

O'zbekiston Respublikasi
Oliy va O'rta maxsus ta'lim vazirligi

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

« MATEMATIKA » kafedrası

**EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA
MATEMATIK STATISTIKA**

fanidan ma'ruzalar matni

NAMANGAN-2016

Boshqa variant

1-mavzu. O'quv kursiga kirish (1-ma`ruza mashg'uloti)

Ma`ruza rejasi

1. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning iqtisodiy jarayonlarni o'rganishdagi ahamiyati.
2. Tasodifiy xodisalar va ular ustida amallar.
3. Elementar xodisalar fazosi

Tayanch ma`ruza

Ehtimollar nazariyasi - matematik fan, chunki u dastlabki berilgan sistemasiga suyanan holda keyingi teorema va natijalarni keltirib chiqaradi. Dastlabki tugal aksiomalar sistemasini A.N. Kolmogorov o'zining «Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari» (1936) nomli kitobida bayon etgan. Ehtimollar nazariyasi turli tarmoqlarda, jumladan juda keng ko'lamda amaliyotda qo'llaniladi.

Umuman olganda, tabiat va jamiyat qonunlari o'z xususiyatlariga tayanganda ikki turga bo'linadi: aniq hisoblab bo'ladigan va statistik.

Masalan: Osmon mexanikasi aniq qonunlariga tayangan holda, quyosh sistemasidagi planetalarning o'zaro joylashuv holatini, quyosh va oy tutilishini va shunga o'xshash ko'plab hodisalarni aniq hisoblab oldindan aytish mumkin.

Ob- havo, narx- navo, hosilning mo'l bo'lishi va bo'lmasligini oldindan aniq aytish qiyin. Shuningdek, mikro dunyodagi elektronning ma'lum vaqtdagi holatini aniq hisoblab bo'lmaydi, biroq uning «elektron bulut» hosil qilishini o'rganish mumkin. Odatda bunday qonunlar statistik qonunlar deb yuritiladi. Ehtimollar nazariyasi, ma'lum bir shartlar kompleksi bajarilganda, ko'p marta takrorlanadigan ommaviy tasodifiy hodisalardagi qonuniyatlarni o'rganadi. Har bir tasodifiy hodisaning asosiy hossasi esa ehtimollik deb ataluvchi kattalik bilan ifodalanadi.

Ma'lum shartlar kompleksi bajarilganda har doim ro'y beradigan hodisa muqarrar hodisa deyiladi va Ω bilan belgilanadi. Muqarrar hodisalarning fizik mohiyati turlicha bo'lishiga qaramay ularning matematik mohiyati bitta, ya'ni har doim ro'y beradi. Masalan: Agar o'yin kubigining har yog'iga 1 raqami yozilgan bo'lsa, bu kubikni tashlaganda 1 raqami tushish hodisasi muqarrar hodisa bo'ladi.

Ma'lum shartlar kompleksi bajarilganda ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisa ro'y bermaydigan hodisa deyiladi va $\emptyset$ bilan belgilanadi.

Ma'lum shartlar kompleksi bajarilganda ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisa tasodifiy hodisa deyiladi va $A, B, C, \dots$ bilan belgilanadi. Har qanday tasodifiy hodisa juda ko'p holatlar va sabablar natijasida ro'y beradi yoki ro'y bermaydi. Bu sabablarning barchasini batafsil o'rganishning imkoni yo'q. Shu sababli ehtimollar nazariyasi har bir qaralayotgan hodisaning ro'y berishi yoki bermasligini avvaldan aytib berishni o'z oldiga maqsad qilib qo'ygan emas.

A va V hodisalarning yig'indisi deb shu hodisalardan birortasi ro'y berganda ro'y beradigan hodisaga aytiladi. $A \cup V$. A va V hodisalar ning ko'paytmasi $A \cdot V$ deb ikkala hodisa ro'y berganda- gina ro'y beradigan hodisaga aytiladi. A hodisadan V hodisaning ayirmasi deb V hodisa ro'y bermay A hodisa ro'y bergandagina ro'y beradigan hodisaga aytiladi. Belgilanishi $A - V$. A hodisa ro'y bermagandagina ro'y beradigan hodisaga A hodisaga qarama- qarshi hodisa deyiladi va $\bar{A}$ deb belgilanadi.

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Fanninng tarixi haqida nimalarni bilasiz?
2. Ehtimollik deganda nimani tushunasiz?
3. Hodisa tushunchasini ta'riflang.
4. Hodisalar ustida qanday amallar bajariladi?
5. Hodisa turlarini ayting.
6. Teng imkoniyatli hodisalar deb nimaga aytiladi?

1-mavzu. O'quv kursiga kirish (2-ma'ruza mashg'uloti)

Ma'ruza rejasi

1. Extimollar nazariyasining aksiomalari.
2. Teng imkoniyatli xodisalar extimollikning klassik ta'rifi.
3. Extimollikning geometrik ta'rifi.

Tayanch ma'ruza

Ta'rif. Har qanday bo'sh bo'lmagan to'plam elementar hodisalar fazosi deyiladi va Ω deb belgilanadi. Elementar hodisalar fazosi elementlari elementar hodisalar deyiladi va ω bilan belgilanadi. Demak $\Omega \ni \omega$

1. Ularning har ikkitasi birgalikda emas. (bir vaqtda ro'y berishi mumkin emas).

$\omega_i \cdot \omega_j = \emptyset, i \neq j$

Misol. Tangani bir marta tashlaganda "gerb" va "raqam" tomoni birdaniga tushmaydi.

2. Barcha elementar hodisalar yig'indisi Ω ga teng bo'ladi. $\Omega = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_n$

Hodisalar teng imkoniyatli deyiladi, agar ularning birortasi ko'proq ro'y beradi deb aytib bo'lmasa.

Ta'rif. Elementar hodisalar fazosi Ω da aniqlangan sonli funktsiya R ehtimol deyiladi, agar qo'yidagi 3 ta shart bajarilsa.

1. Har qanday elementar hodisalar fazosining qismi $A (A \subset \Omega)$ uchun $R(A) \geq 0$ (nomanfiylik aksiomasi)

2. $R(\Omega) = 1$ (normalashtirish aksiomasi)

3. Birgalikda bo'lmagan A va V hodisalar uchun $R(A \cup V) = R(A) + R(V)$ (additivlik aksiomasi)

Har qanday $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ hodisaning ehtimoli deb, shu hodisa tarkibiga kiruvchi elementar hodisalar mos kelgan elementar ehtimollarning yig'indisi $P(A) = p_1 + p_2 + \dots + p_k$ ga aytiladi.

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

har qanday A hodisaning ehtimoli shu hodisani tashkil etuvchi elementar hodisalar sonining barcha elementar hodisalar soni nisbatiga teng.

Aksiomalardan kelib chiqadigan xulosalar

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. (Qarama qarshi hodisaning ehtimoli shu hodisaning ehtimolini 1 dan ayirilganiga teng)
2. $P(\emptyset) = 0$. (Ro'y bermaydigan hodisaning ehtimoli 0 ga teng)
3. $A \subset B$ bo'lsa, $P(A) \leq P(B)$. (Agar A hodisa V hodisani keltirib chiqarsa, u holda $P(A) \leq P(B)$) $B = A \cup \bar{A}B$; $P(B) = P(A) + P(\bar{A}B) \geq P(A)$
4. Ixtiyoriy A va V hodisalar uchun $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ (Ixtiyoriy ikki hodisaning yig'indisi ehtimoli har bir hodisa ehtimollari yig'indisidan shu hodisalar birgalikda ro'y berish ehtimolining ayirmasiga teng)
5. Har ikkitasi birgalikda bo'lmagan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar uchun $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

6. Ixtiyoriy A, V, S hodisalar uchun

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

7. Ixtiyoriy $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar uchun

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - P(A_1 A_2) - \dots - P(A_{n-1} A_n) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Elementar hodisalar deganda nimani tushunasiz?
2. Elementar hodisalarning xossalari ayting.
3. Teng imkoniyatli hodisa deb qanday hodisaga aytiladi?
4. Aksiomatik qurilish nimadan iborat?
5. Aksiomalardan kelib chiqadigan xulosalarni ayting.

1-mavzu. O'quv kursiga kirish (3-ma'ruza mashg'uloti)

Ma'ruza rejası

1. Shartli ehtimol tushunchasi. Bog'liqmas hodisalar
2. Tula ehtimollik formulasi.
3. Bayes formulasi.

Tayanch ma'ruza

Shartli ehtimol tushunchasi yangi ma'lumot paydo bo'lganda ham eski qurilgan elementar hodisalar fazosida turib ehtimollarni xisoblashga yordam beradi. Agar ikki hodisadan birining ro'y berish-bermasligi ikkinchi hodisaning ro'y berish-bermasligiga bog'liq bo'lsa bunday hodisalar bog'liq hodisalar deyiladi.

Ta'rif. V hodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lganda A hodisaning ehtimoli shartli ehtimol deyiladi

$$P_A(\hat{A}) = \frac{P(AB)}{P(\hat{A})}$$

Ixtiyoriy ikkita hodisa ko'paytmasining ehtimolini topish formulasi: $P(AB) \leq P(A) \cdot P(B)$

Agar $P(A\hat{A}) = P(\hat{A}) \cdot P(\hat{A})$ bo'lsa A va V hodisalar bog'liqmas deyiladi va $A \perp V$ ko'rinishda belgilanadi.

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$, bu formula to'la ehtimollik formulasi deyiladi.

$$P_A(B_j) = \frac{P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} \quad \text{Bayes formulasi}$$

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Shartli ehtimol ta'rifini keltiring.
2. To'la ehtimollik formulasini keltiring.
3. To'la ehtimollik formulasi qanday hollarda ishlatiladi?
4. Bayes formulasini keltiring.
5. Bayes formulasi qanday hollarda ishlatiladi?

2-mavzu. Bog'liqmas sinashlar ketma-ketligi

Ma'ruza rejası

1. Bernulli teoremasi.
2. Puasson teoremasi.
3. Muavr-Laplasning teoremlari.
4. Eng katta ehtimollik son.

Tayanch ma'ruza

2 ta tajriba bog'liqmas deyiladi, agar ularning natijalari bog'liqmas hodisalar bo'lsa.

n ta bog'liqmas tajribaning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng bo'lib, bu ehtimol tajriba o'tkazish davomida o'zgarmasin. n ta bog'liqmas tajribada A hodisaning k marta ro'y berish ehtimolini $P_n(k)$ deb belgilaylik.

