1, \dots, p_n) \in P$ bo'lgandagina o'rinli. Quyidagi teskari tasdiqni olamiz: agar $j(x) = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$ funksiya (5) dinamik sistema ixtiyoriy trayektoriyasi bo'ylab monoton kamaysa, u holda

$p = (p_1, \dots, p_n) \in P$. Demak $j(x) = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$ ko'rinishidagi barcha Lyapunov funksiyalari $p \in P$ shart bilan tugatiladi, bu yerda $p \in S^{n-1}$.

(2)-teorema isbotidan $w(x^0)$ uchun baho kelib chiqadi:

$$w(x^0) \subset \bigcap_{p \in P} \{x \in S^{n-1} : x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} = 0\}.$$

Teorema 3.

$w(x^0)$ to'plam bitta nuqtadan yoki cheksiz nuqtadan iborat bo'ladi.

Isbot. $w(x^0) = \{y^1, \dots, y^r\}$ deb olamiz, bu yerda $1 < r < \infty$. U holda $y^1, y^2, \dots, y^r$ lar [30] siklni tashkil qiladi, yani nomerlashgacha aniqlik bilan, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$Vy^1 = y^2, \dots, Vy^{r-1} = y^r, Vy^r = y^1 \quad (16)$$

Shuningdek, $r \geq 1$ bo'lganda, $Vx^0 \neq x^0$. Chunki 2-teoremaga ko'ra $w(x^0) \subset \partial S^{n-1}$ ga ega bo'lamiz. Binobarin S^{n-1} simpleksdagi ixtiyoriy yoqi V ga nisbatan invariant bo'lsa, u holda (16) dan, barcha $y^i (i=1..r)$ G_1 deb belgilangan bitta $n-2$ o'lchamli yoqda yotadi. Ma'lumki bundan S^{n-1} simpleksning yoqi V ga nisbatan invariantligi kelib chiqadi. Bunda V_1 - V operatorning G_1 ga torayishi. $V_1: G_1 \rightarrow G_2$ qurilish bo'yicha, G_1 -($n-2$) o'lchamli simpleks va V_1 ham G_1 simpleksda volterra kvadratik stoxastik operator. (16) ga muvofiq, $V_1(w(x^0)) = w(x^0)$, Shuning uchun, har qanday $y \in w(x^0)$ uchun $w(y) = w(x^0)$.

Ikkinchidan

2-teoremadan foydalanib quyidagini olamiz: $w(x^0) \subset \partial G_1$, bu yerda $\partial G - G_1$ simpleksning nisbiy chegarasi. G_1 ning har qanday chegarasi V_1 ga nisbatan invariant, Shuning uchun, barcha $y^i (i=1..r)$ G_2 ning ($n-3$)-o'lchamli chegarasida yotadi. $V_2 - G_j$ dagi V_1 ning torayishi. Har qadamda G_j o'lchamga pasayib boradi, ($n-1$)-qadamda $1 \square r \square \infty$ ga zid keluvchi quyidagi o'xshash muloxazani olamiz: $w(x^0) \subset \Gamma_{n-1}$

SHunday qilib, G_{n-1} yagona nuqtadan tashkil topadi (S^{n-1} uchlaridan biri).

Natija:

(5) dinamik sistema davriy orbita emas.

Teorema4. $x^0 \in \text{ridom}S^{n-1}$ berilgan bo'lsin, $\forall x^0 \neq x^0$ va $\{x^{(m)}\}$ trayektoriya yaqinlashadi. U holda trayektoriyaning limit nuqtasi Q to'plamda yotadi.

Isbot. $x^{(m)} \rightarrow \bar{x} = (q_1, \dots, q_n)$ berilgan bo'lsin. 2-teoremaga muvofiq $\bar{x} \in \partial S^{n-1}$ ga ega bo'lamiz.

$$I = \{1, 2, \dots, n\}, I_0 = \{i : q_i = 0\}, I_t = \{i : q_i > 0\}$$

berilsin. Ravshanki, $\bar{x} - V$ operatorning qo'zg'almas nuqtasi. Shuning uchun

$$q_k = q_k \left(1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} q_i\right), k \in I \quad (17)$$

Agar $k \in I_t$ bo'lsa, (17) dan $\sum_{i=1}^n a_{ki} q_i = 0, k \in I_t$ (18) kelib chiqadi. Qandaydir

$k_0 \in I_0$ uchun $\sum_{i=1}^n a_{ki} q_i > 0$ deb olamiz. Modomiki $x_k^{(m)} \rightarrow q_k$ ekan, qanaydir m_0 dan boshlab

$$\sum_{i=1}^n a_{k_0 i} x_i^{(m)} > 0, m > m_0 \quad (19)$$

tengsizlik bajariladi. $\text{ridom}S^{n-1}$ V ga nisbatan invariant ekanini eslaymiz. Shuning uchun $x^0 \in \text{ridom}S^{n-1}$ dan $x_k^{(m)} > 0$ kelib chiqadi. ($\forall k \in I, m = 0, 1, \dots$).

(19) ni hisobga olgan holda

$$x_{k_0}^{(m+1)} = x_{k_0}^{(m)} \left(1 + \sum_{i=1}^n a_{k_0 i} x_i^{(m)}\right), m > m_0$$

tengsizlikdan $x_{k_0}^{(m+1)} > x_{k_0}^{(m)}$ ni olamiz (barcha $m > m_0$ larda). Eng so'nggisi

$$x_{k_0}^{(m)} \rightarrow q_{k_0} = 0$$

bo'lishi mumkin emas. Shunday qilib, barcha $k \in I$ lar uchun $\sum_{i=1}^n a_{ki} q_i \leq 0, k \in I_0$ tengsizlik bajarilishi shart. (18) dan $\sum_{i=1}^n a_{ki} q_i \leq 0, k \in I$ ni olamiz. Natijada $\bar{x} = (q_1, \dots, q_n) \in Q$ ekani kelib chiqadi.

Teorema 5. Agar V ichki va alohidalangan qo'zg'almas $x^* = (p_1, \dots, p_n)$ nuqtaga ega bo'lsa, ixtiyoriy $x^0 \in \text{ridom}S^{n-1}$ boshlang'ich nuqta uchun $\forall x^0 \neq x^0, \{x^{(m)}\}$ trayektoriya yaqinlashmaydi.

Isbot. Modomiki $p_k > 0, p_k = p_k(1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} p_i)$ tenglikdan $\sum_{i=1}^n a_{ki} p_i = 0, k \in I$ ni olamiz. Shuning uchun $x^* \in Q$.

$\{x^{(m)}\}$ trayektoriya yaqinlashadi deb olib, 4- teorema ko'ra:

$$\bar{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} \in Q$$

ni topamiz. I lemmadan 2-natijaga muvofiq Q —qavariq va V operatorning qo'zg'almas nuqtalaridan tashkil topgan. Shuning uchun $x^* \in Q, \bar{x} \in Q$ dan x^* va $\bar{x}$ birlashtiruvchi kesma qo'zg'almas nuqtalardan tuzilganligi kelib chiqadi. Modomiki $x^* \in \text{ri} S^{n-1}$ va $\bar{x} \in \partial S^{n-1}$ bo'lsa, u holda $x^* \neq \bar{x}$ bo'ladi.

Oxirgi ikki tasdiq x^* alohidalangan(ajratilgan)likni inkor qiladi.

Natija.

5-teorema shartiga ko'ra $w(x_0)$ to'plam cheksiz.

1.4-§. “MANFIY” yaqinlashish traektoriyasi.

Teorema 6.

$V : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ volterrov kvadratik stoxastik operator-gomomorfizmdir.

Isbot. n bo'yicha induksiya orqali isbotlaymiz. $n=1$ bo'lganda tasdiq ma'nosiz. $1, 2, \dots, n-1$ da tasdiqni to'g'ri deb faraz qilib, n ga o'tishni ko'rsatamiz. Binobarin barcha S^{n-1} yoqlar invariant va V torayishi ixtiyoriy yoqqa ham volterra kvadratik stoxastik operator bo'lsa, u holda induksiyaning $V : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ chegarani o'ziga gomomorf akslantirishi haqidagi faraz to'g'ri ekan. Buni hisobga olib, S^{n-1} ning har bir ichki nuqtasida V akslantirish lokal gomomorfizmligidan, S^{n-1} kompaktligini isbotlash yetarli [22]. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{ri} S^{n-1}$ nuqtada V yakobianni hisoblab, quyidagini olamiz:

$$J_n = \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i & a_{12} x_1 & \dots & a_{1n} x_1 \\ a_{21} x_2 & 1 + \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i & \dots & a_{2n} x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} x_n & a_{n2} x_n & \dots & 1 + \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i \end{vmatrix}.$$

$J_n > 0$ ekanini isbotlaymiz.

Buni isbotlashdan oldin quyidagi tengsizlikni isbotlaymiz:

$$D_n = \begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & y_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & y_n \end{vmatrix} \geq y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n, \quad (20)$$

bu yerda $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n > 0$ va $a_{ki} = -a_{ik}$.

Ravshanki

$$D_1 = y_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} y_1 & a_{12} \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2 - a_{12} a_{21} = y_1 \cdot y_2 + a_{12}^2 \geq y_1 \cdot y_2, \quad D_k \geq y_1 \cdot \dots \cdot y_k,$$

($k=1..n-1$)

deb olamiz.

D_n aniqlovchini yoyib, oxirgi qator va so'ngi ustundan bir vaqtda olamiz

$$D_n = y_n D_{n-1} - a_{n1} \cdot a_{1n} \cdot D_{n-2}^{(1)} - a_{n2} a_{2n} D_{n-2}^{(2)} - \dots - a_{n,n-1} a_{n-1,n} D_{n-2}^{(n-1)} \quad (21)$$

ni olamiz, bu yerda D_{n-1} va $D_{n-2}^{(r)}$ $r=1..n-1$. D_n ko'rinishidagi $(n-1)$ - va $(n-2)$ – tartibli bosh minorlar. Binobarin $a_{ni} = -a_{in}$ ekan. (21)-dan buni topamiz:

$$D_n = y_n \cdot D_{n-1} + \sum_{n=1}^{n-1} a_{nr}^2 \cdot D_{n-2}^{(r)}.$$

$D_{n-2}^{(r)} \geq 0$ qo'shimchaga muvofiq. Shuning uchun

$$D_n \geq y_n \cdot D_{n-1} \geq y_1 \cdot y_2 \dots y_n.$$

Demak $y_1 \cdot y_2 \dots y_n > 0$ bo'lganda $D_n > 0$ ekan. J_n yakobianga qaytib quyidagini olamiz.

$$J_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot \begin{vmatrix} \frac{1 + \sum a_{1i} x_i}{x_1} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \frac{1 + \sum a_{2i} x_i}{x_2} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \frac{1 + \sum a_{ni} x_i}{x_n} \end{vmatrix}$$

$$\geq x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot \frac{1 + \sum a_{1i} x_i}{x_1} \dots \frac{1 + \sum a_{ni} x_i}{x_n} = \prod_{i=1}^n (1 + \sum_{k=1}^n a_{ki} x_i)$$

Modomiki $x \in \text{ridom } S^{n-1}$ ekan, u holda barcha $k=1..n$ larda $x_k > 0$ va $1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i > 0$ Shuning uchun $J_n \geq \dots \geq 0$.

Demak, $J_n \neq 0$ bo'lsa, V har bir $x \in \text{ridom } S^{n-1}$ nuqtada lokal gomomorfizm ekan.

Natija.

Har qanday boshlang'ich $x^0 \in S^{n-1}$ uchun $\{x^0, V^{-1}x^0, V^{-2}x^0, \dots\}$. trayektoriya “manfiy” trayektoriya mavjud. $a(x^0) — x^0 \in S^{n-1}$ nuqtadan boshlanuvchi

“manfiy ” trayektoriyaning limit nuqtalar to’plami bo’lsin. Ravshanki $a(x^0) \neq \emptyset$ va yopiq.

