O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
QARSHI MUHANDISLIK-IQTISODIYOT INSTITUTI

"OLIY MATEMATIKA" KAFEDRASI

Mavzu: **Ikkinchi tartibli egri chiziqlar: Aylana, ellips, giperbola, parabola.**

REFERAT

Bajardi: **"TJA-173" guruh talabasi Rahmatov Shohjohon**
Qabul qildi: **Eshonqulov Javohir**

Qarshi 2015

MAVZU: Ikkinchi tartibli egri chiziqlar: Aylana, ellips, giperbola, parabola.

REJA:

1. Aylananing ba’zi koordinatalar sistemasidagi tenglamalari.

2. Ellipsning ba’zi koordinatalar sistemasidagi tenglamalari.

3. Giperbolaning ba’zi koordinatalar sistemasidagi tenglamalari.

4. Parabolaning ba’zi koordinatalar sistemasidagi tenglamalari.

Mavzu: Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

1.Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha

1-ta‘rif. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1) ko’rinishdagi tenglama **ikkinchi darajali algebraik tenglama** deb ataladi.

Bu yerdagi *A, B, C, D, E, F* ma‘lum sonlar bo’lib ulardan *A, B, C* bir vaqtda nolga teng emas. Aks holda, ya‘ni $A=B=C=0$ bo’lganda (1) tenglama

$$Dx+Ey+F=0$$

ko’rinishdagi chiziqli (birinchi darajali) tenglamaga aylanadi va bu to’g’ri chiziq tenglamasi ekanligini bilamiz.

2-ta‘rif. Dekart koordinatalari *x* va *y* гa nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama yordamida aniqlanadigan egri chiziqlar **ikkinchi tartibli egri chiziqlar** deb ataladi. (1) ikkinchi tartibli egri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarga **aylana,ellips, giperbola** va **parabolalar** kiradi.

2. Aylana va uning kanonik tenglamasi

3-ta‘rif. Tekislikning berilgan nuqtasidan bir xil masofada joylashgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o’rniga **aylana** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtasini aylananing **markazi**, undan aylanagacha masofani **aylananing radiusi** deb ataymiz.

Markazi 0_1 $(a;b)$ nuqtada bo’lib radiusi R ga teng aylananing tenglamasini tuzamiz (1^a-chizma). Aylananing ixtiyoriy nuqtasini $M(x;y)$ desak aylananing ta‘rifiga binoan:

$$MC_1=R..$$

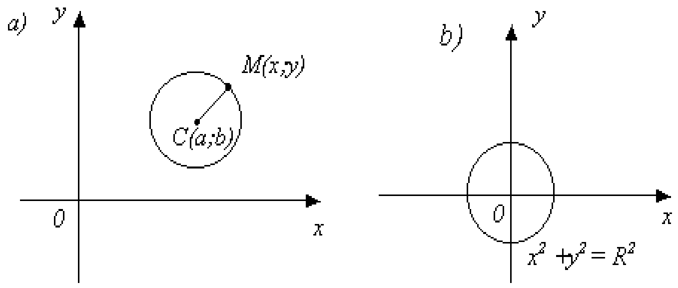
Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalansak

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$$

yoki bu tenglikni har ikkala tomonini kvadratga ko’tarsak

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (2)$$

Kelib chiqadi. Shunday qilib aylananing istalgan $M(x;y)$ nuqtasining kooordinatalari (2) tenglamani qanoatlantirar ekan. Shuningdek aylanaga tegishli bo’lmagan hech bir nuqtaning koordinatalari (2) tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (2) aylana tenglamasi.



1-rasm

U aylananing **kanonik** (eng sodda) tenglamasi deb ataladi.

Xususiy holda aylananing markazi $C_1(a,b)$ koordinatalar boshida bo'lsa $a=b=0$ bo'lib uning tenglamasi

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (3)$$

ko'rinishga ega bo'ladi (1^b-chizma).

Endi aylananing kanonik tenglamasini ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (1) bilan taqqoslaymiz. (2) da qavslarni ochib ma'lum almashtirishlarni bajarsak u

$$x^2+y^2-2ax-2ay+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Buni (1) bilan taqqoslab unda x^2 bilan y^2 oldidagi koeffitsientlarni tengligini va koordinatalarni ko'paytmasi xy ni yo'qligini ko'ramiz, ya'ni $A=C$ va $B=0$.

(1) tenglamada $A=C$ va $B=0$ bo'lsa u aylanani tenglamasi bo'ladimi degan savolga javob izlaymiz.

Soddalik uchun $A=C=1$ deb olamiz. Aks holda tenglamani A ga bo'lib shuncha erishish mumkin.