Bernulli teoremasi. n ta bog'liqmas tajribaning har birida A hodisaning ro'y berish

ehtimoli p o'zgarmas bo'lsa, u holda
$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$
 bo'ladi.

$P_n(k)$ - A hodisaning k marta ro'y berish ehtimoli, n - tajribalar soni, p - hodisaning bitta tajribada ro'y berish ehtimoli, $k - n$ ta tajribada A hodisaning ro'y berishlar soni

Puasson teoremasi. n ta bog'liqmas tajribaning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p nolga shunday intilsaki, natijada $np \rightarrow \lambda$ ($\lambda > 0$) bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$$
 bo'ladi.

Muavr-Laplasning lokal teoremlari. n ta bog'liqmas tajribaning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli $\tilde{p}$, ($0 < \tilde{p} < 1$) o'zgarmas bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \varphi(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}})) = 0$$
 bu yerda, $\varphi(\tilde{p}) = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot \tilde{p}^{-\frac{\tilde{p}^2}{2}}$

Masalalarni ishlashda ushbu taqribiy formuladan foydalaniladi

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Muavr-Laplasning integral teoremlari. n ta bog'liqmas tajribaning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli $\tilde{p}$, ($0 < \tilde{p} < 1$) o'zgarmas bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(a \leq k \leq b) - \Phi_0(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}) + \Phi_0(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}})) = 0$$
 bu yerda, $\Phi_0(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot \int_0^{\tilde{p}} \tilde{p}^{-\frac{u^2}{2}} du$

Masalalarni ishlashda ushbu formuladan foydalanadi.

$$P_n(a \leq k \leq b) \approx \Phi_0\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) + \Phi_0\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Tajribalar soni n - fiksirlanganda (aniq son) k ning o'zgarishi hisobiga $P_n(k)$ lar ham o'zgaradi. $P_n(k_0)$ eng katta bo'lgan k_0 soni eng katta ehtimolli son deyiladi va quyidagicha topiladi: $np - (1-p) \leq k_0 \leq (n+1)p$

Eslatma. $n \leq 20$ da Bernulli formulasi, $n > 20$, $p \leq 0,02$ da Puasson formulasi, $n > 20$, $0,02 < p < 0,98$ da Muavr - Laplas formulalari qo'llaniladi.

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Binomial sxema deganda nimani tushunasiz?
2. Erkli tajribalar qanday aniqlanadi?
3. Bernulli teoremasi qachon qo'llaniladi?
4. Puasson teoremasini ta'riflang.
5. Muavr-Laplasning lokal teoremasi qanday shartlarda bajariladi?
6. Muavr-Laplasning integral teoremasi qanday hollarda qo'llaniladi?
7. Eng katta ehtimollik son qanday topiladi?
8. Bog'liqmas sinovlar ta'rifini ayting.
9. Puasson teoremasi qanday shartlarda bajariladi?

3-mavzu. Tasodifiy miqdorlar (1-ma'ruza mashg'uloti)

Ma'ruza rejası

1. Tasodifiy miqdor tushunchasi.
2. Diskret tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari.

3. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari.

Elementar hodisalar fazosida aniqlangan har qanday $\tilde{O} : \Omega \rightarrow R$ sonli funktsiya tasodifiy miqdor deyiladi.

Taqsimot qonunini yoza olish uchun tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlari chekli yoki sanoqli bo'lish kerak. Bunday tasodifiy miqdorlar diskret tasodifiy miqdorlar deyiladi.

X tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari va shu qiymatlarni qabul qilish ehtimollari X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deyiladi. Binomial taqsimot qonuni

X	0	1	...	n
P	p_0	p_1		p_n

bu yerda
$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, k = \overline{0, n}$$

Puasson taqsimot qonuni

X	0	1	...	n	...
P	p_0	p_1	...	p_n	...

bu yerda
$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0, k = 1, 2, \dots$$

Geometrik taqsimot qonuni

X	1	...	n	...
P	p_1	...	p_n	...

bu yerda $p_k = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$

X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan bo'lsin.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_0	p_1		p_n

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deb, $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$ ga aytiladi

va $M(X)$ deb belgilanadi. $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$

Diskret tasodifiy miqdor matematik kutilishining xossalari

1⁰. O'zgarmas sonning matematik kutilishi shu sonning o'ziga teng. $M(C) = C$

2⁰. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarish mumkin. $M(CX) = C\tilde{I} \ (\tilde{O})$

3⁰. Ikki tasodifiy miqdor yig'indisining matematik kutilishi har bir tasodifiy miqdor matematik kutilishlarining yig'indisiga teng. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$

4⁰. Ikkita bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilishi har bir tasodifiy miqdor matematik kutilishlarining ko'paytmasiga teng.

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$$

Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi

X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan bo'lsin.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_0	p_1		p_n

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb, $(X - M(X))^2$ ga aytiladi va $D(X)$ deb belgilanadi. $D(X) = M(\tilde{O} - \tilde{I} \ (\tilde{O}))^2 = M(\tilde{O})^2 - (M\tilde{O})^2$

Diskret tasodifiy miqdor dispersiyasining xossalari

1⁰. O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng. $D(C) = 0$

2⁰. $D(CX) = C^2 D(X)$ 3⁰. $X \perp Y \Rightarrow D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

$$4^0. X \perp Y \Rightarrow D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Tasodifiy miqdor deganda nimani tushunasiz?
2. Taqsimot qonuni deganda nimani tushunasiz?
3. Binomial taqsimot qonunini yozing.
4. Puasson taqsimot qonunini yozing.
5. Geometrik taqsimot qonunini yozing.
6. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deganda nimani tushunasiz?
7. Diskret tasodifiy miqdor matematik kutilishininig xossalari ayting.
8. Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi deganda nimani tushunasiz?
9. Diskret tasodifiy miqdor dispersiyasining xossalari ayting.

3-mavzu. Tasodifiy miqdorlar (2-ma`ruza mashg'uloti)

Ma`ruza rejasi

1. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar taqsimot funksiyasi.
2. Zichlik funktsiya va xossalari.
3. Tekis taqsimlangan, ko'rsatkichli va normal zichlik funktsiyalari.

Tayanch ma`ruza

Agar tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari sonlar o'qidagi birorta oraliqni to'ldirsa, bunday tasodifiy miqdorlar uzluksiz tasodifiy miqdorlar deyiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun taqsimot qonunini yozib bo'lmaydi, chunki har qanday qiymat uchun $P(X \leq x) > 0$

Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb $F(x) = P(X \leq x)$ ga aytiladi

Uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi $f(x)$ ning xossalari

1⁰. $F(x)$ kamaymaydigan funktsiya.

$$2^0. \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \text{ Hc} \delta o m u : P(X < -\infty) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$3^0. \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \text{ Hc} \delta o m u : P(X < +\infty) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

4⁰. $F(x)$ funktsiya sanoqli sondagi uzilish nuqtasiga ega.

5⁰. $F(x)$ funktsiya 2-tur uzilishga ega.

6⁰. $F(x)$ funktsiya chapdan uzluksiz. $\left(\lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = F(a) \right)$.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi deb, $p(x) = F'(x)$ ga aytiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funktsiyasining xossalari

$$1^0. \text{ Ixtiyoriy } x \text{ uchun } p(x) \geq 0. \quad 2^0. \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Har qanday hodisaning ehtimolini taqsimot funksiyasi orqali topish mumkin

$$P\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a)$$

Tekis taqsimlangan zichlik funktsiya

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b] \\ 0, & x \notin [a; b] \end{cases}$$

Ko'rsatkichli zichlik funktsiya

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \lambda > 0$$

Normal zichlik funktsiya

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar tushunchasini ta'riflang.
2. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi deganda nimani tushunasiz?
3. Uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot funktsiyasi $f(x)$ ning xossalari ayting.
4. Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi deganda nimani tushunasiz?
5. Uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funktsiyasining xossalari ayting.
6. Tekis taqsimlangan zichlik funktsiya formulasini keltiring.
7. Ko'rsatkichli zichlik funktsiya formulasini yozing.
8. Normal zichlik funktsiya formulasini keltiring.

3-mavzu. Tasodifiy miqdorlar (3-ma'ruza mashg'uloti)

Ma'ruza rejasi

1. Matematik kutilish va uning xossalari
2. Dispersiya va uning xossalari
3. O'rta kvadratik chetlanish

Tayanch ma'ruza

X tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi $r(x)$ bo'lsin.

Ta'rif. X tasodifiy miqdor ning matematik kutilishi deb, $\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$ ga aytiladi. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi diskret tasodifiy miqdor matematik kutilishining barcha xossalari ega.

1^o. O'zgarish sonning matematik kutilishi shu sonning o'zi ga teng. **MSqS**

2^o. $M(SX)qSMX$ **3^o.** $M(XQU)qMXQMU$ **4^o.** $X \perp U, M(X \cdot U)qMX \cdot MU$

Ta'rif. X tasodifiy miqdor ning dispersiyasi deb,

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\sigma}^2 p(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\sigma} p(x)dx \right)^2$$

ga aytiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdor ning dispersiyasi diskret tasodifiy miqdor dispersiyasining barcha xossalari ega.

1^o. O'zgarish sonning dispersiyasi nolga teng. **DSq0**

2^o. $D(SX)qS2DX$ **3^o.** $X \perp U, D(XQU)qDXQDU$ **4^o.** $X \perp U, D(X \cdot U)qDXQDU$

Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini topamiz.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{b^2 + ba + a^2}{3}$$

$$D(X) = \frac{b^2 + ba + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{b^2 + ba + a^2}{3} - \frac{b^2 + 2ba + a^2}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Diskret tasodifiy miqdor bilan uzluksiz tasodifiy miqdorning farqi nimada?
2. Uzluksiz tasodifiy miqdor matematik kutilishining ma'nosi nima?
3. Uzluksiz tasodifiy miqdor dispersiyasining ma'nosi nima?
4. O'rta kvadratik chetlanish nima?

