



**O'zbekiston respublikasi oliy va o'rta
maxsus ta'lim vazirligi**



Buxoro muhandislik – texnologiya instituti

**«OLİY MATEMATIKA»
kafedrasi**

«Oliy matematika»
fanidan I kursning bahorgi mavsumi uchun
EEE, MEEE yo'nlishlari bakalavrlari uchun

USLUBIY QO'LLANMA

Buxoro – 2016

Uslubiy qo'llanma «Oliy matematika» kafedrasining 2016-yil aprel kungi (majlis bayoni №) majlisida va institut uslubiy kengashining 2016 yil kungi № sonli yig'lishida muhokama etildi va chop etishga tavsiya etildi.

MUALLIFLAR:

**«Oliy matematika» kafedrasi
dotsenti Teshayev M.X.**

T A Q R I Z C H I L A R:

**BuxDU «Matematika» kafedrasi dots.
Mamatova N.**

**BuxMTI “Informatika va
axborot texnologiyalari”
kafedrası dotsenti
YO’LDOSHEV SH. S.**

MUHARRIR:

**«Oliy matematika» kafedrasi katta
o'qituvchisi Raxmanov K.K.**

Ushbu uslubiy qo'llanmada «Oliy matematika» kursining «Hosila va uning tatbiqlari», «Aniqmas integral», «Aniq integral va uning tatbiqlari» bo'limlari bo'yicha mavzular yoritilgan. Bu to'plamdan texnologik va texnik yo'nalishlari bo'yicha ta'lim oluvchi bakalavrlar foydalanishlari mumkin.

M U N D A R I J A .

KIRISH.....	4
1. «OLIY MATEMATIKA» FANIDAN I KURS BAHORGI MAVSUMI UCHUN ISHCHI UQUV DASTURI.	5
2. FUNKTSIYA HOSILASI VA UNING GEOMETRIK, MEXANIK MA'NOSI.....	6
3. FUNKTSIYANI DIFFERENTSIALASH QOIDALARI. HOSILALAR JADVALI.	9
4. KESMADA DIFFERENTSIALLANUVCHI FUNKTSIYALAR HAQIDAGI TEOREMLAR.	14
5. FUNKTSIYA DIFFERENTSIALI. YUQORI TARTIBLI HOSILA VA DIFFERENTSIALLAR.	16
6. FUNKTSIYANI HOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH.	23
7. FUNKTSIYANI HOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH (DAVOMI).	21
8. ANIQMASLIKLAR VA ULARNI LOPITAL.....	29
QOIDALARI YORDAMIDA OCHISH.	31
9. BOSHLANGICH FUNKTSIYA. INTEGRALLAR JADVALI.....	36
10.INTEGRALLASH USULLARI.....	40
11. KVADRATIK UCHXAD QATNASHGAN BA'ZI FUNKTSIYALARNI INTEGRALLASH. ENG SODDA RATSIONAL KASRLARNI INTEGRALLASH	43
12. RATSIONAL KASRLARNI ENG SODDA RATSIONAL KASRLARGA AJRATISH. RATSIONAL KASRLARNI INTEGRALLASH.....	49
13. IRRATSIONAL FUNKTSIYALARNING INTEGRALI. EYLERNING BIRINCHI ALMASHTIRISHI.....	54
14. EYLERNING IKKINCHI VA UCHINCHI ALMASHTIRISHLARI.....	57
15. TRIGONOMETRIK FUNKTSIYALAR KATNASHGAN BA'ZI IFODALARNI INTEGRALLASH.....	60
16. ANIQ INTEGRAL TA'RIFI GA OLIB KELUVCHI MASALALAR. ANIQ INTEGRALNING TA'RIFI VA XOSSALARI	65
17. NYUTON-LEYBNITS FORMULASI VA ANIQ INTEGRALNI HISOBLASH USULLARI	69
18. XOSMAS INTEGRALLAR HAQIDA TUSHUNCHALAR. XOSMAS INTEGRALLARNI HISOBLASH	74
19. ANIQ INTEGRALNI TAQIRIBIY HISOBLASH	77
20. ANIQ INTEGRAL ORQALI YUZALARNI, HAJMLARNI,.....	81
YOY UZUNLIKLARINI HISOBLASH	85
21. ANIQ INTEGRAL YORDAMIDA FIZIK VA MEXANIK MASALALARNI ECHISH.....	84
ADABIYOTLAR RO'YXATI	90

Kirish

Mamlakatimizda qabul qilingan va amalga oshirilayotgan “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” bo’yicha ta’lim islohotining II bosqichidagi eng asosiy vazifa - tayyorlanayotgan mutaxassislarning sifatini oshirishdan iboratdir.

Yuqori malakali, raqobatbardosh, zamonaviy kadrlar tayyorlashda ularga beriladigan matematik bilimlar katta ahamiyatga ega. Shu sababli texnik, texnologik va iqtisod yo’nalishlari bo’yicha ta’lim oluvchi bakalavrlarning o’kuv rejalarida «Oliy matematika» fanini o’qitish ko’zda tutilgan. Talabalar uchun bu fanni o’kitishda ushbu maqsadlar qo’yiladi:

1. Kasbiy faoliyat uchun etarli hajmda matematik bilimlar va usullar haqida tushunchalar va ko’nikmalar hosil qilish.
2. Abstrakt va mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini hosil qilish va rivojlantirish.
3. Matematika va uning amaliy tadbirlari bo’yicha adabiyotlarni mustaqil o’rganish orqali bilimlar doirasini kengaytira olish.
4. Ixtisoslik bo’yicha umumkasbiy va maxsus fanlarni o’zlashtirish uchun kerakli matematik poydevorni hosil qilish.
5. Kasb faoliyati jarayonida paydo bo’ladigan amaliy masalalarning matematik modellarini ishlab chiqish va uni tahlil etib, tegishli xulosalar chiqarish.

«Oliy matematika» fani quyidagi asosiy bo’limlardan iborat.

1. To’plamlar nazariyasi.
2. Matematik mantiq.
3. Oliy algebra elementlari.
4. Chiziqli algebra.
5. Analitik geometriya.
6. Differentsial hisob.
7. Integral hisob.
8. Ko’p o’zgaruvchili funktsiyalar.
9. Karrali, egri chiziqli va sirt integrallari.
10. Oddiy differentsial tenglamalar.
11. Maydon nazariyasi elementlari.
12. Kompleks o’zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi.
13. Operatsion hisob.
14. Matematik fizika tenglamalar.
15. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika.

Ushbu uslubiy qo’llanmada «Oliy matematika» fanining differentsial va integral hisob bo’limlari bo’yicha fanni ishchi o’quv dasturida ko’zda tutilgan mavzular yoritilgan.

«Oliy matematika» fanidan I kursning bahorgi mavsumi uchun ishchi o'quv dasturi

I. Funktsiya hosilasi.

Funktsiya hosilasi va uning geometrik, mexanik ma'nosi. Hosilalar jadvali va funktsiyani differentsiallash qoidalari. Kesmada differentsiallanuvchi funktsiyalar haqidagi teoremlar. Differentsial. Yuqori tartibli hosila va differentsiallar. Oshkormas va parametrik berilgan funktsiyalarning hosilalari. Funktsiyani hosila yordamida tekshirish. Aniqmasliklar va Lopital qoidalari.

II. Aniqmas integral.

Boshlang'ich funktsiya va aniqmas integral. Integrallar jadvali. Integrallash usullari, ratsional, ba'zi irratsional va trigonometrik funktsiyalarni integrallash.

III. Aniq integral.

Aniq integral tushunchasiga keltiruvchi masalalar. Aniq integralning ta'rifi va uning xossalari. Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integralni hisoblash usullari. Aniq integralni taqribiy hisoblash formulalari. Xosmas integrallar va ularning xossalari. Aniq integralning geometrik, fizik va mexanik masalalarni echishga tatbiqlari.

1 - MA'RUZA

FUNKTSIYA HOSILASI VA UNING GEOMETRIK, MEXANIK MA'NOSI.

Tayanch iboralar: hosila ta'rifi, hosilaning geometrik ma'nosi, hosilaning mexanik ma'nosi, differentsiallanuvchi funktsiya, differentsiallanuvchi funktsiyaning uzluksizligi.

Ma'ruza rejası:

1. Funktsiya hosilasi.
2. Hosilaning geometrik ma'nosi.
3. Hosilaning mexanik ma'nosi.
4. Differentsiallanuvchi funktsiyaning uzluksizligi.

Adabiyotlar:

[1]. II bob, §1-2 [2]. VI bob, §1.1-1.3

$y=f(x)$ funktsiya (a,b) oraliqda aniqlangan bo'lib, x va $x+\Delta x$ shu oraliqdagi nuqtalar bo'sin. Bu holda argumentning Δx orttirmasiga funktsiyaning $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ orttirmasi mos keladi.

TA'RIF: $y=f(x)$ funktsiya Δf orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lganda chekli limitga ega bo'lsa, bu limit qiymati funktsiyaning x nuqtadagi hosilasi deb ataladi va $f'(x)$ yoki $y'(x)$ kabi belgilanadi.

Ta'rifga asosan

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

Misol sifatida $f(x)=x^2$ funktsiya hosilasini ta'rifga asosan topamiz:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Demak, $(x^2)'=2x$ bo'lar ekan.

$y=f(x)$ funktsiya hosilasining geometrik ma'nosini aniqlash uchun bu funktsiyaning grafigida abtsissasi x va $x+\Delta x$, ordinatalari esa $f(x)$ va $f(x+\Delta x)$ bo'lgan M va N nuqtalarni olamiz. Bu nuqtalardan o'tuvchi MN kesuvchining OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagini β kabi belgilaymiz. Bu holda tegishli chizmani chizib, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ natijani olish mumkin. Endi $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lsin. Bu holda N

nuqta M nuqtaga yaqinlashib boradi, MN kesuvchi esa funktsiya grafigining M nuqtasiga o'tkazilgan urinmaga yaqinlashib boradi. Bu urinmaning OX o'qi musbat

yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagini α deb belgilasak, yuqoririda aytilganlarga ko'ra $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lganda $\beta \rightarrow \alpha$ yoki $\operatorname{tg} \beta \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$ munosabat o'rinli bo'ladi. Demak,

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

Shunday qilib, $f'(x)$ hosila qiymati funktsiya grafigining $M(x, f(x))$ nuqtadagi urinmasining $k = \operatorname{tg} \alpha$ burchak koeffitsientiga teng bo'lar ekan.

Hosilaning mexanik ma'nosini ko'rsatish uchun x argumentni vaqt momenti, $y = f(x)$ funktsiyani esa to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan moddiy nuqtaning x vaqt momentigacha bosib o'tgan masofasi deb qaraymiz. Bu holda Δf ortirma Δx vaqt ichida moddiy nuqtaning bosib o'tgan yo'lini, $\Delta f / \Delta x$ nisbat esa uning v (o'rtacha) tezligini ifodalaydi. $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lganda v (o'rtacha) tezlik moddiy nuqtaning x vaqt momentidagi v (oniy) tezligiga yaqinlashib boradi, ya'ni

$$v(\text{oniy}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(\text{o'rtacha}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

Demak, $f'(x)$ hosila $f(x)$ funktsiyaning o'zgarish tezligini ifodalaydi.

Agar $y = f(x)$ funktsiya x nuqtada chekli $f(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u shu nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi. Funktsiyaning differentsiallanuvchanligi va uzluksizligi orasidagi boglanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

TEOREMA: Agarda $y = f(x)$ funktsiya x nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot: Funktsiya uzluksizligi ta'rifiga asosan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \quad (2)$$

munosabatni ko'rsatish kifoya. Hosila ta'rifini ifodalovchi (1) tenglik va limitni mavjudligi haqidagi oldin ko'rib o'tilgan lemmaga asosan

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu erda $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lganda $\alpha(\Delta x)$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Bu holda, limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x)) = f'(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Demak, (2) munosabat o'rinli va shu sababli $f(x)$ funktsiya x nuqtada uzluksiz bo'ladi.

I Z O X : Teoremadagi tasdiqning teskarisi umuman olganda o'rinli emas.

Masalan, $f(x) = |x|$ funktsiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz, ammo bu nuqtada differentsiallanuvchi emas. Haqiqatan ham, $x = 0$ nuqtada Δx ortirma berganimizda $\Delta f = f(0 + \Delta x) - f(0) = \Delta x$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu erdan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Demak, $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lganda $\Delta f / \Delta x$ nisbat limitga ega emas, ya'ni $f'(0)$ hosila mavjud emas.

T A ' R I F : $y = f(x)$ funktsiya (a, b) oraliqning har bir nuqtasida differentsiallanuvchi bo'lsa, u shu oraliqda differentsiallanuvchi deb ataladi.

Masalan, $y=x^2$ funktsiya har qanday oraliqda differentsiallanuvchi. $y=|x|$ funktsiya esa $x=0$ nuqtani o'z ichiga olmaydigan oraliqlarda (masalan, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(2,4)$ oraliqlarda) differentsiallanuvchi, $x=0$ nuqtani o'z ichiga oluvchi oraliqlarda (masalan, $(-1,1)$, $(-5,3)$ oraliqlarda) differentsiallanuvchi bo'lmaydi

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Funktsiyaning nuqtadagi hosilasi qanday ta'riflanadi?
2. Hosilaning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
3. Hosilaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
4. Differentsiallanuvchi funktsiyaning uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
5. Uzluksiz funktsiyaning differentsiallanuvchanligi to'grisida nima deyish mumkin?
6. Qachon funktsiya oraliqda differentsiallanuvchi deyiladi?

2 - MA'RUZA

FUNKTSIYANI DIFFERENTIALLASH QOIDALARI. HOSILALAR JADVALI.

Tayanch iboralar: hosilani topish algoritmi, algebraik yig'indi hosilasi, ko'paytma hosilasi, bo'linma hosilasi, murakkab funktsiya hosilasi, teskari funktsiya hosilasi, asosiy elementar funktsiyalarning hosilalari, hosilalar jadvali.

Ma'ruza rejası:

1. Funktsiya hosilasini ta'rif bo'yicha hisoblash algoritmi.
2. Funktsiyalar algebraik yig'indisining hosilasi.
3. Funktsiyalar ko'paytmasining hosilasi.
4. Funktsiyalar bo'linmasining hosilasi.
5. Murakkab funktsiyaning hosilasi.
6. Teskari funktsiya hosilasi.
7. Hosilalar jadvali.

Adabiyotlar:

[1]. III bob, §3-9 [2]. VI bob, §1.4-1.7

Umumiy holda $y=f(x)$ funktsiyaning hosilasini topish, ya'ni uni differentsiallash, quyidagi algoritm bo'yicha amalga oshiriladi:

- 1) x argumentga $\Delta x \neq 0$ ortirma berib, $x+\Delta x$ nuqtani topamiz;
- 2) funktsiya orttirmasini $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ tenglik bo'yicha hisoblaymiz;
- 3) $\Delta f/\Delta x$ nisbatni topamiz va uning $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lgandagi limitini hisoblaymiz. Bu limit mavjud bo'lsa, uning qiymati $f'(x)$ hosilani aniqlaydi.

Misol sifatida $f(x)=\sin x$ funktsiya hosilasini yuqoridagi algoritm bo'yicha topamiz:

- 1) x va $x+\Delta x$ nuqtalarda funktsiyani hisoblaymiz;
- 2) trigonometrik formuladan foydalanib, funktsiya orttirmasini quyidagicha yozamiz:

$$\Delta f = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)$$

- 3) $\Delta f/\Delta x$ nisbatni tuzamiz va uning limitini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta f/\Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)/\Delta x = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x+\Delta x/2) = 1 \cdot \cos x = \cos x.\end{aligned}$$

Bu erda ko'paytmaning limiti, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$ ajoyib limitdan va $y=\cos x$ funktsiya uzluksizligidan foydalanildi.

Demak, $(\sin x)' = \cos x$ bo'ladi. Xuddi shunday usulda $(\cos x)' = -\sin x$ ekanligi aniqlanadi. Bundan tashqari

$$(a^x)' = a^x \ln a, (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

ekanligini isbotlash mumkin.

Ammo, har qanday funktsiya hosilasini bu algoritm bo'yicha hisoblash oson emas va muhimi shart ham emas. Umumiy holda funktsiya hosilasini hisoblashni quyidagi differentsiallash qoidalari bo'yicha amalga oshirish mumkin.

1- qoida: O'zgarmas C sonning hosilasi nolga teng, ya'ni $(C)'=0$.

I s b o t : O'zgarmas C sonni x argumentning har qanday qiymatida bir xil qiymat qabul qiluvchi $f(x)=C$ funktsiya deb qarash mumkin. Bu holda,

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0, \quad \Delta f / \Delta x = 0,$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

2-qoida: $u=u(x)$, $v=v(x)$ funktsiyalar x nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, bu nuqtada $u \pm v$, $u \cdot v$ va $v(x) \neq 0$ shartda u/v funktsiyalar ham differentsiallanuvchi bo'lib, ularni hisoblash uchun

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

I s b o t : Funktsiya orttirmasi ta'rifidan foydalanib, har qanday Δx argument orttirmasida $\Delta(u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v$ ekanligini ko'rsatish mumkin. Bu holda limit xossasi va hosila ta'rifiga asosan

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(u \pm v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

Xuddi shunday,

$$\Delta(u \cdot v) = u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v + \Delta u \cdot \Delta v, \quad \Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u \Delta v - u \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

munosobatlardan foydalanib, 2-qoidadagi qolgan formulalarni ham isbotlash mumkin.

Natija 1: Funktsiyaga ixtiyoriy S o'zgarmas sonni qo'shsak, uning hosilasi o'zgarmaydi.

Haqiqatdan ham $(f(x)+C)' = f'(x)+C' = f'(x)+0 = f'(x)$.

Natija 2 : O'zgarmas C ko'paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Haqiqatdan ham, ko'paytmaning hosilasi formulasi va 1-qoidaga asosan

$$(C \cdot f(x))' = C' \cdot f(x) + C \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + C \cdot f'(x) = C \cdot f'(x)$$

Natija 3 : $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$, $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$.

Haqiqatan ham, bo'linmaning hosilasi formulasiga ko'ra

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Xuddi shunday ravishda $(\operatorname{ctgx})'$ hosila topiladi.

3-qoida: $y=f(u)$ murakkab funktsiyada $f(u)$ va $u(x)$ funktsiyalar argumentlari bo'yicha differentsiallanuvchi bo'lsin. Bu holda $y=f(u)$ murakkab funktsiya x bo'yicha differentsiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi

$$f'_x = f'(u) \cdot u'(x)$$

formula bilan topiladi.

I s b o t : $u(x)$ funktsiya differentsiallanuvchi bo'lganligidan uning uzluksizligi kelib chiqadi va shu sababli $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lganda $\Delta u \rightarrow 0$ bo'ladi. Hosila ta'rifiga asosan

$$f'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot u'(x).$$

Masalan, $(\sin x^2)' = (u=x^2)' = (\sin u)'_x = \cos u \cdot u' = 2x \cos x^2$.

Bu qoidaning tadbiri sifatida $y=x^\alpha$ darajali funktsiyaning y' hosilasini topamiz. Bu holda

$$\begin{aligned} \ln y = \ln x^\alpha &= \alpha \ln x \Rightarrow (\ln y)'_x = (\alpha \ln x)' \Rightarrow \\ \frac{y'}{y} &= \frac{\alpha}{x} \Rightarrow y' = \frac{\alpha}{x} y = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha \cdot x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

4-qoida: $y = f(x)$ differentsiallanuvchi va $f'(x) \neq 0$ bo'lsa, $x=f^{-1}(y)$ teskari funktsiya ham differentsiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ formula

bo'yicha topiladi.

I s b o t : $x=f^{-1}(y)$ teskari funktsiyaning argument orttirmasi $\Delta y \neq 0$ bo'lgandagi orttirmasi Δx bo'lsin. Berilgan $f(x)$ funktsiya differentsiallanuvchi bo'lgani uchun uzluksizdir va shu sababli unga teskari $f^{-1}(y)$ funktsiya ham uzluksiz bo'ladi. Demak, $\Delta y \rightarrow 0$ bo'lganda $\Delta x \rightarrow 0$ bo'ladi. Bu holda, hosila ta'rifiga asosan,

$$x'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^{-1} = \frac{1}{y'_x}.$$

Misol sifatida $y=\arcsin x$ funktsiya hosilasini topamiz. Bu erda $D\{f\}=[-1;1]$, $E\{f\}=[-\pi/2, \pi/2]$ bo'lgani uchun, $x=\sin y$ teskari funktsiyaning hosilasi $x'_y = \cos y \neq 0$, $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, shartni qanoatlantiradi. Bu holda

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

Ammo $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ bo'lganda $\cos y > 0$ va

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

tenglik o'rinli. Bu natijani oldingi tenglikka qo'yib,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

formulani hosil qilamiz. Xuddi shunday usulda

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

formulalarni hosil qilish mumkin.