Teorema 7. Agar $x^0 \in \text{ridom} S^{n-1}$ bo’lsa, $a(x^0) \subset P$ bo’ladi.

Isbot. $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P$ bo’lsin. Unda

$$j(x) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_n^{p_n}$$

Lyapunov funksiyasi bo’ladi. (5) dinamik sistema uchun ixtiyoriy trayektoriya bo’ylab monoton kamayadi. Shuning uchun

$$j(x^0) \leq j(x^{(-1)}) \leq j(x^{(-2)}) \leq \dots \quad (21)$$

bu yerda $x^{(-n)} = V^{-n}x^0$. Binobarin $x^0 \in \text{ridom} S^{n-1}$ bo’lganda $j(x^0) > 0$ ekan. Shuning uchun (21) dan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} j(x^{(-m)}) = c > 0 \quad (22)$$

ni olamiz. Shunday qilib, $x^{(-m)} = Vx^{(-m-1)}$ bo’lsa

$$j(x^{(-m)}) = y(x^{(-m-1)}) \cdot j(x^{(-m-1)}) \quad (23)$$

bo’ladi. bu yerda $y(x) = \prod_{k=1}^n (1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i)^{p_k}$ (23) dan topamiz.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y(x^{(-m)}) = 1 \quad \forall y \in a(x^0)$$

uchun $y(y) = 1$ bo’ladi, faqat $y \in P$ dan taShqari $y(y) = 1$ ekanini bildik. SHuning uchun $a(x^0) \subset R$.

Teorema.8 “Manfiy “ trayektoriyalar doimo yaqinlashadi.

Isbot. Umumiylik cheklanmaganidan sanash mumkinki $x^0 \in \text{ridom} S^{n-1}$, modomiki teskari tomondan S^{n-1} simpleksning mos keluvchi yoqqa o’tishi va bu yoqqa V operatorning torayishi yetarli. 7-teoremadan $a(x^0) \subset P$. Chunki $a(x^0)$ faqatgina V operatorning qo’zg’almas nuqtalaridan tashkil topgan. $p = (p_1, \dots, p_n) \in a(x^0)$ tanlab olib

$$j(x) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_n^{p_n}$$

Lyapunov funksiyasini tuzamiz. Modomiki $p \in a(x^0)$ bo’lsa. Demak $\{x^{(-m_i)}\}$ “manfiy” trayektoriyalar ketma-ketlik p ga yaqinlashadi. Chunki

$$\lim_{i \rightarrow \infty} j(x^{(-m_i)}) = j(p) = p_1^{p_1} \cdots p_n^{p_n}.$$

(21) dan quyidagi kelib chiqadi

$$\lim_{i \rightarrow \infty} j(x^{(-m)}) = p_1^{p_1} \cdots p_n^{p_n}. \quad x \in S^{n-1}, \max j(x) = p_1^{p_1} \cdots p_n^{p_n}$$

ni hisobga olib va shu bilan birga faqatgina p nuqtada maksimumga erishishidan $a(x^0) = \{p\}$ ekanini topamiz. Demak ixtiyoriy manfiy trayektoriya yaqinlashadi.

1-Misol

$V: S^3 \rightarrow S^3$ Volterra kvadratik stoxastik operatori berilgan bo'lsin.

$$\text{Quyidagi tengliklar bilan aniqlangan} \quad \begin{cases} x_1^I = x_1 \cdot (1 - x_3 + x_4) \\ x_2^I = x_2 \cdot (1 - x_3 + x_4) \\ x_3^I = x_3 \cdot (1 + x_1 + x_2 - x_4) \\ x_4^I = x_4 \cdot (1 - x_1 - x_2 + x_3) \end{cases}$$

Yechish.

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3, \forall x = x^I = (x_1^I, x_2^I, x_3^I, x_4^I) \in S^3. \quad \bar{p} = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \quad \overline{\bar{p}} = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \quad \text{va}$$

$$[\bar{p}, \overline{\bar{p}}] = \left\{ l \bar{p} + (1-l) \overline{\bar{p}} : 0 \leq l \leq 1 \right\} = \left\{ (\frac{l}{3}, \frac{1-l}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) : 0 \leq l \leq 1 \right\}.$$

Mos keluvchi tengsizlikni yechib quyidagini topamiz. $P = Q = [\bar{p}, \overline{\bar{p}}]$.

Chunki

$$j(x) = (x_1^I \cdot x_2^{1-I} \cdot x_3 \cdot x_4)^{\frac{1}{3}} \quad (0 \leq l \leq 1)$$

Ko'rinishidagi funksiya (24)-dinamik sistema uchun Lyapunov funksiyasi bo'ladi. Shunday qilib agar $x^0 \in (\text{ri} \text{dom} S^3) \setminus P$ bo'lsa, u holda

$$w(x^0) \subset \bigcap_{0 \leq l \leq 1} \{x: x_1^I \cdot x_2^{1-I} \cdot x_3 \cdot x_4 = 0\} = \{x: x_3 = 0\} \cup \{x: x_4 = 0\} \cup \{x: x_1 = x_2 = 0\} \subset \partial S^3$$

va $a(x^0) \in P$ bo'ladi. Berilgan misol uchun $w(x^0)$ va $a(x^0)$ uchun berilgan umumiy baholar ancha kuchaytirilgani bo'lishi mumkin. Buning uchun (24)-dan

$$\frac{x_1^I}{x_2^I} = \frac{x_1^0 \cdot (1 - x_3^0 + x_4^0)}{x_2^0 (1 - x_3^0 + x_4^0)} = \frac{x_1^0}{x_2^0}$$

ni ko'rish yetarli. Chunki $\forall m \in Z$ uchun

$$\frac{x_1^{(m)}}{x_2^{(m)}} = \frac{x_1^0}{x_2^0}$$

bo'ladi. (saqlanish qonuni) Shunday ekan $a(x^0)$ va $w(x^0)$ dan barcha nuqtalar bu saqlanish qonuniga bo'ysunishi shart.

Qisman

$$a(x^0) \in P = \left\{ \left(\frac{l}{3}, \frac{1-l}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) : 0 \leq l \leq 1 \right\}$$

uchun $\frac{\frac{l}{3}}{\frac{1-l}{3}} = \frac{x_1^0}{x_2^0}$ (25) bo'ladi. (25) dan

$$l = \frac{x_1^0}{x_1^0 + x_2^0}$$

ni topamiz. Chunki

$$a(x_0) = \left(\frac{x_1^0}{3(x_1^0 + x_2^0)}, \frac{x_2^0}{3(x_1^0 + x_2^0)}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Shuning singari

$$w(x^0) \subset \overline{\partial \left\{ x : \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^0}{x_2^0} \right\}}$$

bo'ladi. Bu yerda $\partial M - M$ to'plamning nisbiy chegarasi. Natija sifatida 8-teoremadan shuni olamizki, agar P bitta nuqtadan iborat bo'lsa u holda barcha "manfiy" trayektoriyalar aynan shu nuqtaga yaqinlashadi. Jumladan, agar V alohida olingan ichki qo'zg'almas $\bar{x} \in \text{ri dom } S^{n-1}$ nuqta bo'lsa, u holda $a(x^0) = \{\bar{x}\}$ -ixtiyoriy nuqtalar uchun boshlang'ich nuqta bo'ladi.

1.5-§. Qo'zg'almas nuqtalar

Teorema 9 Agar $\{i\}, \{j\}, \{k\}$ uchlar T_n turnirda siklik uchlik hosil qilsa, u holda S^{n-1} simpleksning e_i, e_j, e_k uchlariga tortilgan ikki tomonlama yoqning ichi V operatorning yagona qo'zg'almas nuqtasini o'zida saqlaydi.

Isbot. Ko'rsatilgan yoqqa V torayish quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{aligned}x_i^I &= x_i \cdot (1 + a_{ij}x_j + a_{ik}x_k) \\x_j^I &= x_j \cdot (1 + a_{ji}x_i + a_{jk}x_k) \\x_k^I &= x_k \cdot (1 + a_{ki}x_i + a_{kj}x_j),\end{aligned}$$

bu yerda $x_i \geq 0, x_j \geq 0, x_k \geq 0, x_i + x_j + x_k = 1$. T_3 turnirga mos keluvchi turnirni qurib, T_3 turnir faqat va faqat quyidagi tengsizlik bajarilgandagina siklik uchlik bo'lishini ko'rishimiz mumkin:

$$a_{ij}a_{ik} < 0, a_{ji}a_{jk} < 0, a_{ki}a_{kj} < 0 \quad (26)$$

Modomiki $a_{rs} = -a_{sr}$ ekan unda (26) tengsizlikni istalgani qolgan ikkitasining natijasi bo'ladi. Boshlang'ich asoslar shuni ko'rsatadiki $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ bu yerda

$$\bar{x}_i = \frac{a_{jk}}{a_{ij} - a_{ik} + a_{jk}}, \bar{x}_j = \frac{-a_{ik}}{a_{ij} - a_{ik} + a_{jk}}, \bar{x}_k = \frac{a_{jk}}{a_{ij} - a_{ik} + a_{jk}}$$

qolgan barcha nolli kordinatalar esa qo'zg'almas nuqtasi bo'ladi. (26) tengsizlikning kuchida $\bar{x}_i > 0, \bar{x}_j > 0, \bar{x}_k > 0$, bo'ladi. Shuning uchun $\bar{x}$ -teorema shartini qanoatlantiruvchi qo'zg'almas nuqta bo'ladi. Bizga $\bar{x}$ -teorema shartini qanoatlantiruvchi yana biz qo'zg'almas nuqta berilgan. Binobarin $\bar{x}$ va $\bar{x}$ ichki qo'zg'almas nuqtalar ekan, u holda bu nuqtalardan o'tuvchi kesma S^{n-1} dagi qo'zg'almas nuqtalardan tashkil topadi.

Ikki tomonlama (yoqlama) yoqning chegarasida e_i, e_j, e_k uchlardan tashqari boshqa qo'zg'almas nuqtalari yo'q. Yuqorida ko'rsatilgan kesma chegarani ikkita nuqtada kesib o'tadi. Bu qo'zg'almas bo'lgan nuqtalar e_i, e_j, e_k uchlar ichidan ikkitasiga mos tushishga majbur. So'ngi mulohaza kesma yoqning ichki nuqtalaridan tashkil topganiga zid keladi. Bundan kelib chiqadiki, $\bar{x}$ -belgilangan yoqning yagona ichki qo'zg'almas nuqtasi.

Eslatma. Yuqorida qayd etilganlaridek T_n kuchli turnir bo'lmoqda u holda $ridomS^{n-1}$ qo'zg'almas nuqtaga ega emas. Shuning uchun ichki qo'zg'almas nuqtaning mavjudligidan bu turnir kuchliligi kelib chiqadi.

Shunday ekan 9-teorema quyidagi munosabatlarga huquq beradi. Agar qandaydir ikki tomonlama yoqning nisbiy ichi o'zida qo'zg'almas nuqta saqlasa, u holda T_n turnir uchlari bu yoqning mos keluvchi uchlari bilan siklik uchlik hosil qiladi.

Natija.

Agar T_n -kuchli turnir bo'lsa, u holda $V \in 2(n-1)$ dan kam bo'lmagan qo'zg'almas nuqtalarga ega.

Isbot.

9-teoremadan agar hisoblab chiqilsa S^{n-1} simpleksning uchlari doimo qo'zg'almas nuqtalari bo'lishi bevosita kelib chiqadi.