3-mavzu. Tasodifiy miqdorlar (4-ma`ruza mashg'uloti)

Ma`ruza rejasi

1. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdor tushunchasi.
2. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot va zichlik funktsiyalari.
3. Tasodifiy miqdorlarning bog'liqligligi.

Tayanch ma`ruza

Faraz qilaylik, Ω elementar hodisalar fazosida n -ta $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lsin.

Quyidagi $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ tasodifiy miqdorlar sistemasi n o'lchovli tasodifiy miqdor yoki tasodifiy vektor deb ataladi.

1. Taqsimot funktsiya har bir argument bo'yicha kamaymovchi funktsiya.

2. $\lim_{x_k \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$

3. $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1,$

3. $\dots$

4. $\lim_{x_n \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$

5. Taqsimot funktsiya har bir argumenti bo'yicha chapdan uzluksiz.

6. Taqsimot funktsiya chekli yoki sanoqli uzilish nuqtalariga ega.

Teskarisi to'g'ri emas, ya'ni shu oltita xossani qanoatlantiruvchi har qanday funktsiya taqsimot funktsiyasi bo'lavermaydi.

$\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ tasodifiy miqdorlar bog'liqmas deyiladi, agar $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1)F(x_2) \cdot \dots \cdot F(x_n)$ bo'lsa.

$\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ tasodifiy miqdorlar zichlik funktsiyasi deb,

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2 \cdot \dots \cdot \partial x_n}$$

ga aytiladi.

Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor $(\square, \square)$ ning taqsimot qonuni deb, shu tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari $u(x_i, y_i)$ bilan, har bir qiymatni qabul qilish ehtimollari $P(x_i, y_i) = P\{\xi = x_i \cap \eta = y_i\}$ ga aytiladi.

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor $(\square, \square)$ uzluksiz tasodifiy miqdor deb ataladi, agarda uning taqsimot funktsiyasi $F(x, y)$ ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

Agar ikki o'lchovli tasodifiy miqdor $(\square, \square)$ ning taqsimot funktsiyasi berilgan bo'lsa

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^y f(u, v) dv$$

u holda shu tasodifiy miqdorni tashkil kiluvchi $\square$ va $\square$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot funktsiyalariga quyidagicha:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^y dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du$$

topiladi.

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. n o'lchovli tasodifiy miqdor deganda nimani tushunasiz?
2. n o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi qanday hossalarga ega?
3. Bog'liqmas n o'lchovli tasodifiy miqdorlar ta'rifini ayting.
4. n o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi deganda nimani tushunasiz?
5. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor va uning taqsimot funktsiyasini ayting.
6. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi qanday aniqlanadi?
7. Ikki o'lchovli tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor qanday aniqlanadi?
8. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdor va uning zichlik funktsiyasi qanday aniqlanadi?

4-mavzu. Ehtimollar nazariyasining limit teoremlari (1-ma'ruza mashg'uloti)

Ma'ruza rejasi

1. Chebishev tengsizligi
2. Katta sonlar qonuni.
3. Chebishev teoremasi.

Tayanch ma'ruza

Chebishev tengsizligi. X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi $a = MX$ va dispersiyasi $\sigma^2 = DX^2$ mavjud bo'lib, $\delta > 0$ istalgancha kichik son bo'lsin. U

holda $P\{|X_N - a| > \delta\} \leq \frac{DX}{\delta^2}$ bo'ladi. Agar $X_1, X_2, \dots, X_N, \dots$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma - ketligi bo'lib, $DX_N \leq C, n \geq 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi chekli C mavjud bo'lsa, u

holda $\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N X_\alpha - M(\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N X_\alpha)| > \delta\} = 0$ bo'ladi.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ bog'liqsiz va bir hil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lib, $M(x_1) = a$ esa $D(x_1) = \sigma^2 > 0$ bo'lsin. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - n \cdot a}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \leq x\right\} - \phi(x) = 0$$

Teorema. Agar X yuqorida keltirilgan shartlarni bajaruvchi tasodifiy miqdor va $\delta > 0$

istalgancha kichik son bo'lsa $P\{|X - MX| > \delta\} \leq \frac{DX}{\delta^2}$ bo'ladi.

Chebishev teoremasi. Agar $X_1, X_2, \dots, X_N \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma- ketligi juft- jufti bilan o'zaro bog'liq bo'lmasa va dispersiyalari tekis chegaralangan: $(DX_n \leq C), n \geq 1$ bo'lsa, u holda

$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N X_\alpha - M(\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N X_\alpha)| > \delta\} = 0$ bo'ladi.

Agar X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi $M(X) = a$, chekli dispersiyasi $DX = \sigma^2$ bo'lsa va $X_1, X_2, \dots, X_N$, shu tasodifiy miqdor ustida o'tkazilgan N ta o'zaro bog'liq bo'lmagan kuzatishlar natijalari bo'lsa, unda istalgan kichik $\xi > 0$ uchun $\lim_{N \rightarrow \infty} P(|X_N - a| < \delta) = 1$ bo'ladi.

Bernulli teoremasi. Agar A hodisaning yuzaga kelish ehtimoli $P(A) = p, M$ esa A hodisa ustida o'tkazilgan N ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tekshirishlar natijasida A ni yuzaga kelishlari soni

bo'lsa, unda har qanday $\delta > 0$ uchun: $\lim_{N \rightarrow \infty} P(|\frac{M}{N} - p| > \delta) = 0$ bo'ladi.

Xinchin teoremasi. Faraz qilaylik, $M(X) = a$, $|a| < \infty$, X_n X -ni o'zaro bog'liq bo'lmagan kuzatishlar natijasida hosil bo'lgan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $\lim_{N \rightarrow \infty} P(|X_n - a| > \delta) = 0$ bo'ladi.

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Chebishev tengsizligining ikkala ko'rinishini aytib bering.
2. Chebishev teoremasi qanday ta'riflanadi?
3. Markov teoremasining ta'rifini ayting.
4. Xinchin teoremasining ta'rifini ayting.
5. Katta sonlar qonuni va uning iqtisodiy ahamiyatini ayting.

4-mavzu. Ehtimollar nazariyasining limit teoremlari (2-ma'ruza mashg'uloti)

Ma'ruza rejası

1. Bir xil taksimlangan tasodifiy miqdorlar uchun markaziy limit teorema.
2. Lyapunov sharti.
3. Xar xil taksimlangan tasodifiy miqdorlar uchun markaziy limit teorema.

Tayanch ma'ruza

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin. $a_i = M\xi_i$, $\sigma_i^2 = D\xi_i$, $n = 1, 2, \dots, n, \dots$ deb belgilaymiz. Quyidagi normalashtirilgan $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini qaraymiz.

$$\eta_k = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots$$

Markaziy limit teoreмага ko'ra $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlariga qo'yiladigan ayrim shartlar bajarilsa, u holda normalashtirilgan tasodifiy miqdorlar η_n larning taqsimot funktsiyalari $n \rightarrow \infty$ da har qanday x lar uchun normal taqsimot qonuni $\Phi(x)$ ga intiladi. Bu holda $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi asimptotik normal deyiladi.

Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog'liqmas va bir xil taqsimlangan bo'lsa, u holda markaziy limit teorema quyidagicha bo'ladi.

Teorema (Bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun markaziy limit teoremasi)

Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ bog'liqmas va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $a = M\xi_i$, $\sigma^2 = D\xi_i > 0$ bo'lsa, u holda $n \rightarrow \infty$ da barcha x lar uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x \right\} = \Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

bu yerda $a = M\xi_i$, $\sigma^2 = D\xi_i$, $n = 1, 2, \dots, n, \dots$

Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi har xil taqsimlanmagan bo'lsa, u holda markaziy limit teorema o'rinli bo'lishi uchun $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari mavjud bo'lishi sharti yetarli emas.

Markaziy limit teorema bu holda o'rinli bo'lishi uchun yetarli shart bo'lgan Lyapunov shartini ko'rib chiqamiz. $a_i = M\xi_i$, $\sigma_i^2 = D\xi_i$, $c_i^3 = M|\xi_i - a_i|^3$ deb belgilaylik. U holda, Lyapunov sharti quyidagicha yoziladi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{c_1^3 + c_2^3 + \dots + c_n^3}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}} = 0$$

Lyapunov sharti bajarilganda turli taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun markaziy limit teorema o‘rinli bo‘ladi.

Teorema (Turli taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun markaziy limit teoremasi)

Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lib, $a_i = M\xi_i, \sigma_i^2 = D\xi_i, c_i^3 = M|\xi_i - a_i|^3$ mavjud bo‘lsin. Agar Lyapunov sharti bajarilsa, u holda barcha x lar uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=1}^n a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} < x \right\} = \Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (1)$$

Odatda (1) formula yordamida n katta bo‘lganida normal qonun yordamida bir xil taqsimlanmagan tasodifiy miqdorlar yig‘indisining ehtimoli uchun qulay formulalar olish mumkin. Masalan,

$$P \left\{ b \leq \sum_{i=1}^n \xi_i \leq d \right\} = P \left\{ \frac{b - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{d - na}{\sigma\sqrt{n}} \right\} \approx \Phi \left(\frac{d - na}{\sigma\sqrt{n}} \right) - \Phi \left(\frac{b - na}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

Mustaqil o‘rganish uchun savollar

Qanday tasodifiy miqdor asimptotik normal deyiladi?

Qanday limit teorema markaziy limit teorema deyiladi?

Bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun qanday shart bajarilganda markaziy limit teorema o‘rinli bo‘ladi?

Xar xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun qanday shart bajarilganda markaziy limit teorema o‘rinli bo‘ladi?

MATEMATIK STATISTIKA

5-mavzu. Matematik statistika asoslari

Ma`ruza rejasi

1. Tanlanma va uning berilish usullari.
2. Tanlanmaning urta qiymatlari.
3. Poligon va gistogramma.

Tayanch ma`ruza

$x_1, x_2, \dots, x_n$ bog‘liqmas va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi tanlanma deyiladi. n -tanlanmaning xajmi.