Shunday qilib, barcha asosiy elementar funktsiyalar aniqlanish sohasida differentsiallanuvchi va ularning hosilalari quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$1) (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha - \text{ixtiyoriy haqiqiy son};$$

$$2) (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (e^x)' = e^x; \quad 3) (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$4) (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$5) (\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Bu hosilalar jadvalidan va ko'rib o'tilgan

$$\text{I. } (C)' = 0 \quad \text{II. } (u \pm v)' = u' \pm v', \quad \text{III. } (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

$$\text{IV. } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{V. } [f(u)]' = f'_u \cdot u'_x \quad \text{VI. } x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

hosila olish qoidalaridan foydalanib, har qanday elementar funktsiyaning hosilasini hisoblash mumkin.

Masalan,

$$(e^x \cdot \sin 2x)' = (e^x)' \sin 2x + e^x (\sin 2x)' = e^x \cdot \sin 2x + e^x \cdot \cos 2x \cdot (2x)' =$$

$$= (\sin 2x + 2 \cdot \cos 2x) e^x,$$

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Ta'rif bo'yicha funktsiya hosilasini topish algoritmi qanday qadamlardan iborat?
2. O'zgarmas sonning hosilasi nimaga teng?
3. Funktsiyalar algebraik yig'indisini hosilasi qanday hisoblanadi?
4. Funktsiyalar ko'paytmasining hosilasi qanday topiladi?
5. Funktsiyalar nisbatining hosilasi qanday hisoblanadi?
6. Hosila olishda o'zgarmas ko'paytuvchini nima qilish mumkin?
7. Murakkab funktsiyaning hosilasi qanday topiladi?
8. Teskari funktsiyaning hosilasi qanday topiladi?
9. Asosiy elementar funktsiyalarning hosilalarini yozing.

3-MA'RUZA

KESMADA DIFFERENTIALLANUVCHI FUNKTSIYALAR HAQIDAGI TEOREMALAR.

Tayanch iboralar: Roll teoremasi, Lagranj teoremasi, Koshi teoremasi.

Ma'ruza rejası:

1. Kesmada differentsiallanuvchi funktsiyalar.
2. Roll teoremasi.
3. Lagranj teoremasi.
4. Koshi teoremasi.

Adabiyotlar:

[1]. III bob, §19 [2]. VI bob, §3.1-3.3

Biz quyida differentsial hisobning asosiy teoremlaridan bo'lib hisoblanadigan teoremlarni keltiramiz.

1-TEOREMA (Roll teoremasi): $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differentsiallanuvchi bo'lib, chegaralarida teng qiymatlar qabul qilsin, ya'ni $f(a)=f(b)$ bo'lsin. U holda shu kesma ichida kamida bitta shunday "c" nuqta topiladiki, unda funktsiya hosilasi nolga teng, ya'ni $f'(c)=0$ bo'ladi.

Isbot: Kesmada uzluksiz funktsiya shu kesmada uzining eng kichik (m) va eng katta (M) qiymatlariga erishishi bizga ma'lum.

Agar $m=M$ bo'lsa, u holda albatta $f(x)=\text{const}$ bo'ladi va teorema tasdig'i kesmaning har bir nuqtasida bajariladi.

Aytaylik $m<M$ bo'lsin. Kesma chegaralarida funktsiya qiymatlari o'zaro teng bo'lgani uchun funktsiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari kesmaning faqat ichki nuqtalarida erishiladi.

Agar biror $a<c<b$ nuqtada $f(c) = M$ bo'lsa, u holda $\Delta f(c)=f(c+\Delta x)-f(c) < 0$ bo'ladi. Bu erdan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0, \text{ agar } \Delta x > 0 \text{ bo'lsa,}$$
$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0, \text{ agar } \Delta x < 0 \text{ bo'lsa.}$$

Kesmaning ichki nuqtalarida funktsiyaning differentsiallanuvchanligidan foydalanib, yuqoridagi munosabatlarda limitga o'tsak, u holda quyidagi xulosalarga kelamiz:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{ba} \quad f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$$

Ammo $f'(c) \geq 0$ va $f'(c) \leq 0$ tengsizliklar faqat $f'(c)=0$ bo'lgandagina birgalikda bo'ladi.

$f(c)=m$ hol ham xuddi shunday ko'riladi. Teorema isbot qilindi.

Shunday qilib, differentsiallanuvchi funktsiyaning teng qiymatlari orasida funktsiya hosilasining hech bo'lmaganda bitta noli mavjud bo'lar ekan.

Roll teoremasi quyidagi geometrik talkinga ega: uzluksiz funktsiya (a, b) oraliqdagi har bir nuqtada yagona urinmaga ega bo'lsa va kesmaning chegaralarida bir xil qiymatlar qabul qilsa, u holda shu urinmalar orasida kamida bittasi OX o'qiga parallel bo'ladi.

2-TEOREMA: (Lagranj teoremasi): $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning ichki nuqtalarida hosilaga ega bo'lsa, u holda (a,b) oraliqda kamida bitta shunday "c" nuqta topiladiki, unda

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ yoki } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

I s b o t : Teorema shartini qanoatlantiruvchi $f(x)$ funktsiya orqali ushbu yordamchi funktsiyani kiritamiz:

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Bu funktsiyaning (a,b) oraliqdagi hosilasini topamiz:

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Kiritilgan $\varphi(x)$ funktsiya $\varphi(a)=0$ va $\varphi(b)=0$ shartlarni qanoatlantiradi. Unda Roll teoremasiga asosan kamida bitta shunday c nuqta topiladiki, $c \in (a,b)$ va $\varphi'(c)=0$ bo'ladi. Bundan

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

natija kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Lagranj teoremasining geometrik ma'nosi shundan iboratki, $f(x)$ funktsiya grafigining $A(a, f(a))$ va $B(b, f(b))$ nuqtalarini tutashtiruvchi AB vatarga parallel va qandaydir $C(c, f(c))$ nuqtadan o'tuvchi o'rinma mavjud.

3-TEOREMA (Koshi teoremasi): $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differentsiallanuvchi bo'lsin. Agar $\forall x \in (a,b)$ uchun $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda kamida bitta shunday $c \in (a,b)$ nuqta topiladiki, unda ushbu tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

I s b o t : Teorema shartiga ko'ra $\forall x \in (a,b)$ uchun $g'(x) \neq 0$ ekanligidan $g(b) \neq g(a)$ kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar $g(b)=g(a)$ bo'sa, unda Roll teoremasiga asosan, kamida bitta "c" nuqtada $g'(c)=0$ bo'lar edi. Bu esa teorema shartiga zid. Shu sababli quyidagi yordamchi funktsiyani kiritish mumkin:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)].$$

Bu funktsiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

hosilaga ega. Kiritilgan yordamchi $F(x)$ funktsiya $F(a)=F(b)=0$ shartni qanoatlantirishini tekshirib ko'rishimiz mumkin. Demak, $F(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada Roll teoremasining hamma shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun $[a, b]$ kesma ichida kamida bitta shunday c nuqta ($a < c < b$) topiladiki, unda $F'(c)=0$ bo'ladi, ya'ni

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Bundan esa teorema tasdig'i to'g'ri ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Izox: Koshi teoremasidan xususiy $g(x)=x$ holda Lagranj teoremasi kelib chiqadi.

Ko'rib o'tilgan bu uchta teoremaning ahamiyati funktsiyani to'la tekshirish va aniqlasliklarni ochishda ko'rinadi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Roll teoremasini shartlari va tasdig'i nimadan iborat?
2. Roll teoremasining geometrik ma'nosini ko'rsating.
3. Lagranj teoremasini ifodalang.
4. Lagranj teoremasining geometrik ma'nosi nimadan iborat?
5. Koshi teoremasi qanday ifodalanadi?
6. Qaysi holda Koshi teoremasidan Lagranj teoremasi kelib chiqadi

4- MA'RUZA

FUNKTSIYA DIFFERENTIALI. YUQORI TARTIBLI HOSILA VA DIFFERENTIALLAR.

Tayanch iboralar: funksiya differentsiali, differentsial mavjudligini zaruriy va etarli sharti, algebraik yig'indi differentsiali, ko'paytma differentsiali, bo'linma differentsiali, differentsialning invariantligi, yuqori tartibli hosilalar, yuqori tartibli differentsiallar, parametrik funksiya hosilasi.

Ma'ruza rejasi:

1. Funksiya differentsiali.
2. Differentsialning taqribiy hisobdagi tatbig'i.
3. Differentsialning geometrik ma'nosi.
4. Differentsiallash qoidalari.
5. Yuqori tartibli hosilalar.
6. Yuqori tartibli differentsiallar.
7. Parametrik funksiya hosilasi.

Adabiyotlar:

[1]. III bob, §12-15, § 17-18 [2]. VI bob, §2.1-2.4

Berilgan $y=f(x)$ funksiya x argument orttirmasi Δx bo'lganda funksiya orttirmasi $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ kabi aniqlanishini eslatib o'tamiz.

TA'RIF: Agarda $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lganda funksiya orttirmasini

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x \quad (1)$$

ko'rinishda ifodalab bo'lsa, unda $A \cdot \Delta x$ ifoda shu funksiyaning **differentsiali** deyiladi va df kabi belgilanadi. Bunda A Δx ga bog'lik emas, $\alpha(\Delta x)$ esa cheksiz kichik miqdordir.

Demak, funksiya differentsiali uning orttirmasini Δx ga nisbatan chiziqli qismini ifodalaydi.

Ta'rif bo'yicha, ya'ni (1) tenglik orqali funksiya differentsialini topish ancha murakkab masaladir. Shu sababli uni osonroq usulda topish masalasi paydo bo'ladi. Bu masala quyidagi teoremada o'z echimini topadi.

TEOREMA: Agar $y=f(x)$ funksiya biror (a,v) oraliqda differentsiallanuvchi, ya'ni $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, uning differentsiali

$$df = f'(x) \cdot \Delta x \quad (2)$$

formula bilan topilishi mumkin.

Isbot: Hosila ta'rifi va limitning mavjudligi haqidagi lemmaga (28-ma'ruzaga qarang) asosan quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \Rightarrow \Delta f = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

Oxirgi tenglikni (1) bilan solishtirib va differentsial ta'rifidan foydalanib, (2) formulaga ega bulamiz. Teorema isbot bo'ldi.

Endi $f(x)=x$ xususiy holni ko'ramiz. Bu holda $df = dx$ bo'ladi va (2) formulaga asosan $dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$. Demak x erkli o'zgaruvchi (argument) uchun $\Delta x = dx$, ya'ni orttirma va differentsial tushunchalari bir narsani ifodalaydi. Shu sababli differentsialni hisoblashning (2) formulasini

$$df = f'(x)dx \quad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak, funktsiya differentsialini topish uchun uning hosilasini dx ga ko'paytirish kifoya. Masalan, $dx^2 = (x^2)'dx = 2x dx$,

$d \sin x = (\sin x)'dx = \cos x dx$ bo'ladi.

(3) formuladan hosilani $f'(x) = \frac{df}{dx}$ kabi belgilash ma'nosi kelib chiqadi.

(1) tenglik va differentsial ta'rifidan

$$\Delta f = df + \alpha(\Delta x)\Delta x \quad (4)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu tenglikdan argument orttirmasi Δx kichik bo'lganda funktsiya orttirmasi Δf va differentsiali df qiymatlari bir-biriga yaqin bo'lishini, ya'ni $\Delta f \approx df$ bo'lishini ko'ramiz.

1-Misol. $f(x)=x^2$ funktsiyaning $x=40$ va $\Delta x=0,01$ bo'lgandagi orttirmasi va differentsiali topilsin.

Echish. $df = 2x dx = 2 \cdot 40 \cdot 0,01 = 0,8$

$$\Delta f = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = 2 \cdot 40 \cdot 0,01 + 0,0001 = 0,8 + 0,0001 = 0,8001.$$

Bu natijalardan ko'rinib turibdiki, (f va df qiymatlari anchalik yaqin ekan. Shu sababli (4) formuladan ushbu taqribiy hisoblash formulasini keltirib chiqarish mumkin:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad (5)$$

(5) formula taqribiy hisoblashlarda keng foydalaniladi.

2-misol. $\sin 31^\circ$ hisoblansin.

Echish. $f(x) = \sin x$ funktsiyani kiritamiz. Unda $f'(x) = \cos x$. va $x = 30^\circ$, $\Delta x = 1^\circ$ holda (5) formuladan quyidagi natijani olamiz:

$$\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ) \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot 1^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{1,73}{2} \cdot \frac{3,14}{180} = 0,52.$$

Bunda $1^\circ = \pi/180$ ekanligidan foydalandik. Demak, $\sin 31^\circ \approx 0,52$.

3-misol. $\sqrt{25,002}$ ifoda hisoblansin.

Echish. $f(x) = \sqrt{x}$ funktsiyani kiritsak va $x=25$, $\Delta x=0,002$ desak, u holda (5) taqribiy formuladan, $f'(x) = 1/2 \sqrt{x}$ ekanligini hisobga olib,

$$\sqrt{25,002} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 0,002 = 5 + \frac{0,002}{10} = 5,0002$$

taqribiy qiymatni olamiz.

Shunday qilib differentsialni hisoblash funktsiya hosilasini argument differentsialiga ko'paytirish bilan yaqunlanadi. Shuning uchun ham hosila hisoblash qoidalarini osongina differentsial hisoblash uchun ko'chiriladi:

1. $dC=0$, $C=\text{const}$
2. $dCf(x) = Cdf(x)$
3. $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$
4. $df(x)g(x) = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$
5. $d\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right] = \frac{\varphi(x)df(x) - f(x)d\varphi(x)}{[\varphi(x)]^2}$

Endi $y=f(u)$, $u=u(x)$, murakkab funktsiyaning differentsialini hisoblash masalasini ko'ramiz. Bunda tashqi $f(u)$ va ichki $u(x)$ funktsiyalar differentsiallanuvchi deb qaraladi. Differentsialni hisoblashning (3) formulasi va murakkab funktsiyani hisoblash qoidasiga asosan ushbu tenglikni yozish mumkin:

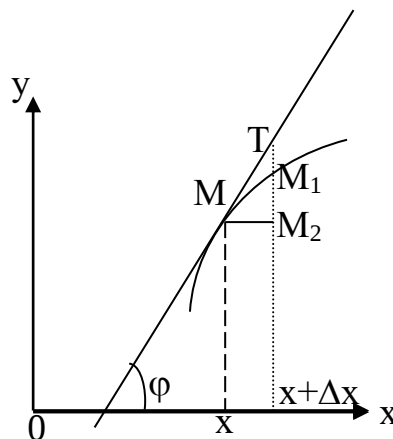
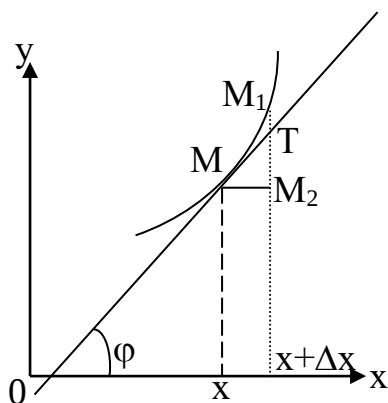
$$df(u) = (f(u))' dx = f'(u) \cdot u' dx = f'(u) \cdot du \quad (6)$$

Bu erdan, (3) va (6) formulalarni taqqoslab, oddiy va murakkab funktsiya differentsiali bir xil usulda hisoblanishini ko'ramiz. Bu **differentsialning invariantlik xossasi** deyiladi. Demak, $y=f(x)$ funktsiyada x o'rniga biror $u=u(x)$ funktsiya quyib, $f(u)$ murakkab funktsiya hosil qilinsa, uning differentsiali kurinishi o'zgarmay qoladi.

$$\text{Masalan, } y = \cos \sqrt{x} \text{ funktsiya uchun } dy = -\sin \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = -\sin \sqrt{x} d(\sqrt{x}).$$

Endi differentsialning geometrik ma'nosini ko'ramiz.

Aytaylik $y=f(x)$ funktsiyamiz quyidagi ikkita ko'rinishda bo'lsin va uning $M(x;f(x))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma OX o'qining musbat yunalishi bilan φ burchak hosil qilsin.



Agar x argumentga Δx orttirma bersak, u holda funktsiya Δf orttirma oladi. Chizmada $M_1(x+\Delta x; f(x+\Delta x))$, $M_2(x+\Delta x; f(x))$ nuqtalarni qaraymiz. Grafikning $M(x, f(x))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning ixtiyoriy bir T nuqtasini olamiz. Ma'lumki, $\Delta f = M_1 M_2$, $\Delta x = MM_2$ bo'ladi.

Endi MTM_2 to'g'ri burchakli uchburchakdan va hosilaning geometrik ma'nosidan ushbu tenglikni olamiz:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_2 T}{MM_2} \Rightarrow M_2 T = \operatorname{tg} \varphi \cdot MM_2 = f'(x) \Delta x$$

Bu erdan va differentsial ta'rifidan $M_2 T = df$ tenglikni olamiz. Demak, $y = f(x)$ funktsiyaning differentsiali x argument Δx ga o'zgarganda funktsiya grafigining $M(x; f(x))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning hosil qilgan orttirmasiga teng.

Endi funktsiyaning yuqori tartibli hosilasi va differentsiali tushunchalarini kiritamiz.

Ma'lumki, $y = f(x)$ funktsiyaning birinchi tartibli hosilasi $f'(x)$, umuman olganda, x o'zgaruvchining yangi funktsiyasi bo'ladi. Shu sababli $f'(x)$ funktsiyaning hosilasi tug'risida so'z yuritish mumkin.

T A ' R I F: Agar $f'(x)$ differentsiallanuvchi funktsiya bo'lsa, uning hosilasi $y = f(x)$ **funktsiyaning II tartibli hosilasi** deyiladi va $f''(x)$ yoki $f^{(2)}(x)$ kabi belgilanadi.

Demak, II tartibli hosila $f''(x) = (f'(x))'$ kabi aniqlanadi va hisoblanadi. Masalan, $f(x) = x^4$ funktsiya uchun $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = (4x^3)' = 12x^2$.

Birinchi tartibli hosila $f'(x)$ tezlikni ifodalasa, ikkinchi tartibli hosila tezlanishni ifodalaydi.

Hosila tartibi tushunchasi kiritilgach $f'(x)$ hosila I tartibli, $f(x)$ funktsiyaning o'zi esa 0 – tartibli hosila, ya'ni $f(x) = f^{(0)}(x)$ deb qaraladi.

Xuddi shunday tarzda uchinchi tartibli $f'''(x)$, to'rtinchi tartibli $f^{(IV)}(x)$ va hokazo n - tartibli hosilalar tushunchasi kiritiladi. Umuman olganda n -tartibli hosila quyidagi rekkurent formula orqali topiladi:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Masalan, $f(x) = x^3$ uchun $f^{(1)}(x) = 3x^2$, $f^{(2)}(x) = 6x$, $f^{(3)}(x) = 6$ va $n \geq 4$ bo'lganda $f^{(n)}(x) = 0$ bo'ladi. Ba'zi funktsiyalar uchun yuqori tartibli hosilalar ifodasini birdaniga yozish mumkin. Masalan, $f(x) = a^x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x) = a^x (\ln a)^n$, $f(x) = \sin x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x) = \sin(x + \pi n/2)$ bo'ladi.

$df = f'(x)dx$ ifodada birinchi ko'paytuvchi x argumentning funktsiyasi, ikkinchi ko'paytuvchi $dx = \Delta x$ esa x ga bog'lik bo'lmagan o'zgarmas son bo'ladi. Demak df differentsial ham x o'zgaruvchining funktsiyasi ekan. Undan (3) formula bo'yicha differentsial olamiz va natijada hosil bo'lgan ifodani **ikkinchi tartibli differentsial** deb ataymiz va d^2f kabi belgilaymiz:

$$d^2f = d(df) = d(f'(x)dx) = dx d(f'(x)) = dx f''(x)dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

Xuddi shunday tarzda n – tartibli differentsial

$$d^n f = d(d^{n-1}f) = f^{(n)}(x)(dx)^n = f^{(n)}(x)dx^n$$

kabi aniqlanadi va hisoblanadi. Masalan, $f(x)=x^3$ uchun $df=6x^2 dx$, $d^2f=12x dx^2$. Yuqori tartibli differentsillardan foydalanib, yuqori tartibli hosilalarni

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}, \quad f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x)=\frac{d^n f}{dx^n}$$

kabi yozish mumkin.

T A ' R I F: Agar x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish uchinchi bir t o'zgaruvchi (parametr) orqali $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, funktsiyalar ko'rinishda berilgan bo'lsa, x va y orasidagi $y=f(x)$ funktsiya **parametrik** ko'rinishda berilgan deyiladi.

Masalan, $x=t^2$, $y=t^6$ parametrik ko'rinishda berilgan funktsiya $y=f(x)=x^3$ funktsiyani ifodalaydi.

Parametrik ko'rinishda berilgan funktsiyani har doim ham dastlab $y=f(x)$ ko'rinishda yozib, so'ngra uning hosilasini hisoblab bo'lmaydi. Shu sababli parametrik kurinishda berilgan funktsiyaning hosilasini topish masalasini ko'ramiz. Aytaylik $y=f(x)$ funktsiya $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin. Agar φ va ψ funktsiyalar kerakli differentsiallanuvchi bo'lsalar, u holda quyidagi formulalar o'rinli bo'ladi:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(dy/dt)}{dx} = \frac{d(dy/dx)/d(t)}{dx/d(t)} = \frac{d(\psi'(t)/\varphi'(t))}{\varphi'(t)} =$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Bu tengliklar parametrik ko'rinishda berilgan funktsiya hosilasini topishni ifodalaydi.