Teorema 10. *V operatorning ajratib olingan (yoki alohidalangan) qo'zg'almas nuqtasi no'l bo'lmagan koordinatalarning toq soniga ega bo'ladi.*

Isbot. $\bar{x}$ -ajratib olingan qo'zg'almas nuqta berilgan. Invariantlik kuchiga yoqlar V operatorning nisbatan $\bar{x} \in \text{ridom } S^{n-1}$ deb hisoblash mumkin. Teskari holatda V torayish S^{n-1} ning eng kichik yog'i. $\bar{x}$ saqlashini ko'ramiz. Modomiki $V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ gomomorfizm bo'lsa, u holda ichki alohidalangan (yoki ajratib olingan) qo'zg'almas nuqta. Aniqroq qilib aytganda $\varepsilon > 0$ uchun shunday $d > 0$ son mavjud bo'lib, $\|V - V_\varepsilon\| < d$ dan $\|\bar{x} - \bar{x}_\varepsilon\| < \varepsilon$ kelib chiqadi. Bu yerda V, V_ε -kvadratik stoxastik operatorning Volterralari.

$\bar{x}, \bar{x}_\varepsilon$ -mos keluvchi ichki alohidalangan qo'zg'almas nuqtalari. Bittadan ko'p bo'lmagan ichki alohidalangan qo'zg'almas nuqta Volterra kvadratik stoxastik operator bo'lishi mumkinligini ko'ramiz.

$$A = (a_{ij}), i, j = 1..n$$

kososimmetrik matritsaning determinanti doimo nomanfiy, agar n -toq bo'lsa, $\det A = 0$ bo'ladi. Agar n -juft bo'lsa, $\det A > 0$ ham A matritsaning ixtiyoriy kichik toyilishi kossosimmetrik saqlanishida $\det A_\varepsilon > 0$ ga erishishi mumkin, bu yerda A_ε -toyilgan matritsa. Shunday ekan $\det A = 0$ bo'ladi, kichik toyilmalarda ham $\det A_\varepsilon = 0$ tenglik saqlanishi shart.

($\bar{x}$ turg'unligi (barqarorligi) kuchi uchun) Lekin n -juft bo'lganda so'nggi tenglik ixtiyoriy kichik toyilish bilan izdan chiqishi mumkin. Shuning uchun, n -toq va shuningdek $\bar{x}$ -no'ldan farqli koordinatalarning toq soniga ega. Shunday qilib $V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ Volterra kvadratik stoxastik operator uchun qo'zg'almas nuqtalar bitta no'ldan farqli koordinata bilan barcha S^{n-1} uchlari mohiyati bo'lib, ularning soni n gacha eng.

Qo'zg'almas nuqtalar uchta no'ldan farqli koordinatalar bilan T_n turnirning siklik uchligini to'liq tavsiflaydi va ularning soni quyidagiga teng bo'ladi.

$$t(T_n, 3) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \sum_{i=1}^n \frac{S_i(S_i-1)}{2}, \quad a_{ki} \neq 0, k \neq i \text{ da.}$$

Sharti barcha qo'zg'almas nuqtalarning bitta no'ldan farqli koordinata bilan ajratilganligini taminlaydi. Tabiiyki taxmin qilishimiz mumkinki 5 ta uchli kuchli qism turnir 5 ta no'ldan farqli koordinatalar bilan qo'zg'almas nuqtani aniqlaydi.(yoki ifodalaydi). Biroq, bu xato.

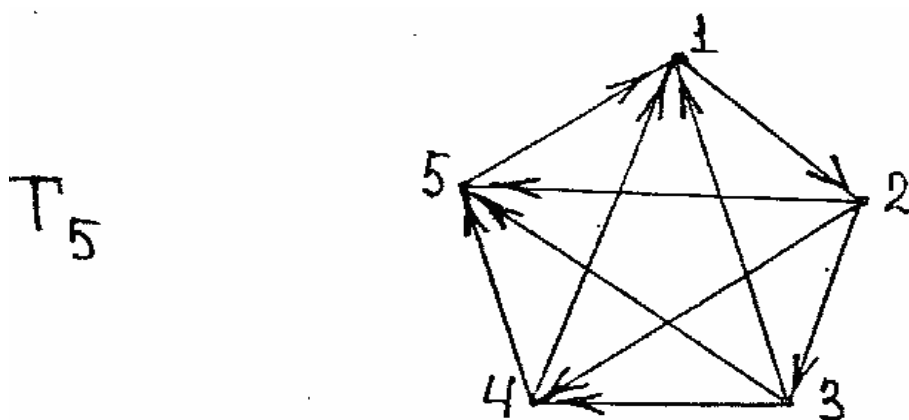
Masalan

$V: S^4 \rightarrow S^4$ kvadratik stoxastik operator Voltera uhun quyidagi ko'rinishni

olamiz
$$\begin{cases} x_1^I = x_1 \cdot (1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \\ x_2^I = x_2 \cdot (1 + x_1 - x_3 - x_4 - x_5) \\ x_3^I = x_3 \cdot (1 - x_1 + x_2 - x_4 - x_5) \\ x_4^I = x_4 \cdot (1 - x_1 + x_2 + x_3 - x_5) \\ x_5^I = x_5 \cdot (1 - x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{cases} \quad \text{bunda}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dinamik sistema turniri quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.



2-rasm

Modomiki

$$\{I\} \rightarrow \{2\} \rightarrow \{3\} \rightarrow \{4\} \rightarrow \{5\} \rightarrow \{I\}$$

gamilton sikli mavjud bo'lsa, u holda T_5 -kuchli turnir va $\{I, 2, 3\}, \{I, 2, 5\}, \{I, 2, 4\}$.

Ular quyidagi qo'zg'almas nuqtalrni aniqlaydi.

$$C_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0); C_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}); C_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0).$$

Bundan tashqari $M_1(1, 0, 0, 0, 0), \dots, M_5(0, 0, 0, 0, 1)$ simpleksning uchlarlari ham qo'zg'almas. Bu 8 ta qo'zg'almas nuqtalardan faqatgina $C_1 Ax \geq 0, x \in S^4$ tengsizlikni, faqatgina $C_2 Ax \leq 0, x \in S^4$ tengsizlikni qanoatlantirishga ishonch hosil qilish qiyin emas. Shuning uchun $C_1 \in P, C_2 \in Q$. Agar $\bar{x} \in \text{ridom} S^4$ ichki qo'zg'almas nuqta mavjud bo'lsa, $A\bar{x} = 0$ bo'ladi. Shu sababli, $\bar{x} \in P \cap Q$. $C_1 \in P$ va $\bar{x} \in P$ dan $C_1 \bar{x} \subset P$ kesma kelib chiqadi (P-qavariq) $C_1 \bar{x}$ kesma C_1 nuqtadan mustasno holda $\text{ridom} S^4$ da saqlaydi.

Shuningdek $C_1 \bar{x} \subset C_1$ nuqtadan tahqari, Q da saqlanadi (va P da ham). Lekin Q-yopiq, shu sababli $C_1 \in Q$ bo'ladi. Bu inkor ichki qo'zg'almas nuqta yo'qligini isbotladi. (qolaversa, buni to'g'ri hisoblash bilan ham isbotlash mumkin). Shunday qilib, agar $T_n (n \geq 5)$ turnirning qandaydir T_5 qism turniri kuchli bo'lmasa, u holda T_5 qism turnir uchlariga tortilgan yoqning nisbiy ichi o'zida V operatorning qo'zg'almas nuqtalarini saqlaydi. Biroq T_5 kuchliligi ham talab qilingan qo'zg'almas nuqtaning mavjudligini taminlaydi. Biz yana umumiy nuqtai nazarda V operatorning barcha qo'zg'almas nuqtalari alohidalangan deb hisoblaymiz.

U holda P(hamda Q) p (mos keluvchi q) orqali belgilangan nuqtalardan tuziladi. $V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ Volterra kvadratik stoxastik operatorning barcha qo'zg'almas nuqtalarini topishi uchun algoritim tasvirlaymiz. Bizga $S(i_1, i_2, \dots, i_r) - S^{n-1}$ ning $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}$ uchlariga tortilgan $(r-1)$ o'lchamli yog'i berilgan bo'lsin. $V(i_1, i_2, \dots, i_r)$ -shu yoqda V operatorning torayishi $A(i_1, i_2, \dots, i_r) - i_1, i_2, \dots, i_r$ no'merli qator va ustun kesishish joyida yotuvchi elementdan mustasno holatda, barcha elementlari no'l bilan almashtirilgan A matritsadan olingan kososimmetrik matritsa.

$$T(i_1, i_2, \dots, i_r) - \{i_1\}, \{i_2\}, \dots, \{i_r\}$$

uchlarini saqlovchi T_n turnirning qism turniri. 10-teoremadan r ni toq son deb hisoblaymiz. Barcha $r-2$ no'ldan farqli koordinatali qo'zg'almas nuqtalardan r no'ldan farqli koordinatali qo'zg'almas nuqtalarga o'tishga imkon beradi.

1) $T(i_1, i_2, \dots, i_r)$ -qism turniri tanlaymiz. Agar tanlangan qism turnir kuchli bo'lmasa u holda $S(i_1, i_2, \dots, i_r)$ yoq r no'ldan farqli koordinatali qo'zg'almas nuqta saqlamaydi. Bu holatda r qirrali boshqa qism turniri ko'rib chiqishga o'tamiz;

2) Agar $T(i_1, i_2, \dots, i_r)$ tanlangan qism turnir kuchli va $S(i_1, i_2, \dots, i_r)$ yoqda saqlangan $r-2$ no'ldan farqli koordinatali qo'zg'almas nuqtalardan hech bo'lmaganda bittasi $A(i_1, i_2, \dots, i_r)x \geq 0$, tengsizlikni qanoatlantirsa u holda $S(i_1, i_2, \dots, i_r)$ ham r no'ldan farqli koordinatali qo'zg'almas nuqta saqlamaydi. Endi boshqa r qirrali qism turnirga o'tamiz;

3) $T(i_1, i_2, \dots, i_r)$ kuchli turnir berilgan bo'lsin. Unda $r-2$ no'ldan farqli koordinatali qo'zg'almas nuqtalardan hech biri $S(i_1, i_2, \dots, i_r)$ yoqda saqlanmaydi

$$A(i_1, i_2, \dots, i_r)x \geq 0$$

tengsizlik bajarilmaydi. Bu holatda $S(i_1, i_2, \dots, i_r)$ yoqda yoyuvchi r no'ldan farqli koordinatali yagona qo'zg'almas nuqta mavjud bo'lib, bu nuqta

$$A(i_1, i_2, \dots, i_r)x = 0, x \in S(i_1, i_2, \dots, i_r)$$

tenglamada yotadi. Shunday qilib, S^{n-1} simpleks uchidan yuborilayotgan $V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ Volterra kvadratik stoxastik operatorning barcha qo'zg'almas nuqtalarini topish mumkin.