Agarda tanlanma asosiy to‘plamga qaytarilsa, u takrorlanuvchi tanlanma deyiladi. Agar tanlanma asosiy to‘plamga qaytarilmasa, u takrorlanmas tanlanma deyiladi.

Tanlanmaning noma'lum taqsimot qonuni $F(x)$ ni topish matematik statistikaning birinchi masalasidir.

Noma'lum taqsimot qonunining parametrini topish masalasi, matematik statistikaning ikkinchi masalasidir.

Noma'lum parametrlar uchun ishonchlilik oralig'ini topish masalasi matematik statistikaning uchinchi masalasidir.

Statistik gipotezalarni tekshirish uchun kriteriyalar qurish masalasi matematik statistikaning to'rtinchi masalasidir.

Ikki va undan ortiq tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'liqlikni o'rganish matematik statistikaning beshinchi masalasidir.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlanmaning taqsimot funktsiyasi $F(x)$ noma'lum bo'lsin. Quyidagi funktsiyani qaraymiz. $\mu_n(x) = \{x \text{ dan kichik bo'lgan } x_i \text{ lar soni}\}$. Empirik taqsimot funktsiyasi deb $F_n(x) = \frac{1}{n} \mu_n(x)$ ga aytiladi.

O'sib borish tartibida joylashgan $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar ketma-ketligi variatsion qator deyiladi ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$).

Agar variatsion qatorning elementlari chekli yoki sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qilsa, bunday variatsion qator diskret variatsion qator deyiladi.

Variatsion qator elementlarining qabul qiladigan qiymatlari biror oraliqni to'ldirsa, bu qator interval (uzluksiz) variatsion qator deyiladi.

Yozilish formalari, 1-usul. To'la ro'yxat usuli.

Bunda variatsion qatorning elementlari to'laligicha ketma-ket yoziladi.

2-usul. Jadval usuli.

Bunda jadvalning birinchi qatoriga variatsion qator elementlarining turli qiymatlari yoziladi. Ikkinchi qatorga esa, shu qiymatlarni necha martadan takrorlanishi qayd etiladi.

3-usul. Grafik usul.

a) Diskret variatsion qatorni qaraymiz.

Har qanday (x_i, n_i) juftlik dekart koordinatalar sistemasida yagona nuqtani aniqlaydi. Berilgan diskret variatsion qator uchun (x_i, n_i) nuqtalarni belgilab, bu nuqtalar kesma yordamida ketma-ket birlashtiriladi. Hosil bo'lgan siniq chiziq diskret variatsion qatorning poligoni deyiladi.

b) Interval variatsion qatorni qaraymiz.

Bunda har bir (x_i, x_{i+1}) oraliqqa yuzasi son jihatdan n_i ga teng bo'lgan to'g'rito'rtburchak yasaladi. Xos bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar konfiguratsiyasi interval variatsion qatorning gistogrammasi deyiladi.

Ta'rif. Ixtiyoriy $x_1, x_2, \dots, x_n$ variatsion qatorning dispersiyasi deb, $S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ ga aytiladi.

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Tanlanma deb nimaga aytiladi?
2. Tanlanma turlarini ayting.
3. Matematik statistikaning asosiy masalalari nimadan iborat?
4. Empirik taqsimot funktsiyasining ta'rifini ayting.
5. Variatsion qator ta'rifini ayting.
6. Variatsion qator turlarini ayting.
7. variatsion qator yozilish formalari ayting.
8. Gistogramma va poligon tushunchalarini ayting.

9. Variatsion qator dispersiyasi qanday hisoblanadi?

6-mavzu. Baholash nazariyasi (1-ma`ruza mashg'uloti)

Ma`ruza rejasi

1. Nuqtaviy baxolar va ularning xossalari.
2. O'rta qiymat va dispersiya uchun baholar.
3. Momentlar va xaqiqatga eng yaqin baholash usullari.

Tayanch ma`ruza

Matematik statistikaning asosiy vazifasi o'rganilayotgan jarayon ustida o'tkazilgan tajribalar asosida olingan miqdorlardan foydalanib, jarayon haqida asoslangan ilmiy xulosalar olishdan iborat.

Bu tajribalarning natijalari $x_1, x_2, \dots, x_n$ tajribadan tajribaga o'zgarib borganligi uchun ularni tasodifiy miqdor deb qarash to'g'ri bo'ladi. Bu aniq jarayon ustida o'tkazilgan tajribalar bo'lganligi uchun $x_1, x_2, \dots, x_n$ larning bir xil taqsimlangan deb olinishi tabiiy.

Ta'rif: Bog'liqmas va bir xil taqsimlangan $x_1, x_2, \dots, x_n$ tasodifiy miqdorlarga tanlanma deyiladi.

Tanlanma matematik statistikaning asosiy ob'ektidir. $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlanmaning taqsimot qonuni $p(x, \theta)$ bo'lsin, bu yerda θ - noma'lum parametr.

Ta'rif. $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlanmaning har qanday sonli funktsiyasi tanlanma taqsimot qonunining noma'lum parametri uchun baho (statistika) deyiladi va $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ deb belgilanadi

Nuqtaviy baho deb, bitta son bilan aniklanadigan statistik bahoga aytiladi.

θ_n baho noma'lum parametr θ uchun asosli baho deyiladi, agar har qanday musbat ε son uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\theta_n - \theta| < \varepsilon] = 1$ bo'lsa. Effektiv baho θ_{n_1} baho θ_{n_2} ga nisbatan effektivroq deyiladi, agar $D(\theta_{n_1}) \leq D(\theta_{n_2})$ bo'lsa.

Minimal dispersiyaga ega bo'lgan baho effektiv baho deyiladi. Odatda siljimagan, asosli, effektiv baho yagona bo'ladi.

θ_n baho noma'lum parametr θ uchun siljimagan baho deyiladi, agar $M(\theta_n) = \theta$ bo'lsa.

Bir-biridan farqli bo'lgan siljimagan baholar cheksiz ko'p bo'ladi.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlanmaning taqsimot qonunini $p(x, \theta)$ bo'lsin, bu yerda θ noma'lum parametr.

Quyidagi funktsiyani qaraymiz.

$L(x, \theta) = p(\tilde{o}_1, \theta) \cdot p(\tilde{o}_2, \theta) \cdot \dots \cdot p(\tilde{o}_n, \theta)$ tanlanmaning ro'y berish ehtimoli.

Bu funktsiya haqiqatga eng yaqin funktsiya deyiladi. Noma'lum parametr θ ni $L(x, \theta)$ funktsiyaning maksimumga erishish shartidan topamiz.

Musbat funktsiya va uning logarifmi bir hil ekstremum nuqtalarga ega bo'lganligi uchun $L(x, \theta)$ o'rniga uning logarifmini qaraymiz.

$$\ell(x, \theta) = \ln L(x, \theta) = \sum_{k=1}^n \log P(x_k, \theta), \quad \frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^n \frac{P'(x_k, \theta)}{P(x_k, \theta)}$$

bu yerdan $\theta = \theta_0$ kritik nuqtani topamiz. Agar $\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} < 0$ bo'lsa, u holda $L(x, \theta)$ funktsiya θ_0

nuqtada maksimumga erishadi va θ_0 baho haqiqatga eng yaqin baholash usuli bo'yicha topilgan baho deyiladi. Bu baho asimptotik siljimagan, asosli va asimptotik effektiv bo'ladi.

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Matematik statistikaning asosiy ob'ekti nimadan iborat?
2. Tanlanma taqsimot qonunining noma'lum parametri uchun baho deganda nimani tushunasiz?
3. Nuqtaviy bahoning ta'rifini keltiring.
4. Asosli baho deb nimaga aytiladi?
5. Effektiv baho deb nimaga aytiladi?
6. Siljimagan baho deb nimaga aytiladi?
7. Haqiqatga eng yaqin funktsiya qanday hisoblanadi?

6-mavzu. Baholash nazariyasi (2-ma'ruza mashg'uloti)

Ma'ruza rejasi

1. Ishonchlilik oralig'i tushunchasi.
2. Matematik kutilish uchun ishonchlilik oralig'i.
3. Dispersiya uchun ishonchlilik oralig'i.

Tayanch ma'ruza

$x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlanmaning taqsimot qonuni $P(x, \theta)$ bo'lsin bu yerda θ -noma'lum parametr. Ayrim masalalarda noma'lum parametr θ ning qiymati o'rniga shu parametr joylashishi mumkin bo'lgan oraliqlarni ko'rsatish yetarli bo'ladi.

Ta'rif. $[\theta_{n_1}, \theta_{n_2}]$ kesma ishonchlilik darajasi $1 - \alpha$ bo'lgan noma'lum parametr θ uchun ishonchlilik oralig'i deyiladi, agar $P(\theta_{n_1} \leq \theta \leq \theta_{n_2}) = 1 - \alpha$ bo'lsa.

Noma'lum parametr uchun ishonchlilik oralig'i tanlanma normal taqsimlangan bo'lgandagina aniq topish mumkin.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlanma normal taqsimlangan bo'lsin, ya'ni
bu yerda biz faqat noma'lum parametr a uchun ishonchlilik oralig'ini qo'ramiz.
Quyidagi ikki holni qaraymiz.

1. σ^2 ma'lum bo'lsin.

Quyidagi faktdan foydalanamiz, agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdor normal taqsimlangan

bo'lsa, u holda $Y = \frac{x_1 + \dots + x_n - a}{b}$ tasodifiy miqdor ham normal taqsimlangan bo'ladi.
Quyidagi tasodifiy miqdorni qaraymiz.

$Y = \frac{x_1 + \dots + x_n - na}{\sqrt{n}\sigma}$ bu tasodifiy miqdor normal taqsimlangan, uning matematik kutilishi va dispersiyasini topamiz.

$$MY = M\left(\frac{x_1 + \dots + x_n - na}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}(a + a + \dots + a - na) = 0,$$

$$DY = M\left(\frac{x_1 + \dots + x_n - na}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 = \frac{1}{n\sigma^2}(\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2 - 0) = 1$$

Demak, Y tasodifiy miqdor taqsimot qonuni standart normal qonun ekan. Ya'ni

$$P(x; a; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ishonchlilik oralig'ining ta'rifiga ko'ra $P(-\xi \leq Y \leq \xi) = 1 - \alpha$ bo'ladi.