4- M i s o l: $y=f(x)$ funktsiya $x=2\cos t$ va $y=3\sin t$ funktsiyalar orqali parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin. $y'(x)$ va $y''(x)$ hosilalar topilsin.

E ch i sh: Yuqoridagi formulalarga asosan

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3 \cos t}{-2 \sin t} = -\frac{3}{2} \operatorname{ctgt}; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sin^2 t} \frac{1}{(-2 \sin t)^3} = -\frac{3}{16} \frac{1}{\sin^5 t}.$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Funktsiya differentsiali qanday ta'riflanadi?
2. Funktsiya differentsiali hosila orqali qanday topiladi?
3. Funktsiya orttirmasi va differentsiali orasida qanday bog'lanish mavjud?
4. Differentsialning geometrik ma'nosini ko'rsating.
5. Differentsiallash qoidolari nimalardan iborat?
6. Differentsialning invariantlik hossasi nimadan iborat?
7. Yuqori tartibli hosilalar qanday aniqlanadi?
8. Yuqori tartibli differentsiallar qanday ifodalanadi?
10. Parametrik ko'rinishda berilgan funktsiyaning hosilasi qanday topiladi?

5-MA'RUZA

FUNKTSIYANI HOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH.

Tayanch iboralar: funktsiya monotonligining zaruriy va etarli sharti, funktsiya ekstremumlari, ekstremumning zaruriy sharti, kritik nuqta, ekstremumning etarli sharti, ekstremumni II tartibli hosila orqali tekshirish.

Ma'ruza rejası:

1. Funktsiyaning monotonlik oraliqlari.
2. Differentsiallanuvchi funktsiyaning monotonlik oraliqlarini topish.
3. Funktsiya ekstremumlari.
4. Ekstremumning zaruriy sharti.
5. Kritik nuqtalar.
6. Ekstremumning zaruriy shartini I tartibli hosila orqali ifodalash.
7. Ekstremumning zaruriy shartini II tartibli hosila orqali ifodalash.

Adabiyotlar:

[1]. IV bob, §1-6 [2]. VII bob, §1-3

$y=f(x)$ funktsiya differentsiallanuvchi bo'lsa, uning juda ko'p xususiyatlarini $f'(x)$ hosila yordamida aniqlash mumkin. Shu sababli hosila funktsiyani tekshirish uchun asosiy va kuchli qurol bo'lib hisoblanadi.

I. Funktsiyaning monotonlik oraliqlari.

T A ' R I F : Agarda $y=f(x)$ funktsiya (a,b) oraliqda aniqlangan va bu oraliqdagi $x_1 < x_2$ nuqtalarda $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) shartni qanoatlantirsa, u shu oraliqda **o'suvchi (kamayuvchi)** deb ataladi.

Masalan, $y=x^2$ funktsiya $(-\infty,0)$ oraliqda kamayuvchi, $(0,\infty)$ oraliqda esa o'suvchi bo'ladi.

Funktsiyaning o'sish va kamayish oraliqlari birgalikda uning **monotonlik oraliqlari** deyiladi. Bu oraliqlarni hosila orqali qanday topish mumkinligi ushbu teoremdan kelib chiqadi.

TEOREMA 1: a) Agarda differentsiallanuvchi $f(x)$ funktsiya biror oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, uning hosilasi bu oraliqda $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) shartni qanoatlantiradi.

b) Agarda biror oraliqda funktsiyaning hosilasi $f'(x) > 0$, ($f'(x) < 0$) shartni qanoatlantirsa, u holda shu oraliqda funktsiya o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Izox: Teoremaning a) va b) qismlari funktsiya monotonligining zaruriy va etarli shartlarini ifodalaydi.

Isbot: a) $y=f(x)$ funktsiya (a,b) oraliqda o'suvchi va $x, x+\Delta x$ nuqtalar shu oraliqqa tegishli bo'lsin. Agarda $\Delta x > 0$ bo'lsa,

$$x+\Delta x > x \Rightarrow f(x+\Delta x) > f(x) \Rightarrow \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) > 0 \Rightarrow \Delta f / \Delta x > 0$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Xuddi shunday $\Delta f < 0$ bo'lganda ham $\Delta f / \Delta x > 0$ bo'ladi. Bu erdan, hosila ta'rifi va limit xossasiga asosan,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday usulda kamayuvchi $y=f(x)$ funktsiya uchun $f'(x) \leq 0$ ekanligi isbotlanadi.

b) Funktsiyaning hosilasi (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada $f'(x) > 0$ shartni qanoatlantirsin. Bu holda, chekli orttirmalar haqidagi Lagranj teoremasiga asosan, bu oraliqdagi har qanday $x_1 < x_2$ nuqtalar uchun

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi), \quad x_1 < \xi < x_2$$

tenglik bajariladi. Bu tenglikda $x_2 - x_1 > 0$ va $f'(\xi) > 0$ bo'lgani uchun undan

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ekanligi, ya'ni funktsiya usuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday usulda $f'(x) < 0$ bo'lsa, funktsiya kamayuvchi ekanligi isbotlanadi.

Demak, berilgan $y=f(x)$ funktsiyaning ushish (kamayish) oraliqlarini topish uchun $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) tengsizlikni echish kerak.

Masalan, $f(x)=x+1/x$ funktsiya uchun $f'(x)=1-1/x^2 > 0$ tengsizlikning echimi $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ sohadan iborat va bu sohada berilgan funktsiya o'suvchi bo'ladi. $x=0$ nuqtada funktsiya aniqlanmaganligini hisobga olib, u $(-1, 0) \cup (0, 1)$ sohada kamayuvchi ekanligini ko'ramiz.

II. Funktsiya ekstremumlari.

T A ' R I F 2: $y=f(x)$ funktsiya biror x_0 nuqta va uning atrofidagi ixtiyoriy x nuqtalar uchun aniqlangan bo'lib, $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$) shartni qanoatlantirsa, u shu x_0 nuqtada **maksimumga (minimumga)** erishadi deb ataladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$ funktsiya $x=\pi/2$ nuqtada $\sin(\pi/2)=1$ maksimumga, $x=3\pi/2$ nuqtada esa $\sin(3\pi/2)=-1$ minimumga erishadi.

Funktsiyaning maksimum va minimum qiymatlari birgalikda uning **ekstremumlari** deyiladi.

TEOREMA 2 (Ekstremumning zaruriy sharti): Agarda differentsi-allanuvchi $y=f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda uning hosilasi bu nuqtada $f'(x_0)=0$ shartni qanoatlantiradi.

Isbot: Aniqlik uchun funktsiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'lsin. Bu holda $|\Delta x|$ etarli kichik bo'lsa, $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \Rightarrow \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$ tengsizlik bajariladi. Bundan $\Delta x > 0$ ($\Delta x < 0$) bo'lganda, $\Delta f / \Delta x \leq 0$ ($\Delta f / \Delta x \geq 0$) ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli bir tomondan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0,$$

ikkinchi tomondan esa

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0.$$

Teorema shartiga $f'(x_0)$ ko'ra hosila mavjud bo'lgani uchun, bu ikkala tengsizlikdan $f'(x_0)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Funktsiya x_0 da minimumga ega bo'lgan hol ham xuddi shunday qaraladi.

Masalan, $f(x) = \sin x$ funktsiya $x = \pi/2$ nuqtada maksimumga ega va bu nuqtada uning hosilasi $f'(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ tenglikni qanoatlantiradi.

$f(x) = |x|$ funktsiya $x = 0$ nuqtada minimumga ega, ammo uning hosilasi bu nuqtada mavjud emas.

Xulosa: Uzluksiz funktsiya ekstremumga hosilasi nolga teng yoki mavjud bo'lmagan nuqtalardagina ega bo'lishi mumkin.

T A ' R I F 3: Funktsiya hosilasi nolga teng yoki mavjud bo'lmagan nuqtalar shu funktsiyaning ***kritik yoki statsionar nuqtalari*** deyiladi.

Demak, funktsiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, x_0 nuqta uning kritik nuqtasi bo'ladi. Ammo bu tasdikning teskarisi har doim ham o'rinli bo'lmaydi, ya'ni ekstremumning yuqorida ko'rsatilgan zaruriy sharti doimo ham etarli emas.

Masalan, $y = x^3$ funktsiya uchun $x = 0$ kritik nuqta bo'ladi, lekin bu nuqtada funktsiya ekstremumga ega emas.

TEOREMA 3: (Ekstremumning etarli sharti.): Agarda x_0 kritik nuqtani chapdan o'ngga qarab bosib o'tishda $f'(x)$ hosila o'z ishorasini o'zgartirsa (ya'ni x_0 kritik nuqtaning biror atrofida har qanday $x_1 < x_0$, $x_2 > x_0$ nuqtalar uchun $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$ shart bajarilsa), u holda x_0 kritik nuqtada $f(x)$ funktsiya ekstremumga erishadi. Jumladan, $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$ ($f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) > 0$) bo'lsa, x_0 kritik nuqtada funktsiya o'zining maksimumiga (minimumiga) erishadi.

Isbot: Dastlab $f'(x) < 0$ ($x < x_0$) va $f'(x) > 0$ ($x > x_0$) holni ko'ramiz. Bu holda, 1-teoremaga asosan, x_0 nuqtaning chap atrofida funktsiya kamayuvchi, o'ng atrofida esa o'suvchi bo'ladi. Demak, x_0 nuqtada funktsiya minimumga erishadi. Xuddi shunday tarzda $f'(x) > 0$ ($x < x_0$) va $f'(x) < 0$ ($x > x_0$) shartlarda funktsiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'lishi isbotlanadi.

Masalan, $f(x) = x^2 + 1$ funktsiya hosilasi $f'(x) = 2x$ bo'lib, $x_0 = 0$ kritik nuqta bo'ladi. Bu funktsiya hosilasi $x < 0$ bo'lganda manfiy va $x > 0$ bo'lganda musbat qaymat qabul qiladi. Demak, funktsiya $x_0 = 0$ kritik nuqtada minimumga ega va uning minimum qiymati $f(0) = 1$ bo'ladi.

Izox: Agarda funktsiya hosilasi x_0 kritik nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirmasa, bu nuqtada funktsiya ekstremumga ega bo'lmaydi.

Haqiqatan ham, $x < x_0$ yoki $x > x_0$ bo'lganda $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) bo'lsin. Bu holda x_0 nuqtaning chap atrofida ham, o'ng atrofida ham $f(x)$ funktsiya o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi va shu sababli x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Masalan, $f(x)=x^3$ funktsiyaning hosilasi $f'(x)=3x^2$ kritik $x=0$ nuqta atrofida faqat musbat qiymatlarni qabul qiladi va shu sababli bu nuqtada funktsiya ekstremumga ega emas.

Agarda funktsiya o'zining x_0 kritik nuqtasida ikki marta differentsiallanuvchi bo'lsa, uning ekstremumini quyidagi teorema orqali aniqlash qulayroqdir.

TEOREMA 4: Agarda x_0 kritik nuqtada $f'(x_0)=0$ va $f''(x_0) \neq 0$ bo'lsa, x_0 nuqtada $f(x)$ funktsiya ekstremumga ega. Jumladan, $f''(x_0) < 0$ bo'lsa, $f(x_0)$ funktsiyaning maksimumi, $f''(x_0) > 0$ bo'lsa, $f(x_0)$ funktsiyaning minimumi bo'ladi. Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Masalan, $f(x)=x^4-4x$ funktsiya uchun $f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)=0$ tenglamadan $x_0=1$ kritik nuqta ekanligini aniqlaymiz. Funktsiyaning II tartibli hosilasi $f''(x)=12x^2$ bu kritik nuqtada $f''(1)=12>0$ qiymatni qabul qiladi. Demak, berilgan funktsiya $x_0=1$ kritik nuqtada minimumga ega va bu minimum $f(1)=1-4=-3$ bo'ladi.

Izox: Agarda x_0 kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila $f''(x_0)=0$ bo'lsa, unda funktsiyaning x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishi yoki bo'lmasligi, birinchi tartibli hosila orqali, 3-teorema yordamida aniqlanadi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Funktsiyaning ushish (kamayish) oraliqlari deb nimaga aytiladi?
2. Funktsiyaning monotonlik oraliqlari qanday aniqlanadi?
3. Differentsiallanuvchi funktsiyalarning monotonlik oraliqlari qanday topiladi?
4. Funktsiyaning maksimumi (minimumi) deb nimaga aytiladi?
5. Funktsiyaning ekstremumlari qanday ta'riflanadi?
6. Ekstremumning zaruriy sharti nimadan iborat?
7. Ekstremumning zaruriy sharti etarli bo'ladimi? Misol keltiring.
8. Kritik nuqta deb nimaga aytiladi?
9. Ekstremumning etarli sharti I tartibli hosila orqali qanday ifodalanadi?
10. Ekstremumning etarli sharti II tartibli hosila orqali qanday ifodalanadi?

6-MA'RUZA

FUNKTSIYANI HOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH (DAVOMI).

Tayanch iboralar: funktsiya grafigining qavariqligi va botiqligi, qavariqlik va botiqlikning zaruriy va etarli sharti, burilish nuqtasi va uni topish, funktsiya asimptotalari, funktsiyani to'lik tekshirish. bosqichlari

Ma'ruza rejası:

1. Funktsiyaning botiqlik va qavariqlik sohalari.
2. Funktsiyaning botiqlik va qavariqlik sohaslarini topish.
3. Funktsiyaning burilish nuqtalari va ularni topish.
4. Funktsiya asimptotalari va ularni topish.
5. Funktsiyani to'lik tekshirish.

Adabiyotlar:

[1]. IV bob, §7-9 [2]. VII bob, §4-7

Oldingi ma'ruzada xosila yordamida funktsiyani monotonlik oraliqlari va ekstremumlarini topish masalasini ko'rgan edik. Bu tushunchalar quyidagi geometrik ma'noga ega. Funktsiyaning o'sish sohasida uning argumenti x chapdan o'ngga qarab o'zgarganda, funktsiya grafigi pastdan yuqoriga qarab o'sib boradi. Kamayish sohasida esa aksincha, ya'ni funktsiya grafigi yuqoridan pastga qarab kamayib boradi. Funktsiyaning ekstremumlari uning grafigida yuqori yoki pastki uchlarni ifodalaydi.

Bu ma'ruzada funktsiyani hosila yordamida o'rganishni davom ettiramiz.

III Funktsiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari.

T A ' R I F 4: $y = f(x)$ funktsiya grafigi (a, b) oraliqda **qavariq (botiq)** deyiladi, agarda u o'zining har qanday $M(x, f(x))$, nuqtasiga o'tkazilgan urinmasidan pastda (yuqorida) joylashgan bo'lsa.

Masalan, $y = \sin x$ funktsiyaning grafigi $(0, \pi)$ oralikda qavariq, $(\pi, 2\pi)$ oraliqda esa botiq bo'ladi.

TEOREMA 5: Agarda $f(x)$ funktsiya (a, b) oraliqning har bir nuqtasida ikki marta differentsiallanuvchi va ixtiyoriy $x \in (a, b)$ nuqtada $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) shart bajarilsa, funktsiya grafigi bu oralikda botiq (qavariq) bo'ladi.

Bu teoremaning isbotini adabiyotlar ro'yxatida ko'rsatilgan darsliklardan ko'rish mumkin.

Misol: $f(x)=x^3$ funktsiya uchun $f''(x)=6x>0$ tengsizlik echimi $(0,\infty)$ sohadan iborat bo'ladi va bu sohada uning grafigi botiq bo'ladi. Xuddi shunday $f''(x)=6x<0$ tengsizlik echimi bo'lmish $(-\infty;0)$ sohada funktsiya grafigi qavariq bo'ladi.

T A ' R I F 5: Funktsiya grafigi biror $M(x_0, f(x_0))$ nuqtadan o'tayotganda botiqligini qavariqlikka yoki aksincha qavariqligini botiqlikka o'zgartirsa, bu nuqta uning **burilish (egar) nuqtasi** deyiladi.

Masalan, ko'rib o'tilgan $f(x)=x^3$ funktsiya uchun koordinatalar boshi $O(0,0)$ burilish nuqtasi bo'ladi.

TEOREMA 6: Agarda biror x_0 nuqtada ikkinchi tartibli hosila $f''(x_0)=0$ bo'lib, bu nuqtadan o'tishda $f''(x)$ o'z ishorasini o'zgartirsa, $M(x_0, f(x_0))$ nuqta funktsiya grafigining burilish nuqtasi bo'ladi.

Isbot: $f''(x)<0, x<x_0$ va $f''(x)>0, x>x_0$ xolni ko'ramiz. Oldingi teoremaga asosan, x_0 nuqtaning chap tomonida funktsiya grafigi qavariq, o'ng tomonida esa botiq bo'ladi. Demak, $M(x_0, f(x_0))$ nuqta atrofida funktsiya grafigi botiqlikni qavariqlikka o'zgartiradi, ya'ni bu nuqta grafikning burilish nuqtasi bo'ladi.

Misol sifatida $f(x)=x^3-3x^2$ funktsiya grafigining burilish nuqtasini topamiz. Bu erda $f''(x)=6x-6=0$ tenglamadan $x_0=1$ natijani olamiz. Bu erda $x<1$ bo'lganda $f''(x)<0$ (grafik qavariq) va $x>1$ bulganda $f''(x)>0$ (grafik botiq) bo'lgani uchun $M(1,-2)$ funktsiya grafigining burilish nuqtasi bo'ladi.

IV.Funktsiya grafiginig asimptotalari.

T A ' R I F 6 : $y=kx+b$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chizik $f(x)$ funktsiya grafigining **ogma asimptotasi** deyiladi, agarda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = 0$$

shart bajarilsa.

T A ' R I F 7: $x=a$ tenglamali vertikal to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funktsiya grafigining vertikal asimptotasi deyiladi, agarda x argument a nuqtaga yaqinlashib borganda, funktsiyaning chap va o'ng

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

limitlaridan kamida bittasi cheksiz bo'lsa.

Odatda vertikal asimptotalar funktsiyaning aniqlanish sohasi bo'yicha uning uzilish nuqtalari orqali topiladi. Masalan, $f(x)=1/(x^3-1)$ funktsiya grafigi uchun $x=1$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

Funktsiyaning og'ma asimptotalarining mavjudligi va ularning tenglamasi quyidagi teorema bo'yicha aniqlanadi.

TEOREMA 7: $y=f(x)$ funktsiya grafigi og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$$

limitlar mavjud hamda chekli bo'lishi zarur va etarlidir. Bu holda og'ma asimptota $y=kx+b$ tenglama bilan topiladi.

Isbot: Zaruriylik sharti. Berilgan shartlarni zaruriyligini ko'rsatamiz. $y=kx+b$ to'g'ri chiziq og'ma asimptota bo'lsin. Unda 6-ta'rif va limit xossalriga asosan quyidagilarni yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0 \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] &= 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0 \end{aligned}$$

Bu erdan, eng so'nggi limit qiymati nol bo'lgani uchun,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

ekanligi kelib chiqadi. Og'ma asimptota ta'rifidan yana bir marta foydalanib,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$$

natijani olamiz.

Etarlilik sharti. Teorema shartidagi ikkinchi limitga asosan $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = 0$

tenglikni yoza olamiz. Bu erdan, 6-ta'rifga asosan, $y=kx+b$ to'g'ri chiziq funktsiyaning grafigi uchun og'ma asimptota bo'lishi kelib chiqadi.

Masalan, $f(x)=(2x^2+3x-5)/x$ funktsiya uchun

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = 2, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 2x] = 3$$

ekanligini topamiz. Demak, bu funktsiyaning grafigi uchun $y=2x-3$ to'g'ri chiziq og'ma asimptota bo'ladi.

Yuqorida olingan natijalar bo'yicha $y=f(x)$ funktsiya xususiyatlarini quyidagi tartibda to'liq tadqiqot qilish mumkin:

1. Funktsiyaning $D\{f\}$ aniqlanish sohasini topamiz;
2. Funktsiyani juft yoki toqlikka tekshiramiz;
3. Funktsiyani davriylikka tekshiramiz, davriy bo'lsa, uning davrini aniqlaymiz;
4. Funktsiyaning uzilish nuqtalarini topamiz va ularning turini aniqlaymiz;
5. $f(x)=0$ tenglamadan funktsiya nollarini topamiz va ular orqali funktsiya o'z ishorasini saqlaydigan oraliqlarni va OX o'qi bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz;
6. $f'(x)>0$ va $f'(x)<0$ tengsizliklarni echib, funktsiyaning o'sish va kamayish, ya'ni monotonlik sohalarini aniqlaymiz;
7. $f''(x)=0$ yoki $f''(x)=\pm\infty$ shartlardan kritik nuqtalarni topamiz va bu nuqtalarda funktsiyani I yoki II tartibli hosila yordamida ekstremumga tekshiramiz.