$$x_1^I = x_1 \cdot (1 - a_1 x_2 + a_2 x_3 - a_3 x_4 + a_4 x_5)$$

$$x_2^I = x_2 \cdot (1 + a_1 x_1 - a_5 x_3 - a_6 x_4 + a_7 x_5)$$

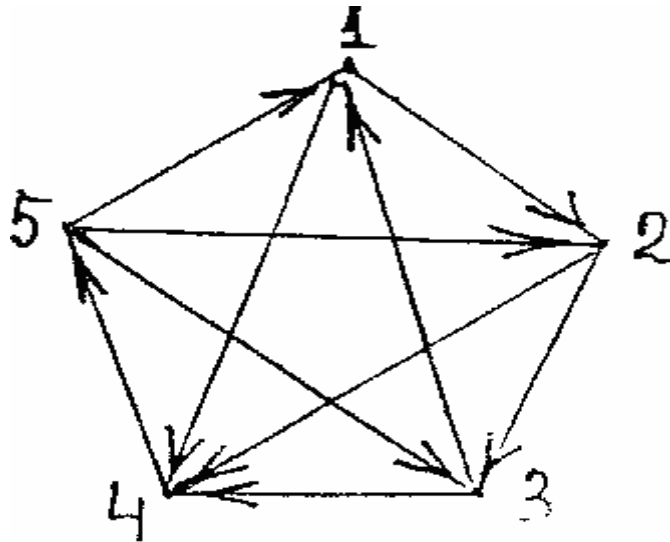
Misol. $x_3^I = x_3 \cdot (1 - a_2 x_1 + a_5 x_2 - a_8 x_4 + a_9 x_5)$ (27) ko'rinishga ega

$$x_4^I = x_4 \cdot (1 + a_3 x_1 + a_6 x_2 + a_8 x_3 - a_{10} x_5)$$

$$x_5^I = x_5 \cdot (1 - a_4 x_1 - a_7 x_2 - a_9 x_3 + a_{10} x_4)$$

$V: S^4 \rightarrow S^4$ berilgan bo'lsin. Bu yerda $0 < a_i \leq 1, i = 1..10$, bu yerdan A kososimmetrik matritsani va T_5 munozarani oson topish mumkin.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & a_2 & -a_3 & a_4 \\ a_1 & 0 & -a_5 & -a_6 & a_7 \\ -a_2 & a_5 & 0 & -a_8 & a_9 \\ a_3 & a_6 & a_8 & 0 & -a_{10} \\ -a_4 & -a_7 & -a_9 & a_{10} & 0 \end{pmatrix}$$



3-rasm

3-rasmda T_5 - kuchli va $T(1, 2, 3), T(1, 4, 5), T(2, 4, 5), T(3, 4, 5)$ siklik to'rtlikni saqlanishini ko'rish mumkin. Bu siklik uchliklar quyidagi qo'zg'almas nuqtalarni aniqlaydi.

$$y^1 = \frac{1}{a_1 + a_2 + a_5} \cdot (a_5, a_2, a_1, 0, 0); y^2 = \frac{1}{a_3 + a_4 + a_{10}} \cdot (a_{10}, 0, 0, a_4, a_3);$$

$$y^3 = \frac{1}{a_6 + a_7 + a_{10}} \cdot (0, a_{10}, 0, a_7, a_6); y^4 = \frac{1}{a_8 + a_9 + a_{10}} \cdot (0, 0, a_{10}, a_9, a_8); .$$

$$\begin{aligned}
Ay^1 &= \frac{1}{a_1 + a_2 + a_5} \cdot (0, 0, 0, a_3 a_5 + a_2 a_6 + a_1 a_8, -a_4 a_5 - a_2 a_7 - a_1 a_9) \\
Ay^2 &= \frac{1}{a_3 + a_4 + a_{10}} \cdot (0, a_1 a_{10} - a_4 a_6 + a_3 a_7, -a_2 a_{10} - a_4 a_8 + a_3 a_9, 0, 0), \\
\text{Yana} \quad Ay^3 &= \frac{1}{a_6 + a_7 + a_{10}} \cdot (-a_1 a_{10} + a_4 a_6 - a_3 a_7, 0, a_5 a_{10} - a_7 a_8 + a_6 a_9, 0, 0); \\
Ay^4 &= \frac{1}{a_8 + a_9 + a_{10}} \cdot (a_2 a_{10} + a_4 a_8 - a_3 a_9, -a_5 a_{10} + a_7 a_8 - a_6 a_9, 0, 0, 0);
\end{aligned}$$

ni topamiz.

Ravsahanki, hech qaysi $0 < a_i \leq 1$ da $Ay^1 \neq 0$. Agar masalan

$$a_1 a_{10} - a_4 a_6 + a_3 a_7 > 0 \text{ va } -a_2 a_{10} - a_4 a_8 + a_3 a_9 > 0$$

bo'lsa, u holda $Ay^2 \geq 0$ bo'ladi. Shuning uchun bu holda 5 ta no'ldan farqli koordinatali qo'zg'almas nuqta mavjud emas. Faraz qilaylik $\Delta_1 = a_1 a_{10} - a_4 a_6 + a_3 a_7 \neq 0$; $\Delta_2 = a_2 a_{10} + a_4 a_8 - a_3 a_9 \neq 0$; $\Delta_3 = a_5 a_{10} - a_7 a_8 + a_6 a_9 \neq 0$;

deb barcha mumkin hollarni ajratib, quyidagi natijani olamiz. 5 ta no'ldan farqli koordinatali qo'zg'almas nuqta faqat va faqat $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

yagona ishoraga ega bo'lgandagina mavjud bo'ladi. Natijada $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sonlari ichidan hech bo'lmaganda bittasi no'lga teng bo'lsa, u holda alohidalangan qo'zg'almas nuqtalar mavjud, ya'ni $\Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \Delta_3 = 0$ da (27) dinamik sistema "umumiy holatda joylashmaydi". Endi Volterra kvadratik stoxastik operatorning qo'zg'almas nuqtalarini topologik xarakteristikasini o'rganishga o'tamiz. Bizga $V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ Volterra kvadratik stoxastik operatorning $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ qo'zg'almas nuqtasi berilgan bo'lsin. Shunday ekan

$$\bar{x}_k = \bar{x}_k \cdot (1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{x}_i), k = 1..n$$

bo'ladi. Bu tenglikdan

$$\bar{x}_k \cdot (1 + \sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{x}_i) = 0, k = 1..n \quad (28)$$

ni olamiz.

$$I_0(\bar{x}) = \{k : \bar{x}_k = 0\}, \mathfrak{I}_0(\bar{x}) = \left\{k : \sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{x}_i = 0\right\}$$

bo'lsin. U holda (28) dan $I_0(\bar{x}) \cup \mathfrak{I}_0(\bar{x}) = \{1, 2, \dots, n\}$ ga ega bo'lamiz. Agar barcha chegaraviy qo'zg'almas nuqtalari alohidalangan bo'lsa, u holda $\text{ridom} S^{n-1}$ bittadan ko'p qo'zg'almas nuqta saqlashi mumkin emasligini isbotlaymiz. Xaqiqatdan, $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \text{ridom} S^{n-1}$ qo'zg'almas nuqta berilgan bo'lsin. U holda

$$I_0(\bar{x}) = I_0(\bar{\bar{x}}) = \emptyset.$$

Natijada

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{x}_i = 0, \sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{\bar{x}}_i = 0, k = 1..n \quad (29)$$

$\bar{x}, \bar{\bar{x}}$ nuqtalar orqalari o'tuvchi $\mathbf{l}$ to'g'ri chiziq va $M = \mathbf{l} \cap S^{n-1}$ berilsin.

(29) ga ko'ra ixtiyoriy $x \in M$ uchun $Ax = 0$ ga ega bo'lamiz. Shuningdek $x \in P$ va shuningdek M kesma qo'zg'almas nuqtalardan tuzilgan. Xususan S^{n-1} yoqning nuqtasi bo'ladigan M chetki nuqta alohidalangan qo'zg'almas nuqta bo'lmaydi. Shuningdek chegaraviy qo'zg'almas nuqtalarning alohidalanganligi barcha qo'zg'almas nuqtalarning alohidalanganligini taminlaydi. $\bar{x}$ -chegaraviy qo'zg'almas nuqta berilsin.

U holda

$$I_0(\bar{x}) \neq \emptyset \text{ va } \mathfrak{I}_0(\bar{x}) \neq \emptyset$$

bo'lishi ravshan.

Teorema 10 Agar $\bar{x}$ Chegaraviy qo'zg'almas nuqtasi alohidalangan bo'lsa, u holda

$$I_0(\bar{x}) \cap \mathfrak{I}_0(\bar{x}) = \emptyset \quad (30)$$

bo'ladi.

Isbot. $\bar{x}$ -alohidalangan, lekin (30) shart bajarilmaydigan nuqta deb olaylik. Umumiylikni cheksiz deb hisoblaymiz.

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_t, 0); \bar{x}_i > 0; \sum_{i=1}^{t+1} a_{ki} \bar{x}_i = 0, k = 1..(t+1) \quad (31)$$

((31) uchun V operatorning S^{n-1} yoqqa mos keluvchi torayishini ko'rishga o'tish va o'zgaruvchilarni no'merlab qo'yish yetarli) 13-teoremaga ko'sra t-toq son. Binobarin

$$\sum_{i=1}^{t+1} a_{ki} \bar{x}_i = 0, k = 1..(t+1)$$

bo'lsa u holda $\det A = 0$ ya'ni $rg A < k+1$. Shuningdek kososimmetrik matritsaning rangi doimo juft son bo'lsa, u holda $rg A \leq k-1$. Shuning uchun

$$\dim Ker A \geq 2 \quad (32)$$

$$H_0 = \{x : \sum_{i=1}^{t+1} x_i = 0\}$$

berilsin. (38) ni hisobga olib

$$\dim H_0 + \dim Ker A \geq t+2$$

ni olamiz. Natijada, $H_0 \cap Ker A \neq \{0\}$ kelib chiqadi.

$$y = (y_1, \dots, y_{t+1}) \in H_0 \cap Ker A$$

ni tanlaymiz, $y_{t+1} \geq 0$ va $y \neq 0$ uchun. Ravshanki $0 \leq e \leq e_0$ da shunday $\bar{x} + e y \in S^t$ uchun $e_0 > 0$ mavjud va $\bar{x}$ qo'zg'almas nuqtaning alohidalanganligini inkor qiladi. Volterra kvadratik stoxastik operatorning umumiy ko'rinishidan alohidalanmagan qo'zg'almas nuqta faqat qo'zg'almas nuqtalaridan tashkil topgan qandaydir kesmada yotadi.

Teorema 11 *Agar barcha chegaraviy qo'zg'almas nuqtalar uchun (30) shart bajarilsa, u holda V operatorning barcha qo'zg'almas nuqtalari alohidalangan.*

Isbot.

Qandaydir $\bar{x}$ chegaraviy qo'zg'almas nuqta alohidalanmagan bo'lsin deb qaraymiz. Unda

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_t, 0, \dots, 0); t < n.$$

deb hisoblaymiz. (30) dan foydalanib,

$$A\bar{x} = (0, \dots, 0, \sum_{i=1}^n a_{t+1,i} \bar{x}_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{ni} \bar{x}_i)$$

ni olamiz. Vaholanki so'nngi n-t koordinatalari no'ldan farqli. $\bar{x}$ va qo'zg'almas nuqtalardan tashkil topgan M kesma berilsin. Bunda ikkita hol bo'lishi mumkin.

a) $M \bar{x}$ ni saqllovchi S^{n-1} simpleksning eng kichik Γ yog'ida saqlanadi. x^I, x^{II} -M kesmaning chetki nuqtalari bo'lsin. U holda $(x^I, \bar{x}) \subset \text{ridom}\Gamma$.

Shuning uchun ixtiyoriy $x \in (x^I, \bar{x}]$ uchun Ax nuqtaning t koordinatalarining birinchisi no'lga teng. $x \rightarrow x^I$ da limitga o'tish bilan Ax^I ning t koordinatalarining birinchisi ham no'lligini olamiz. Binobarin x^I - M kesmaning chetki nuqtasi. Natijada, x^I nuqtaning t koordinatalarini birinchilari orasidan hech bo'lmaganda bittasi no'lga teng bo'ladi.

U holda

$$I_0(x^I) \cap \mathfrak{Z}_0(x^I) \neq \emptyset$$

ya'ni teorema shartidan ziddiyatga uchraymiz.

b) $M \Gamma$ da saqlanmasin. $\text{ridom}M$ dan $\bar{x}$ nuqta berilsin. Unda t koordninalarning birinchilari musbat va hamda so'nggi $n-t$ koordinatalari orasidan hech bo'lmaganda bittasi musbat bo'lganda ham $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}, \dots, \bar{x}_n)$, bo'ladi. Umumiylikning cheklovsizligidan $\bar{x}_{t+1} > 0$ deb hisoblaymiz. Binobarin $\bar{x}$ -qo'zg'almas nuqta bo'lsa $A\bar{x}$ ning $t+1$ koordinatalarining birinchilari no'lga teng bo'ladi. Ixtiyoriy $x \in (\bar{x}, \bar{x}]$ uchun 1) $x_i > 0, i = 1..(t+1)$, 2) x -qo'zg'almas nuqtani olamiz. Shuningdek Ax ning $t+1$ koordinatalari ham no'lga teng, $x \rightarrow x^I$ da limitga o'tish bilan $A\bar{x}$ ham $t+1$ koordinatalarning birinchilari ham no'lga teng bo'ladi. U holda $\bar{x}$ uchun (30) shart buziladi. 10 va 11 teoremlarni birlashtirib, quyidagini olamiz.