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \leq Y \leq \varepsilon &\Rightarrow -\varepsilon \leq \frac{x_1 + \dots + x_n - na}{\sqrt{n}\sigma} \leq \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon\sqrt{n}\sigma \leq x_1 + \dots + x_n - na \leq \varepsilon\sqrt{n}\sigma \Rightarrow \\
&\Rightarrow -\frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n - na}{n} \leq \frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \bar{x} - \frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}} \leq a \leq \bar{x} + \frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \varepsilon = x_\alpha
\end{aligned}$$

Demak, a parametr uchun ishonchlilik oralig'i quyidagicha bo'ladi.

$$\bar{x} - \frac{x_\alpha\sigma}{\sqrt{n}} \leq a \leq \bar{x} + \frac{x_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}$$

2. σ^2 noma'lum bo'lsin.

Yana usha Y tasodifiy miqdorni qaraymiz. σ^2 noma'lum bo'lganligi uchun, yuqoridagi usulni qo'llab bo'lmaydi. Shuning uchun σ^2 ning o'rniga uning haqiqatga eng yaqin bahosini quyamiz.

Endi bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni normal bo'lmaydi, chunki mahrajidagi S tasodifiy miqdordir.

Bu tasodifiy miqdor taqsimot qonunini V.Gosset 1908 yili maqola sifatida e'lon qilgan. Bu taqsimot qonuni St'yudentning t taqsimot qonuni deyiladi. Bu taqsimot qonunini qo'llasak noma'lum parametr a uchun ishonchlilik oralig'i quyidagicha bo'ladi.

$$\bar{x}_T - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Bu yerda t_α ning qiymati St'yudentning t taqsimot qonuni jadvalidan olinadi

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Ishonchlilik oraliqlari deb nimaga aytiladi?
2. Ishonchlilik darajasi qanday aniqlanadi?
3. Dispersiya ma'lum bo'lganda noma'lum matematik kutilish uchun ishonchlilik oralig'i qanday topiladi?
4. Dispersiya noma'lum bo'lganda uning bahosi qanday topiladi?
5. Dispersiya noma'lum bo'lganda noma'lum matematik kutilish uchun ishonchlilik oralig'i qanday topiladi?

7-mavzu. Statistik gipotezalarni tekshirish (1-ma'ruza mashg'uloti)

Ma'ruza rejasi

1. I va II tur xatoliklar.
2. Sodda va murakkab gipotezalar.
3. Asosiy va alternativ gipotezalar.

Tayanch ma'ruza

$x_1, x_2, \dots, x_n$ - tanlanmaning taqsimot qonuni $p(x)$ noma'lum bo'lsin. Faraz qilaylik, quyidagi gipotezani tekshirish kerak:

$$H_0 : p(x) = p_0(x) \quad (1)$$

bu yerda $p_0(x)$ - berilgan uzluksiz yoki diskret taqsimot qonuni. H_0 gipotezani tekshirish masalasi muvofiqlikni tekshirish masalasi deb ataladi.

H_0 gipoteza uchun har qanday kriteriy muvofiqlik kriteriysi deb ataladi.

Agar $p_0(x)$ to'liq aniqlangan bo'lsa, H_0 gipoteza oddiy gipoteza deyiladi. Masalan, tanlanma o'rt qiymati va dispersiyasi berilgan normal taqsimot bo'yicha tanlangan degan gipoteza oddiy gipotezadir.

Agar tanlanmaning parametrlari noma'lum bo'lgan normal taqsimotdan ekanligini tekshirish kerak bo'lsa, bunday gipoteza murakkab gipoteza bo'ladi.

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Gipoteza deganda nimani tushunasiz?
2. Gipotezaning qanday turlarini bilasiz?
3. Kritik soha deb nimaga aytiladi?
4. Sodda gipoteza deb nimaga aytiladi?
5. Qachon gipoteza murakkab bo'ladi?

7-mavzu. Statistik gipotezalarni tekshirish (2-ma`ruza mashg'uloti)

Ma`ruza rejası

1. Eng quvvatli kriteriyalar.
2. Sodda gipoteza uchun Pirson kriteriyasi.
3. Murakkab gipoteza uchun Pirson kriteriyasi

Tayanch ma`ruza

Oddiy gipoteza uchun χ^2 muvofiqlik kriteriysini ko'rib chiqamiz. R -sonlar o'qini shunday $z_1, z_2, \dots, z_k$ k ta intervallarga shunday bo'lamizki, natijada

$$a) z_i \cdot z_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

$$b) z_1 + z_2 + \dots + z_k = R \text{ bo'lsin.}$$

$p_0(x)$ funktsiya ma'lum bo'lganligidan tanlanma elementlarining bu intervallarga tushish ehtimolini hisoblashimiz mumkin. Bularni $\pi_i (i = \bar{1}, \bar{k})$ bilan, bu intervallarga tushgan tanlanma elementlar sonini $n_i (i = \bar{1}, \bar{k})$ bilan belgilaylik K. Pirson (1900) $n \rightarrow \infty$ da

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i} \quad (2)$$

statistikasi erkinlik darajasi $k-1$ bo'lgan χ^2 taqsimotga ega ekanligini isbotlagan. χ^2 kriteriysining qo'llanish qoidasi quyidagicha: χ^2 statistika qiymatini (2)-formula

bo'yicha hisoblab va qiymatlilik darajasi α ni tanlab χ^2 - taqsimoti jadvalidan $\chi_{k-1; \alpha}^2$ ning kritik qiymati aniqlanadi.

2. Agar $\chi^2 > \chi_{k-1; \alpha}^2$ bo'lsa, u holda H_0 gipotezasi qabul qilinmaydi, agar $\chi^2 \leq \chi_{k-1; \alpha}^2$ bo'lsa, u holda H_0 gipoteza qabul qilinadi. Murakkab gipoteza uchun χ^2 muvofiqlik kriteriysi.

$$H_0 : F(x) = F_0(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) \quad (3)$$

murakkab gipotezasini ko'rib chiqamiz, ya'ni $F_0(x)$ funktsiyasining funktsional ko'rinishi ma'lum, lekin ba'zi bir (yoki hamma) parametrlari noma'lum. Oddiy gipotezadan farqi shundaki, nazariy π_i ehtimollari bevosita hisoblash imkoniyati yo'q, chunki ular noma'lum $S < (k-1)$ parametrlar $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ larga bog'liq. Shunday qilib, ularni $\pi_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ ko'rinishda yozishimiz shart. Noma'lum $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ parametrlarni ularning $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_s$ baho qiymatlari bilan almashtiramiz. U holda (2)- statistika quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\chi^2_q = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n\pi_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_s))^2}{n\pi_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_s)} \quad (4)$$

Tushunarliki, χ^2 taqsimoti haqidagi masala ham o'zgaradi, chunki $\pi_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_s)$ lar o'z navbatida tasodifiy qiymatlar bo'lib, (4) statistikaning asimptotik taqsimoti oddiy N_0 gipoteza bilan bir xil ko'rinishga ega ekanligi o'z-o'zidan oshkor emas.

R.Fisher (1928) $n \rightarrow \infty$ da χ^2 statistikasi (4) agar $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ noma'lum parametrlarning $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_s$ baho qiymatlari χ^2 minimum usuli bilan olingan bo'lsa, yoki χ^2 minimum modifikatsiyasi yordamida gruppallangan tanlanmalar bo'yicha aniqlangan bo'lsa, $k-s-1$ erkinlik darajasiga ega bo'lgan χ^2 - taqsimotga ega ekanligini isbotlagan.

Shu bilan birga Fisher agar $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ qiymatlar ixtiyoriy usul bilan aniqlangan bo'lsa, u holda

$$P\{\chi_{k-s-1}^2 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\chi^2 \leq x\} \geq P\{\chi_{k-s-1}^2 \leq x\} \quad (5)$$

ekanligini ko'rsatgan. $\chi_{k-s-1;\alpha}^2 \leq \chi_{k-1;\alpha}^2$ o'rinli bo'lganligidan, χ^2 kriteriysining qo'llanishi quyidagicha bo'ladi. (4) formula χ^2 statistik qiymatini hisoblab, bu yerda $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ qiymatlar biror usul bilan hisoblangan va α muhimlik darajasini tanlab olingandan keyin, χ^2 taqsimot jadvalidan $\chi_{k-1;\infty}^2$ va $\chi_{k-s-1;\infty}^2$ lar aniqlanadi.

Agar $\chi^2 \leq \chi_{k-1;\alpha}^2$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinmaydi. Agar $\chi^2 \leq \chi_{k-s-1;\alpha}^2$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi.

Agar $\chi_{k-1;\alpha}^2 \geq x \geq \chi_{k-s-1;\alpha}^2$ bo'lsa, u holda $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ qiymatlarni aniqlash uchun χ^2 minimum usuli yoki χ^2 minimum usuli modifikatsiyasi qo'llaniladi. Bu xolda $n \rightarrow \infty$ da χ^2 statistika $k-s-1$ erkinlik darajasiga ega bo'lgan χ^2 taqsimotiga egadir. Shu sababdan, agar $\chi^2 > \chi_{k-s-1;\alpha}^2$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinmaydi. Aksincha, agar $\chi^2 \leq \chi_{k-s-1;\alpha}^2$ bo'lsa, H_0 gipoteza qabul kilinadi.

Bunday gipoteza qabul qilinganda, ravshanki, faqat birinchi tur xato tekshiriladi. Kriteriy quvvati funksiyasini hisoblash imkoniyati bo'lmaganligi uchun ikkinchi tur xatolikni hisoblab bo'lmaydi. Shuning uchun ikkinchi tur xatolikni kamaytirish va demak, kriteriy quvvatini oshirish uchun bir necha tavsiyalar beramiz.

Mustaqil o'rganish uchun savollar

- 1.I va P tur xatoliklarning ta'rifini ayting?
- 2.I va II tur xatoliklarning farqi nimadan iborat?.
- 3.Sodda gipoteza deb nimaga aytiladi?
- 4.Qachon gipoteza murakkab bo'ladi?
- 5.Asosiy va al ternativ gipotezalarning farqi nimadan iborat?.