8. $f''(x) > 0$ va $f''(x) < 0$ tengsizliklarni echib, funktsiya grafigining botiqlik va qavariqlik sohalari topamiz;
9. $f''(x) = 0$ yoki $f''(x) = \pm \infty$ shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalarni topib, ularning orasidan funktsiya grafigining burilish nuqtalarini aniqlaymiz;
10. Funktsiya grafigining asimptotalarini, agarda ular mavjud bo'lsa, topamiz.
11. 1-10 kadamlarda olingan natijalar asosida funktsiya grafigini chizamiz.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Funktsiyaning botiqlik (qavariqlik) sohalari qanday ta'riflanadi?
2. Differentsiallanuvchi funktsiyaning botiqlik (qavariqlik) sohalari qanday topiladi?
3. Funktsiyaning burilish nuqtasi nima?
4. Differentsiallanuvchi funktsiyaning burilish nuqtalari qanday topiladi?
5. Funktsiya grafigining og'ma asimptotalari qanday ta'riflanadi?
6. Funktsiya grafigining vertikal asimptotalari qanday ta'riflanadi?
7. Vertikal asimptotalar qanday topiladi?
8. Og'ma asimptotalar mavjudliganing zaruriy va etarli sharti nimadan iborat?
9. Funktsiyani to'liq tekshirish bosqichlarini ko'rsating.

7 - MA'RUZA

ANIQMASLIKLAR VA ULARNI LOPITAL QOIDALARI YORDAMIDA OCHISH.

Tayanch iboralar: $0/0$, ∞/∞ ko'urinishdagi aniqmasliklar, aniqmasliklarni ochish, Lopitalning birinchi qoidasi, Lopitalning ikkinchi qoidasi, Lopital qoidalarining tadbiqlari, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 , $\infty - \infty$ ko'rinishdagi aniqasliklar va ularni ochish.

Ma'ruza rejası:

1. $0/0$, ∞/∞ ko'rinishdagi aniqmasliklar va ularni ochish.
2. Lopitalning I qoidasi.
3. Lopitalning II qoidasi.
4. Lopital qoidalari yordamida ajoyib limitlarni isbotlash.
5. Boshqa ko'rinishdagi aniqmasliklar va ularni ochish.

Adabiyotlar:

[1]. III bob, §20 [2]. VI bob, §3.4

T A ' R I F 1: Agar $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik miqdorlar bo'lsa, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funktsiya $x \rightarrow a$ da $\frac{0}{0}$ **kurinishdagi aniqmaslik** deyiladi.

Masalan, $\frac{\sin x}{x}$ funktsiya $x \rightarrow 0$ da, $\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ funktsiya $x \rightarrow 1$ da, $\frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$

funktsiya esa $x \rightarrow \infty$ da $\frac{0}{0}$ kurinishdagi aniqmasliklardan iborat.

T A ' R I F 2: Agar $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar $x \rightarrow a$ da cheksiz katta miqdorlar bo'lsa, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funktsiya $x \rightarrow a$ da $\frac{\infty}{\infty}$ **ko'rinishdagi aniqmaslik** deyiladi.

Masalan, $\frac{\ln|\sin x|}{\ln|x|}$ funksiya $x \rightarrow 0$ da, $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ funksiya $x \rightarrow \infty$ da $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikdir.

T A ' R I F 3 : $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi $\frac{f(x)}{g(x)}$ aniqmaslikning $x \rightarrow a$ dagi limitini topish shu **anikmaslikni ochish** deb ataladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, aniqmaslikni ochish, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitni

hisoblash uchun bo'linmaning limiti formulasidan foydalanib bo'lmaydi, chunki yoki $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (maxraj nolga teng) yoki surat va maxraj limitlari chekli emas.

Limitlar mavzusi bo'yicha misollar echganimizda aniqmasliklarni ochish masalasi bilan shug'ullangan edik. Ammo unda har bir aniqmaslikni ochish uchun ko'paytuvchilarga ajratish, qushmasiga ko'paytirish, eng katta darajasiga bo'lish, ajoyib limitlarga keltirish kabi sun'iy usullardan foydalanilgan edi. Shunday qilib, har bir aniqmaslikni ochish uchun o'ziga xos xususiy usuldan foydalangan edik. Endi aniqmasliklarni ochishning umumiy qoidasini korib chiqamiz. Bu qoidani frantsuz matematigi Fransua Lopital (1661-1704y.) o'zining 1696 yilda bosmadan chiqqan «Cheksiz kichik miqdorlar taxlili» degan kitobida birinchi marta keltirgan va shuning uchun u Lopital qoidasi nomi bilan tarixga kirgan. Aslida bu qoidani Lopitalning ustozi va do'sti, shveytsariyalik matematik Iogann Bernulli (1667-1748) topgan. I. Bernulli Parijga kelgan paytida boy oiladan chiqqan va matematika bilan qiziquvchi Lopital bilan tanishadi. Lopitalning iltimosiga ko'ra u o'sha paytlarda Leybnits va Nyuton tomonidan yangi yaratilgan differentsial hisob bo'yicha Lopitalga ma'ruzalar o'qiydi. Lopitalning xizmati shundan iboratki, u bu ma'ruzalar asosida differentsial hisob bo'yicha yuqorida ko'rsatilgan birinchi darslikni yozdi.

T E O R E M A 1 : $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqta atrofida aniqlangan va differentsillanuvchi bo'lib, $g'(x) \neq 0$ va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad (1)$$

tengliklar bajarilsin. Bu holda, agarda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo'lsa, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ham mavjud bo'ladi va ushbu tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2).$$

I s b o t : Avval $a < \infty$ xolni ko'ramiz. Teorema shartiga ko'ra a nuqta atrofida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar differentsiallanuvchi bo'lgani uchun, ular bu erda uzluksiz bo'ladilar va shuning uchun ham, (1) shartga ko'ra,

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad g(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad (3)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. a nuqta atrofidagi ixtiyoriy (a, x) oraliqni qaraymiz. Teorema shartlariga asosan bu oraliqda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz,

differentiallanuvchi va $g'(x) \neq 0$, ya'ni ular Koshi teoremasi shartlariga bo'ysunadi. Shuning uchun, Koshi teoremasiga asosan, shunday $c \in (a, x)$ nuqta mavjudki,

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (4)$$

Bu erda (3) tengliklardan ham foydalanildi. (4) tenglikda $x \rightarrow a$ da limit olamiz va bunda $c \rightarrow a$ bo'lishidan, chunki $c \in (a, x)$, foydalanib, ushbu natijalarni olamiz:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (5)$$

Limitning qiymati undagi o'zgaruvchi miqdorni qanday belgilanishiga bog'liq emas va shuning uchun (5) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (6)$$

(5) va (6) tengliklardan isbotlanishi kerak bo'lgan

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (7)$$

natijani olamiz.

Endi $a = \infty$ holni ko'ramiz, ya'ni $x \rightarrow \infty$. Bu holda $z = \frac{1}{x}$ yangi o'zgaruvchini kiritsak, unda $x \rightarrow \infty$ bo'lganda $z \rightarrow 0$ bo'ladi. Bu erda $x = \frac{1}{z}$ bo'lgani uchun va (7) tenglikka asosan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left[f(\frac{1}{z}) \right]'}{\left[g(\frac{1}{z}) \right]'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{z})(\frac{1}{z})'}{g'(\frac{1}{z})(\frac{1}{z})'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

natijani olamiz. Teorema to'liq isbot bo'ldi.

TEOREMA 2: $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar 1-teorema shartlarini qanoatlantirsin, ammo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad (8)$$

munosabat o'rinli bo'lsin. Bu holda ham (2) tenglik o'z kuchini saqlab qoladi.

Bu teorema isbotini darsliklardan ko'rib chiqish mumkin.

Ko'rib o'tilgan teoremalardagi (2) tenglik bilan ifodalanadigan tasdiqlar mos ravishda **Lopitalning I va II qoidalari** deb ataladi.

Shunday qilib $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi $\frac{f(x)}{g(x)}$ aniqmaslikni Lopital qoidasi

yordamida ochish uchun $f(x)$ surat va $g(x)$ maxrajdan alohida-alohida hosila olib, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ hosilalar nisbatining limitini topish kerak.

Lopital qoidasining tadbiqlari sifatida oldin ko'rib o'tilgan va matematikada ajoyib limitlar deb ataluvchi bir nechta limitni hisoblaymiz.

1. $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ funktsiyalar $x \rightarrow 0$ da cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi va shuning uchun $\frac{\sin x}{x}$ ifoda $x \rightarrow 0$ da $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi.

Lopitalning I qoidasiga asosan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Bu natija 1 ajoyib limitni ifodalaydi.

2. $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = x$ funktsiyalar uchun $f(0) = \ln 1 = 0$, $g(0) = 0$. Demak, $x \rightarrow 0$ bo'lganda $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln(1+x)}{x}$ ifoda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikdan iborat.

Bu aniqmaslikni ochish uchun Lopitalning I qoidasiga murojaat qilamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(1+x)]'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} \cdot (1+x)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Bu limit matematikada III ajoyib limit deb ataladi.

Xuddi shunday ravishda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

3. $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = x$ differentsiallanuvchi funktsiyalar uchun $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ bo'ladi. Unda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = 1.$$

Bu natija IV ajoyib limit deyiladi.

Talabalarga mustaqil ish sifatida

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

ekanligini ko'rsatish tavsiya etiladi.

4. $f(x) = (1+x)^\alpha - 1$ (α - $\forall$ hakikiy son) va $g(x) = x$ funktsiyalar $x=0$ nuqta atrofida differentsiallanuvchi va $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. Bu holda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(1+x)^\alpha - 1]'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha \cdot (1+0)^{\alpha-1} = \alpha.$$

Bu natija V ajoyib limit deyiladi.

Izoxlar: 1. Agarda (2) formulada $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ifoda $x \rightarrow a$ bo'lganda yana $0/0$ yoki ∞/∞

ko'rinishdagi aniqmaslikdan iborat bo'lib, $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar 1-teorema yoki 2-

teorema shartlarini qanoatlantirsin. Bu holda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ mavjud bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} \quad (9)$$

Shunday qilib, aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini bir necha marta ketma-ket qo'llash mumkin. Buning uchun har gal teorema shartlarini tekshirib ko'rish kerak.

Misol sifatida quyidagi limitni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[(x+1)^2]'}{(x^2+1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x+1)}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+0}{1} = 1. \end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo'lsa, unda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud. Ammo teskari tasdiq doimo

ham o'rinli bo'lavermaydi, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud bo'lib, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud

bo'lmasligi mumkin.

Misol: $f(x)=x+\sin x$, $g(x)=x$, $x \rightarrow \infty$. Bu holda

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+\sin x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Ammo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+\sin x)'}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\cos x}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\cos x) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x \end{aligned}$$

bo'lgani uchun bu limit mavjud emas.

Shartli ravishda $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ kabi belgilangan aniqmasliklardan tashqari shartli

ravishda $\infty \cdot 0$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ , $\infty - \infty$ kabi belgilanadigan aniqmasliklar ham mavjud.

T A ' R I F 4 : Agarda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ bo'lsa, $f(x) \cdot g(x)$ ifoda $x \rightarrow a$ bo'lganda **$0 \cdot \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik** deyiladi.

Bu aniqmaslikni ochish uchun uni $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ko'rinishda yozib, $\frac{0}{0}$

aniqmaslikka yoki $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ ko'rinishda yozib, $\frac{\infty}{\infty}$ aniqmaslikka keltiriladi va

sungra Lopital qoidasi qo'llaniladi.

Misol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

T A ' R I F 5 : Agarda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ bo'lsa, $[f(x)]^{g(x)}$ ifoda $x \rightarrow a$ bo'lganda ***1[∞] ko'rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Bu aniqmaslikni ochish uchun $y = [f(x)]^{g(x)}$ deb belgilaymiz. Bu tenglikni ikkala tomonidan logarifm olamiz:

$$\ln y = \ln [f(x)]^{g(x)} = g(x) \ln f(x) = [\ln f(x)] g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \ln \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] = \ln 1 = 0.$$

Demak, $[\ln f(x)] g(x)$ ifoda $0 \cdot \infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik va uni Lopital qoidasi yordamida ochish mumkin. Faraz qilamiz

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} \{ [\ln f(x)] g(x) \} = b$$

bo'lsin. Bu erdan kelib chiqadiki,

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \ln \left[\lim_{x \rightarrow a} y \right] = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} y = e^b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^b.$$

Misol sifatida $f(x) = 1 + \frac{1}{x}, g(x) = x, x \rightarrow \infty$ deb olib,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e,$$

ya'ni ikkinchi ajoyib limitni isbotlaymiz.

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = (\infty \cdot 0) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

Shunday qilib, bizning misolda $b=1$ chiqdi. Demak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e.$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. $0/0$ ko'rinishdagi aniqmaslik ta'rifini bering.
2. ∞/∞ ko'rinishdagi aniqmaslik qanday ta'riflanadi?
3. Aniqmasliklarni ochish deb nimaga aytiladi?
4. Lopitalning I qoidasi nimadan iborat?
5. Lopitalning II qoidasi nimadan iborat?
6. Lopital qoidasi yordamida I ajoyib limit qanday isbotlanadi?
7. Lopital qoidasiga teskari tasdik o'rinishimi?
8. $0/0$ va ∞/∞ aniqmaslikdan tashqari yana qanday aniqmasliklarni bilasiz?
9. II ajoyib limit Lopital qoidasi yordamida qanday isbotlanadi?

8 - MA'RUZA

BOSHLANGICH FUNKTSIYA. INTEGRALLAR JADVALI.

Tayanch iboralar: Boshlangich funktsiya, aniqmas integral, integral ostidagi ifoda, integrallar jadvali.

Ma'ruza rejasi:

1. Boshlang'ich funktsiya va uning xossalari.
2. Aniqmas integral va uning xossalari.
3. Integrallar jadvali.

Adabiyotlar:

[1]. III bob, §1-3 [2]. IX bob, §1

a) Boshlangich funktsiya va uning xossalari.

TA'RIF: Biror oraliqda aniqlangan $f(x)$ funktsiya uchun bu oraliqning hamma qiymatlarida

$$F'(x)=f(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funktsiya $f(x)$ funktsiyaning boshlangich funktsiyasi deyiladi.

M i s o l : 1) $F(x)=\frac{a^x}{\ln a}$, ($a \neq 1, a > 0$) butun sonlar o'qida $f(x)=a^x$ funktsiyaning boshlangich funktsiyasi bo'ladi, chunki x ning istalgan qiymatida

$$F'(x)=\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'=a^x=f(x)$$

tenglik to'g'ri bo'ladi.

2) $F(x)=\frac{x^5}{5}$ funktsiya sonlar o'qining xamma nuqtalarida $f(x)=x^4$ funktsiyaning boshlangich funktsiyasi bo'ladi, chunki x ning istalgan qiymatida uning hosilasiga nisbatan

$$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=x^4=f(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Berilgan funktsiyaning boshlangich funktsiyasini topish masalasi bir qiymatli xal qilinmaydi. Haqiqatan ham, agar $F(x)$ funktsiya $f(x)$ ning boshlangich funktsiyasi bo'lsa, u holda $F(x)+C$ funktsiya ham (bunda C ixtiyoriy o'zgarmas son) $f(x)$ ning boshlangich funktsiyasi bo'ladi, chunki C ning istalgan qiymati uchun $(F(x)+C)'=f(x)$ bo'ladi.

M i s o l: $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$ funktsiya $f(x) = a^x$ funktsiyaning boshlangich funktsiyasi yuqorida ko'rildi.

$$(F(x) + C)' = \left(\frac{a^x}{\ln a} + C \right)' = a^x = f(x)$$

tenglikdan esa $\frac{a^x}{\ln a} + C$ funktsiya xam a^x funktsiyaning boshlangich funktsiyasi ekanligi kelib chikadi.

Yuqoridagi mulohazalardan boshlangich funktsiyalarning quyidagi xossasi kelib chiqadi.

LEMMA: Agar $F(x)$ va $\Phi(x)$ funktsiya $f(x)$ funktsiyaning boshlangich funktsiyalari bo'lsa, u holda $\Phi(x) = F(x) + C$ tenglik o'rinli bo'ladi, bunda C ixtiyoriy o'zgarmas son.

I s b o t: $F(x)$ va $\Phi(x)$ funktsiya $f(x)$ ning boshlangich funktsiyalar bo'lgani uchun

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ba} \quad \Phi'(x) = f(x)$$

tenglik to'g'ri bo'ladi.

Yordamchi $Q(x)$ funktsiyani kiritamiz :

$$\Phi(x) - F(x) = Q(x).$$

Uning hosilasi x ning hamma qiymatlarida nolga teng, haqiqatan ham

$$Q'(x) = [\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Endi $Q'(x) = 0$ tenglikdan $Q(x)$ funktsiyaning o'zgarmas son ekani kelib chiqishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, x_0 argumentning tayinlangan qiymati, x esa uning istagan qiymati bo'lsin. $[x_0, x]$ oraliqda Lagranj formulasini tuzamiz:

$$Q(x) - Q(x_0) = Q'(\xi)(x - x_0),$$

bunda $x_0 < \xi < x$ bo'ladi.

Bu erdan $Q'(x) = 0$ tenglik x ning hamma qiymatida, shu jumladan ξ da ham $Q'(\xi) = 0$ bo'lgani uchun $Q(x) - Q(x_0) = 0$ ya'ni $Q(x) = Q(x_0)$ ni hosil qilamiz. Bu holda $Q(x)$ funktsiyaning qiymati x ning hamma qiymatida bir xil bo'lishini bildiradi. Shunday qilib, $Q(x) = C$ yoki

$$\Phi(x) - F(x) = C$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Lemma isbotlandi.

Isbotlangan lemmadan, berilgan funktsiyaning ikkita boshlangich funktsiyasi bir-biridan faqat o'zgarmas songa farq qilishi kelib chiqadi.

b) Aniqmas integral va uning xossalari.

TA'RIF: Agar $F(x)$ funktsiya biror oraliqda $f(x)$ funktsiyaning boshlangich funktsiyasi bo'lsa, u holda $F(x) + C$ (bunda C ixtiyoriy doimiy) funktsiyalar to'plami shu kesmada $f(x)$ funktsiyaning *aniqmas integrali* deyiladi va

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

kabi belgilanadi. Bu erda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$ integral ostidagi funktsiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, x integrallash o'zgaruvchisi deyiladi.

Aniqmas integralni topish jarayoni integrallash deyiladi. Kesmada uzluksiz bo'lgan istalgan funktsiya shu oraliqda boshlangich funktsiyaga ega, demak, aniqmas integralga ham ega ekanini isbotsiz aytib o'tamiz.

Misol: 1) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 2) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$
3) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

Aniqmas integral quyidagi xossalarga ega :

I. Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funktsiyaga teng, ya'ni

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

Isbot: $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$

I. Aniqmas integralning differentsiali integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$$

II. Biror funktsiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funktsiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yigindisiga teng, ya'ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

III. Biror funktsiyaning differentsialidan olingan aniqmas integral shu funktsiya bilan o'zgarmas yigindisiga teng, ya'ni

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

IV. O'zgarmas k ko'paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

V. Chekli sondagi funktsiyalarning algebraik yigindisidan olingan aniqmas integral shu funktsiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yigindisiga teng, ya'ni

$$\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$$

B) Asosiy integrallar jadvali.

1. $\int dx = x + c$	2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$	4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$	6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
7. $\int e^x dx = e^x + c$	8. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$11. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$$

$$13. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$$

$$14. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$15. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$16. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

$$17. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c$$

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Berilgan funktsiyalarning boshlangich funktsiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Boshlangich funktsiya qanday xossalarga ega?
3. Berilgan funktsiyaning aniqmas integrali deb nimaga aytiladi?
4. Aniqmas integralning eng oddiy xossalarini keltiring.
5. Integrallar jadvalini yozing.

9- MA'RUZA

INTEGRALLASH USULLARI.

Tayanch iboralar: Bevosita integrallash, differentsial ostiga kiritish, o'zgaruvchilarni almashtirish, bo'laklab integrallash.

Ma'ruza rejasi:

1. Integrallashning eng oddiy usullari.
2. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish.
3. Bo'laklab integrallash usuli.

Adabiyotlar:

[1]. VI bob, §4-6 [2]. IX bob, §2,4

a) Bevosita integrallash usuli deb V va VI xossalarni qo'llash va asosiy integrallar jadvalidan foydalanib integrallashga aytiladi.

M i s o l: Integralni toping:

$$\int \frac{7x - 5x^2 + 1}{x^2} dx$$

Echimi: Suratni maxrajga bo'lib, keyin V va VI xossalarni qo'llab, integral ostidagi funktsiyani almashtiramiz va integrallar jadvalidan foydalanamiz:

$$\int \frac{7x - 5x^2 + 1}{x^2} dx = \int \left(\frac{7}{x} - 5 + \frac{1}{x^2} \right) dx = 7 \int \frac{dx}{x} - 5 \int dx + \int \frac{dx}{x^2} = 7 \ln|x| - 5x - \frac{1}{x} + c.$$

b) Differentsial belgisi ostiga kiritish usuli aniqmas integralning ushbu invariantlik xossasiga asoslangan:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + c.$$

Bu erda $u=u(x)$ ixtiyoriy differentsiallanuvchi funktsiyani ifodalaydi.