Natija. Barcha chegaraviy qo'zg'almas nuqtalar uchun (30) shart bajarilgani uchun (5) dinamik sistema uchun umumiy holatda zaruriy va yetarliligini topamiz.

Diffeomorfizm qo'zg'almas nuqtalarining topologik tasnifini tushunib olamiz [18]. $M \subset R^n$ va $f: M \rightarrow M$ diffeomorfizm berilsin. Agar $f^I(\bar{x}): R^n \rightarrow R^n$ operator spektori yagona kompleks tekisligi aylanasi bilan kesishmasa u holda f diffeomorfizmning $\bar{x} \in M$ qo'zg'almas nuqtasi giperbolik deyiladi. Giperbolik nuqtani

1) agar $d(f^I(\bar{x}))$ yagona aylanada saqlansa ,oqim (yoki o'ziga tortuvchi fokus)

2) agar $d(f^I(\bar{x}))$ yagona aylanadan tashqarida joylashganbo'lsa ,manba(yoki o'zidan itarib turuvchi fokus)

3) qolgan hollarda egarsimon nuqta deyiladi.

Teorema 12 Umumiy holatda $V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ Volterra kvadratik stoxastik operator berilsin, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ -qo'zg'almas nuqta va $V^I(\bar{x}) - V$ ning $\bar{x}$ nuqtadagi hosilasi. $\bar{x}$ -t-sonli no'ldan farqli koordinatasi bo'lsin.

- 1) 1-sodda xususiy qiymat $1 \in d(V^I(\bar{x}))$
- 2) t-1 da $d(f^I(\bar{x}))$ (yagona aylanadan tashqarida yotuvchi kompleks xususiy qiymatlarning karrarililigi hisobi bilan)
- 3) n-t da $d(f^I(\bar{x}))$ I dan tashqari moddiy xususiy qiymat.

Isbot. $V^I(\bar{x})$ ni hisoblab

$$V^I(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 + \sum_i a_{1i} \bar{x}_i & a_{12} \bar{x}_1 & \dots & a_{1n} \bar{x}_1 \\ a_{21} \bar{x}_2 & 1 + \sum_i a_{2i} \bar{x}_i & \dots & a_{2n} \bar{x}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \bar{x}_n & a_{n2} \bar{x}_n & \dots & 1 + \sum_i a_{ni} \bar{x}_i \end{pmatrix} \quad (33)$$

ni topamiz.

Modomiki $\bar{x}$ -alohidalangan qo'zg'almas nuqta bo'lsa, u holda t-toq son (II teorema ga ko'ra) va $\bar{x}_k \cdot \sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{x}_i = 0$ shu bilan birga $\bar{x}_k$ va $\sum_{i=1}^n a_{ki} \bar{x}_i$ bir vaqtada no'lga teng bo'lmaydi (12 teorema ga ko'ra) $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_t, 0, \dots, 0)$,

$$A\bar{x} = (0, \dots, 0, \sum_i a_{t+1,i} \bar{x}_i, \dots, \sum_i a_{ni} \bar{x}_i).$$

berilsin. U holda $V^I(\bar{x})$ quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$V^I(\bar{x}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a_{12} \bar{x}_1 & \dots & a_{1t} \bar{x}_1 & a_{1,t+1} \bar{x}_1 & \dots & a_{1n} \bar{x}_1 & \\ a_{21} \bar{x}_2 & 1 & \dots & a_{2t} \bar{x}_2 & a_{2,t+1} \bar{x}_2 & \dots & a_{2n} \bar{x}_2 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{t1} \bar{x}_t & a_{t2} \bar{x}_t & \dots & 1 & a_{t,t+1} \bar{x}_t & \dots & a_{tn} \bar{x}_t & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 + \sum_i a_{t+1,i} \bar{x}_i & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 + \sum_i a_{ni} \bar{x}_i & \end{array} \right)$$

O'ngdan pastki qismidan 3) $V^I(\bar{x})$ I dan tashari n-t moddiy xususiy qiymatga ega bo'ladi. Mulohazaning isbotini olamiz.

$$l_{t+1} = 1 + \sum_i a_{t+1,i} \bar{x}_i; \dots; l_n = 1 + \sum_i a_{ni} \bar{x}_i.$$

Chapdan yuqori qismini bunday ko'rinishda yozamiz.

$$E + A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \bar{x}_1 & \dots & a_{1t} \bar{x}_1 \\ a_{21} \bar{x}_2 & 0 & \dots & a_{2t} \bar{x}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t1} \bar{x}_t & a_{t2} \bar{x}_t & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Binobarin

$$d(E + A_t) = \{1\} + d(A_t)$$

bo'lsa, u holda $d(A_t)$ hisoblash bilan

Toq tartibli kososimmetrik matritsaning determinanti no'lga teng bo'ladi. Shuning uchun

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & a_{1t} \bar{x}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t1} \bar{x}_t & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_t \cdot \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & a_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t1} & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Shunday qilib $0 \in d(A_t)$ A_t uchun O-sodda xususiy qiymati bo'ladi. Buning uchun $D^I(0) \neq 0$ ekanini ko'rsatish yetarli, bu yerda

$$D(l) = \begin{vmatrix} -l & a_{12} \bar{x}_1 & \dots & a_{1t} \bar{x}_1 \\ a_{21} \bar{x}_2 & -l & \dots & a_{2t} \bar{x}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t1} \bar{x}_t & a_{t2} \bar{x}_t & \dots & -l \end{vmatrix} \quad (34)$$

(34)

dan

$$D^I(0) = - \begin{vmatrix} 0 & a_{23} \bar{x}_2 & \dots & a_{2t} \bar{x}_2 \\ a_{32} \bar{x}_3 & 0 & \dots & a_{3t} \bar{x}_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t2} \bar{x}_t & a_{t3} \bar{x}_t & \dots & 0 \end{vmatrix} - \dots - \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \bar{x}_1 & \dots & a_{1,t-1} \bar{x}_1 \\ a_{21} \bar{x}_2 & 0 & \dots & a_{2,t-1} \bar{x}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t-1,1} \bar{x}_{t-1} & a_{t-1,2} \bar{x}_{t-1} & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$$-\overline{x_1 x_2 \dots x_t} \cdot \left(\frac{1}{x_1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \dots & a_{2t} \\ a_{32} & 0 & \dots & a_{3t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t2} & a_{t3} & \dots & 0 \end{vmatrix} + \dots + \frac{1}{x_t} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1,t-1} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2,t-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t-1,1} & a_{t-1,2} & \dots & 0 \end{vmatrix} \right) \quad (35) \quad \text{ni}$$

topamiz. Juft tartibli kososimmetrik matritsaning determinanti nomanfiy. Shuning uchun $D^I(0)=0$ deb olib, (35) dagi barcha determinantlarni no'lga tengligini olamiz. Natijada $t-1$ tartibli matritsaning barcha bosh minorlari no'lga teng bo'ladi.

$$A(1,2,\dots,t) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1t} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t1} & a_{t2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Bu matritsaning kososimmetrligini hisobga olib

$$rgA(1,2,\dots,t) < t-2, \text{ ya'ni } \dim KerA(1,2,\dots,t) \geq 3.$$

ni olamiz 11- teoremadan kelib chiqib, $\bar{x}$ -alohidalanmagan qo'zg'almas nuqta ekanini olamiz. So'nggi mulohaza teorema shartini inkor qiladi. Shuning uchun $O-A_t$ uchun sodda hususiy qiymati bo'ladi. Yana, kososimmetrik matritsaning xususiy qiymatlari yo mavhum yo no'lga teng bo'ladi. (34) dan

$$d(A_t) = \{0; \pm l_1 i; \pm l_2 i; \dots; \pm l_r i\}$$

ni hisoblab olamiz bu yerda $l_1, \dots, l_r$ -moddiy sonlar, $r = \frac{t-1}{2}$ $E + A_t$ ga qaytib $d(E + A_t) = \{1, 1 \pm l_1 i, 1 \pm l_2 i, \dots, 1 \pm l_r i\}$, ni olamiz va shu bilan birga $|1 \pm l_k i| > 1$ ya'ni kompleks xususiy qiymatlar yagona aylanadan tashqarida joylashgan. Modomiki $S^{n-1} - (n-1)$ o'lchamli simpleks bo'lsa, unda o'z o'rnida

$$x_1 + \dots + x_n = 1$$

tenglamaning o'zgaruvchilaridan biri inkor qiladi, V_x da ustiga qo'yamiz, undan so'ng esa $V^I(\bar{x})$ spektorni hisoblaymiz. Bu albatta, $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinatalarining teng huquqliligini buzilishiga olib keladi. Istisnodan keyin olingan spektr o'zgaruvchilardan biri $V^I(\bar{x})$ spektordan

$x_1 + \dots + x_n = 1$ dan faqatgina bitta nuqtasi yo'qligi bilan farqlanadi. Bu nuqta $l = 1$.

Natija1

“Umumiy holatda” Volterra kvadratik stoxastik operatorning barcha qo'zg'almas nuqtalari giperbolik bo'ladi.

Natija 2

Yagona o'zidan itaruvchi qo'zg'almas nuqta mavjud.

Isbot. P- $Ax \geq 0$ tengsizlik yechimlari to'plami, $x \in S^{n-1}$ va $P \neq Q$ ekanini yodga olamiz, hamda P qo'zg'almas nuqtalardan tashkil topgan. Modomiki P umumiy holatda joylashsa va P-qavariq to'plam bo'lsa, u holda P yagona $P = \{p\}$ nuqtadan tashkil topadi. $p = (p_1, p_2, \dots, p_t, 0, \dots, 0)$ berilsin bu yerda $t \leq n$ va $p_1 > 0, \dots, p_t > 0$. U vaqtda

$$\sum_{i=1}^n a_{1i} p_i = 0, \dots, \sum_{i=1}^n a_{ti} p_i = 0, \sum_{i=1}^n a_{t+1,i} p_i \neq 0, \dots, \sum_{i=1}^n a_{ni} p_i \neq 0 \quad (42) \quad Ap \geq 0$$

ni e'tiborga olib, (36) dan

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} p_i > 0, k = (t+1) \dots n$$

ni olamiz. Shuning uchun

$$l_{t+1} = 1 + \sum_{i=1}^n a_{t+1,i} p_i, \dots, l_n = 1 + \sum_{i=1}^n a_{ni} p_i$$

n-t moddiy xususiy qiymatlari yagona aylanadan tashqarida joylashgan. Kompleks xususiy qiymatlar doim yagona aylanadan tashqarida joylashadi. Natijada P-o'zida itaruvchi fokus. Xuddi shunday $Ax \geq 0, x \in S^{n-1}$ tengsizlikni yechimi yagona va hech qanday boshqa qo'zg'almas nuqta o'zidan itaruvchi bo'lolmaydi.

Natija 3

Umumiy holatda Volterra kvadratik stoxastik operator bittadan ortiq bo'lmagan tortuvchi fokusga ega bo'lishi mumkin, shu bilan birga u

$$(l, \frac{1-l}{3}, \frac{1-l}{3}, \frac{1-l}{3}, 0) \rightarrow (l^2, \frac{1-l^2}{3}, \frac{1-l^2}{3}, \frac{1-l^2}{3}, 0), (0 \leq l \leq 1)$$

simpleksning uchlari ichidan faqatgina bittasi bo'lishi mumkin.