7-mavzu. Statistik gipotezalarni tekshirish (3-ma'ruza mashg'uloti)

Ma'ruza rejasi

1. Intervallar sonini aniklash
- 2.Teng extimolliklar usuli
3. Mezonni qo'llash uchun tavsiyalar

Tayanch ma'ruza

Shungacha ko'rilgan χ^2 kriteriysining asimptotik nazariyasi tanlanma elementlarini gruppallash tanlanma elementlariga bog'liq bo'lmagan holda aniqlanadigan intervallarni ixtiyoriy ravishda aniqlashga asoslangan. Bu shart intervallar chegarasi tasodifiy qiymatlar ekanligi nazarda tutilmagan hollarda mavjuddir. Odatda amaliyotda intervallarga bo'lish chegaralarini

aniqlash, baʼzida berilgan tanlanmaning umumiy koʻrinishini aniqlashdan iboratdir. Biz intervallarga boʻlish usullarini muloxaza qilib, undan keyin asimptotik nazariyaga taʼsirini koʻrib chiqishimiz kerak.

Amalda bu masalaning yechimi arifmetik qulaylikka bogʻliq: intervallar teng uzunliklarda olinadi, chetkilardan tashqari. Interval uzunligi taqriban taqsimot dispersiyasi bilan aniqlanadi, shunda taqsimot holati markaziy intervalning qayerda boʻlishini aniqlashda yordam beradi.

Intervallar uchun hisoblangan X^2 statistika shunday asimptotik taqsimotga ega ekanligini oldindan bilishning iloji yoʻq, xattoki, intervallar oldindan oʻzgarmas qilib olinganda ham. Uzluksiz taqsimotning umumiy holi uchun qurilgan asimptotik nazariya intervallar chegarasi tanlanma boʻyicha aniqlanganda ham oʻrinli ekanligini Vatson koʻrsatib bergan. Shunday qilib, X^2 statistikaning N_0 gipoteza boʻyicha asimptotik taqsimoti qurilganda intervallar chegaralarining tasodifiyligini hisobga olmasak ham boʻladi.

Biz chegaralarni aniqlashning optimal usulini kriteriy quvvati atamalarida aniqlashimiz kerak, ular berilgan muhimlik darajasi uchun kriteriyga maksimum quvvat beradigan boʻlsin.

Berilgan K uchun intervallarni shunday tanlash kerakki, hamma P_i nazariy ehtimollar $\frac{1}{k}$ ga teng boʻlsin. Bu aniq va bir qiymatli jarayondir. U odatdagi usuldan (teng uzunlikdagi intervallar) shunisi bilan farq qiladiki, P_i larning bir xil boʻlishi uchun jadvalardan foydalanishga toʻgʻri keladi. Buni aniq amalga oshirish uchun berilgan maʼlumotlar gruppalanmagan boʻlishi kerak.

$F_0(x)$ uzluksiz taqsimot funksiyasiga ega boʻlgan oddiy gipotezani (1) n hajmli tanlovda tekshirish uchun teng ehtimolli intervallar $\square^2$ kriteriy qoʻllanilsin. $F(n, k, \square)$ orqali $N_\square$:

$\sup_{-\infty < x < \infty} |F(x) - F_0(x)| \geq \Delta$ al ternativ sinfiga qarshi kriteriy quvvatining minimumini belgilaymiz. Berilgan n va $\square$ lar uchun $f(n, k, \square)$ funksiya k ning biror qiymatida maksimum qiymatga erishadi. Bunday k sonlar chizigʻi R ni intervalga boʻlishning optimal soni boʻladi. $\square(x)$ -taqsimot funksiyasi boʻlsin va $x_\square - \Phi(x_\square)q_{1-\square}$ tenglamaning yechimi boʻlsin. G. Mann va A. Val d teoremasi shuni taʼkidlaydiki, $n \square \square$ da

$$k = 4\sqrt[5]{2\left(\frac{n}{x_\alpha}\right)^{\frac{2}{5}}} \quad (6)$$

Shuni taʼkidlash kerakki, bu natija taqsimot funksiyalarining uzoqlashishi roʻy berganda eng noqulay al ternativlarga qarshi quvvatning maksimumi shartidan olingan. Agar faqat «tekis» al ternativlarni nazarda tutsak, optimal soni k ancha kichik boʻladi. Uil yams (1950) G. Mann va A. Val dning k optimal qiymatini kriteriy quvvatini sezilarli darajada oʻzgartirmay, ikki barobar

kamaytirib olish mumkinligini koʻrsatdi, yaʼni $kq[2\sqrt[5]{2\left(\frac{n}{x_\alpha}\right)^{\frac{2}{5}}}]$ bunda $[a]$ -a ning butun qismi.

Mustaqil oʻrganish uchun savollar

8-mavzu. Bogʻliqlikni statistik tekshirish (1-maʼruza mashgʻuloti)

Maʼruza rejası

1. Ikki tasodifiy miqdor orasidagi statistik bogʻlanish.
2. Ikki tasodifiy miqdor orasidagi korrelyatsion bogʻlanish.
3. Chiziqli regressiya tenglamasi.

Tayanch maʼruza

Agar bir miqdorning har bir qiymatiga ikkinchi miqdorning birorta qoida orqali faqat bitta qiymati mos kelsa bunday bogʻlanish funksional bogʻlanish deyiladi. Misol. Aylana uzunligi C

va uning radiusi R ni ikki miqdor desak, bu miqdorlar orasidagi funktsional bog'lanish quyidagicha yoziladi.

$$C = 2\pi R,$$

bunda aylana radiusi R ning har bir qiymatiga uni 2π ga ko'paytirish qoidasi yordamida aylana uzunligi C ning yagona qiymati mos keladi. Afsuski tabiatda uchraydigan hamma miqdorlar ham funktsional bog'langan bo'lmaydi. Agar bir miqdorning o'zgarishi ikkinchi miqdorning taqsimot qonunining o'zgarishiga olib kelsa, bunday bog'lanish statistik bog'lanish deyiladi.

Masalan. X deb, bir gektar yerda solinadigan mineral o'g'it miqdorini,

Y deb esa, shu yerdan olinadigan xosildorlik miqdorini belgilasak, u holda bu ikki miqdorning o'zaro bog'liqligi o'z-o'zidan tushunarli, lekin bu bog'liklikni funktsional munosabat bilan bog'lab bo'lmaydi. Bunday hollarda statistik bog'lanish qaraladi. Odatda, tasodifiy miqdor taqsimot qonuni noma'lum bo'ladi, shu sababli amalda statistik bog'lanish o'rniga korrelyatsion bog'lanish qaraladi.

Bir miqdorning o'zgarishi ikkinchi miqdor shartli o'rta qiymatining o'zgarishiga olib kelsa, bunday bog'lanish korrelyatsion bog'lanish deyiladi. Korrelyatsion jadval yordamida shartli o'rta qiymat tushunchasi quyidagicha kiritiladi: Y miqdorning $X = x_1$ qiymat qabul qilgandagi shartli o'rta qiymati deb, $\bar{Y}(X = x_1) = n_{11} \cdot y_1 + n_{12} \cdot y_2 + \dots + n_{1m} \cdot y_m$ ga aytiladi. Bu ta'rifdan ko'rinib turibdiki, tanlanma berilgan bo'lsa, uning shartli o'rta qiymatlarini hisoblash qiyin bo'lmaydi.

X miqdorning o'zgarishi natijasida Y miqdorning shartli o'rta qiymati ham o'zgaradi, ya'ni $\bar{Y}(X = x) = f(x)$ - bu tenglama Y miqdorning X miqdorga nisbatan regressiya tenglamasi deyiladi. Bu funktsiyaning grafigi regressiya chizig'i deyiladi.

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Funktsional bog'lanish deb nimaga aytiladi?
2. Statistik bog'lanish nima?
3. Korrelyatsion bog'lanishning ta'rifini ayting?
4. Korrelyatsion jadval deb nimaga aytiladi?
5. Shartli o'rta qiymat ta'rifini ayting.
6. Eng kichik kvadratlar usuli nimadan iborat.
7. Chiziqli regressiya tenglamasi deb nimaga aytiladi?

8-mavzu. Bog'liqlikni statistik tekshirish (2-ma'ruza mashg'uloti)

Ma'ruza rejasi

1. Chiziqli korrelyatsiya koeffitsienti va uning xossalari.
2. Parabolik regressiya tenglamasi.
3. Regressiya tenglamasi koeffitsientlarining qiymatliliigi.

Tayanch ma'ruza

Iqtisodiy jarayonlarni o'rganayotganda bir-biriga bog'liq bo'lgan ikki va undan ortiq faktorlarni qarashga to'g'ri keladi. Odatda bu faktorlar bir-biriga bog'liq bo'ladi. Agar Y ning X ga va X ning Y ga regressiya chiziqlarining ikkalasi ham to'g'ri chiziqlar bo'lsa, u holda korrelyatsiya **chiziqli korrelyatsiya** deyiladi.