M i s o l: 1) $\int (x+4)^5 dx = \int (x+4)^5 d(x+4) = \frac{(x+4)^6}{6} + c.$

Bu erda $dx=d(x+4)$ ligidan foydalandik.

$$2) \int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{2}{2} \int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c.$$

Bu erda oldin integralni 2 songa ko'paytirdik va ayni shu paytda uni 2 songa bo'ldik. Undan keyin $2x dx = dx^2 = d(1+x^2)$ ekanligidan foydalandik.

$$3) \int \frac{dx}{4x-11} = \frac{4}{4} \int \frac{dx}{4x-11} = \frac{1}{4} \int \frac{d(4x-11)}{4x-11} = \ln|4x-11| + c.$$

v) Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli.

Integrallar jadvaliga kirmagan integralni hisoblash kerak bo'lsin. x ni t erkli o'zgaruvchining biror differentsiallanuvchi funktsiyasi orqali ifodalab, integrallashning yangi t o'zgaruvchisini kiritamiz: $x=\varphi(t)$, bunga teskari $t=\psi(x)$ funktsiya mavjud bo'lsin, u holda

$$dx=\varphi'(t)dt$$

bo'lib

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

ekanini isbotlaymiz. Tenglikning xar ikkala tomonining hosilalari teng ekanligi ko'rsatilsa, teorema isbotlangan bo'ladi.

$F(x)$ funktsiya $f(x)$ funktsiyaning boshlangich funktsiyasi bo'lsin, u holda

$$(\int f(x)dx)' = F(x) ,$$

$$\begin{aligned} (\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt)'_x &= (\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)'_t \cdot \frac{dx}{dt} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \\ &= f(\varphi(t)) = f(x). \end{aligned}$$

Teorema isbotlandi.

Misol: 1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \text{Echimi: } \int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+4}=t, x+4=t^2 \\ x=t^2-4 \\ dx=2tdt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{2tdt}{(t^2-4) \cdot t} = 2 \int \frac{dt}{t^2-2^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + C \end{aligned}$$

Misol: 2) $\int \sqrt{1-x^2} dx$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \text{Echimi: } \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} x = \cos t, dx = -\sin t dt \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t \end{array} \right] = \\ &= -\int \sin^2 t dt = -\int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos 2t dt - \frac{1}{2} \int dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \cos 2t d2t - \frac{1}{2} t = \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{1}{2} t + c = \frac{1}{4} \sin 2 \arccos x - \frac{1}{2} \arccos x + c = \\ &= \frac{1}{2} \sin \arccos x \cdot \cos \arccos x - \frac{1}{2} \arccos x + c = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1}{2} \arccos x + c \end{aligned}$$

g) Bo'laklab integrallash usuli.

Faraz qilaylik, $u(x)$ va $v(x)$ funktsiyalar x ning differentsiallanuvchi funktsiyalari bo'lsin. Bu funktsiyalar ko'paytmasining differentsialini topamiz:

$$d(u \cdot v) = vdu + u dv .$$

Bundan

$$u dv = d(uv) - v du .$$

Oxirgi tenglikning ikkala qismini integrallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du$$

yoki

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Bu formula bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

Odatda, $\int x^n \cos x dx$, $\int x^n \sin x dx$, $\int \sqrt{a-x^2} dx$, $\int x^n a^x dx$, $\int x^n \ln x dx$ va shularga o'xshash integrallar bo'laklab integrallash formulasi orqali hisoblanadi.

Misol: 1) $\int \sqrt{1-x^2} dx$ integralni toping.

Echimi:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-x^2} = u, dx = dv \\ -x dx \\ \sqrt{1-x^2} = du, x = v \end{array} \right] = \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx - \arccos x + C \end{aligned}$$

Quyidagi tenglik hosil bo'ldi:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx - \arccos x + C$$

Demak,

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x \cdot \sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{\arccos x}{2} + C.$$

Misol: 2) $\int x \cdot 5^x dx$ integralni toping.

Echimi:

$$\int x \cdot 5^x dx = \left[\begin{array}{l} x = u, 5^x dx = dv \\ dx = du, \frac{5^x}{\ln 5} = v \end{array} \right] = \frac{x \cdot 5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5} \int 5^x dx = \frac{x \cdot 5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln^2 5} \cdot 5^x + C.$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Bevosita integrallash usuli ta'rifini keltiring.
2. Differentsial ostiga kiritish usuli nimadan iborat?
3. Bo'laklab integrallash formulasini chiqaring.
4. Aniqmas integralda uzgaruvchilarni almashtirish usuli nimadan iborat?

10 - MA'RUZA

KVADRATIK UCHHAD KATNASHGAN BA'ZI FUNKTSIYALARNI INTEGRALLASH. ENG SODDA RATSIONAL KASRLARNI INTEGRALLASH.

Tayanch iboralar: kvadratik uchxad, eng sodda ratsional kasr, rekurrent formula.

Ma'ruza rejasi:

1. Kvadratik uchhad.
2. Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash.
3. Ratsional kasr.
4. Rekkurent formula.

Adabiyotlar:

[1]. VI bob, §8-9 [2]. IX bob, §3,5

a) Kvadratik uchhad qatnashgan ba'zi funktsiyalarni integrallash.

Ushbu integrallarni qaraymiz:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad \bar{I}_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Avval maxrajdan kvadrat uchhadni yigindi yoki ayirma ko'rinishiga keltiramiz:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] = \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm \kappa^2 \right] \end{aligned}$$

bu erda

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm \kappa^2$$

belgi kiritildi.

Shunday qilib,

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm \kappa^2} = \left[\begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = t, \\ dx = dt \end{array} \right] = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm \kappa^2}$$

Bu esa jadvaldagi integraldir.

Shu kabi,

$$\bar{I}_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \kappa^2}} = \left[x + \frac{b}{2a} = t \right] = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm \kappa^2}}$$

Misol: Ushbu integralni hisoblang :

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$$

Echimi: $\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} =$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 10 - 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 6} =$
 $= \left[x + 2 = t \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 6} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C$

b) Umumiyrok ko'rinishdagi integrallarni qaraymiz:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx, \bar{I}_2 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Integral ostidagi funktsiyani bunday almashtiramiz:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + (B - \frac{Ab}{2a})}{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c} + (B - \frac{A}{2a}) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c} + (B - \frac{A}{2a}) \cdot J_1$$

$$I_2 = \left[\begin{matrix} ax^2 + bx + c = t \\ (2ax + b)dx = dt \end{matrix} \right] = \frac{A}{2a} \int \frac{dt}{t} + (B - \frac{A}{2a}) \cdot J_1$$

$$I_2 = \frac{A}{2a} \ln|t| + (B - \frac{A}{2a}) I_1 = \frac{A}{2a} \ln|ax^2 + bx + c| + (B - \frac{A}{2a}) I_1 + C$$

Bu erdagi I_1 integralning hisoblanishi yuqorida ko'rsatilgan.

Shu kabi $\bar{I}_2$ integral ham hisoblanadi.

$$\bar{I}_2 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{A \cdot \frac{(2ax + b)}{2a} + (B - \frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx =$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + (B - \frac{A}{2a}) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx +$$

$$+ (B - \frac{Ab}{2a}) \bar{I}_1 = \left[\begin{matrix} ax^2 + bx + c = t \\ (2ax + b)dx = dt \end{matrix} \right] = \frac{A}{2a} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \bar{I}_1 =$$

$$= \frac{A}{a} \sqrt{t} + (B - \frac{Ae}{2a}) \bar{I}_1 = \frac{A}{a} \sqrt{ax^2 + ex + c} + (B - \frac{Ae}{2a}) \bar{I}_1 + C$$

$\bar{I}_1$ integralni echilishi yuqorida ko'rsatilgan.

Misol: Quyidagi integralni hisoblang :

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx$$

Echimi:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4) + (3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx - \int \frac{7 \cdot dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} = \\ &= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C \end{aligned}$$

v) Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash.

Quyidagi ratsional kasrlarni eng sodda ratsional kasrlar deb aytiladi:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^\kappa}, \quad \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } \frac{(Ax+B)^n}{(x^2+px+q)^n}$$

I va II turdagi oddiy kasrlarni integrallash jadval integrallariga oson keltiriladi:

$$\text{I. } \int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \int \frac{A dx}{(x-a)^\kappa} &= A \int (x-a)^{-\kappa} d(x-a) = \\ &= A \frac{(x-a)^{-\kappa+1}}{-\kappa+1} + C = \frac{A}{(1-\kappa)(x-a)^{\kappa-1}} + C \end{aligned}$$

III. Turdagi oddiy kasrning integralini qaraymiz: $\frac{p^2}{4} - q < 0$ bo'lsin, unda

$$\begin{aligned} \int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\ &= \left[\begin{array}{l} x^2+px+q=t \\ (2x+p)dx=dt \end{array} \right] = \frac{A}{2} \int \frac{dt}{t} + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\ &= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| - (B - \frac{Ap}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C$$

Endi IV turdagi oddiy kasrning integralini hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} \text{IV. } \int \frac{(Ax + B)dx}{(x^2 + px + q)^n} &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) + B - \frac{Ap}{2}}{(x^2 + px + q)^n} dx = \frac{A}{2} \int \frac{(2x + p)dx}{(x^2 + px + q)^n} + \\ &+ (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{d(x + \frac{p}{2})}{((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n} = \frac{A}{2} I + (B - \frac{Ap}{2}) \cdot \bar{I} \end{aligned}$$

Bu erda

$$I = \int \frac{(2x + p)dx}{(x^2 + px + q)^n}, \quad \bar{I} = \int \frac{d(x + \frac{p}{2})}{((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n}$$

bo'ladi.

$$\begin{aligned} 1) \quad I &= \int \frac{(2x + p)dx}{(x^2 + px + q)^n} = \left[\begin{array}{l} x^2 + px + q = t \\ (2x + p)dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^n} = \\ &= \frac{1}{(1-n)(x^2 + px + q)^{n-1}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \bar{I} &= \int \frac{d(x + \frac{p}{2})}{((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n} = \left[\begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t \\ dx = dt \\ q - \frac{p^2}{4} = a^2 \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 + a^2 - t^2}{(t^2 + a^2)^n} dt = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^n} \end{aligned} \quad (1)$$

Oxirgi integralga bo'laklab integrallash formulasini qo'llaymiz:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^n} = \left[\begin{array}{l} u = t, dv = \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^n} \\ du = dt, v = \frac{1}{2(1-n)(t^2 + a^2)^{n-1}} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{t}{2(1-n)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n-1}}$$

Agar
$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}$$

belgi kiritsak, u holda (1) dagi formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)a^2(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}$$

yoki

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \left(\frac{t}{(t^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right) \quad (2)$$

Bu formula bo'yicha I_{n-1} integralni I_{n-2} orqali ifodalaymiz, so'ngra I_{n-2} ni I_{n-3} orqali ifodalaymiz va hokazo. Bu jarayon quyidagi integralni hosil qilgunimizcha davom etadi:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

(2) formula keltirish yoki rekurrent formula deyiladi.

Misol: $\int \frac{(x-1)dx}{(x^2 + 2x + 3)^2}$ integralni hisoblang.

Echimi: $\int \frac{(x-1)dx}{(x^2 + 2x + 3)^2} =$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - 2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{(x^2 + 2x + 3)^2} - 2 \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)} - 2 \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)} - 2I_2. \end{aligned} \quad (3)$$

I_2 integralni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2 + 2)^2} = \left[\begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{dt}{(t^2 + 2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{t^2 + 2 - t^2}{(t^2 + 2)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 2} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 2)^2} \end{aligned}$$

Oxirgi integralni qaraymiz:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{td(t^2 + 2)}{(t^2 + 2)^2} = -\frac{1}{2} \int td\left(\frac{1}{t^2 + 2}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{l} u=t, dv=d\left(\frac{1}{t^2+2}\right) \\ du=dt, v=\frac{1}{t^2+2} \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} = \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned}$$

Demak

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right] + C$$

bo'ladi.

I_2 integral qiymatini (3) tenglikka qo'ysak, berilgan integralning qiymati kelib chiqadi :

$$\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Kvadrat uchxad katnashgan $I_1, \overline{I_1}, I_2, \overline{I_2}$ integrallarni yozing.
2. $\overline{I_1}$ va $\overline{I_2}$ integrallarning hisoblash tartibini ko'rsating.
3. Eng sodda ratsional kasr deb qanday kasrlarga aytiladi?
4. Eng sodda ratsionil kasrlarni integrallash tartibini ko'rsating.

11 - MA'RUZA

RATSIONAL KASRLARNI ENG SODDA RATSIONAL KASRLARGA AJRATISH. RATSIONAL KASRLARNI INTEGRALLASH.

Tayanch iboralar: Ratsional kasr, darajali ko'pxad, to'gri ratsional kasr, noto'gri ratsional kasr.

Ma'ruza rejasi:

1. Ratsional kasrlarni eng sodda ratsional kasrlarga ajratish.
2. Ratsional kasrlarni integrallash.

Adabiyotlar:

[1]. VI bob, §7-9 [2]. IX bob, §5

a) Ratsional kasrlarni eng sodda ratsional kasrlarga ajratish.

Ma'lumki ,

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_0x^n + a_n$$

funktsiya darajali ko'pxad deyiladi, bunda $a_0, a_1, a_2, \dots$, ko'pxadning koeffitsientlari, n esa daraja ko'rsatgichi.

TA'RIF: Ikki ko'pxad nisbati ratsional kasr deyiladi.

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{e_0x^m + e_1x^{m-1} + \dots + e_{m-1}x + e_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}$$

Agar $m < n$ bo'lsa, u holda ratsional kasr to'gri, agar $m \geq n$ bo'lsa, u holda ratsional kasr noto'gri kasr deb aytiladi.

$R(x)$ ratsional kasr noto'gri bo'lgan xollarda kasrning $Q_m(x)$ suratini $P_n(x)$ maxrajiga bo'lish yuli bilan uning butun qismini ajratish kerak:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = Q(x) + \frac{r(x)}{P_n(x)}$$

Bu erda $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ to'gri kasr, chunki $r(x)$ koldikning darajasi $P_n(x)$ ning darajasidan kichik.

Misol: Ushbu

$$R(x) = \frac{2x^4 - 3x^3 + 1}{x^2 + x - 2}$$

noto'gri ratsional kasrning butun qismini ajrating.

Echimi:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 3x^3 + 1 & x^2 + x - 2 \\ \hline 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 & 2x^2 - 5x + 9 \\ \hline -5x^3 + 4x^2 + 1 & \\ \hline 5x^3 - 5x^2 + 10x & \\ \hline -9x^2 - 10x + 1 & \\ \hline 9x^2 + 9x - 18 & \\ \hline -19x + 19 & \end{array}$$

Demak,

$$\frac{2x^4 - 3x^3 + 1}{x^2 + x - 2} = 2x^2 - 5x + 9 + \frac{-19x + 19}{x^2 + x - 2}$$

Ushbu
$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

to'g'ri ratsional kasrni qarab chiqamiz Bu kasrning $P_n(x)$ maxraji

$$(x - \alpha)^k, (x^2 + px + q)^s$$

ko'rinishdagi chiziqli va kvadratik ko'paytuvchilarga yoyiladi. Bu erda $(x - \alpha)^k$

ko'rinishdagi ko'paytuvchi k karrali haqiqiy ildizga mos keladi, $(x^2 + px + q)^s$

ko'rinishdagi ko'paytuvchi s karrali kompleks qo'shma ildizlarga mos keladi:

$$P_n(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot (x - \alpha_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_r)^{k_r} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdot$$

$$\cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_lx + q_l)^{s_l}. \quad (1)$$

TEOREMA: Har qanday $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ ratsional kasrni, bunda $P_n(x)$ (1)

formula bo'yicha ko'paytuvchilarga ajratilgan, $\frac{A}{x - \alpha}, \frac{A}{(x - \alpha)^k}, (k \geq 2$ va

butun), $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}, \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^s}, (s \geq 2$ va butun) turdagi oddiy kasrlarning

yigindisi ko'rinishida ifodalash mumkin. Bunda:

1) (1) yoyilmaning $(x - \alpha)$ ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga bitta $\frac{A}{x - \alpha}$ kasr mos

keladi;

2) (1) yoyilmaning $(x - \alpha)^k$ ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)^k} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)},$$

kasrlar yigindisi mos keladi;

3) (1) yoyilmaning $x^2 + px + q$ ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga bitta $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$

kasr mos keladi;

4) (1) yoyilmaning $(x^2 + px + q)^s$ ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga

$$\frac{A_1x + B_1}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^{s-1}} + \dots + \frac{A_sx + B_s}{(x^2 + px + q)}$$

kasrlar yig'indisi mos keladi;

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Yuqorida ko'rsatilgan ratsional kasrning oddiy kasrlar yig'indisi yoyilmasidagi $A, B, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ koeffitsientlarni aniqlash uchun

turli usullar mavjud. Ulardan bittasi noma'lum koeffitsientlar usulidir. Uni misolda quramiz.

Misol: Ushbu

$$R(x) = \frac{x+2}{x^3-3}$$

ratsional kasrni oddiy kasrlar yig'indisiga ajrating.

Echimi: Maxrajni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

Keltirilgan teorema asosan berilgan kasrni oddiy kasrlarga ajratish bunday ko'rinishda bo'lishi mumkin:

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

A, B, D noma'lum koeffitsientlarni topishga kirishamiz. Buning uchun oxirgi tenglikning o'ng qismini umumiy maxrajga keltiramiz va hosil qilingan tenglikning ikkala qismida maxrajni tashlab yuboramiz. Bu amallar natijasida quyidagi ayniyat kelib chiqadi :

$$x+2 \equiv A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Dx(x-1) ,$$

$$x+2 \equiv (A+B+D)x^2 + (B-D)x - A$$

Ko'pxadlarning tengligidan quyidagi A, B, D larga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz va ildizlarini topamiz:

$$\begin{cases} A+B+D=0 \\ B-D=1 \\ -A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=\frac{3}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Demak,
$$\frac{x+2}{x^3-x} = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

Misol: Ushbu

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-x+2}$$

ratsional kasrni oddiy kasrlar yig'indisiga ajrating.

Echimi: Berilgan ratsional kasrning maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz :

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-x+2} = \frac{x+1}{(x+2)(x^2-x+1)}$$

Yuqorida keltirilgan teorema asosan

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Yuqoridagi misoldagiday, bu tenglikni ham o'ng qismini umumiy maxrajga keltiramiz va hosil qilingan tenglikning ikkala qismidagi maxrajlarni tashlab yuboramiz. Natijada quyidagi ayniyat hosil bo'ladi:

$$x+1 \equiv (A+B)x^2 + (-A+2B+C)x + A+2C$$

Ko'phadlarning tengligidan foydalanib A.B.C larga nisbatan tenglamalar sistemasini tuzib uning ildizlarini topamiz:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + 2B + C = 1 \\ A + 2C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{7} \\ B = \frac{1}{7} \\ C = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Shunday qilib, ratsional kasr quyidagi sodda ratsional kasrlarga yig'indisiga ajraldi :

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-x+2} = -\frac{1}{7(x+2)} + \frac{x+4}{7(x^2-x+1)}$$

b) Ratsional kasrlarni integrallash.

Ratsional kasrni integrallash uchun quyidagilarni bajarish kerak:

- 1) Uning to'g'ri yoki noto'g'ri kasr ekanligini tekshirib va aks holda ya'ni, noto'g'ri kasr bo'lganda, oldin uning butun qismini ajratib, shundan keyin ko'phad butun qismi va ratsional kasr qismlari yig'indisi ko'rinishida yoziladi;
- 2) To'g'ri ratsional kasr oddiy ratsional kasrlar yigindisiga ajratiladi;
- 3) Yoyilmaning koeffitsientlari topiladi;
- 4) Ratsional kasrning integrali hisoblanadi.

Misol: Integralni hisoblang :

$$\int \frac{(x^2+3)dx}{x(x-1)(x+2)}$$

Echimi: Yuqoridagi ko'rsatmalarni birin-ketin bajarib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\frac{x^2+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{x+2},$$

$$x^2+3 \equiv (A+B+D)x^2 + (A+2B-D)x - 2A,$$

$$\begin{cases} A + B + D = 1 \\ A + 2B - D = 0 \\ -2A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = \frac{4}{3} \\ D = \frac{7}{6} \end{cases}$$

$$\int \frac{(x^2 + 3)dx}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{3}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{6} \int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= -\frac{3}{2} \ln|x| + \frac{4}{3} \ln|x-1| + \frac{7}{6} \ln|x+2| + c.$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Ratsional kasr deb nimaga aytiladi?
2. To'g'ri va noto'g'ri ratsional kasrlarga ta'rif bering.
3. Ratsional kasrni eng sodda ratsional kasrlar yig'indisi ko'rinishida keltirish tartibi nimadan iborat?
4. Ratsional kasrlarni integrallash tartibini ko'rsating.