Isbot. $\bar{x} \in S^{n-1}$ o'ziga tortuvchi fokus berilsin. Teoremaga muvofiq $V(\bar{x})$ kompleks xususiy qiymatlarining $t-1$ ga teng bu yerda $t-\bar{x}$ nuqtaning no'ldan farqli koordinatalar soni. Binobarin $\bar{x}$ -tortuvchi focus ekan, u holda $V^I(\bar{x})$ kompleks xususiy qiymatga ega bo'lmaydi. Shuning uchun $t=1$ ya'ni $\bar{x} \in S^{n-1}$ simpleksning uchi. $\bar{x} = (1, 0, \dots, 0)$ berilsin. Bu vaqtda

$$d(V^I(\bar{x})) = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n a_{2i} \bar{x}_i, 1 + \sum_{i=1}^n a_{3i} \bar{x}_i, \dots, 1 + \sum_{i=1}^n a_{ni} \bar{x}_i \right\}$$

yoki

$$d(V^I(\bar{x})) = \{1 + a_{21}, 1 + a_{31}, \dots, 1 + a_{n1}\}.$$

Shunday qilib $\bar{x}$ -faqatgina $a_{21} < 0, a_{31} < 0, \dots, a_{n1} < 0$ shartlarda tortuvchi fokus (37) shart hisoblanishida T_n munozaraning T faktor munozara oqimi $\{1\}$ uch bo'ladi. Shuning uchun, musbat birinchi koordinatali boshlang'ich nuqtada boshlanuvchi barcha traektoriyalar S^{n-1} simpleksning $\{1, 0, \dots, 0\}$ uchiga yaqinlashadi. Natijada, Volterra kvadratik stoxastik operatorning uchun lokal tortuvchi qo'zg'almas nuqta bo'ladi va global tortiladi. Endi V operatorning invariant to'plamlarini o'rganishga o'tamiz. Xaqiqiy bobning 1-§ da ko'rsatilganidek S^{n-1} simpleksning barcha yoqlari V operatorga nisbatan invariant bo'ladi. Xususan S^{n-1} simpleksning qaysidir ikki uchni bo'g'lovchi qirrasi (bir o'lchovli yoq) invariant bo'ladi. Shuning uchun savol tug'iladi. Qo'zg'almas nuqtaning qanday juftliklari uchun ularni birlashtirgan va V operatorga nisbatan bo'lgan egri chiziq mavjud? Umumiy muloxazaga o'tishdan oldin bir qancha tipik ayrim hollarni ko'rib chiqamiz.

Misol 1

$$\begin{cases} x_1^I = x_1 \cdot (1 - x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2^I = x_2 \cdot (1 + x_1 - x_3 + x_4) \\ x_3^I = x_3 \cdot (1 - x_1 + x_2 - x_4) \\ x_4^I = x_4 \cdot (1 - x_1 - x_2 + x_3) \end{cases} \quad \text{ko'rinishli } V: S^3 \rightarrow S^3 \text{ Volterra kvadratik stoxastik}$$

operator berilgan. Bu misol uchun quyidagi mulohazani isbotlash qiyin emas.

- 1) T_4 turnir kuchli va o'zida ikkita siklik uchlik $\{1, 2, 3\}$ va $\{2, 3, 4\}$ ni saqlaydi

2) S^4 simpleksning M_1, M_2, M_3, M_4 uchlaridan tashqari siklik uchliklar $\{1, 2, 3\}$ va $\{2, 3, 4\}$ bilan aniqlangan yana ikkita $C_1(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ va $C_2(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ qo'zg'almas nuqtalar mavjud.

3) S^4 simpleksda $Ax \geq 0$ va $Ax \leq 0$ tengsizliklarni yechib, $P = \{C_2\}$ va $Q = \{C_1\}$ ni topamiz.

4) $j_p(x) = (x_2 x_3 x_4)^{\frac{1}{3}}$ funksional ixtiyoriy $\{x^0, x^{(1)}, \dots\}$ traektoriya bo'ylab monoton kamayadi, shu bilan birga ixtiyoriy $x^0 \in \text{ri} \text{dom} S^3$ boshlang'ich nuqta uchun $\sum_{m=0}^{\infty} j_p(x^{(m)}) < +\infty$ bo'ladi.

5) $\sum_{m=0}^{\infty} j_p(x^{(m)})$ qatorning yaqinlashishi ixtiyoriy traektoriya bo'ylab

$$\lim_{m \rightarrow \infty} j_Q(x^{(m)}) = a \geq 0$$

limitning mavjudligini taminlaydi. Bu yerda $j_Q(x) = (x_1 x_2 x_3)^{\frac{1}{3}}$;

6) $w(x^0)$ ning invariantligidan yo $a = 0$ yo $a = \frac{1}{3}$ ligi kelib chiqadi.

7) $C_1 C_2$ kesma invariant, shu bilan birga agar $x^0 \in C_1 C_2$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} j_Q(x^{(m)}) = \frac{1}{3}.$$

Bu holatda traektoriya C_1 ga yaqinlashadi.

8) Agar $x^0 \in C_1 C_2$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} j_Q(x^{(m)}) = 0$$

bo'ladi. Bu holatda esa traektoriya yaqinlashmaydi va $w(x^0)$ -cheksiz to'plam. Agar S^{n-1} simpleksning x^* va x_* ni saqllovchi Γ yoq mavjud va A kososimmetrik matritsaning A_{Γ} torayishi uchun bu yoqda

$$A_{\Gamma} x^* \geq 0, A_{\Gamma} x_* \leq 0$$

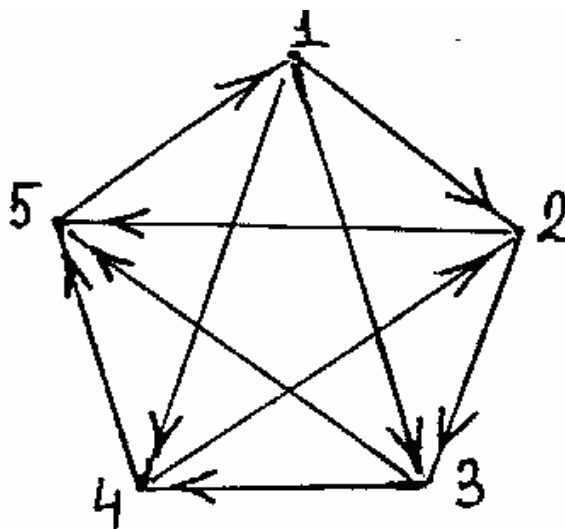
tengsizliklar bajarilsa V operatorning qo'zg'almas nuqtalari x^* va x_* (p, q) juftlikni tashkil qiladi. Masalan S^{n-1} ning ixtiyoriy ikki uchlari (p, q) juftlikni tashkil qiladi. 1-Misolda barcha 7 ta (p, q) juftlik mavjud

$$(M_1, M_2), (M_2, M_3), (M_3, M_4), (M_4, M_1), (M_3, M_1), (M_4, M_2) \text{ va } (C_2, C_1) .$$

1-Misol asosida quyidagi gapni ifodalash mumkin. Agar x^* va x_* qo'zg'almas nuqtalar (p, q) juftlikni tashkil qilsa, u holda ularni tutashtiruvchi invariant chiziq mavjud.

2-Misol $\begin{cases} x_1^I = x_1 \cdot (1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5) \\ x_2^I = x_2 \cdot (1 + x_1 - x_3 + x_4 - x_5) \\ x_3^I = x_3 \cdot (1 + x_1 + x_2 - x_4 - x_5) \\ x_4^I = x_4 \cdot (1 + x_1 - x_2 + x_3 - x_5) \\ x_5^I = x_5 \cdot (1 - x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{cases}$ ko'rinishli $V: S^4 \rightarrow S^4$ berilgan.

Bu yerda $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S^4$. Bu dinamik sistemaning T_5 turnirini chizib



4-rasm

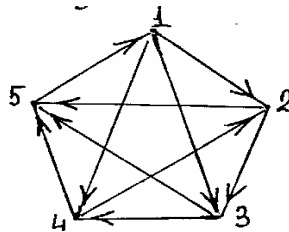
quyidagini olamiz.

8-rasmdan T_5 kuchli turnir, shu bilan birga 4 ta siklik uchlik saqlaydi. $\{2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}$ V operator S^4 simpleksning $M_i (i=1..5)$ uchidan tashqari yana 5 ta qo'zg'almas nuqtaga ega

$$C_{145}(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), C_{234}(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0), C_{125}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}), C_{135}(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$$

va $D(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3})$. Endi S^4 simpleksning Γ yog'ining barcha mumkin bo'lgan hollarini ko'rib va $A_i x \geq 0, A_i x \leq 0, x \in \Gamma$ tengsizlikni yechib, (p, q) juftlikni aniqlaymiz. Bu juftliklarni yozib olamiz

$$(M_1, C_{234}); (C_{234}, M_5); (C_{125}, C_{135}); (C_{135}, C_{145}); (C_{145}, C_{125})$$



-rasimdan (M_i, M_j) ko'inishli juftliklarni oson ko'rish mumkin, bu yerda M_i -boshi va M_j -oxiri ixtiyoriy yo'nalishning $M_1 C_{234}$ kesma – invariantlangan. Xaqiqtdan

$$l M_1 + (1-l) C_{234} = (l, \frac{1-l}{3}, \frac{1-l}{3}, \frac{1-l}{3}, 0).$$

$V(l M_1 + (1-l) C_{234})$ ni hisoblab, quyidagini topamiz

$$(l, \frac{1-l}{3}, \frac{1-l}{3}, \frac{1-l}{3}, 0) \rightarrow (l^2, \frac{1-l^2}{3}, \frac{1-l^2}{3}, \frac{1-l^2}{3}, 0), (0 \leq l \leq 1)$$

ya'ni

$$V(M_1 C_{234}) \subset M_1 C_{234}.$$

Shuningdek (p, q) juftlikni tashkil qiluvchi ikki qo'zg'almas nuqtani birlashtiruvchi qolgan kesmalarni invariantligini belgilash oson. 2-misolning asosiy maqsadi diqqatni yangi hodisaga jalb qilish “agar x^*, y^*, z^* qo'zg'almas nuqtalarning ixtiyoriy ikkitasi (p, q) juftlik tashkil qilsa, u holda bu uchta nuqtadan o'tuvchi invariant sirt mavjud” dan iborat. Bizning misolda $M_1 M_5, C_{234}$ juft-juft bo'lib (p, q) juftlikni tashkil

qilishadi, shuningdek $C_{125}, C_{135}, C_{145}$ ham shunday.

$$co\{M_1, M_5, C_{234}\} \text{ va } co\{C_{125}, C_{135}, C_{145}\}$$

invariant ekanligini ko'rsatamiz. Masalan $x \in co\{C_{125}, C_{135}, C_{145}\}$ berilsin. Unda $x = (\frac{1}{3}, \frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{g}{3}, \frac{1}{3})$. bo'ladi. Bu yerda $a, b, g \geq 0$ va $a + b + g = 1$. Vx ni hisoblab buni topamiz $Vx = (\frac{1}{3}, \frac{a^I}{3}, \frac{b^I}{3}, \frac{g^I}{3}, \frac{1}{3})$

bu yerda

$$a^I = a(1 - \frac{b}{3} + \frac{g}{3}), b^I = b(1 + \frac{a}{3} - \frac{g}{3}), g^I = g(1 - \frac{a}{3} + \frac{b}{3})$$

Ravshanki

$$a^I, b^I, g^I \geq 0 \text{ va } a^I + b^I + g^I = 1.$$

Natijada $co\{C_{125}, C_{135}, C_{145}\}$ invariantligi kelib chiqadi, shu singari $co\{M_1, M_5, C_{234}\}$ ni ham invariantligi tekshiriladi. Umumiy holni ko'rishga o'tamiz.