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (5)$$

tenglamaga ega bo'laylik. Bu tenglamani hadlarini o'zimizga qulay shaklda o'rinlarini almashtirib to'la kvadrat uchun zarur bo'lgan $\frac{D^2}{4}$ va $\frac{E^2}{4}$ ni ham qo'shamiz ham ayirimiz. U holda

$$x^2+Dx+\frac{D^2}{4}+y^2+Ey+\frac{E^2}{4}-\frac{D^2}{4}-\frac{E^2}{4}+F=0$$

yoki

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F \quad (9.6)$$

hosil bo'ladi. Mumkin bo'lgan uch holni qaraymiz:

1) $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F>0$ (yoki $D^2+E^2>4F$). Bu holda (6) tenglamani (2) bilan taqqoslab u va unga teng kuchli (5) tenglama ham markazi $0_1\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$ nuqtada, radiusi $R=\sqrt{\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F}$ bo'lgan aylanani ifodalashiga ishonch hosil qilamiz.

2) $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F=0$. Bu holda (6) tenglama

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglamani yagona $0_1\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi xolos.

3) $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F<0$. Bu holda (6) tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamaydi. Chunki tenglamaning o'ng tomoni manfiy, chap tomoni esa manfiy emas.

Xulosa. (1) tenglama $A=C$, $B=0$, $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F>0$ bo'lgandagina aylanani tenglamasini ifodalar ekan.

1-misol. $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ tenglama aylananing tenglamasi ekanligi ko'rsatilsin va aylananing markazi hamda radiusi topilsin.

Yechish. $A=C=1$, $B=0$, $\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2-F=1^2+2^2-(-4)=9>0$, demak berilgan tenglama aylanani umumiy tenglamasi ekan. Tenglamani

$$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)-1-4-4=0$$

ko'rinishda yozib undan

$$(x+1)^2+(y-2)^2=3^2$$

aylananing kanonik tenglamasiga ega bo'lamiz.

Shunday qilib aylananing markazi $0_1(-1;2)$ nuqta va radiusi R=3 ekan.

2-misol. $x^2-2x+y^2+2y+4=0$ tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamasligi ko'rsatilsin.

Yechish. Tenglamani $(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)-1-1+4=0$ ko'rinishda yozsak undan $(x-1)^2+(y+1)^2=-2$ tenglikka ega bo'lamiz. Koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiruvchi nuqta mavjud emas. Demak berilgan tenglama hech qanday egri chiziqni tenglamasi emas.

3. Ellips va uning kanonik tenglamasi

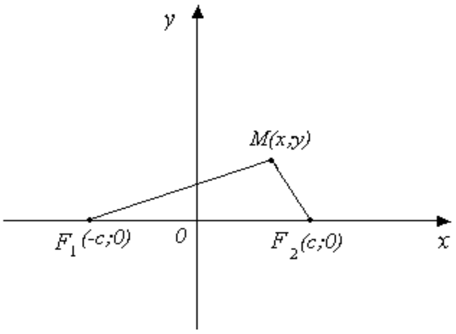
4-ta'rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **ellips** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni ellipsning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va ellipsning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning yig'indisini $2a$ orqali belgilaymiz. $0xy$ dekart koordinatalar sistemasini $0x$ o'qini ellipsning fokuslari F_1 va F_2 orqali o'tkazib F_1 dan F_2 tomonga yo'naltiramiz, koordinatalar boshini esa F_1F_2 kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz. U holda fokuslar $F_1(-c;0)$, $F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo'ladi (2-rasm).

Endi shu ellipsning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra M nuqtadan ellipsning fokuslari F_1 va F_2 gacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas son $2a$ ga teng, ya'ni

$$MF_1+MF_2=2a.$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko'ra



2-rasm

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

bo'lgani uchun

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad \text{yoki} \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

kelib chiqadi. Oxirgi tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlaymiz:

$$(x+c)^2+y^2=(2a)^2-2\cdot 2a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2;$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2;$$
$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2};cx=a^2-a\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$
$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Buni yana ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]; \quad a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2\left[x^2-2cx+c^2+y^2\right];$$
$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2; \quad a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2;$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (7)$$

hosil bo'ladi.

Uchburchak ikki tomonining yig'indisi uchinchi tomonidan katta ekanini nazarda tutsak ΔF_1MF_2 dan (2-rasm) $MF_1+MF_2>F_1F_2$; $2a>2c$; $a>c$; $a^2-c^2>0$ ($a>0$, $c>0$) bo'ladi.