Chiziqli regressiya tenglamasini kengroq ko'rib chiqaylik. $\bar{Y}(X = x) = a_0 + a_1x$, bu yerda a_0, a_1 - chiziqli funktsiya koeffitsientlari. Bu chiziqli funktsiya koeffitsientlari amalda noma'lum bo'lib, ular chiziqli regressiya grafigining tanlanma elementlariga eng yaqin joylashish shartidan,

ya'ni a_0, a_1 --parametrlarni $Q^2 = \sum (y_i - a_0 - a_1 x)^2$ -kvadratik formaning minimumga erishish shartidan topamiz. Bu usul Lejandr usuli yoki kichik kvadratlar usuli deyiladi.

$$\begin{cases} \frac{\partial Q^2}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^n 2(Y_i - a_0 - a_1 x_i)(-1) = 0 \\ \frac{\partial Q^2}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^n 2(Y_i - a_0 - a_1 x_i)(-x_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{Y} - a_0 - a_1 \bar{x} = 0 \\ \overline{XY} - a_0 \bar{x} - a_1 \bar{x}^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{x} \\ a_1 = \frac{\overline{XY} - \bar{Y} \bar{x}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} = \frac{\overline{XY} - \bar{Y} \bar{x}}{S_x^2} \end{cases}$$

Topilgan a_0, a_1 ning qiymatlarini chiziqli regressiya tenglamasiga qo'yamiz.

$$\bar{Y}(X) = \bar{Y} - a_1 \bar{x} + a_1 x \Rightarrow \bar{Y}(X) - \bar{Y} = a_1 (\bar{x} - x) \Rightarrow \bar{Y}(X) - \bar{Y} = \frac{\overline{XY} - \bar{Y} \bar{x}}{S_x^2} (\bar{x} - x)$$

. Quyidagi

$$r_b = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{S_x \cdot S_y}$$

belgilashni kiritamiz: - tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti.

$$\bar{Y}(X) - \bar{Y} = r_b \cdot \frac{S_y}{S_x} (x - \bar{x})$$

- barcha to'g'ri chiziqlar ichida berilgan tanlanmaga eng yaqin

joylashgan to'g'ri chiziq tenglamasidir. $\bar{Y}(X = x) = a_0 + a_1 x$, bu yerda a_0, a_1 - chiziqli funktsiya koeffitsientlari. Bu chiziqli funktsiya koeffitsientlari amalda noma'lum bo'lib, ular chiziqli

regressiya grafigining tanlanma elementlariga eng yaqin joylashish shartidan, ya'ni a_0, a_1 --

parametrlarni $Q^2 = \sum (y_i - a_0 - a_1 x)^2$ -kvadratik formaning minimumga erishish shartidan topamiz.

$$\bar{Y}(X) = \bar{Y} - a_1 \bar{x} + a_1 x \Rightarrow \bar{Y}(X) - \bar{Y} = a_1 (\bar{x} - x) \Rightarrow \bar{Y}(X) - \bar{Y} = \frac{\overline{XY} - \bar{Y} \bar{x}}{S_x^2} (\bar{x} - x)$$

. Quyidagi

$$r_b = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{S_x \cdot S_y}$$

belgilashni kiritamiz: - tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti.

$$\bar{Y}(X) - \bar{Y} = r_b \cdot \frac{S_y}{S_x} (x - \bar{x})$$

- barcha to'g'ri chiziqlar ichida berilgan tanlanmaga eng yaqin

joylashgan to'g'ri chiziq tenglamasidir.

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining xossalari:

- 1) Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti qiymatlari uchun $-1 \leq r_T \leq 1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.
- 2) Agar $r_T = 1$ bo'lsa, u holda $Y = aX + b$, $a > 0$, agar $r_T = -1$ bo'lsa, u holda $Y = aX + b$, $a < 0$ bo'ladi.
- 3) Agar $Y = aX + b$, $a > 0$ bo'lsa, u holda $r_T = 1$, agar $Y = aX + b$, $a < 0$ bo'lsa, $r_T = -1$ bo'ladi.

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Chiziqli regressiya tenglamasi qanday yoziladi?
2. Parabolik regressiya tenglamasini yozing.
3. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining xossalari.
4. Ikki tasodifiy miqdorning kovariatsiyasi nimaga teng?
5. Kovariatsiyaning xossalari nimalardan iborat?
6. Korrelyatsiya koeffitsienti qanday topiladi?
7. Korrelyatsiya koeffitsientining xossalarini ayting.

8. Korrelyatsiya koeffitsienti nol bo'lgan, ammo bog'liq tasodifiy miqdorlarga misol keltiring.

8-mavzu. Bog'liqlikni statistik tekshirish (3-ma'ruza mashg'uloti)

Ma'ruza rejası

1. Ko'p o'lchovli regressiya.
2. Korrelyatsion matritsa.
3. Regression tahlil.

Tayanch ma'ruza

Ko'p o'lchovli regressiya nazariyasida quyidagi model qaraladi

$$y = \bar{y}(x) + \varepsilon, \quad \bar{y}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i \quad (1)$$

bu yerda $\bar{y}(x) - x_1, x_2, \dots, x_n$ faktorlarga bog'liq bo'lgan o'zgaruvchi, ε esa $M\varepsilon = 0$, $D\varepsilon = \sigma^2$ bo'lgan tasodifiy miqdor. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ noma'lum regressiya koeffitsientlari $y_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{kj}$, $j = 1, \dots, n$, $n > k + 1$ tanlanma asosida baholanadi.

Ko'p o'lchovli regressiyani o'rganish xuddi bir o'lchovli regressiya kabi olib boriladi, ya'ni eng kichik kvadratlar usulidan foydalaniladi

$$Q^2 = \sum_{j=1}^n (y_j - a_0 - \sum_{i=1}^k a_i x_{ji})^2 \rightarrow \min$$

Avval kritik nuqtalarni topamiz

$$\frac{\partial Q^2}{\partial a_0} = -2 \sum_{j=1}^n (y_j - a_0 - \sum_{i=1}^k a_i x_{ji}) = 0, \quad \frac{\partial Q^2}{\partial a_\ell} = -2 \sum_{j=1}^n (y_j - a_0 - \sum_{i=1}^k a_i x_{ji}) x_{j\ell} = 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, k$$

Shunday qilib, regressiyaning $k + 1$ ta parametri baholarini topish uchun $k + 1$ normal tenglama tuzildi

$$n \tilde{a}_0 + \sum_{i=1}^k (\sum_{j=1}^n x_{ji}) \tilde{a}_i = \sum_{j=1}^n y_j, \quad (\sum_{j=1}^n x_{ji}) \tilde{a}_0 + \sum_{i=1}^k (\sum_{j=1}^n x_{ji} x_{j\ell}) \tilde{a}_i = \sum_{j=1}^n y_j x_{j\ell}, \quad \ell = 1, 2, \dots, k$$

Agar $\tilde{a}_0$ ni birinchi tenglamadan topib qolgan tenglamalarga quysak, k ta parametrlar uchun quyidagi k ta tenglamalardan iborat sistemaga kelamiz

$$\sum_{i=1}^k (\sum_{j=1}^n (x_{ji} - \bar{x}_i)(x_{j\ell} - \bar{x}_\ell)) \tilde{a}_i = \sum_{j=1}^n y_j (x_{j\ell} - \bar{x}_\ell), \quad \ell = 1, 2, \dots, k$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib, $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_k$ larni topamiz va $\bar{y}(x) = \tilde{a}_0 + \sum_{i=1}^k \tilde{a}_i x_i$ ni hosil qilamiz. Topilgan $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_k$ baholar $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ regressiya koeffitsientlari uchun siljimagan va asosli baholar bo'ladi. Modelning sifati Fisher kriteriysi orqali tekshiriladi.

Agar

$$F = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 / k}{\sum_{j=1}^n (y_j - y_j)^2 / (n - k - 1)} \leq F_p(k, n - k - 1)$$

bo'lsa u holda (1) tenglama qiymatli, aks holda qiymatsiz bo'ladi. Bu yerda $F_p(k, n-k-1)$ erkinlik darajalari $k, n-k-1$ bo'lgan va qiymatlilik darajasi P ga mos keluvchi Fisher taqsimotining kritik qiymatidir.

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Ko'p o'lchovli regressiya nazariyasida qanday model qaraladi ?
2. Ko'p o'lchovli regressiya qanday o'rganiladi?
3. Normal tenglama qanday tuziladi?
4. Kritik nuqtalar qanday hisoblanadi?
5. Modelning sifati qanday tekshiriladi?

8-mavzu. Bog'liqlikni statistik tekshirish (4-ma'ruza mashg'uloti)

Ma'ruza rejasi

1. Dispersion tahlil haqida tushuncha.
2. Bir faktorli dispersion taxlil.
3. Ikki faktorli dispersion taxlil.

Tayanch ma'ruza

Normal taqsimlangan X miqdoriy belgiga F faktor ta'sir ko'rsatayotgan bo'lib, u P ta $F_1, F_2, \dots, F_p$ darajalarga ega bo'lsin. Har bir darajada q tadan sinov o'tkazilgan. Kuzatish natijalari bo'lgan x_{ij} sonlar 1-jadval ko'rinishida berilgan bo'lsin. Bu yerda $i (i=1, 2, \dots, q)$ sinov nomeri, $j (j=1, 2, \dots, p)$ faktor darajasi nomeri.

Sinov nomeri	Faktor darajalari			
i	F_1	F_2	$\dots$	F_p
1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
q	x_{q1}	x_{q2}	$\dots$	x_{qp}
$\bar{x}_{epj}$	$\bar{x}_{ep1}$	$\bar{x}_{ep2}$	$\dots$	$\bar{x}_{ep_p}$

Masala bunday qo'yiladi: gruppaviy bosh dispersiyalar noma'lum bo'lsada, lekin ular bir xil degan farazda gruppaviy o'rtacha qiymatlarning tengligi haqidagi nolinch gipotezani α qiymatlilik darajasida tekshirish talab qilinadi.

Bu masalani yechish uchun quyidagi kattaliklar kiritiladi: belgining kuzatilayotgan qiymatlarining umumiy o'rtacha qiymatdan chetlanishlari kvadratlarining umumiy yig'indisi:

$$S_{y.m.y.m} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q (x_{ij} - \bar{x})^2;$$

Gruppaviy o'rtacha qiymatlarning umumiy o'rtacha qiymatdan chetlanishlari kvadratlarining faktor yig'indisi ("gruppalar orasidagi" tarqoqlikni xarakterlaydi):

$$S_{\phi a \kappa m} = q \sum_{j=1}^p (x_{epj} - \bar{x})^2;$$

Gruppada kuzatilayotgan qiymatlarning o'z gruppaviy o'rtacha qiymatidan chetlanilari kvadratlarining qoldiq yig'indisi ("gruppalar orasidagi" tarqoqlikni xarakterlaydi):

$$S_{\kappa o \lambda \delta} = \sum_{i=1}^q (x_{i1} - \bar{x}_{ep1})^2 + \sum_{i=1}^q (x_{i2} - \bar{x}_{ep2})^2 + \dots + \sum_{i=1}^q (x_{ip} - \bar{x}_{ep_p})^2.$$

Qoldiq yig'indini amalda ushbu formula bo'yicha topamiz: $S_{\kappa o \lambda \delta} = S_{y m y m} - S_{\phi a \kappa m}$.