12 - MA'RUZA

IRRATSIONAL FUNKTSIYALARNING INTEGRALI . EYLERNING BIRINCHI ALMASHTIRMASI.

Tayanch iboralar: Irratsional funktsiya, ratsional amallar, Eyler almashtirishi.

Ma'ruza rejasi:

1. Irratsional funktsiyalar.
2. Ba'zi irratsional funktsiyani integrallash.
3. Eylerning birinchi almashtirmasi.

Adabiyotlar:

[1]. VI bob, §11 [2]. IX bob, §6.

a) Irratsional funktsiyalarning integrali.

Har qanday irratsional funktsiyalardan olingan integral elementar funktsiyalar orqali ifodalanavermaydi. O'zgaruvchilarni almashtirish yordamida ratsional funktsiyaning integrallariga keltiriladigan irratsional funktsiyalarning ayrimlarini qaraymiz.

1) $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}) dx$ ko'rinishdagi integralni qaraymiz. Bunda R o'zgaruvchilarga nisbatan faqat ratsional amallar bajarilishini ko'rsatadi va $m, n, r, s, \dots$ -natural sonlardir.

Integral ostidagi funktsiyani ratsional funktsiyaga keltirish uchun $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$

kasrlarning umumiy maxraji k ni topish va $x = t^k, dx = kt^{k-1} dt$ almashtirish bajarish maqsadga muvofiqdir.

Misol: Ushbu integral hisoblansin:

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3 + 1}}$$

Echimi:

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} = \int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{3}{4}} + 1}.$$

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ kasrlarning umumiy maxraji 4 bo'ladi, shuning uchun $x = t^4, dx = 4t^3 dt$ almashtirishni bajaramiz :

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{3}{4}} + 1} = 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} t^3 dt = 4 \int (t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1}) dt = \\
& = 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} dt = 4 \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln |t^3 + 1| + C = \\
& = \frac{4}{3} \left[x^{\frac{3}{4}} - \ln |x^{\frac{3}{4}} + 1| \right] + C
\end{aligned}$$

2) $\int R \left[x, \left(\frac{ax + \epsilon}{cx + d} \right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax + \epsilon}{cx + d} \right)^{\frac{r}{s}} \right] dx$ ko'rinishdagi integralni qaraymiz

$R, m, n, s, r, \dots$ larga yuqorida qo'yilgan shartlar saqlanadi. Agar k son $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$

kasrlarning umumiy maxraji bo'lsa, bu integral

$$\frac{ax + \epsilon}{cx + d} = t^k$$

almashtirish yordamida ratsional funktsiyaning integraliga olib keladi. (a, ϵ, c, d) bir vaqtda nolga aylanmaydigan butun sonlar).

Misol: Integralni hisoblang :

$$\int \frac{\sqrt{2x-3} dx}{\sqrt[3]{2x-3} + 1}$$

Echimi: Bu erda $a = 2, \epsilon = -3, c = 0, d = 1$ ekanligini va $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ kasrlarning

umumiy maxraji 6 ekanligini nazarga olib

$$2x - 3 = t^6, t = \sqrt[6]{2x-3}, dx = 3t^5 dt$$

almashtirish bajaramiz. Natijada :

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sqrt{2x-3} dx}{\sqrt[3]{2x-3} + 1} = 3 \int \frac{t^3 \cdot t^5 dt}{t^2 + 1} = 3 \int \frac{t^8 dt}{t^2 + 1} = 3 \int (t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1}) dt = \\
& = 3 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctgt \right) + C = \frac{3}{7} \sqrt[6]{(2x-3)^7} - \frac{3}{5} \sqrt[6]{(2x-3)^5} + \\
& + \sqrt{2x-3} - 3\sqrt[6]{2x-3} + 3\arctg\sqrt[6]{2x-3} + C
\end{aligned}$$

b) Eylarning birinchi almashtirishi.

Ushbu

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + \epsilon x + c}) dx \quad (1)$$

ko'rinishdagi integralni qaraymiz, bunda $a \neq 0$. Agar (1) integralda $a > 0$ bo'lsa, u holda Eylarning birinchi alshmashtirishi deb atalmish

$$\sqrt{ax^2 + \epsilon x + c} = \pm \sqrt{ax + t}$$

almashtirish bajarib integral ostidagi funktsiyani ratsional funktsiyaga keltiramiz:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{ax}t + t^2, \quad x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{at}},$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t = \sqrt{a} \cdot \frac{t^2 - c}{b - 2 + \sqrt{a}} + t,$$

$$dx = \frac{-6\sqrt{at}^2 + 2bt + 2\sqrt{ac}}{(b - 2\sqrt{at})^2} dt$$

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \\ &= \int R\left(\frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{at}}, \frac{\sqrt{a}(t^2 - c)}{b - 2t\sqrt{a}} + t\right) \frac{-6\sqrt{at}^2 + 2bt + 2\sqrt{ac}}{(b - 2\sqrt{at})^2} dt \end{aligned}$$

Shunday qilib (1) integral ostidagi funktsiya t ning ratsional funktsiyasiga aylandi.

Misol: Ushbu integral hisoblansin :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}}$$

Echimi: Bu erda $a=1>0$ bo'lgani uchun

$$\sqrt{x^2 + c} = -x + t$$

almashtirish bajaramiz, bu holda

$$x^2 + c = x^2 - 2xt + t^2,$$

$$x = \frac{t^2 - c}{2t}, \quad \sqrt{x^2 + c} = -x + t = -\frac{t^2 - c}{2t} + t = \frac{t^2 + c}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + c}{2t^2} dt$$

Dastlabki integralga qaytamiz:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} = \int \frac{\frac{t^2 + c}{2t^2} dt}{\frac{t^2 + c}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 + c}| + C.$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}) dx$ ko'rinishdagi integrallar qanday integrallanadi?
2. $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx$ ko'rinishdagi integrallar qanday integrallanadi?
3. $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ ko'rinishdagi integral uchun Eylerning birinchi almashtirishi qanday ko'riishda bo'ladi ?
4. $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ ko'rinishdagi integral Eylerning birinchi almashtirishi orqali qanday integrallanadi?

13 - MA'RUZA

EYLERNING IKKINCHI VA UCHINCHI ALMASHTIRMALARI.

Tayanch iboralar: Eylerning almashtirmalari.

Ma'ruza rejasi:

1. Eylerning ikkinchi almashtirmasi.
2. Eylerning uchinchi almashtirmasi.

Adabiyotlar:

[1]. VI bob, §11 [2]. IX bob, §6

a) Eylerning ikkinchi almashtirishi.

Ushbu

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad (1)$$

ko'rinishdagi integralni qaraymiz, bunda $a \neq 0$.

Agar $c > 0$ bo'lsa, bu holda (1) integral ostidagi funktsiyani ratsional funktsiyaga keltirish uchun Eylerning II almashtirishi, ya'ni

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$$

almashtirish maqsadga muvofiqdir. Bu tenglik orqali quyidagilarni topamiz (aniqlik uchun $\sqrt{c}$ oldida qo'shish ishorani olamiz):

$$ax^2 + bx + c = x^2 t^2 + 2xt\sqrt{c} + c,$$

$$x = \frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2},$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{t(2\sqrt{ct} - b)}{a - t^2} + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2},$$

$$\begin{aligned} dx &= \left(\frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2} \right)' dt = \frac{2\sqrt{c}(a - t^2) + 2t(2\sqrt{ct} - b)}{(a - t^2)^2} dt = \\ &= \frac{2\sqrt{c}a + 2\sqrt{c}t^2 - 2bt}{(a - t^2)^2} dt \end{aligned}$$

Natijada (1) integral quyidagi ko'rinishga keladi :

$$\begin{aligned} &\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \\ &= \int R\left(\frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}, \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2} \right) \frac{2\sqrt{c}a + 2\sqrt{c}t^2 - 2bt}{(a - t^2)^2} dt. \end{aligned}$$

Misol: Integralni hisoblang:

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx$$

Echimi: $\sqrt{1+x+x^2} = xt+1$ deb olamiz, u holda

$$1+x+x^2 = x^2 t^2 + 2xt+1, \quad x = \frac{2t-1}{1-t^2},$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{t^2 - t + 1}{1-t^2}$$

$$1 - \sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2 + t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1-t^2)^2} dt$$

Hosil qilingan ifodalarni dastlabki integralga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \sqrt{1+x+x^2}}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx &= \int \frac{(-2t^2 + t)^2 (1-t^2)^2 (1-t^2)(2t^2 - 2t + 2)}{(1-t^2)^2 (2t-1)^2 (t^2-1)^2 (t^2-t+1)} dt = \\ &= 2 \int \frac{t^2}{1-t^2} dt = -2t + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \\ &+ \ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}-1}{x - \sqrt{1+x+x^2}+1} \right| + C = -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln \left| 2x + 2\sqrt{1+x+x^2} + 1 \right| + C \end{aligned}$$

b) Eylarning uchinchi almashtirishi.

Agar (1) integralda $ax^2 + \epsilon x + c$ uchhadning haqiqiy ildizlari α va β bo'lsa, u holda Eylarning III almashtirish deb ataluvchi ushbu

$$\sqrt{ax^2 + \epsilon x + c} = (x - \alpha)t$$

almashtirishni bajaramiz. Bu holda

$$ax^2 + \epsilon x + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

bo'lgani sababli

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t, \quad a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2 t^2,$$

$$a(x-\beta) = (x-\alpha)t^2, \quad x = \frac{\alpha\beta - at^2}{a - t^2},$$

$$\sqrt{ax^2 + \epsilon x + c} = \left(\frac{\alpha\beta - at^2}{a - t^2} - \alpha \right) \cdot t = \frac{(\alpha\beta - \alpha a - at^2 + \alpha t^2)t}{a - t^2}$$

$$dx = \left(\frac{\alpha\beta - at^2}{a - t^2} \right)' dt = \frac{-2at(a - t^2) + 2t(\alpha\beta - at^2)}{(a - t^2)^2} dt =$$

$$= \frac{(-2a^2 t + 2\alpha\beta t)dt}{(a - t^2)^2} = \frac{2t(\alpha\beta - a^2)}{(a - t^2)^2} dt$$

Hosil qilingan ifodalarni (1) integralga qo'yib, integral ostidagi funktsiyani ratsional funktsiyaga almashtiramiz:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \\ = \int R\left(\frac{\alpha\beta - at^2}{a - t^2}, \frac{(\alpha\beta - \alpha a - at^2 + \alpha t^2)t}{a - t^2}\right) \frac{2t(\alpha\beta - a^2)}{(a - t^2)^2} dt$$

Misol: Integralni hisoblang:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$$

Echimi: $2+x-x^2 = (x+1)(x-2)$ bo'lganligi sababli,

$$\sqrt{2+x-x^2} = t(x+1)$$

deb olamiz, u holda

$$\sqrt{2-x} = t\sqrt{x+1}, \quad x = \frac{2-t^2}{t^2+1}$$

$$dx = -\frac{6tdt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{2+x-x^2} = t\left(\frac{2-t^2}{t^2+1} + 1\right).$$

Dastlabki integralga qaytamiz:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}} = -6 \int \frac{tdt}{\frac{2-t^2}{t^2+1} \cdot t\left(\frac{2-t^2}{t^2+1} + 1\right)(t^2+1)^2} = \\ = -2 \int \frac{dt}{2-t^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} \right| + C = \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{(t+\sqrt{2})^2}{2-t^2} \right| + C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2+x-x^2} + x + 4}{3x} \right| + C$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Eylarning ikkinchi almashtirmasini yozing va u orqali integrallash tartibini ko'rsating.
2. Eylarning uchinchi almashtirmasini yozing va u orqali integrallash tartibini keltiring

14 - MA'RUZA

TRIGONOMETRIK FUNKTSIYALAR QATNASHGAN BA'ZI IFODALARNI INTEGRALLASH.

Tayanch iboralar: Universal almashtirma, ratsional funktsiya.

Ma'ruza rejası:

1. Universal almashtirma.
2. Trigonometrik funktsiyaning ratsional ifodalarini integrallash.
3. Ba'zi bir trigonometrik ifodalarni integrallash.

Adabiyotlar:

[1]. VI boʻl, §10 [2]. IX boʻl, §7

a) Universal almashtirish.

Ushbu $\int R(\sin x, \cos x) dx$ integral berilgan bo'lib, unda $R(\cdot)$ biror ratsional funktsiyaning ifodalasini. Bu integral $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ almashtirma yordami bilan hamma vaqt ratsional funktsiyaning integraliga keltirilishi mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\sin x$ va $\cos x$ funktsiyalarni $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ orqali ifodalaymiz:

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\text{So'ngra, } x = 2 \arctg t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Shunday qilib, $\sin x$, $\cos x$, x , dx kiritilgan t orqali ratsional ifodalanadi va universal almashtirish deb ataladi.

Demak ,

$$\int R(\sin, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

M i s o l: Integralni hisoblang :

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

Echimi: Yuqorida yozilgan formulalarga asosan :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$$

b) Aniqmas integral

$$\int R(\sin x) \cos x dx$$

ko'rinishda bo'lsin. U holda

$$t = \sin x, \cos x dx = dt$$

M i s o l: Integralni hisoblang :

$$\int \sin^5 x \cos x dx$$

$$\textbf{Echimi: } \int \sin^5 x \cos x dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right] = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C$$

v) Agar integral

$$\int R(\cos x) \sin x dx$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, u holda

$$\cos x = t, \sin x dx = -dt$$

almashtirish maqsadga muvofiqdir :

$$\int R(\cos x) \cdot \sin x dx = -\int R(t) dt$$

M i s o l: Integralni hisoblang :

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$$

Echimi:

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^4 x} = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin dx = -dt \end{array} \right] = -\int \frac{dt}{t^4} = -\int t^{-4} dt = \frac{1}{3t^3} + C = \frac{1}{3 \cos^3 x} + C$$

g) Agar integral ostidagi funktsiya faqat $\operatorname{tg} x$ ga bog'lik bo'lsa, u holda $\operatorname{tg} x = t$, $x = \arctg x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ almashtirish yordamida bu integral ratsional funktsiyaning integraliga keltiriladi:

$$\int R(\operatorname{tg} x) dx = \int R(t) \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

Misol: Integralni hisoblang :

$$\int \operatorname{tg} x dx$$

Echimi:
$$\int \operatorname{tg} x dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{t dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{1}{2} \ln|1+t^2| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1+\operatorname{tg}^2 x| + C = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) + C.$$

d) Agar integral ostidagi funktsiya $R(\sin x, \cos x)$ ko'rinishda bo'lsa, ammo $\sin x, \cos x$ funktsiyalar faqat juft darajalarda kirs, u holda $\operatorname{tg} x = t$ almashtirish tadbiriq etiladi, chunki

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Misol: Integralni hisoblang :

$$\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$$

Echimi:
$$\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(2 - \frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C$$

e) Endi $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ko'rinishdagi integral berilgan bo'lsin.

Bunda uch holni qaraymiz:

1) m va n dan kamida bittasi toq son. Aniqlik uchun n toq bo'lsin. $n=2p+1$ deb olib integralni almashtiramiz :

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^{2p+1} x dx &= \int \sin^m x \cos^{2p} x \cdot \cos x dx = \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right] = \int t^m (1 - t^2)^p dt. \end{aligned}$$

Bu esa ratsional funktsiyaning integrali.

2) m va n manfiy bo'lmagan juft son. $m=2p$, $n=2q$ deb faraz qilamiz:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \quad (1)$$

Bularni integralga qo'yamiz:

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right)^q dx.$$

Darajalarni ko'tarib, qavslarni ochib, $\cos 2x$ ning juft va toq darajalarini o'z ichiga olgan hadlarni hosil qilamiz, birinchi punktda ko'rsatilgan usuldan yoki (1) formuladan foydalanamiz.

M i s o l : Integralni hisoblang :

$$\int \sin^4 x dx$$

Echimi:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right] + c \end{aligned}$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko'rinishdagi integralni universal almashtirish usuli orqali qanday integrallash mumkin ?
2. $\int R(\sin x) \cos x dx$ ko'rinishdagi integrallar qanday integrallanadi?
3. $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ ko'rinishdagi integrallar qanday integrallanadi?
4. $\int R(\sin^m x, \cos^n x) dx$ ko'rinishdagi integrallar qanday integrallanadi?

15 - MA'RUZA

ANIQ INTEGRAL TUSHUNCHASIGA OLIB KELUVCHI MASALALAR. ANIQ INTEGRALNING TA'RIFI VA XOSSALARI.

Tayanch iboralar: Egri chiziqli trapetsiya, integral yigindi, aniq integral, aniq integralning geometrik ma'nosi, aniq integralning mexanik ma'nosi.

Ma'ruza rejasi:

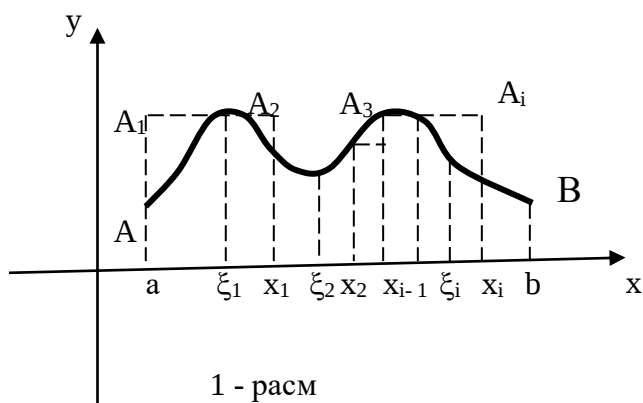
1. Egri chizikli trapetsiyaning yuzini xisoblash masalasi.
2. Uzgaruvchi kuch bajaradigan ish xakidagi masala.
3. Anik integralning ta'rifi.
4. Anik integralning asosiy xossalari.

Adabiyotlar:

[1]. VI бoб, §12-13 [2]. X бoб, §1-3

1.Egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblash masalasi.

$y=f(x)$ yzluksiz funktsiya, $x=a$, $x=b$, $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraga egri chiziqli trapetsiya deb aytamiz.



Shu figura yuzini hisoblash masalasini ko'raylik.

$[a; b]$ segmentni abtsissalari $x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1}$ bo'lgan $n-1$ ta nuqta yordamida bo'laklarga bo'lamiz. Bunda $a=x_0$ va $b=x_n$ deymiz.

Bo'lish nuqtalari $[a; b]$ segmentnin ta kichik segmentlarga bo'ladi:

$[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{i-1}; x_i], \dots, [x_{n-1}; x_n]$

Bo'linish nuqtalaridan OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tqazib, egri chiziqli

trapetsiyaning n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga ajratamiz, (1-rasm). Ravshanki egri chiziqli trapetsiya $ABba$ ning yuzi n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari yigindisiga teng. Agar $ABba$ shaqlning yuzi S , asosi $[x_{i-1}; x_i]$, ($i=1, 2, 3, \dots, n$) bo'lgan egri chiziqli kichik trapetsiyalarning yuzalari ΔS_i bilan belgilansa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_i + \dots + \Delta S_n \quad \text{ёки} \quad S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \quad (1)$$

ΔS_i larning aniq qiymatini topib bo'lmaydi, takribiy qiymatlarni aniqlash uchun esa $[x_{i-1}; x_i]$ segmentlarning har birida ixtiyoriy ξ_i nuqtadan tanlab olamiz va bu nuqtalarda $f(\xi_i)$ ordinatalarini yasaymiz. 1-rasmdan quyidagilar ko'rinadi:

$$\Delta S_1 \approx f(\xi_1)(x_1 - x_0), \Delta S_2 \approx f(\xi_2)(x_2 - x_1), \dots, \Delta S_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \dots, \Delta S_n \approx f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \quad (2)$$

Agar $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ belgini kiritib (2) larni (1) ga qo'ysak ABba egri chiziqli trapetsiya yuzining taqribiy qiymatini topgan bo'lamiz:

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (3)$$

(3) ifodaga $f(x)$ funktsiyaning $[a; b]$ kesmadagi integral yig'indisi deb aytiladi.

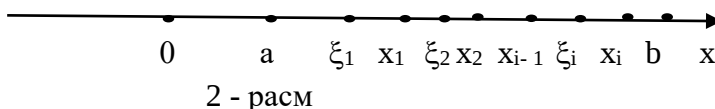
2. O'zgaruvchi kuch bajargan ish haqidagi masala.

Mexanikadan ma'lumki, agar F kuch ta'sirida moddiy nuqta ℓ masofada siljigan bo'lsa, bajarilgan ish A quyidagiga teng:

$$A = F \cdot \ell \quad (4)$$

Bu erda F kuch kattaligi bilan ham, yo'nalishi bilan ham o'zgarmas. Endi F kuch o'zgarmas yo'nalishni saqlasa ham, sonli kattaligi bo'yicha o'zgargan holni qaraymiz. Aytaylik, bu kuch ta'sirida moddiy nuqta kuchning ta'sir chizig'i yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilsin. Bunda F kuch bajargan ishni hisoblash masalasini qaraymiz.