$a^2-c^2=b^2$ deb belgilab uni (7) ga qo'yamiz. U holda

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

yoki buni a^2b^2 ga bo'lsak

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (8)$$

kelib chiqadi. Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini koordinatalari (8) tenglamani qanoatlantiradi. Aksincha ellipsga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtani koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (8) ellipsning tenglamasi. U ellipsning **kanonik tenglamasi** deb ataladi. Koordinatalar boshi **ellipsning markazi** deyiladi. Koordinata o'qlari esa ellipsning **simmetriya o'qlari** bo'lib xizmat qiladi. Ellipsning fokuslari joylashgan o'q uning **fokal o'qi** deyiladi. Ellipsning simmetriya o'qlari bilan kesishish nuqtalari uni **uchlari** deyiladi. $A_1(-a;0)$, $A(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B(0,b)$ nuqtalar ellipsning uchlari.

a va b sonlar mos ravishda ellipsning **katta** va **kichik yarim o'qlari** deyiladi. $\frac{c}{a}$ nisbat ellipsning **ekssentrisiteti** deyiladi va ε orqali belgilanadi. Ellips uchun $0<\varepsilon<1$ bo'ladi, chunki $c<a$. Ekssentrisitet ellipsning shaklini izohlaydi.

Haqiqatan, a^2-c^2=b^2 tenglikni a^2 ga bo'lsak $1-\left(\frac{c}{a}\right)^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2$ yoki $\left(\frac{b}{a}\right)^2=1-\varepsilon^2$ bo'ladi. Bundan ekssentrisitet qanchalik kichik bo'lsa ellipsning kichik yarim o'qi uning katta yarim o'qidan shunchalik kam farq qilishini ko'ramiz.

$b=a$ bo'lganda ellips tenglamasi $x^2+y^2=a^2$ ko'rinishiga ega bo'lib ellips aylanaga aylanadi. Bu holda $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-a^2}=0$, bo'lgani uchun $\varepsilon=\frac{0}{a}=0$ bo'ladi.

Demak aylana ekssentrisiteti nolga teng va fokuslari uning markaziga joylashgan ellips ekan.

Endi ellipsni shaklini aniqlaymiz. Uning shaklini avval I–chorakda aniqlaymiz. Ellipsning kanonik tenglamasi (8)ni y ga nisbatan yechsak

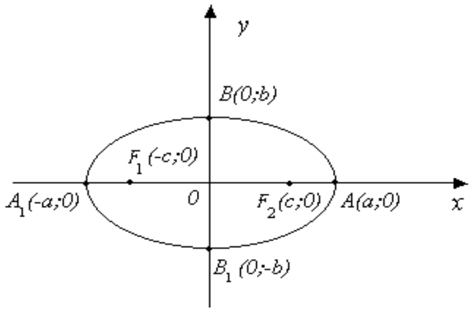
$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2};\ y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);\ y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2);\ y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

bo'ladi, bunda $0<x<a$, chunki $x>a$ bo'lganda ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lib u ma'noga ega bo'lmaydi. x 0 dan a gacha o'sganda y b dan 0 gacha kamayadi.

Ellipsning I–chorakdagi bo'lagi koordinatalar o'qlarida joylashgan $B(0,b)$ va $A(a;0)$ nuqtalar bilan chegaralangan yoydan iborat bo'ladi (3-rasm).

Ellipsning kanonik tenglamasida x ni $-x$ ga va y ni $-y$ ga o'zgartirilsa tenglama o'zgarmaydi.

Bu ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi. Ellipsning ana shu xususiyatiga asoslanib uning shakli 3-rasm ko'rsatilgandek ekanligiga iqror bo'lamiz.



3-rasm

3-misol. Kichik yarim o’qi b=4 va ekssentrisiteti ε=0,6 bo’lgan ellipsning kanonik tenglamasi yezilsin.

Yechish. Shartga ko’ra $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0{,}6;\ c = 0{,}6a,\ a^2 - c^2 = b^2$

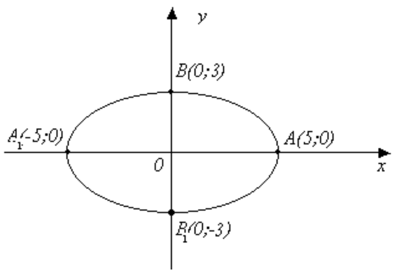
tenglikka c va b ning qiymatlarini qo’yib a ni aniqlaymiz.

$$a^2 - (0{,}6a)^2 = 4^2; a^2(1-0{,}36) = 16;\ \ 0{,}64a^2 = 16; a^2 = \frac{16}{0{,}64} = 25.$$

Shunday qilib ellipsning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ko’rinishda bo’lar ekan.

