ОЦЕНИВАНИЕ ПРОЦЕНТНОЙ ОСТАТОЧНОЙ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ ПО НЕПОЛНЫМ НАРАБОТКАМ ДО ОТКАЗА

А.А.Абдушукуров[1], Ф.М.Холмуродов[2]

a_abdushukurov@rambler.ru, hfarhod@bk.ru

[1]Национальный Университет Узбекистана, [2]Наманганский Государственный Университет

Пусть $F(t)=P(X\le t)$ функция распределения (ф.р.) продолжительности жизни X испытываемого на выживаемость объекта (индивидиума, технического устройства). Очевидно $F(0)=0$.Пусть F непрерывнаяф.р. с квантильной функцией

$$Q(y)=F^{-1}(y)=\inf\left\{t\ge 0: F(t)\ge y\right\},\ \ 0<y<1, \tag{1}$$

$$Q(1)=T_F=\inf\left\{t\ge 0:\ F(t)=1\right\}\le\infty.$$

Функция $Q(y)$ называется квантилью уровня y распределения F. В статистических экспериментах на выживаемость не менее интересной является также и распределение остаточной времени выживания

$$F(z/t)=P(X-t\le z/\ X>t)=\frac{F(t+z)-F(t)}{1-F(t)},\ \ 0<z<T_F. \tag{2}$$

Определим квантиль уровня $(1-p)$, где $0<p<1$, условного распределения (2) через квантиль (1) следующими формулами:

$$F^{-1}(p/t)=\inf\left\{s\ge 0: F(s/t)\ge 1-p\right\}=\inf\left\{s\ge 0:\ p\ge 1-F(s/t)\right\}=$$

$$=\inf\left\{s\ge 0:\ F(t+s)\ge 1-p\big(1-F(t)\big)\right\}=$$

$$=\inf\left\{x\ge t: F(x)\ge 1-p\big(1-F(t)\big)\right\}=Q\Big(1-p\big(1-F(t)\big)\Big). \tag{3}$$

Функция $R(p/t)=Q\left(1-p\left(1-F(t)\right)\right)-t,\, t>0$ называется $(1-p)$-процентной остаточной продолжительностью жизни объекта [3]. В частности, $R\left(\frac{1}{2}/t\right)$ называется медианной остаточной продолжительностью жизни. Она является более предпочтительной, чем функция средней остаточной времени жизни

$$m(t)=M\left(X-t\,/\,X>t\right),\ \ t>0\,.$$

В теории надежности интерес представляет оценивание функции $\left\{R(p/t),\ 0<p<1,\ t>0\right\}$в случае, когда результаты эксперимента состоят из неполных наработок до отказа.Тогда результаты наблюдений над случайной величиной (с.в.) X подвергаются цензурированию справа не зависящей от X с.в. Y с непрерывной ф.р. $G,\ G(0)=0$ и наблюдается выборка

$$\boldsymbol{C}^{(n)}=\left\{\left(Z_i,d_i\right),\ 1\le y\le n\right\},$$

где $Z_i=\min\left(X_i,Y_i\right)$ и $d_i=I\left(X_i\le Y_i\right)$ - индикаторная функция. Для ф.р. F рассмотрим следующую оценку по выборке $\boldsymbol{C}^{(n)}$ (см. [1,2]):

$$F_n(t)=\begin{cases}0, & t\le Z_{(1)},\\ 1-\left(\dfrac{n-k}{n}\right)^{R_n(t)}, & Z_{(k)}<t\le Z_{(k+1)},\ 1\le k\le n-1,\\ 1, & t>Z_{(n)},\end{cases}\qquad(4)$$

где $Z_{(1)}\le\ldots\le Z_{(n)}$ - вариационный ряд, построенный по величинам $Z_1,\ldots,Z_n$,

$$R_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{I\left(Z_{(i)}\le t,\ d_{(i)}=1\right)}{n-i+1}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{I\left(Z_{(k)}\le t\right)}{n-k+1}\right]^{-1},$$

и d_i соответствует $Z_{(i)}$.Пусть

$$Q_n(y)=F_n^{-1}(y)=\inf\left\{t\ge0:F_n(t)\ge y\right\},\ \ 0<y<1,\qquad(5)$$

- соответствующая оценка квантильной функции (1). Используя оценки (4) и (5), оценим также и процентную остаточную продолжительность жизни $R(p/t)$ по формуле

$$R_n(p/t) = Q_n\left(1 - p\left(1 - F_n(t)\right)\right) - t,\ t > 0. \qquad (6)$$

Следующая теорема утверждает состоятельность оценки (6).

Теорема. Пусть $t > 0$ и $0 < p < 1$ фиксированы. Если Q непрерывна в точке $1 - p\left(1 - F(t)\right)$ и $Q\left(1 - p\left(1 - F(t)\right)\right)$ является единственным решением s неравенства

$$F(s-) \le 1 - p\left(1 - F(t)\right) \le F(s),$$

то при $n \to \infty$, $R_n(p/t) \xrightarrow{\text{п.н.}} R(p/t)$.

Литература

1. Abdushukurov A.A. Nonparametric estimation of the distribution function based on relative risk function. // Commun. Statist: Theory&Meth.-1998. v.27.N.8.p.1991-2012.

2. Abdushukurov A.A. Nonparametric estimation based on incomplete observations. // International Encyclopedia of Statistical Sciences. Springer. 2011. Pt.14. p.962-964.

3. Haines A.L., Singpurvalla N.D. Some distributions to the stochastic characterization of wear. Reliability and Biometry: Statistical Analysis of life Length (F.Proschan and R.J.Serfling, eds.) SIAM, Philodelphia. 1974. p.47-80.