Moddiy nuqta harakat qilayotgan chiziqni OX o'qi deb qabul qilamiz:



Yo'lning boshlangich va oxirgi nuqtalari mos ravishda a va b , ($a < b$) abtissalarga ega bo'lsin. $[a; b]$ segmentning har bir nuqtasida kuchning kattaligi ma'lum qiymatga, ya'ni $F = f(x)$ funktsiya kabi bo'ladi. Bu funktsiyani uzluksiz deb hisoblaymiz. $[a; b]$ segmentni n ta kichik segmentlarga bo'lamiz. (2- rasmi).

$$[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots [x_{i-1}; x_i] \dots [x_{n-1}; x_n].$$

$$(a = x_0, b = x_n)$$

Ularning uzunligi mos ravishda

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1} \quad \text{bo'ladi.}$$

$[x_{i-1}; x_i]$ segmentda F kuchning bajargan ishi ΔA_i bo'lsin, u holda $[a; b]$ kesmada bajarilgan ish quyidagiga teng:

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \quad (5)$$

ΔA_i larning aniq qiymatini hisoblab bo'lmaydi. Ularning taqribiy qiymatlarini hisoblash uchun $[x_{i-1}; x_i]$ larning xar birida ixtiyoriy ξ_i nuqta tanlab olamiz va shu nuqtalardagi $F = f(x)$ funktsiyaning $f(\xi_i)$ qiymatlarini hisoblaymiz. (4) formulaga ko'ra

$$\Delta A_1 \approx f(\xi_1) \Delta x_1, \Delta A_2 \approx f(\xi_2) \Delta x_2, \dots, \Delta A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i, \dots, \Delta A_n \approx f(\xi_n) \Delta x_n$$

Bularni (5) tenglikka qo'yib izlanayotgan ishning taqribiy qiymatini integral yig'indi ko'rinishida topamiz:

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

3. Aniq integralning ta'rifi.

$y=f(x)$ funktsiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. $x_0=x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n=b$ bo'linish nuqtalari yordamida $[a; b]$ kesmani n ta kichik segmentlarga ajratamiz. (1-rasm).

$$[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots [x_{i-1}; x_i] \dots [x_{n-1}; x_n].$$

$[x_{i-1}; x_i]$, $i=1, 2, 3, \dots, n$ kichik segmentlarning har birida ixtiyoriy ξ_i nuqtani tanlaymiz. $f(x)$ funktsiyaning ξ_i nuqtadagi qiymatini mos segmentning $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ uzunligiga ko'paytirib (3) kabi integral yig'indi tuzamiz.

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (6)$$

TA'RIF: Agar S integral yig'indi $[a; b]$ kesmani $[x_{i-1}; x_i]$ segmentlarga ajratish usuliga va ularning har birida ξ_i nuqtaning tanlashiga bog'lik bo'lmaydigan I limitga ega bo'lsak, u holda bu I son $[a; b]$ kesmada $f(x)$ funktsiyadan olingan aniq integral deyiladi. va $\int_a^b f(x) dx$ kabi belgilanadi:

$$I = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Bu erda a –quyi chegara, b –yukori chegara, $f(x)$ –integral ostidagi funktsiya, $f(x) dx$ –integral ostidagi ifoda deyiladi.

$[a; b]$ kesmada $\int_a^b f(x) dx$ integrali mavjud bo'lgan $f(x)$ funktsiya bu kesmada integrallanuvchi funktsiya deb aytiladi.

Oldin ko'rilganlarga asosan egri chiziqli trapetsiyaning aniq yuzasi S va o'zgaruvchi kuch bajargan ishning aniq miqdori

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad A = \int_a^b f(x) dx$$

kabi topilishi kelib chiqadi. Bu aniq integralning geometrik va mexanik ma'nolarini ifodalaydi.

Funktsiya integralining iktisodiy ma'nosi.

$z=f(t)$ funktsiya vaqt o'tishi bilan qaysidir ishlab chiqarishning unumdorligini ifodalasin. $[0, T]$ vaqt oraligida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori u ning qiymatini topamiz. U holda, Δt vaqt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori $\Delta u = f(t) \cdot \Delta t$ bilan aniqlanadi yoki $\Delta u \approx f(\xi) \cdot \Delta t$, $\xi \in [t, t + \Delta t]$

$[0, T]$ oraligni $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ nuqtalar yordamida oraliqlarga bo'lamiz, u

holda $\Delta u_i \approx f(\xi_i) \cdot \Delta t_i$, $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ Ba $u = \sum_{i=1}^n \Delta u_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta t_i$,

$u = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta t_i = \int_0^T f(t) dt$ hosil bo'ladi. Demak, agar $f(t)$ mehnat unumdorligi bo'lsa, u holda $\int_0^T f(t) dt$ integral $[0, T]$ davr oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini ifodalaydi.

4. Aniq integral xossalari.

$$a) \int_a^a f(x) dx = 0 \qquad \qquad \qquad b) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$B) \int_a^b (f + \varphi) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b \varphi dx$$

$$r) a < c < b \text{ учун } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$d) \text{ Agar } [a; b] \text{ kesmada } f(x) \geq 0 \text{ bo'lsa } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$e) \text{ Agar } [a; b] \text{ kesmada } f(x) \geq \varphi(x) \text{ bo'lsa } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx$$

j) Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda bu kesmada shunday ξ nuqta topiladiki, bunda $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ bo'ladi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Aniq integral ta'rifini keltiring.
2. Aniq integralning qanday xossalari bor?
3. Aniq integralning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
4. Aniq integralning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
5. Aniq integralning iqtisodiy ma'nosi nimadan iborat?

16 - MA'RUZA

NYUTON – LEYBNITS FORMULASI VA ANIQ INTEGRALNI XISOBLASH USULLARI.

Tayanch iboralar: yuqori chegarasi o'zgaruvchan bo'lgan integral, Nyuton-Leybnits formulasi, bo'laklab integrallash, o'zgaruvchilarni almashtirish.

Ma'ruza rejası:

1. Integralning yuqori chegarasi bo'yicha hosilasi.
2. Aniq integral uchun Nyuton-Leybnits formulasi.
3. Aniq integralni bo'laklab integrallash.
4. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish.

Adabiyotlar:

[1]. VI bob, §15-18 [2]. X bob, §4-5

1. Integralning o'zgaruvchi yuqori chegarasi bo'yicha hosilasi.

$y=f(x)$ funktsiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. $\int_a^b f(x)dx$ integralni qaraymiz.

Agar b yuqori chegara o'zgaruvchan x bo'lsa, unda yuqori chegarasi o'zgaruvchan bo'lgan integral hosil bo'ladi:

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt$$

1-TEOREMA : Agar $f(x)$ uzluksiz funktsiya bo'lsa ,

$$I'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot : x argumentga Δx ortirma beramiz. U holda aniq integralning xossasiga asosan

$$I(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$I(x)$ funktsiyaning ortirmasini yozamiz:

$$\Delta I(x) = I(x + \Delta x) - I(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

ya'ni

$$\Delta I(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \quad (1)$$

Aniq integralning oldingi ma'ruzadagi j) xossasiga asosan (1) integral

$$\Delta I = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x$$

ko'rinishga keladi, bunda ξ ning qiymati x bilan $x+\Delta x$ orasida yotadi. Hosilaning ta'rifiga asosan

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(x)$$

($\Delta x \rightarrow 0$ intilganda $\xi \rightarrow x$ nazarga tutiladi.)

Teorema isbotlandi.

2. Nyuton – Leybnits teoremasi.

TEOREMA: Agar $F(x)$ uzluksiz $f(x)$ funktsiyaning biror boshlang'ich funktsiyasi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

tenglik o'rinlidir. Bu tenglik **N'yuton-Leybnits formulasi** deyiladi.

Isbot: $F(x)$ funktsiya uzluksiz $f(x)$ funktsiyaning biror boshlang'ich funktsiyasi bo'lsin. I-teoremaga asosan $\int_a^x f(t)dt$ funktsiya ham $f(x)$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi bo'ladi. Ammo, har qanday ikkita boshlang'ich funktsiya bir-biridan o'zgarmas $\vec{C}$ qo'shiluvchi bilan farq qiladi:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + \vec{C} \quad (2)$$

Bu tenglamada $x=a$ deb olsak, aniq integralning oldingi ma'ruzadagi a) xossasiga asosan

$$0 = F(a) + \vec{C}$$

bo'ladi.

Demak, $\vec{C} = -F(a)$ bo'ladi.

$\vec{C}$ qiymatini (2) ga qo'yamiz.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Endi bu tenglikda $x=b$ desak Nyuton-Leybnits formulasi hosil bo'ladi.

$$\int_a^b f(t)dt = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (3)$$

Teorema isbotlandi.

Bevosita integrallash, differentsial ostiga kiritish usullari xuddi aniqmas integraldagi singari bo'ladi va shu sababli ularni misollar orqali ko'rsatamiz:

$$\mathbf{1-Misol:} \quad \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{2-Misol:} \quad \int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$\mathbf{3-Misol:} \quad \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x d \ln x = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \frac{\ln^2 e - \ln^2 1}{2} = \frac{1}{2} \ln^2 e = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{4-Misol:} \quad \int_a^b e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_a^b = \frac{e^{4b} - e^{4a}}{4}$$

$$\mathbf{5-Misol:} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\mathbf{6-Misol:} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

7-Misol:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(1+x^2) = \sqrt{1+x^2} \Big|_0^{\sqrt{3}} = 2 - 1 = 1$$

8-Misol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x d2x = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \cos \pi + \frac{1}{2} \cos 0 = 1$$

3.Bo'laklab integrallash usuli.

u va v funktsiyalar x ning differentsiallanuvchi funktsiyalari bo'lsin. U holda:

$$d(uv) = vdu + u dv$$

Bu ayniyatning ikkala tomonini a dan b gacha integrallaymiz:

$$\int_a^b d(u, v) = \int_a^b v du + \int_a^b u dv$$

chap tomoniga Nyuton-Leybnits formulasini qo'llagandan keyin oxirgi tenglikni quyidagi qo'rinishda yozish mumkin:

$$\int_a^b u dv = (u, v) \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (4)$$

(4)- tenglik aniq integralni bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

1-Misol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left[\begin{array}{l} x = u, \quad \cos x dx = dv \\ dx = du, \quad \sin x = v \end{array} \right] = x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}$$

2-Misol:

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{l} \ln x = u, \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = dv \\ \frac{dx}{x} = du, \quad 2\sqrt{x} = v \end{array} \right] = (2\sqrt{x} \ln x) \Big|_1^{e^2} - 2 \int_1^{e^2} \sqrt{x} \frac{dx}{x} = 4e - (4\sqrt{x}) \Big|_1^{e^2} =$$

$$= 4e - 4e + 4 = 4$$

3-Misol:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctg x dx = \left[\begin{array}{l} \arctg x = u, \quad dx = dv \\ \frac{dx}{1+x^2} = du, \quad x = v \end{array} \right] = x \cdot \arctg x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{2} \ln 4 = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \ln 2.$$

4. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish.

3-TEOREMA: $\int_a^b f(x) dx$ integralda $x = \varphi(t)$ tenglik orqali yangi t o'zgaruvchi kiritilgan bo'lsin.

Agar 1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, 2) $\varphi(t)$ va $\varphi'(t)$ lar $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz funktsiyalar bo'lsa, 3) $f[\varphi(t)]$ funktsiya $[\alpha, \beta]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (5)$$

bo'ladi.

Bu tenglik aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirish formulasi deb ataladi.

Isbot: $F(x)$ funktsiya $f(x)$ funktsiyaning boshlangich funktsiyasi bo'lsin.

Unda quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

Teorema isbotlandi.

4-Misol:

$$\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t, \quad x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt, \quad \alpha = 1, \beta = 2 \end{array} \right] = \int_1^2 \frac{(t^2 - 1) \cdot 2t dt}{t} =$$

$$= 2 \int_1^2 (t^2 - 1) dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 2t \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$$

5-Misol:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = \sin t; dx = \cos t dt, 1-x^2 = \cos^2 t \\ \alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Yuqori chegarasi o'zgaruvchan integralning hosilasi nimaga teng?
2. Nyuton-Leybnits formulasini keltirib chiqaring.
3. Aniq integralni bo'laklab integrallash uchun formulani keltirib chikaring.
4. Aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirish formulasini keltiring.

17 - MA'RUZA

XOSMAS INTEGRALLAR XAKIDA TUSHUNCHALAR. XOSMAS INTEGRALLARNI XISOBLASH.

Tayanch iboralar: Xosmas integral, yaqinlashuvchi xosmas integral, uzoqlashuvchi xosmas integral.

Ma'ruza rejası:

1. Chegarasi cheksiz xosmas integral.
2. Cheksiz funktsiyalarning xosmas integrallari.

Adabiyotlar:

[1]. VI bob, § 24 [2]. X bob, §6

1.Chegarasi cheksiz xosmas integrallar.

TA'RIF: $[a; \infty)$ intervalda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funktsiyaning xosmas integrali deb

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

limitga aytiladi va

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

kabi belgilanadi, ya'ni

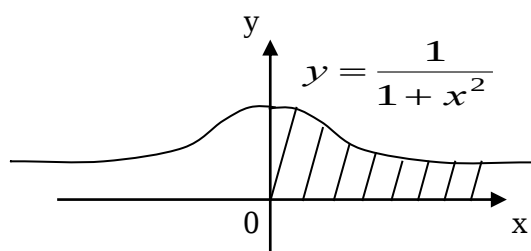
$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Agar (1) limit mavjud bo'lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi; agarda ko'rsatilgan limit mavjud bo'lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

$(-\infty; b]$, $(-\infty; \infty)$ intervalllarda xosmas integral shunga o'xshash aniqlanadi.

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx.$$



1- rasmi

Misol: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integralni hisoblaymiz.

Echimi: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} =$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg b - \arctg 0) = \frac{\pi}{2}$$

Qaralgan integral 1-rasmda shtrixlangan cheksiz egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ifodalaydi.

Ba'zi bir hollarda berilgan integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanini bilish va uning qiymatini baholash etarli bo'ladi. Quyidagi teoremlar isbotsiz keltiriladi.

TEOREMA: Agar barcha $x(x \geq a)$ lar uchun $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ –tengsizliklar bajarilsa va $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{\infty} f(x) dx$ ham yaqinlashuvchi va $\int_a^{\infty} f(x) dx \leq \int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ bo'ladi.

M i s o l: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^2)}$ integral yaqinlashuvchi ekanligi tekshirilsin.

Echimi: $x \geq 1$ bo'lganda $\frac{1}{x^2(1+e^2)} < \frac{1}{x^2}$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1$. Demak, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^2)}$ teoreмага asosan yaqinlashuvchi ekan.

TEOREMA: Agar barcha $x(x \geq a)$ lar uchun $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ tengsizliklar bajarilsa va shu bilan birga $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{\infty} f(x) dx$ integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

M i s o l: $\int_1^{\infty} \frac{x+4}{\sqrt{x^3}} dx$ tekshirilsin.

Echimi: $\frac{x+4}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

ammo

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (2\sqrt{b} - 2) = \infty$$

Teoreмага asosan berilgan integral uzoqlashuvchi buladi.

TEOREMA: Agar $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{\infty} f(x) dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu holda $\int_a^{\infty} f(x) dx$ integral absolyut yaqinlashuvchi integral deyiladi.

M i s o l: $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ integralning yaqinlashishini tekshiring.

Echimi: $\left| \frac{\sin x}{x^3} \right| \leq \left| \frac{1}{x^3} \right|$ bo'lishi ma'lum.

$$\text{Ammo } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Demak yuqoridagi teoremlarga asosan $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$ integral yaqinlashuvchi va u

bilan birga $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ integral ham yaqinlashuvchidir.

2. Cheksiz funktsiyalarning xosmas integrallari.

TA'RIF: $(a; b]$ intervalda uzluksiz va $x=a$ da aniqlanmagan yoki uzilishga ega bo'lgan $f(x)$ funktsiyaning xosmas integrali deb

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (2)$$

limitga aytiladi. Agar (2) limit mavjud bo'lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi. Aks holda xosmas integral uzoqlashuvchi deb aytiladi.

$[a; b)$ intervalda uzluksiz va $x=b$ da aniqlanmagan $f(x)$ funktsiyaning xosmas integrali xam shunga o'xshash ta'riflanadi:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

M i s o l: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ integralni tekshiring.

Echimi: $x=0$ da funktsiya aniqlanmagan.

Quyidagilar o'rinli bo'ladi:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2}, \\ \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^{-\varepsilon} = -\infty \\ \int_0^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 = \infty. \end{aligned}$$

Demak ko'rsatilgan xosmas integral uzoqlashuvchi ekan.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Cheksiz chegarali xosmas integralni ta'riflang.
2. Qachon xosmas integral yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) deyiladi?
3. Xosmas integralning xossalari keltiring.
4. Cheksiz funktsiyalarning xosmas integrallarini ta'riflang.

18 - MA'RUZA

ANIQ INTEGRALNI TAQIRIBIY XISOBLASH.

Tayanch iboralar: Taqiribiy hisoblash, to'gri to'rtburchak formulasi, trapetsiya formulasi, Simpson formulasi.

Ma'ruza rejası:

1. To'gri to'rtburchaklar formulasi va uning xatoligi.
2. Trapetsiyalar formulasi va uning xatoligi.
3. Simpson formulasi va uning xatoligi.

Adabiyotlar:

[1]. VI bob, §19 [2]. XI bob, §5

1) To'gri to'rtburchaklar formulasi.

$\int_a^b f(x)dx$ aniq integralni taqiribiy hisoblash talab qilinsin. Bunda $f(x)$ berilgan $[a; b]$ kesmada uzluksiz funktsiyadir.

$[a; b]$ kesmani $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ nuqtalar bilan uzunligi Δx bo'lgan nta teng bo'laklarga ajratamiz:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

So'ngra $f(x)$ funktsiyaning $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalardagi qiymatlarini $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ orqali belgilaymiz, ya'ni

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$$

Ushbu yig'indilarni tuzamiz:

$$y_0 \cdot \Delta x + y_1 \cdot \Delta x + \dots + y_{n-1} \cdot \Delta x$$

$$y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + \dots + y_n \cdot \Delta x$$

Bu yig'indilarning har biri $f(x)$ uchun $[a; b]$ kesmada integral yig'indi bo'ladi va

shuning uchun $\int_a^b f(x)dx$ integralning taqiribiy ifoda etadi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

Bular to'gri to'rtburchaklar formulasi deb aytiladilar.

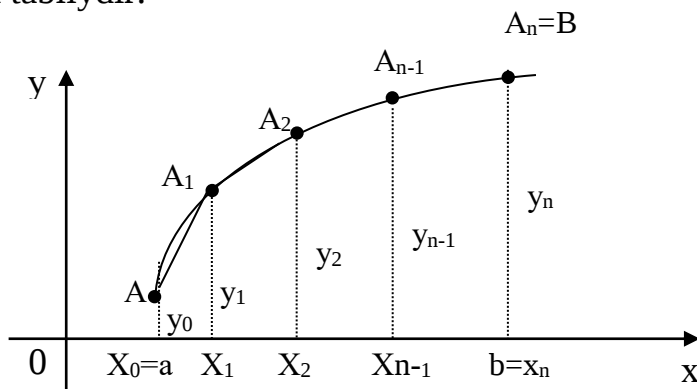
To'gri to'rtburchaklar formulasining xatoligi

$$\Delta \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{4n}$$

formula bilan baholanadi. Bunda M_1 integral ostidagi funktsiya hosilasi absolyut qiymatining integrallash oraligidagi eng katta qiymatini ifodalaydi.

2) Trapetsiyalar formulasi.

Agar berilgan $y=f(x)$ egri chiziqni to'g'ri to'rtburchaklar formulasida bo'lgandek zinapoyasimon chiziq bilan almashtirmasdan, balki ichki chizilgan siniq chiziq (vatar) bilan almashtirsak, u holda aniq integralning ancha aniqroq qiymati hosil bo'lishini kutish tabiiydir.



Bu holda egri chizikli $aAB\beta$ trapetsiyaning yuzi yuqoridan

$$A A_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} B$$

vatarlar bilan chegaralangan to'g'ri chizikli trapetsiyalar yuzlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Ammo bu trapetsiyalardan birinchisining yuzi $\frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x$, ikkinchining yuzi

$\frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x$ va hakoza bo'lgani sababli

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left(\frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x \right)$$

yoki

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right)$$

Bu esa trapetsiyalar formulasidir.

Trapetsiyalar formulasining xatoligi

$$\Delta \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

formula bilan baholanadi. Bunda M_2 integral ostidagi funktsiyaning II tartibli hosilasi absolyut qiymatining integrallash oraligidagi eng katta qiymatini ifodalaydi.

3) Simpson formulasi.

Bu erda $[a; b]$ kesmani $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ nuqtalar bilan uzunligi Δx bo'lgan n ta teng bo'laklarga ajratamiz:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

So'ngra funksiyaning bu nuqtalardagi $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1), \dots, y_n=f(x_n)$ qiymatlarini hisoblaymiz. Bunda bo'linish nuqtalarning soni n juft bo'lsin deb talab qilamiz. $y=f(x)$ egri chiziqning x_{i-1}, x_i, x_{i+1} abstsissali A_{i-1}, A_i, A_{i+1} nuqtalari orasidagi yoyini shu nuqtalardan o'tuvchi parabola bilan almashtiramiz. Unda quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} (y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})).$$

Bu formula Simpson formulasi bo'lib, uni isbotsiz qabul qilamiz.