4-misol. $9x^2+25y^2-225=0$ tenglamaga ko’ra ikkinchi tartibli egri chiziqning turi aniqlansin va egri chiziq chizilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani $9x^2+25y^2=225$ ko’rinishda yozib buni 225 ga bo’lsak $\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1$ yoki $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ kelib chiqadi. Demak berilgan tenglama yarim o’qlari a=5, b=3 bo’lgan ellipsni tenglamasi ekan (4-rasm)



4-rasm

5-misol. $4x^2 - 16x + 9y^2 - 54y + 61 = 0$ egri chiziq chizilsin.

Yechish. Tenglamani $4(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) + 61 = 0;$

$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) - 16 - 81 + 61 = 0;\ \ 4(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 36$

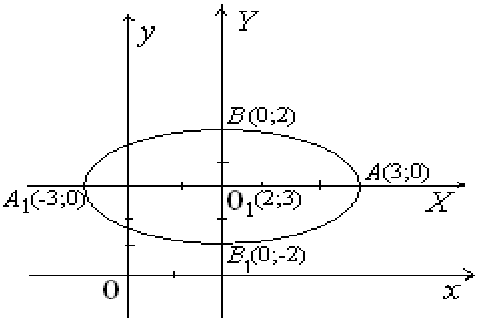
ko’rinishda yozib buni 36 ga bo’lsak $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ yoki

$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$ tenglama hosil bo’ladi. x-2=X; y-3=Y almashtirish olsak

$\frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1$ kelib chiqadi.

Bu ellipsning 0_1XY sistemaga nisbatan kanonik tenglamasi.

Shunday qilib berilgan tenglama ellipsning umumiy tenglamasi ekan. Agar $0xy$ “eski” sistemani $0_1(2{,}3)$ nuqtaga parallel kuchirilsa ya‘ni 0_1XY sistemaga nisbatan ellipsning tenglamasi kanonik ko’rinishga ega bo’lar ekan (5-rasm)



5-rasm

4.Giperbola va uning kanonik tenglamasi

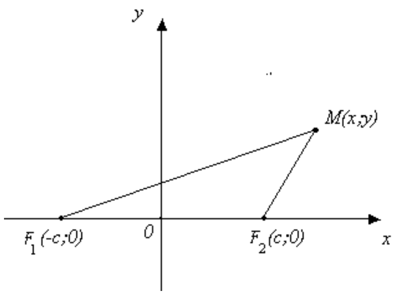
5-ta‘rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning ayirmasi o’zgarmas bo’lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o’rniga **giperbola** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni gepirbolaning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va giperbolaning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo’lgan masofalarning ayirmasini $\pm 2a$ orqali belgilaymiz. $0xy$ dekart koordinatalar sistemasini xuddi ellipsdagidek, ya‘ni $0x$ o’qni F_1, F_2 fokuslaridan o’tadigan qilib tanlaymiz va koordinatalar boshini F_1F_2 kesmaning o’rtasiga joylashtiramiz.

U holda fokuslar $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo’ladi (6-rasm).

Endi giperbolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin.

Ta‘rifga binoan giperbolaning M nuqtasidan uning fokuslari F_1 va F_2 gacha masofalarning ayirmasi o’zgarmas son $\pm 2a$ ga teng, ya‘ni



6-rasm

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a .$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga binoan $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ va $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ bo’lgani uchun

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \quad (9)$$

kelib chiqadi.

Ellips tenglamasini chiqarishda bajarilgan amallarga o'xshash amallarni bajarib $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ (10)

tenglamaga ega bo'lamiz. Ma'lumki uchburchakning ikki tomonini ayirmasi uchinchi tomonidan kichik. Shunga ko'ra ΔF_1MF_2 дан

F_1M-F_2M<F_1F_2; $2a<2c$; $a<c$; $a^2-c^2<0$ ($a>0,c>0$) hosil bo'ladi. Shuning uchun $a^2-c^2=-b^2$ yoки $c^2-a^2=b^2$ deb belgilab olamiz. U holda (10) formula

$$-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2 \quad \text{yoki} \quad b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Buni a^2b^2 ga bo'lib

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (11)$$

tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib giperbolaning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini koordinatalari (11) tenglamani qanoatlatirar ekan. Shuningdek giperbolaga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak u giperbolaning tenglamasi.

(11) giperbolaning **kanonik** tenglamasi deb ataladi. Giperbolaning tenglamasida x va y juft darajalari bilan ishtirok etadi. Bu giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi.

Ya'ni qaralayotgan holda koordinata o'qlari giperbolaning simmetriya o'qlari ham bo'ladi.

Gepirbolaning simmetriya o'qlarini kesishish nuqtasi **giperbolaning markazi** deb ataladi.

Giperbolaning fokuslari joylashgan simmetriya o'qi uning **fokal o'qi** deb ataladi.