Umumiy yig'indini hisoblash uchun ushbu

$$S_{y m y m} = \sum_{j=1}^p P_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^p P_j \right]^2}{pq},$$

formula qulayroq.

Faktor yig'indilarini hisoblash uchun esa quyidagi formula qulayroq:

$$S_{\phi a \kappa m} = \frac{\sum_{j=1}^p R_j^2}{q} - \frac{\left[\sum_{j=1}^p R_j \right]^2}{pq}.$$

bu yerda $P_j = \sum_{i=1}^q x_{ij}^2$ belgining F_j darajada kuzatilgan qiymatlarining kvadratlari yig'indisi,

$R_j = \sum_{i=1}^q x_{ij}$ esa belgining F_j darajada kuzatilgan qiymatlari yig'indisi.

Agar belgining kuzatilgan qiymatlarinisbatan katta sonlar bo'lsa, u holda hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida har bir kuzatilgan qiymatdan taxminan umumiy o'rtacha qiymatga teng bo'lgan bir xil C son ayiriladi. Agar kamaytirilgan qiymatlar $y_{ij} = x_{ij} - C$ bo'lsa, u holda

$$S_{y m y m} = \sum_{j=1}^p Q_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^p T_j \right]^2}{pq}, \quad S_{\phi a \kappa m} = \frac{\sum_{j=1}^p T_j^2}{q} - \frac{\left[\sum_{j=1}^p T_j \right]^2}{pq},$$

bu yerda $Q_j = \sum_{i=1}^q y_{ij}^2$ belgining F_j darajadagi kamaytirilgan qiymatlarining kvadratlari

$T_j = \sum_{i=1}^q y_{ij}$ esa belgining F_j darajadagi kamaytirilgan qiymatlari yig'indisi.

Hisoblab topilgan faktor va yig'indilarni tegishli ozodlik darajalarisonga bo'lib, faktor va qoldiq dispersiyalar topiladi:

$$S_{\phi a \kappa m}^2 = \frac{S_{\phi a \kappa m}}{p-1}, \quad S_{\kappa o \lambda \delta}^2 = \frac{S_{\kappa o \lambda \delta}}{p(q-1)}.$$

Faktor va qoldiq dispersiyalarni Fisher-Snedekor kriteriysi yordamida taqqoslaymiz.

Buning uchun avval kriteriyning kuzatilgan qiymatini topamiz:

$$F_{\kappa y z a m} = \frac{S_{\phi a \kappa m}^2}{S_{\kappa o \lambda \delta}^2}.$$

Suratning ozodlik darajalari soni $k_1 = (p-1)$, mahrajniki ozodlik darajalari soni esa $k_2 = p(q-1)$ va qiymatlilik darajasi α ekanligini hisobga olib, jadvaldan $F_{\kappa p}$ kritik nuqtani topamiz.

Agar $F_{\kappa y z a m} < F_{\kappa p}$ bo'lsa, gruppaviy o'rtacha qiymatlarning farqi muhim emas.

Agar $F_{\kappa y z a m} > F_{\kappa p}$ bo'lsa, gruppaviy o'rtacha qiymatlarning farqi muhim.

1-eslatma. Agar faktor dispersiyasi qoldiq dispersiyadan kichik bo'lib chiqsa, u holda shuning o'zidan gruppaviy o'rtacha qiymatlarning tengligi haqidagi nolinci gipotezaning o'rinli

ekanligi bevosita kelib chiqadi, shu sababli keyingi hisoblashlar, ya'ni dispersiyalarni F kriteriy yordamida taqqoslash ortiqcha.

2-eslatma. Agar x_{ij} kuzatilgan qiymatlar verguldan keyin n xonali o'nli kasrlar bo'lsa, u holda $y_{ij} = 10^m x_{ij} - C$ butun sonlarga o'tgan ma'qul, bu yerda C -ushbu $10^m x_{ij}$ sonlarning taxminan o'rtacha qiymati. Bunda faktorlar va qoldiq dispersiyalarning har biri 10^m marta ortadi, lekin ularning nisbati o'zgarmasdan qoladi.

Agar sinovlar soni F_1 darajada q_1 ga, F_2 darajada q_2 ga, ..., F_p darajada q_p ga teng bo'lsa, u holda chetlanishlar kvadratlarining umumiy sinovlar soni barcha darajalarda bir xil bo'lgan holdagi kabi hisoblanadi. Chetlanishlar kvadratlarining faktor yig'indisi ushbu formula orqali topiladi:

$$S_{\phi a \kappa m} = \frac{T_1^2}{q_1} + \frac{T_2^2}{q_2} + \dots + \frac{T_p^2}{q_p} - \frac{\left[\sum_{j=1}^p T_j \right]^2}{n},$$

bu yerda $n = q_1 + q_2 + \dots + q_p$ sinovlar jami soni.

Qolgan hisoblashlar sinovlar bir xil bo'lgan holdagi kabi olib boriladi: $S_{\kappa o \lambda \delta} = S_{y m y m} - S_{\phi a \kappa m}$.

$$S_{\phi a \kappa m}^2 = \frac{S_{\phi a \kappa m}}{p-1}, S_{\kappa o \lambda \delta}^2 = \frac{S_{\kappa o \lambda \delta}}{n-p}.$$

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Bir faktorli dispersion tahlil deb nimaga aytiladi?
2. Ikki faktorli dispersion tahlil deb nimaga aytiladi?
3. Gruppaviy dispersiya deb nimaga aytiladi?
4. Gruppalararo dispersiya deb nimaga aytiladi?
5. Dispersion tahlil uchun asosiy munosabat nimadan iborat?

8-mavzu. Bog'liqlikni statistik tekshirish (5-ma'ruza mashg'uloti)

Ma'ruza rejasi

1. Vaqtga bog'liq katorlar.
2. Chiziqli trend.
3. Eksponentsial silliklash.

Tayanch ma'ruza

Vaqtga bog'liq qator- sonli ketma- ketlik bo'lib, uning elementlari vaqtga bog'liq jarayonning qiymatlaridan iborat. Ular vaqtning ketma- ket, ko'p hollarda teng oraliqdan iborat qiymatlarida o'lchangan. Odatda, vaqtga bog'liq qatorni tashkil etuvchi sonlar vaqtga bog'liq qatorning elementlari, vaqtning nomeriga mos holda belgilanadi. (misol uchun, $x_1, x_2, x_3, \dots$ va hokazolar) Shunday qilib, vaqtga bog'liq qatorlarda elementlarning berilish tartibi juda muhim. Iqtisodiyotda vaqtga bog'liq qatorlarga misol tariqasida qimmatli qog'ozlarning har kungi bahosi, valyuta kursi, haftalik va oylik savdo miqdorlari, yillik ishlab chiqarish hajmi va boshqalarni ko'rish mumkin.

Vaqtga bog'liq qatorning komponentasi

Iqtisodiyotga tadbiqida vaqtga bog'liq qatorning komponentasini quyidagi uchta tashkil etuvchidan iborat deb qarash mumkin:

trend tr_t	mavsumiy komponenta S_t	tsiklik komponenta C_t
Doimo ta'sir etuvchi faktorlarni silliq o'zgarishini ifodalovchi		

komponenta trend deb ataladi. Iqtisodiyotda bunday faktorlarga misol qilib quyidagilarni olish mumkin: ☐ populyatsiyaning demografik xarakteristika-larining o'zgarishi, yosh bo'yicha tarkibning o'zgarishi, mintaqaviy joylashishning o'zgarishi; ☐ texnologik va iqtisodiy rivojlantirish; ☐ iste'molning o'sishi va uning tarkibiy o'zgarishi.		
--	--	--

Additiv model. Bayon qilish soddaroq bo'lishi uchun biz faqat additiv modelni qaraymiz:

$$dt = tr_t + s_t + c_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (1)$$

Iqtisodiyotda ko'p ishlatiladigan trend modellari turlari

eng oddiy -chiziqli model $tr_tqb_0Qb_1t$ (2)

polinomial: $tr_tqb_0Qb_1t^2Qb_2t^3Qb_3t^4Qb_4t^5$ odatda polinomial dara-jasi $n \leq 5$.

ko'rsatkichli: $tr_tqexp(b_0Qb_1t)$. Bu model ko'p hollarda doimo o'sish xusu-siyatiga ega bo'lgan masalalarda ishlatiladi.

logistik: $tr_tqaG'1Qbe^{-st}$

Gomperts: $\log(tr_t)qaQbr^t, 0 < r < 1$

Tajribalar shuni ko'rsatadiki, odatda iqtisodiy jarayonlarni o'zgarmas komponenta bilan ifodalash mumkin.

T to'plamda aniqlangan, t ning funktsiyasi bo'lib, har bir $t_0 \in T$ da $X(t_0)$ tasodifiy miqdor

bo'lsa, $X(t)$ tasodifiy jarayon deb ataladi. Tasodifiy jarayonlar o'zlarining chekli o'lchovli taqsimotlari bilan to'raligicha aniqlanadi. Tasodifiy jarayonlarning sonli xarakteristikalarini xuddi tasodifiy miqdorlarniki kabi aniqlanadi.

Tasodifiy jarayonlarning sonli xarakteristikalarini

Matematik kutilish $m(t)qMX(t)$

$X(t)$ tasodifiy jarayonining kovariatsion funktsiyasi

$V(s,t)cov(X(t),X(s))qM[(X(t)-m(t))(X(s)-m(s))]$

Dispersiya $DX(t)qcov(X(t),X(t))$ Standart chetlanishi $\sigma(t)q\sqrt{cov(X(t),X(t))}$

Korrelyatsion funktsiya $cor(X(t),X(s))qcov(X(t),X(s))G'\sigma(t)\sigma(s)$

Mustaqil o'rganish uchun savollar

1. Vaqtga bog'liq qator deganda nimani tushunasiz?
2. Trend deb nimaga aytiladi?
3. Additiv model deb nimaga aytiladi?
4. Iqtisodiyotda ko'p ishlatiladigan trend modellarining qanday turlarini bilasiz?
5. Tasodifiy jarayon deganda nimani tushunasiz?
6. Tasodifiy jarayonlarning sonli xarakteristikalarini ayting.