$V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ Volterra operatori uzluksiz differensiallanuvchi gomeomorfizm, lekin umuman aytganda V^{-1} uzluksiz differensiallanuvchi bo'lishiga majbur bo'lmasa ham, diffeomorfizm bo'lmaydi.

Teorema 13 Agar x^* va x_* qo'zg'almas nuqtalar (p, q) juftlikni tashkil qilsa va x_* nuqtaning ba'zi atrofida V operator lokal diffeomorfizm bo'lsa, u holda x^* va x_* larni tutashtiruvchi invariant egri chiziqli mavjud.

Isbot. $\Gamma - x^*$ va x_* larni saqlovchi eng kichik yoq va $V_\Gamma - V$ ni Γ ga torayishi berilsin. V_Γ operator uchun x_* nuqta giperbolik tipdagi qo'zg'almas nuqtasi bo'ladi. Grobmana –Xortman teoremasiga muvofiq x_* ning ba'zi atroflarida V_Γ ga nisbatan invariant g egri chiziqli mavjud. Berilgan invariant egri chiziqlarning ketma-ketligini ko'rib chiqamiz $g \subset V_\Gamma^{-1}(g) \subset V_\Gamma^{-2}(g) \dots$. (38). (38) berilishidan, V_Γ^{-1} uchun g bo'ylab x_* itaruvchi qo'zg'almas nuqtadan g ni invariantligi kelib chiqadi. $A_\Gamma x \geq 0$ tengsizlikning yagona x^* yechimga ega, modomiki (umumiy holatda) barchsa qo'zg'almas nuqtalar alohidalanganlangan bo'ladi. Natijada, barcha musbat traektoriyalar x^* nuqtaga yaqinlashadi. Shuning uchun

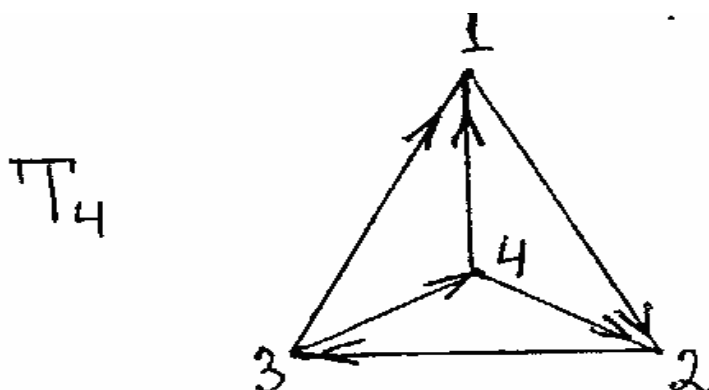
$$I = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} V_\Gamma^{-n}(g)} \quad (39)$$

talab qilingan invariant egri chiziq bor. Invariant egri chiziqlarning aniq ko'rinishining joylashishi (to'g'ri kelmaydigan hol: invariant to'g'ri chiziqli kesmalar) ba'zi funksional tenglamaning yechimiga olib keladi. Invariant egri chiziqlarning hech biri ajratilmadi. Lekin, bitta xususiy hol uchun invariant egri chiziqning geometrik tasnifini olishimiz mumkin. Aniqrog'i $V: S^3 \rightarrow S^3$ ni quyidagi ko'rinishini ko'ramiz

$$\begin{cases} x_1^I = x_1 \cdot (1 - ax_2 + bx_3 + cx_4) \\ x_2^I = x_2 \cdot (1 + ax_1 - dx_3 + ex_4) \\ x_3^I = x_3 \cdot (1 - bx_1 + dx_2 - fx_4) \\ x_4^I = x_4 \cdot (1 - cx_1 - ex_2 + fx_3) \end{cases} \quad (40)$$

bu yerda $0 < a, b, c, d, e, f \leq 1$. (40) dan A kososimmetrik matritsani va T_4

munozarani oson topish mumkin. $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & b & c \\ a & 0 & -d & e \\ -b & d & 0 & -f \\ -c & -e & f & 0 \end{pmatrix}$



5-rasm

Natijada T -kuchli munozara va 12-teoremaga ko'ra aniqlangan quyidagi qo'zg'almas nuqtalardan tuzilgan 2 ta siklik uchlikni $\{1, 2, 3\}$ va $\{2, 3, 4\}$

$$C_1\left(\frac{d}{a+b+d}, \frac{b}{a+b+d}, \frac{a}{a+b+d}, 0\right) \text{ va } C_2\left(0, \frac{f}{d+e+f}, \frac{e}{d+e+f}, \frac{d}{d+e+f}\right).$$

Hisoblashda davom etamiz. $A(C_1)$ va $A(C_2)$

$$A(C_1) = \left(0, 0, 0, \frac{\Delta}{a+b+d}\right), A(C_2) = \left(\frac{-\Delta}{d+e+f}, 0, 0, 0\right)$$

bu yerda $\Delta = af - be - cd$

Shunday qilib $\Delta > 0$ da $A(C_1) \geq 0$ va $A(C_2) \geq 0$ ga ega bo'lamiz ,ya'ni C_1, C_2 qo'zg'almas nuqtalar (p, q) juftligini tashkil qiladi.

Shunday qilib $\Delta > 0$ da $A(C_1) \geq 0$ va $A(C_2) \geq 0$ ga ega bo'lamiz ,ya'ni C_1, C_2 qo'zg'almas nuqtalar (p, q) juftligini tashkil qiladi. $\Delta < 0$ da C_2, C_1 (p, q) juftligini hosil qiladi. Nihoyat $\Delta = 0$ da C_1 va C_2 ni birlashtiruvchi kesma V operatorning qo'zg'almas nuqtalaridan tuziladi. (ya'ni (40) dinamik sistema umumiy holatda joylashmaydi). $\Delta > 0$ qat'iylik uchun (aniqlik uchun) berilsin. Yana

$$C_1\left(\frac{d}{a+b+d}, \frac{b}{a+b+d}, \frac{a}{a+b+d}, 0\right)$$

nuqtani p-nuqta deb nomlaymiz

$$C_2\left(0, \frac{f}{d+e+f}, \frac{e}{d+e+f}, \frac{d}{d+e+f}\right)$$

nuqtani esa q deb. Funktsiyalarni quramiz

$$\begin{aligned} j_p(x) &= (x_1^d x_2^b x_3^a)^{\frac{1}{a+b+d}}, \\ j_q(x) &= (x_2^f x_3^e x_4^d)^{\frac{1}{d+e+f}}, \end{aligned} \quad \text{bu} \quad \text{yerda}$$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{ri dom } S^3$. j_p va j_q larni (40) dinamik sistema uchun Lya-

punov funktsiyalari ekanligini isbotlash mumkin.

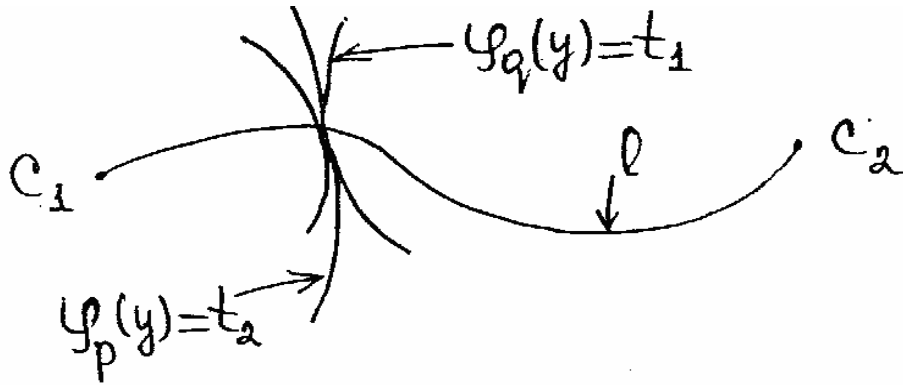
$$I = \{x \in S^3 : j_q(x) = \max_{j_p(y)=t} j_q(y), y \in S^3, 0 \leq t \leq j_p(C_1)\} \quad (41)$$

berilsin. Ya'ni I $0 \leq t \leq j_p(C_1)$ bo'lganda $j_p(y) = t$ darajali sirtlarda $j_q(y)$ ning maksimumga erishish nuqtalaridan tuziladi. Endi

$$\text{Arg max } j_p(y) = \{C_2\} \quad \text{va} \quad \text{Arg max } j_q(y) = \{C_1\}$$

ekanini ko'rish qiyin emas, bu yerda Arg max -maksimumga erishish nuqtalarining to'plami. Natijada $C_1, C_2 \in I$ kelib chiqadi. Binobarin, j_p va j_q qat'iy botiq funktsiyalar bo'lsa, u holda bu funktsiyalarning sirtlari qat'iy qavariq sirtlar bo'ladi. Shuning uchun I - darajaning sirtidagi urinish nuqtalarining geometrik o'rni

bo'ladi.



6-rasm

j_p va j_q funksiyalarning qat'iy botiqligi va uzluksizligi C_1 va C_2 nuqtalarni tutashtiruvchi l egri chiziqni uzluksizligini ta'minlaydi. l ning V operatorga nisbatan invariantligi $x^0 \in l$ ni $j_q(Vx) = \max_{j_p(y)=j_p(Vx^0)} j_q(y)$ tenglikka jalb etilishiga olib keladi. Volterra kvadratik stoxastik operatorning traektoriyalarining asimtotik qonuniyat tahlili kichik o'lchamlarda (aniqrog'i $n \leq 5$ da) $\{x^{(m)}\}$ traektoriya faqat va faqat x^0 boshlang'ich nuqta qandaydir invariant egri chiziqda yotganda yaqinlashishini ko'rsatadi. Shu sababdan bular bilan dinamik sistemaning barcha traektoriyalari yaqinlashishi uchun tranzitiv munozaraning hollarini ajratamiz.

$V: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ va $a_{ki} = \begin{cases} 1, k > i \\ -1, k < i \end{cases}$ berilsin.

$$\text{Unda } \begin{cases} x_1^I = x_1 \cdot (1 - x_2 - \dots - x_n) \\ x_2^I = x_2 \cdot (1 + x_1 - x_3 - \dots - x_n) \\ \dots \dots \dots \\ x_n^I = x_n \cdot (1 + x_1 + \dots + x_n) \end{cases} \quad (42)$$

Teprema 14

$x^0 \in \text{ridom} S^{n-1}$ va $\{x^{(m)}\} - x^0$ nuqtaning traektoriyasi berilgan bo'lsin, U holda $\{x^{(m)}\}$ bazi invariant egri chiziqda yotadi.

Isbot. $1 > a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1} > 0$ berilsin.

$$l(l) = (l, l^{a_1} - l, l^{a_2} - l^{a_1}, l^{a_3} - l^{a_2}, \dots, l^{a_{n-2}} - l^{a_{n-3}}, 1 - l^{n-2}), 0 \leq l \leq 1$$

egri chiziqni ko'rib chiqamiz. $\mathbf{l}(0) = (0, \dots, 1)$, $\mathbf{l}(1) = (1, 0, \dots, 0)$ va $\mathbf{l}(l)$ -istisno uchun ,oxirida S^{n-1} ning uchi saqlanadi deb belgilaymiz. $\mathbf{l}(l)$ ni V operatorga nisbatan invariantligini tekshiramiz. Shu maqsadda $\mathbf{l}(l)$ koordinatalarini qo'yib (42) dan quyidagini topamiz.

$$\begin{aligned} x_1^I &= l(1 - l^{a_1} + l - l^{a_2} + l^{a_1} - \dots - 1 + l^{a_{n-2}}) = l^2 \\ x_2^I &= (l^{a_1} - l)(1 + l - l^{a_2} + l^{a_1} - \dots - 1 + l^{a_{n-2}}) = l^{2a_1} - l^2 \\ &\vdots \\ x_n^I &= (1 - l^{a_n})(1 + l + l^{a_1} - l + \dots + l^{a_{n-2}} - l^{a_{n-3}}) = 1 - l^{2a_{n-2}} \end{aligned}$$

Natijada $0 \leq l \leq 1$ da

$$\mathbf{VI}(l) = (l^2, l^{2a_1} - l^2, l^{2a_2} - l^{2a_1}, \dots, 1 - l^{2a_{n-2}}) = \mathbf{I}(l^2) \subset \mathbf{I}(l)$$

bo'ladi. Berilgan $x^0 \in \text{ridom} S^{n-1}$ uchun $1 > a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1} > 0$ va $x^0 \in \mathbf{l}(x)$ ligidan $a_1, \dots, a_{n-2}$ sonni yig'ish mumkinligini ko'rsatish qoldi.