Endi giperbolaning shaklini chizishga harakat qilamiz. Oldin uning shaklini I–chorakda chizamiz.

Giperbolaning kanonik tenglamasi (11) dan

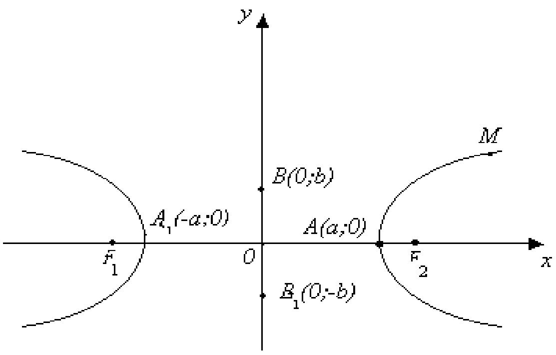
$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1; \quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2-a^2}{a^2}; \quad y^2=\frac{b^2(x^2-a^2)}{a^2}; \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

kelib chiqadi, chunki I–chorakda $y \geq 0$. Bunda $x \geq a$, aks holda u ma'noga ega bo'lmaydi (ildiz ostida manfiy son bo'ladi). x α dan $+\infty$ gacha o'zgarganda y 0 dan $+\infty$ gacha o'zgaradi. Demak giperbolaning I–chorakdagi qismi 7-rasm tasvirlangan *AM* yoydan iborat bo'ladi.

Giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligini hisobga olsak uning shakli 7-rasmda tasvirlangan egri chiziqdan iborat bo'ladi.

Giperbolaning fokal o'q bilan kesishish nuqtalari uning **uchlari** deb ataladi. Giperbolaning tenglamasiga y=0 ni qo'ysak $x=\pm a$ kelib chiqadi. Demak $A_1(-a;0)$ va $A(a;0)$ nuqtalar giperbolaning uchlari bo'ladi.

Giperbolaning tenglamasi (11) ga x=0 ni qo'ysak $-\frac{y^2}{b^2}=1;\ y=\pm\sqrt{-b^2}$ bo'ladi.



7-rasm

Bu esa haqiqiy son emas (manfiy sondan kvadrat ildiz chiqmaydi). Demak giperbola 0y o'q bilan kesishmas ekan.

Shuning uchun giperbolaning fokal o'qi **haqiqiy o'qi** unga perpendikulyar o'qi **mavhum o'qi** deb ataladi.

a va *b* sonlar mos ravishda giperbolaning **haqiqiy** va **mavhum yarim o'qlari** deyiladi.

Giperbolaning *M* nuqtasi u bo'ylab cheksiz uzoqlashganda shu nuqtadan $y=-\frac{b}{a}x$ va $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlarning birortasigacha masofa nolga intilishini ko'rsatish mumkin. Ya'ni giperbolaning koordinatalar boshidan yetarlicha katta masofada joylashgan nuqtalari $y=-\frac{b}{a}x$ va $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlardan biriga yetarlicha yaqin joylashadi. Koordinatalar boshidan o'tuvchi bu to'g'ri chiziqlar **giperbolaning asimptotalari** deb ataladi.

Giperbolani chizishdan oldin uning asimptotalarini chizish tavsiya etiladi.

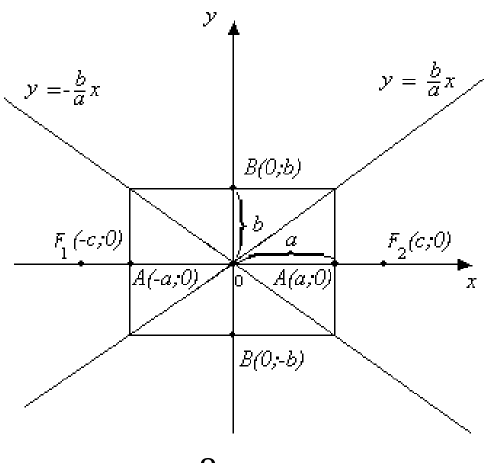
Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari *0x* va *0y* o'qlarga parallel va mos ravishda 2a va 2b ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli to'rtburchak yasaymiz. Bu to'rtburchakni giperbolaning **asosiy to'rtburchagi** deb ataymiz.

To'rtburchakni diagonallarini har tarafga cheksiz davom ettirsak giperbolaning asimptotalari hosil bo'ladi(8-rasm).

$\frac{c}{a}$ nisbat giperbolaning **ekssentrisiteti** deb ataladi va ε orqali belgilanadi. Giperbola uchun $c>a$ bo'lganligi sababli $\varepsilon>1$ bo'ladi.