Simpson formulasining xatoligi

$$\Delta \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{2880n^4}$$

formula bilan baholanadi. Bunda M_4 integral ostidagi funksiyaning IV tartibli hosilasi absolyut qiymatining integrallash oraligidagi eng katta qiymatini ifodalaydi.

Ko'rib utilgan formulalar matematikada kvadratur formulalar deb ataladigan umumiy formulalarning xususiy xollari bo'lib hisoblanadi. Kvadratur formulalar sohasida matematika bo'yicha buxorolik birinchi fan doktori Salixov G.N. katta ilmiy natijalarga erishgan.

M i s o l : Ushbu

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

integralni to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson formulalari orqali hisoblang.

Echimi: [1; 2] kesmani 10 ta teng bo'lakka ajratamiz.

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1$$

deb olib, integral ostidagi funksiya qiymatlari jadvalini tuzamiz:

$x_0=1,$	$y_0=1,00000,$	$x_1=1,1,$	$y_1=0,90909$
$x_2=1,2,$	$y_2=0,83333,$	$x_3=1,3,$	$y_3=0,76923$
$x_4=1,4,$	$y_4=0,71429,$	$x_5=1,5,$	$y_5=0,66667$
$x_6=1,6,$	$y_6=0,62500,$	$x_7=1,7,$	$y_7=0,58824$
$x_8=1,8,$	$y_8=0,55556,$	$x_9=1,9,$	$y_9=0,52632$
$x_{10}=2,$	$y_{10}=0,50000.$		

1) To'g'ri to'rtburchaklar formulasini tatbik etamiz:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1(1+0,90909+0,83333+0,76923+0,71429+0,66667+0,625+0,58824+0,55556+0,52632)=0,1 \cdot 7,18773=0,71877$$

2) Trapetsiyalar formulasini tatbik etamiz:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1 \left(\frac{1+0,5}{2} + 0,83333 + 0,76923 + 0,71429 + 0,66667 + 0,625 + 0,58824 + 0,55556 + 0,52632 \right) = 0,69377.$$

3) Simpson formulasini tadbik etamiz:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0,1}{3} (1 + 0,5 + 2 \cdot 2,72818 + 4 \cdot 3,45955) = 0,69315 .$$

Haqiqatda

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,6931472 \quad ,$$

ettinchi kasr xona birligigacha aniqlikda.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. To'g'ri to'rtburchaklar formulasini keltirib chiqaring.
2. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi xatoligi qanday baholanadi?
3. Trapetsiyalar formulasini keltirib chiqaring va uning xatoligini ko'rsating.
4. Simpson formulasini keltiring va uning xatoligini ko'rsating.

19 - MA'RUZA

ANIQ INTEGRAL YORDAMIDA YUZALARNI, XAJMLARNI, YOY UZUNLIKLARINI XISOBLASH.

Tayanch iboralar: Kutb koordinatalar sistemasi, shakl yuzasi, jismning ko'ndalang kesimi, aylanma jism, jism hajmi, yoy uzunligi.

Ma'ruza rejası:

1. Yassi figuralar yuzalarini hisoblash.
2. Aniq integralning jismlar hajmini hisoblashga tatbiki.
3. Yassi egri chiziq yoyi uzunligini aniq integral yordamida topish.

Adabiyotlar:

[1]. VI bob, §20-21 [2]. XI bob, §1-3

1.Yassi figuralar yuzalarini hisoblash.

a) Aniq integralning ta'rifidan, agar $[a;b]$ kesmada funktsiya $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$ egri chiziq, OX o'qi va $x=a$ hamda $x=b$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

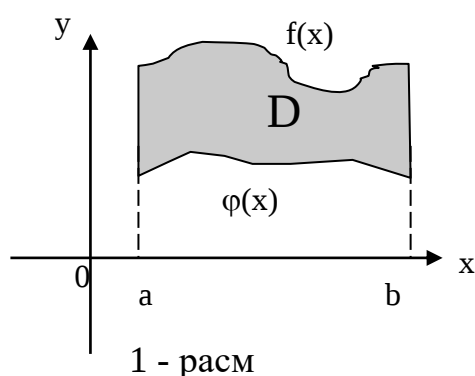
$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

ga teng. Agar $[a;b]$ kesmada $f(x) \leq 0$ bo'lsa, tegishli trapetsiyaning yuzi

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \quad (2)$$

ga teng bo'ladi.

$y_1=f(x)$ va $y_2=\varphi(x)$ egri chiziqlar hamda $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan D figuraning yuzini hisoblash kerak bo'lsin. (1-rasm)

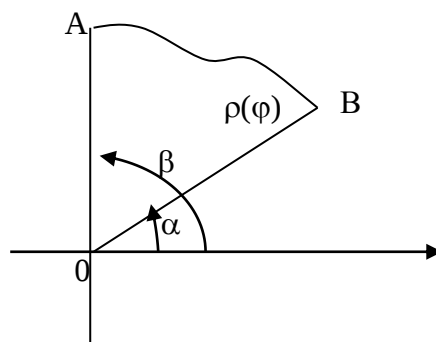


U holda (1) –formuladan ikki marta foydalanib quyidagini hosil qilamiz:

$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx$$

b) Kutb koordinatalar sistemasida yassi figura $\rho=\rho(\varphi)$ egri chiziq va kutb markazidan chiquvch $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ nurlar bilan chegaralangan bo'lsin. (2- rasm). U holda ABO egri chiziqli uchburchak yuzi quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

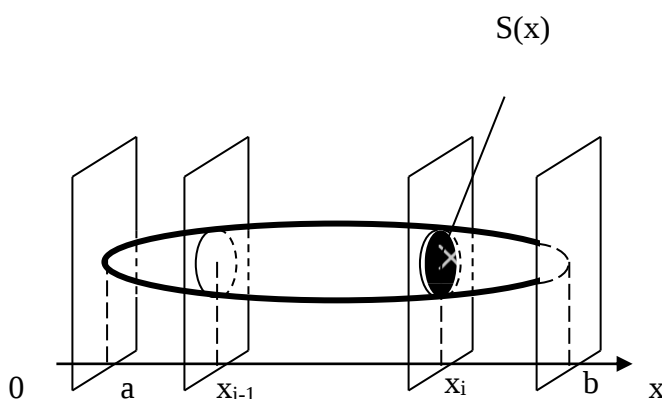


2 – rasm

2. Aniq integralning jismlar hajmini hisoblashga tadbiki.

a) Jismning hajmini ko'ndalang kesimning yuzi bo'yicha hisoblash.

Biror-bir jismning V hajmini hisoblash talab etilsin. Bu jismning OX o'qiga perpendikulyar tekislik bilan kesimining yuzi $S(x)$ ma'lum bo'lsin. (3-rasm).



3 - rasm

$[a;b]$ kesmani $a_0=x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n=b$ nuqtalar bilan ixtiyoriy bo'lakka bo'lamiz va bu nuqtalar orqali OX o'qiga perpendikulyar tekisliklar o'tkazamiz. (3-rasm). Bu tekisliklar jismni n ta katlamga ajratadi, ularning hajmlarini $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$, bilan belgilaymiz. U holda

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i$$

i -chi silindrning hajmi $\Delta V_i \approx S(\xi_i) \Delta x_i$ ekanligini nazarga olsak,

$$V = \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b S(x) dx$$

va hajmni hisoblash uchun quyidagi formula kelib chiqadi:

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

b) Aylanma jismlarining hajmini hisoblash.

Agar jism $y=f(x)$ chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning OX o'q atrofida aylanishdan hosil bo'lsa, OX o'qiga perpendikulyar abtsissali kesim doiradan iborat bo'lib $S(x)=\pi y^2$ yuzaga teng bo'ladi. Demak, bu holda

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

3. Yassi egri chiziq yoyi uzunligini aniq integral yordamida hisoblash.

a) $y=f(x)$ chiziqning $x=a$ va $x=b$ chiziqlar orasida joylashgan qismi uzunligini quyidagi formula orqali hisoblaymiz:

$$I = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

b) Agar egri chiziq parametrik tenglamalar orqali berilgan bo'lsa, ya'ni

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases} \quad \theta_1 \leq t \leq \theta_2$$

bo'lsa, u holda

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2} dt$$

bo'ladi.

g) Agar egri chiziq kutb koordinatalarda berilgan bo'lsa, ya'ni

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

bo'lsa, u holda,

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$$

bo'ladi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Yassi figuralar yuzini aniq integral orqali hisoblash formulalarini keltiring.
2. Jismning hajmini ko'ndalang kesim yuzasi orqali hisoblash formulasini yozirg.
3. Aylanma jism hajmi integral yordamida qanday hisoblanadi?
4. Yassi egri yoy uzunligi aniq integral orqali qanday hisoblanadi?

20 - MA'RUZA

ANIQ INTEGRAL YORDAMIDA FIZIK VA MEXANIK MASALALARNI ECHISH.

Tayanch iboralar: ish, masofa, statik moment, ogirlik markazi.

Ma'ruza rejası:

1. O'zgaruvchi kuch bajargan ishni hisoblash.
2. Notekis harakatda masofani hisoblash.
3. Yassi egri chiziq yoyininig statik momenti va uni aniq integral yordamida topish.
4. Yassi shaklning statik momenti va uni hisoblash.
5. Yassi egri chiziq yoyininig ogirlik markazi va uni aniq integral yordamida topish.
6. Yassi shaklning ogirlik markazi va uni topish.

Adabiyotlar:

[1]. VI bob, §23 [2]. XI bob, §4

1.O'zgaruvchan kuch bajargan ishni hisoblash.

Biz oldingi 17-ma'ruzada o'zgaruvchan $F=f(x)$ kuch moddiy nuqtani $[a,b]$ kesma bo'yicha harakatlantirganda bajarilgan A ish aniq integral orqali

$$A = \int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

formula bilan hisoblanishini ko'rsatgan edik. Shunga doir bir misol ko'rsatamiz.

Masala: Prujina 2 H kuch ta'siri ostida 4sm chuzilishi ma'lum. Shu prujinani 6 sm chuzish uchun bajariladigan ish miqdorini hisoblang.

Echish: Prujinani x metrga chuzish uchun kerak bo'ladigan kuch kattaligi $F=f(x)=kx$ bilan aniqlanadi. Bu formuladagi k proportsianallik koeffitsientini masala shartiga asosan topamiz. Unga asosan $x=0.04$ m bo'lganda $F=2H$ bo'lgan. Demak,

$$k = \frac{F}{x} = \frac{2H}{0.04} = 50.$$

Unda prujinani 6 sm chuzish uchun bajarilgan ish, (1) formulaga asosan,

$$A = \int_0^6 50x dx = 25x^2 \Big|_0^6 = 25(6^2 - 0^2) = 900 \text{ (Ж)}$$

bo'ladi.

2. Notekis harakatda bosib o'tilgan masofani hisoblash.

Ma'lumki, o'zgarmas v tezlik bilan to'g'ri chiziq bo'ylab tekis harakatdagi moddiy nuqtaning $[a, b]$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan s masofasi $s=v(b-a)$ formula bilan hisoblanadi. Endi tezligi o'zgaruvchan va $v=v(t)$ funktsiya bilan aniqlanadigan notekis harakatda moddiy nuqtaning $[a, b]$ vaqt oralig'ida bosib o'tadigan s masofasini hisoblash masalasini ko'ramiz. Buning uchun $[a, b]$ vaqt oralig'ini $a=t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n=b$ nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo'lakka ajratamiz. Har bir (t_{i-1}, t_i) vaqt oraliqlari uzunliklarini Δt_i kabi belgilaymiz va undan ixtiyoriy bir $\tilde{t}_i$ nuqtani tanlaymiz. Moddiy nuqtaning (t_{i-1}, t_i) vaqt oraliqlarida bosib o'tgan masofasini s_i kabi belgilab, bu vaqtda uning tezligi taqriban o'zgarmas va $v_i=v(\tilde{t}_i)$ ga teng deb olamiz. Bu holda $s_i \approx v_i \Delta t_i = v(\tilde{t}_i) \Delta t_i$ bo'lib, bosib o'tilgan s masofa uchun

$$s = \sum_{i=1}^n s_i \approx \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^n v(\tilde{t}_i) \Delta t_i$$

takribiy tenglikni hosil qilamiz. Bu masofa uchun aniq formulani hosil etish maqsadida bo'lakchalar soni n ni cheksiz oshirib boramiz. Natijada

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(\tilde{t}_i) \Delta t_i = \int_a^b v(t) dt \quad (2)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Masala: Tezligi $v(t)=t^2+3t$ qonun bo'yicha o'zgaradigan harakatda $[3, 8]$ vaqt oralig'ida bosib o'tilgan masofani toping.

Echish: Ko'rsatilgan (2) formulaga asosan

$$s = \int_3^8 (3t^2 + 4t) dt = (t^3 + 2t^2) \Big|_3^8 = (8^3 + 2 \cdot 8^2) - (3^3 + 2 \cdot 3^2) = 640 - 45 = 595.$$

3. Egri chiziq yoyining statik momentlarini hisoblash.

TA'RIF: Biror l o'qdan r masofada joylashgan m massali moddiy nuqtaning bu o'qqa nisbatan **statik momenti** deb $M_l = mr$ formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi.

Tekislikdagi l o'qdan $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ masofalarda joylashgan $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ massali moddiy nuqtalarning bu o'qqa nisbatan statik momenti deb

$$M_l = \sum_{i=1}^n m_i r_i$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi.

Endi tekislikda tenglamasi $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$, bo'lgan $L=AB$ egri chiziq yoyi berilgan bo'lsin. Bu egri chiziqning har bir x nuqtasidagi chiziqli zichligi $\gamma = \gamma(x)$ uzluksiz funktsiya bilan aniqlangan deb hisoblaymiz. Dastlab $L=AB$ egri chiziq yoyining m massasini topamiz. Buning uchun uni ixtiyoriy tarzda $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3, \dots, \Delta l_n$ kichik yoychalarga bo'laklaymiz. Har bir Δl_i yoychadan ixtiyoriy bir $P(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$) nuqtani tanlab olib, bu erda chiziqli zichlik taqriban o'zgarmas va

$Y(x_i)$ ga teng deb olamiz. Unda Δl_i yoychaning massasi $m_i \approx Y(x_i) \Delta l_i$ bo'lib, izlanayotgan m massa uchun

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \approx \sum_{i=1}^n \gamma(x_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \gamma(x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

taqribiy tenglikni hosil qilamiz. Unda massaning aniq qiymati

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \gamma(x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = \int_a^b \gamma(x) dl = \int_a^b \gamma(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (3)$$

formula bilan aniqlanishini topamiz.

Endi AB egri chiziq yoyining OX koordinata o'qiga nisbatan M_x statik momentini aniqlaymiz va uni hisoblash formulasini topamiz. Buning uchun uning Δl_i yoychalarini massasi Δm_i bo'lgan $P_i(x_i, y_i)$ nuqtalar bilan almashtiramiz. Bu nuqtalardan OX o'qigacha bo'lgan masofa $r_i = y_i$ bo'lgani uchun ularning statik momentlari $(M_x)_i$ uchun

$$(M_x)_i = y_i \Delta m_i \approx f(x_i) \gamma(x_i) \Delta l_i$$

taqribiy tenglik o'rinli bo'ladi. Unda izlanayotgan statik momen t taqribiy tenglik bilan aniqlanib, uning aniq qiymati

$$M_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \gamma(x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = \int_a^b f(x) \gamma(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (4)$$

formula bilan hisoblanadi.

Xuddi shunday tarzda bu egri chiziq yoyining OY koordinata o'qiga nisbatan statik momenti M_y

$$M_y = \int_a^b x \gamma(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (5)$$

formula bilan hisoblanishini ko'rsatish mumkin.

Agarda egri chiziq yoyi bir jinsli bo'lsa, unda chiziqli zichlik o'zgarmas, ya'ni $\gamma(x) = \gamma$ bo'lib, statik momentlar

$$M_x = \gamma \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad M_y = \gamma \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (6)$$

formulalar orqali topiladi.

4. Tekis shaklning statik momentlarini hisoblash.

XOY koordinata tekisligida $y=f(x)$ tenglamali egri chiziq, OX o'qi va $x=a$, $x=b$ vertikal to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya berilgan bo'lsin. Uning har bir $P(x, y)$ nuqtasidagi zichligi biror $\gamma(x)$ uzluksiz funktsiyadan iborat deb qaraymiz. Bu holda egri chiziqli trapetsiyaning massasim, OX va OY koordinata o'qlariga nisbatan statik momentlari aniq integral yordamida

$$m = \int_a^b \gamma(x) f(x) dx, \quad M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \gamma(x) f^2(x) dx, \quad M_y = \int_a^b \gamma(x) x f(x) dx \quad (7)$$

formulalar bilan hisoblanishini yuqorida ko'rilgan kabi mulohazalar orqali keltirib chiqarish mumkin.

Agar egri chiziqli trapetsiya bir jinsli, ya'ni zichlik $\gamma(x) = \gamma$ o'zgarmas bo'lsa, unda massa va statik momentlar

$$m = \gamma \int_a^b f(x) dx, \quad M_x = \frac{\gamma}{2} \int_a^b f^2(x) dx, \quad M_y = \gamma \int_a^b x f(x) dx \quad (8)$$

formulalar bilan hisoblanadi.

5. Egri chizik yoyining og'irlik markazini hisoblash.

TA'RIF: Egri chiziq **yoyining ogirlik markazi** deb shunday $P(x_0, y_0)$ nuqtaga aytiladiki, bu nuqtaga egri chiziq yoyining m massasini joylashtirsak, unda uning va egri chiziq yoyining o'qqa nisbatan statik momentlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni

$$M_x = y_0 \cdot m, \quad M_y = x_0 \cdot m \quad (9)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Ta'rifdagi (9) tengliklardagi M_x va M_y statik momentlar o'rniga ularning (4) va (5) ifodalarini, m massa o'rniga uning (3) ifodasini qo'yib, og'irlik markazi koordinatalari uchun ushbu formulalarni hosil etamiz:

$$x_0 = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x \gamma(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \gamma(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}, \quad y_0 = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b f(x) \gamma(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \gamma(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}.$$

Agar egri chiziq yoyi bir jinsli bo'lsa, unda zichlik $\gamma(x) = \gamma$ o'zgarmas bo'lib, og'irlik markazi koordinatalari aniq integral yordamida quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$x_0 = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}, \quad y_0 = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}.$$

6. Egri chiziqli trapetsiyaning og'irlik markazini hisoblash.

Egri chiziqli trapetsiyaning ham og'irlik markazi (9) tengliklar bilan aniqlanadi va bir jinsli bo'lmagan holda (7) formulaga asosan

$$x_0 = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x \gamma(x) f(x) dx}{\int_a^b \gamma(x) f(x) dx}, \quad y_0 = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b \gamma(x) f^2(x) dx}{\int_a^b \gamma(x) f(x) dx}$$

formulalar bilan topiladi.

Egri chiziqli trapetsiya bir jinsli, ya'ni zichlik $\gamma(x) = \gamma$ o'zgarmas bo'lsa, uning og'irlik markazi koordinatalari aniq integral yordamida quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$x_0 = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, \quad y_0 = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. O'zgaruvchi kuch bajargan ish qanday hisoblanadi?
2. Notekis harakatda masofani hisoblash formulasini yozing.
3. Yassi egri chiziq yoyning massasi aniq integral orqali qanday hisoblanadi?
4. Yassi egri chiziq yoyining statik momenti qanday formula bilan hisoblanadi?
5. Egri chiziqli trapetsiyaning massasi aniq integral orqali qanday hisoblanadi?
6. Egri chiziqli trapetsiyaning statik momentini hisoblash formulasini yozing.
7. Yassi egri chiziq yoyining og'irlik markazi qanday ta'riflanadi?
8. Yassi egri chiziq yoyining og'irlik markazi qanday hisoblanadi?
9. Egri chiziqli trapetsiyaning og'irlik markazi qanday ta'riflanadi va hisoblanadi?

ADABIYOTLAR RO'YXATI.

1. **SOATOV YO.U.** «Oliy matematika», I jild, Toshkent, O'qituvchi, 1992 y.
2. **RAXIMOV D.G.** «Oliy matematika», I jild, Toshkent, «TKTI», 2003 y.
3. **PISKUNOV N.S.** «Differentsial va integral hisob», 1-tom, Toshkent, O'qituvchi, 1972 y.
4. **AZLAROV T., MANSUROV X.** «Matematik analiz», I qism, Toshkent, O'qituvchi, 1994 y.
5. **TO'LAGANOV T., NORMATOV A.** «Matematikadan praktikum», Toshkent, O'qituvchi, 1983 y.
6. **TOJIEV Sh.** «Oliy matematikadan masalalar to'plami», Toshkent, O'qituvchi, 2003 y.

«Muallif» nashriyoti bosmaxonasida Chop etildi

Buxoro sh. Mustakillik kuchasi, 29G`2-uy.

Telefon: 223-00-18

Buyurtma 486 50 nusxa 2016 y.