Xaqiqatdan

$$x^0 = (x_1, \dots, x_n) \in \text{ridom} S^{n-1}$$

berilsin. Bunda $x_i > 0, i=1..n$ bo'ladi. Shunday $x_1^{a_1} - x_1 = x_2$ tenglik bajariladigan a_1 tanlaymiz. Modomiki $0 < x_1, x_2 < 1$ bo'lsa, u holda $0 < a_1 < 1$ ekan. $x_1^{a_2} - x_1^{a_1} = x_3$ tenglamadan a_1 ni belgilab, a_2 sonni topamiz. $0 < a_2 < a_1$ deb belgilaymiz. $1 > a_1 > \dots > a_{k-1}$ aniqlanganlarni hisobga olgan holda $k \leq n-2$ da $x_1^{a_k} - x_1^{a_{k-1}} = x_{k+1}$ tenglamadan a_k sonini topamiz. Shuningdek $0 < x_1, x_{k+1} < 1$ bo'lsa, $0 < a_k < a_{k-1}$ bo'ladi. Xulosa $1 > a_1 > \dots > a_{n-2} > 0$ sonlari

$$(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1^{a_1} - x_1, x_1^{a_2} - x_1^{a_1}, \dots, x_1^{a_{n-2}} - x_1^{a_{n-3}}, 1 - x_1^{a_{n-2}})$$

orqali aniqlanadi. Natijada ,ixtiyoriy traektoriya bazi invariant egri chiziqda yotishi kelib chiqadi.

$\lim_{m \rightarrow \infty} F_k(x^{(m)})$ limit mavjud.

1.6-§. Olingan natijalarni biologik sharhi.

Endi olingan bir qancha natijalarning biologik izohlanishiga o'tamiz. Matematik biologiyada Volterra kvadratik stoxastik operator evolyutsiya operatori deb atalishini eslatib o'tamiz. V ning qo'zg'almas nuqtalari nopopulyatsiyaning muvozanati kabi izohlanadi. $x^0 \in S^{n-1}$ nuqta populyatsiyaning holati deyiladi. $Vx^0, V^2x^0, \dots$ lar esa keyingi avlodlardagi populyatsiya holati deyiladi. $V^{-1}x^0, V^{-2}x^0, \dots$ -avvalgi avlodlardagi populyatsiyaning holati. n ta turdan tashkil topadigan qandaydir biologik sistemaning evolyutsiyasi V -Volterra kvadratik stoxastik operator deb tavsiflansin. So'nggi mulohaza shuni anglatadiki. Har bir individga faqat ota-onalaridan birining belgisi meros bo'lishi mumkin.

Quyida V operator "umumiy holat" da joylashadi deb taxmin qilinadi.

1)Biologik sistema n dan bo'lgan barqaror holatga ega (1§ ,2° mulohaza,natija). Barqaror holatlarning soni chekli ("umumiy holat).

2)Bir qancha turli vaqt mobaynida yoqda yo'qolib ketayotganga o'xshaydi(2-teorema). Shuningdek ,kelajakda ,ular ichidan bir qismi o'smoqchi (ko'poaymoqchi) bo'lishi mumkin. Bu holatda boshqa bir qancha turlar yoqda yo'qolayotganga o'xshaydi.

3)Biologik sistemaning "tarixi" bir xil ma'noda tiklanadi. Boshqa so'z bilan aytganda berilgan avlodda populyatsiya holatini bilib,barcha oldingi avlodlarda populyatsiya holatini bir xil ma'noda ko'rsatish mumkin.

4)Ixtiyoriy "tarix" boshlanadigan atrofda yagona barqaror holat mavjud.(V operatorning p -nuqtasi.) Boshqacha qilib aytganda ,yetarlicha yaqin ixtiyoriy ixtiyoriy ikki holatning ancha avvalgi avlodlari yetarli(7-teorema). Bu xossa koinotni kengayishi nazariyasiga o'xshab ketadi. Barqaror holatda (V operatorning p -nuqtasi) katta portlash ro'y beradi. Keyin esa biologik sistema evolyutsiyasi boshlanadi.

5)Bir qancha turlarning ko'rilyotgan tipining biologik sistemasida koalitsiyani tashkil eyishi mumkin(T_n faktor munozara oqimiga tushuvchu S^{n-1} simpleksning uchlari). Bu holda koalitsiyaga tushmaydigan turlar (belgilar) asta-sekin yo'qolib ketadi.(9-teorema).

6)Turning faqatgina toq sondagisi barqaror holatda joylasha oladi(teorema 10)

Mulohaza shu haqidaki ,qo'zg'almas nuqtalarning atrofiga yuborish vaqtini bir qismida bosilgan traektoriya quyidagicha biologik ma'noga ega: ko'rilayotgan biologik sistemadagi keskin o'zgarish (bir barqaror holatning atrofidan boshqa barqaror holatning atrofiga o'tish) tarixiy davrlarga borib taqaladi. Barqaror holatlar ichidan birining atrofida yetarlicha uzoq vaqt davomida asta-sekin o'zgarishlar to'planadi, keyin qisqa vaqtda keskin o'zgarishga o'tadi., natijada populyatsiya ma'lum bo'lishicha boshqa barqaror holatning atrofida bo'ladi.

8) G_v bir jinsli karta holatini ko'rib chiqamiz. Bunda $\{x^{(m)}\}$ traektoriya faqat va faqat x^0 boshlang'ich nuqta (p,q) juftlikni tashkil etuvchi qo'zg'almas nuqtalar invariant egri chiziqli tutashtiruvchilardan birida joylashgan bo'lsagina yaqinlashadi.

Shu bilan birga ,bu qo'zg'almas nuqtalar G_v karatada qo'shni uchlar bo'ladi. Bu biologiyada shuni anglatadiki: Populyatsiya faqatgina belgilardan biri asta-sekin yo'qolishi hisobidan qandaydir barqaror holatga intilishi mumkin.

XULOSA.

Ushbu bitiruv malakaviy ishda Ozod populyatsiyaning kvadratik dinamik sistemalari qisman ko'rib o'tildi.

Ushbu yo'nalishda populyatsiyalardagi o'zgarishlar va o'ziga xosliklar, Populyatsiyaning strukturalari, populatsiyasining o'zgarishi yoki saqlanib qolishi, genetik o'ziga xosliklarning avloddan-avlodga o'tishi kabi masalalar qisman o'rganilgan.

Har bir avloddagi individ faqatgina uning ota-onasiga tegishli belgi meros bo'lib qolishi mumkinligi, ko'rilayotgan biologik sistemadagi keskin o'zgarish tarixiy davrlarga borib taqaladi. Barqaror holatlar ichidan birining atrofida yetarlicha uzoq vaqt davomida asta-sekin o'zgarishlar to'planadi, keyin qisqa vaqtda keskin o'zgarishga o'tadi, natijada populyatsiya boshqa barqaror holatga o'tadi kabi masalalar o'rganilgan.

Ishda ko'rib o'tilgan masalalar ko'lamiga qarab shuni aytish lozimki, matematikaning genetikaga tadbirlari juda muhimdir. Xususan, genetik o'ziga xosliklarning avloddan-avlodga o'tishi masalalarida katta ahamiyat kasb etishi ko'rsatilgan

Matematik usullarni genetika tadbiri qilish samarali natijalarga erishishga omil bo'lishi kuzatilmoqda, xususan naslning boshqarish kabi masalalarda buni ko'rishimiz mumkin. Genetika fani navqiron fanlar sirasiga kirganligi bois, bu sohada matematik usullar yordamida katta yutuqlarga erishish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Karimov I.A ” O‘zbekiston XXI asr bo’sag’asida:Xavfsizlikka taxdid,barqarorlik shartlari va tarqqiyot kafolatlari” Toshkent 1997.
- 2.Karimov Каримов И.А. Баркамол авлод орзуси. Тошкент. 1999.
3. Каримов И.А. Жахон молиявий – иқтисодий инқирози, Ўзбекистон шароитида уни бартараф этишнинг йўллари ва чоралари. Тошкент. 2009.
4. Karimov. I.A. Mamlakatimizni modernizatsiya qilish va kuchli fuqorolik jamiyati barpo etish – ustuvor maqsadimizdir (Prezident I.A.Karimovning O‘zbekiston Respublikasi Oliy Majlisi Qonunchilik palatasi va Senatining qo’shma majlisidagi ma’ruzasi). O‘zbekiston ovozi gazetasi, 12 son, 2010 yil 28-yanvar.
5. Karimov. I.A. “Mamlakatimizda demokratik islohotlarni yanada chuqurlash-tirish va fuqarolik jamiyatini rivojlantirish kontseptsyasi”, O‘zbekiston Respublikasi Oliy majlisi qonunchilik palatasi va Senatining qo’shma maj-lisidagi ma’ruza, Norin ovozi gazetasi, 2010 yil 19 – noyabr, № 46 – chi son.
6. Farahat H.K.The semigroup of doubly-stochastic matrices.-Glasgow Math.Assoc.Proc.1965/1966,7,p.178-183.
7. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблем, отказной с теорией наследовательности, Уч.запю чю-й. каў. Украинаб 1994 I, с.86-115.
8. Kojima K.(ed) Mathematical topics in population genetics.- Berlin:Springer ,1970,400 p.
9. Kesten.H. Quadratic Transformations: a model for population growth.I.- Adv Appl . Probab .,1970,2,N1

10. Валлендер С.С. О. Предельном поведении пооллоговательности итераций некоторых квадратичных преобразователей. ДАН СССР. 1972. 202. № 8. с. 515-517.
11. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. – М.: мир. 1973. 469 с.
12. Улэм С. Нерешенные математические задачи. – М.: Наука. 1964. 168с.
13. Захаревич М.И. О поведении траекторий и эргодической гипотезе для квадратичных отображений симплекса - Успехи мат. Наук. 1978. т. 33. Впм. 6. с. 207-209.
14. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир. 1977. 324с.
15. Любич Ю.И. Итерации квадратичных отображений. –Р кч. Математическая экономика и функциональный анализ. М.: наука. 1974. с. 109-138.
16. Harary F., Moser L. The theory of round robin tournaments, Amer. Math. Monthly, 73 (1966), p. 231-246.
17. Harary F., Moser L. The theory of round robin tournaments, Amer. Math. Monthly, 73 (1966), p. 231-246
18. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. – М.: 1975. 304с.
19. Маркалл. А. Олкич И. Неравенства: теория миноризация ч. Жжения. –М.: Мир. 1983. 575 с.
20. Харци Г.Г. Полюе Г. Невеонотве. – М.: МИ. 1948
21. Черников С.Н. линейные неравенства. – М.: Наука 1938. 488с.
22. R. N. Ganikhodzhaev, F. M. Mukhamedov and U. A. Rozikov, Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems, *Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Fields* 14(2) (2011) 279-335.
23. Y. I. Lyubich Mathematical Structures in Population Genetics (Springer – Verlag, Berlin, 1992)