Ekssentrisitet giperbolaning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatdan, $c^2-a^2=b^2$ tenglamani har ikkala tomonini a^2 ga bo'lsak $\left(\frac{c}{a}\right)^2-1=\left(\frac{b}{a}\right)^2$ yoki $\varepsilon^2-1=\left(\frac{b}{a}\right)^2$ kelib chiqadi. ε kichrayganda $\frac{b}{a}$ nisbat ham kichrayadi. Ammo $\frac{b}{a}$ nisbat giperbolaning asosiy to'rtburchagini shaklini belgilaganligi uchun u giperbolaning ham shaklini belgilaydi. ε qanchalik kichik bo'lsa $\frac{b}{a}$ nisbat ham ya'ni giperbolaning asimptotalarini burchak koeffitsientlari ham shunchali kichik bo'ladi va giperbola 0x o'qqa yaqinroq joylashadi.

Bu holda giperbolani asosiy to'rtburchagi 0x o'q bo'ylab cho'zilgan bo'ladi.



8-rasm

Haqiqiy va mavhum yarim o'qlari teng giperbola **teng tomonli** yoki **teng yonli** deb ataladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \text{yoki} \quad x^2-y^2=a^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

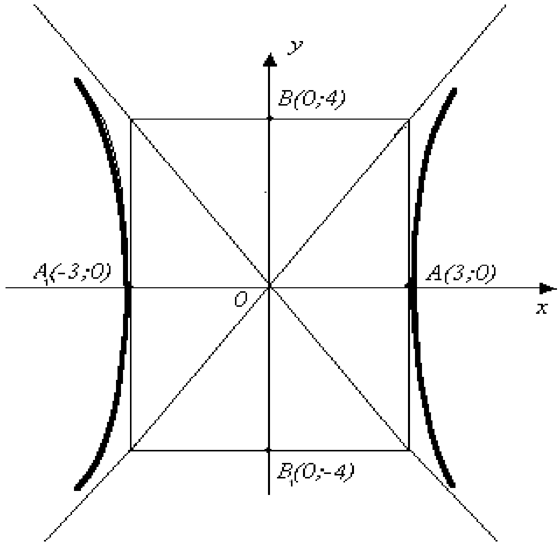
$y=x$ va $y=-x$ to’g’ri chiziqlar teng tomonli giperbolaning asimptotalari bo’lib uning ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a}=\sqrt{2}$ bo’ladi.

6-misol. $16x^2-9y^2=144$ egri chiziq chizilsin.

Yechish. Uni har ikkala tomonini 144 ga bo’lsak

$\frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}=1$ yoki $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1;$ $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$ kelib chiqadi. Demak qaralayotgan egri chiziq yarim o’qlari $a=3$ va $b=4$ bo’lgan giperbola ekan. Markazi koordinatalar boshida bo’lib tomonlari koordinata o’qlariga parallel hamda asosi 6 balandligi 8 bo’lgan to’g’ri to’rtburchak yasaymiz.

Uning diagonallarini cheksiz davom ettirib giperbolaning asimptotalarini hosil qilamiz. Giperbolaning uchlari $A_1(-3;0)$ va $A(3;0)$ nuqtalar orqali asimptotalarga nihoyatda yaqinlashib boruvchi silliq chiziqni o’tkazamiz. Hosil bo’lgan egri chiziq giperbolaning grafigi bo’ladi (9-rasm).



9-rasm

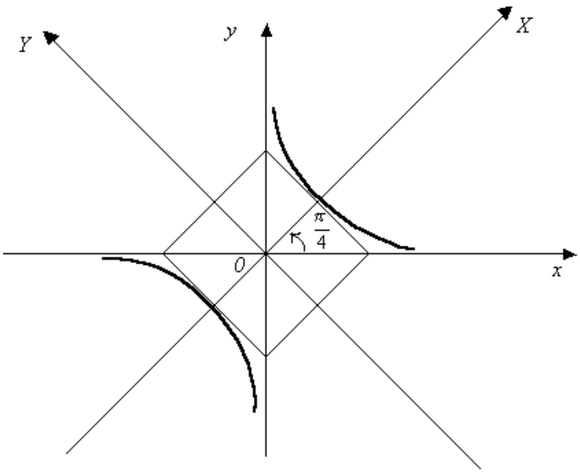
7-misol. $y=\frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi giperbola ekanligi ko’rsatilsin.

Yechish. Koordinata o’qlarini $\alpha=\frac{\pi}{4}$ burchakka burib “yangi” $0XY$ sistemani hosil qilamiz. Bu holda «yangi» koordinatalardan «eski» koordinatalarga o’tish formulasi $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y),\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$ ko’rinishda bo’ladi. x va y ning ushbu qiymatlarini $y=\frac{k}{x}$ tenglamaga qo’ysak $\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)=\frac{k}{\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)}$;

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)(X-Y)=k$ yoki $X^2-Y^2=2k$ hosil bo'ladi. Bu tenglama tengtomonli giperbolaning tenglamasi. $k>0$ bo'lganda giperbolaning haqiqiy o'qi $0X$ bilan, $k<0$ bo'lganda $0Y$ o'q bilan ustma-ust tushadi.

$k>0$ bo'lgan hol uchun giperbola 10-rasm tasvirlangan. *0x, 0y* "eski" o'qlar *0XY* "yangi" sistemani koordinata burchaklarini bissektrisalari bo'lgani uchun ular teng tomonli giperbolani asimptotalari bo'ladi. Shunday qilib $y=\frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi asimtotalari *0x* va *0y* o'qlardan iborat tengtomonli giperbola bo'lar ekan.

Shuningdek $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ kasr-chiziqli funksiyaning grafigi ham asimtotalari koordinata o'qlariga parallel tengtomonli giperbola ekanligini ko'rsatish mumkin.



10-rasm

5. Parabola va uning kanonik tenglamasi

6-ta'rif. Berilgan nuqtadan hamda berilgan to'g'ri chiziqdan teng uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **parabola** deb ataladi.

Berilgan nuqtani F orqali belgilab uni parabolaning **fokusi** deb ataymiz. Berilgan to'g'ri chiziqni parabolaning **direktrisasi** deb ataladi. (Fokus direktrisada yotmaydi deb faraz qilinadi).

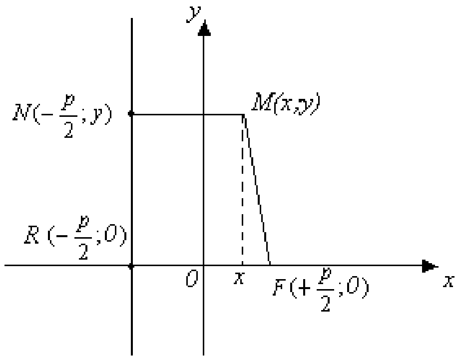
Fokusdan direktrisagacha masofani *p* orqali belgilaymiz va uni parabolaning **parametri** deb ataymiz.

Endi parabolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Abssissalar o'qini fokusdan direktrisaga perpendikulyar qilib o'tkazib yo'nalishini direktrisadan fokusga tomon yo'naltiramiz.

Koordinatalar boshini fokusdan direktrisagacha masofa FR ning qoq o'rtasiga joylashtiramiz (11-rasm).

Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan fokus $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ koordinatalarga, direktrisa $x=-\frac{p}{2}$ tenglamaga ega bo'ladi.

Faraz qilaylik $M(x;y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Parabolaning ta'rifiga binoan



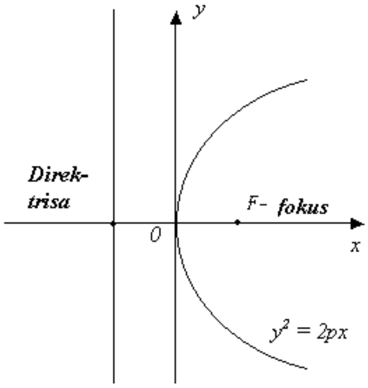
11-rasm

M nuqtadan direktrisagacha MN masofa undan fokusgacha MF masofaga teng: $MN=MF$ 11-rasmdan $MN=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=x+\frac{p}{2}$ va $MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}$ ekani ravshan.Demak, $x+\frac{p}{2}=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$.

Bu tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak $x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$ yoki $y^2=2px$ (12)hosil bo'ladi.

Shunday qilib parabolaning istalgan $M(x,y)$ nuqtasining koordinatalari (12) tenglamani qanoatlantiradi. Parabolada yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak (12) parabolaning tenglamasi ekan. U parabolaning **kanonik tenglamasi** deb ataladi. p parabolaning parametri deb yuritiladi.

Endi kanonik tenglamasiga ko'ra parabolani shaklini chizamiz (12) tenglamada y ni $-y$ ga almashtirilsa tenglama o'zgarmaydi. Bu abssissalar o'qi parabolaning simmetriya o'qidan iborat ekanligini bildiradi. (12) tenglamaning chap tomoni manfiy bo'lmaganligi uchun uning o'ng tomoni ya'ni x ning ham manfiy bo'lmasligi kelib chiqadi. Demak parabola $0y$ o'qning o'ng tomonida joylashadi. x=0 da y=0. Demak parabola koordinatalar boshidan o'tadi. x cheksiz o'sganda y ning absalyut qiymati ham cheksiz o'sadi. (12) tenglama yordamida aniqlanadigan parabola 12-rasmda tasvirlangan. Parabolaning simmetriya o'qi uning **fokal o'qi** deb ataladi.Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning **uchi** deyiladi. Qaralayotgan hol uchun koordinatalar boshi parabolaning uchi bo'ladi.



12-rasm

8-misol. $y^2=8x$ parabola berilgan. Uning direktrisasining tenglamasi yozilsin va fokusi topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi (12) bilan taqqoslab $2p=8$, $p=4$ ekanini ko'ramiz. Direktrisa $x=-\frac{p}{2}$ tenglamaga, fokus $(-\frac{p}{2},\ 0)$ koordinatalarga ega bo'lishini hisobga olsak direktrisaning tenglamasi $x=-2$ va fokus $F(2;0)$ bo'ladi.

Izoh. Fokal o'qi $0y$ o'qdan iborat parabolaning tenglamasi $x^2=2py$ (13)ko'rinishga ega bo'ladi

9-misol. $y=3x^2-12x+16$ parabolaning tenglamasi kanonik holga keltirilsin va uning uchi topilsin.

Yechish. Tenglamani

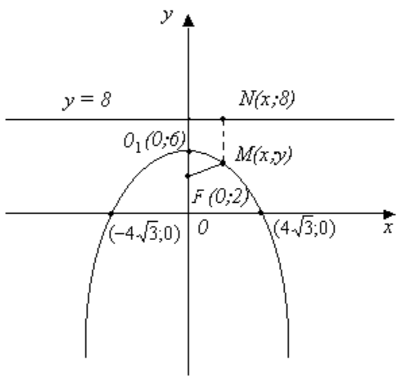
$y=3(x^2-4x)+16$, $y=3(x^2-4x+4-4)+16$; $y=3(x-2)^2+4$; $y-4=3(x-2)^2$

ko'rinishga keltirib $x-2=X$, $y-4=Y$ deb belgilasak parabolaning tenglamasi $Y=3X^2$ kanonik ko'rinishga keladi. $x-2=X$, $y-4=Y$ alamashtirish bilan "eski" $0xy$ sistemani $0_1(2;4)$ nuqtaga parallel ko'chirdik. "Yangi" 0_1XY sistemaga nisbatan parabolaning tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'ladi. "Yangi" sistemani koordinatalar boshini koordinatalari parabola uchining koordinatalari bo’ladi, ya‘ni x_0=2, y_0=4.

10-misol. $F(0,4)$ nuqtadan hamda y=8 to’g’ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o’rni, egri chiziqning koordinata o’qlari bilan kesishish nuqtalari topilsin va egri chiziq chizilsin.

Yechish. $M(x,y)$ egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. Shartga binoan undan y=8 to’g’ri chiziqqacha $MN=\sqrt{(x-x)^2+(8-y)^2}$ masofa va undan $F(0,2)$ nuqtagacha $MF=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}$

masofa o’zaro teng ya‘ni,



13-rasm

$$\sqrt{(x-x)^2+(8-y)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2} \quad \text{(13-rasm).}$$

Bu tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko’tarsak $(8-y)^2=x^2+(y-4)^2$

yoki qavslarni ochsak. $64-16y+y^2=x^2+y^2-8y+16$ yoki $64-16y=x^2-8y+16$ hosil bo’ladi. Tenglamani soddalashtisak $-16y+8y=x^2+16-64$, $-8y=x^2-48$

yoki -8 ga bo’lsak, $y=-\frac{1}{8}x^2+6$ tenglamaga ega bo’lamiz. U $0y$ o’qqa simmetrik parabolaning tenglamasi.

Endi parabolaning koordinata o’qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Parabola tenglamasiga x=0 qiymatni qo’ysak y=6 kelib chiqadi. Demak parabola $0y$ o’q bilan $0_1(0,6)$ nuqtada kesishar ekan. Shuningdek paraborla tenglamasiga y=0 qiymatini qo’ysak $-\frac{1}{8}x^2+6=0; -x^2+48=0;\ x^2=48;\ x=\pm\sqrt{48}=\pm4\sqrt{3}$

hosil bo’ladi. Demak parabola $0x$ o’q bilan $(-4\sqrt{3},0)$ ва $(4\sqrt{3},0)$ nuqtalarda kesishar ekan.

Agar parabola tenglamasini $y-6=-\frac{1}{8}x^2$ yoki $x^2=-8(y-6)$ ko’rinishda yozib

$x=X$, $y-6=Y$ almashtirish olsak uning tenglamasi $X^2=-8Y$ kanonik shaklni oladi.