

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA  
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

BUXORO MUHANDISLIK TEXNOLOGIYA INSTITUTI

«OLIJ MATEMATIKA» KAFEDRASI

«Oliy matematika» fanidan

# REFERAT

**Mavzu: ASOSIJ DISKRET TAQSIMOT QONUNLARI. QISQACHA  
TARIXI VA AHAMIYATI EHTIMOLLIK . EHTIMOLLIKLARNI  
QO'SHISH VA KO'PAYTIRISH TEOREMALARI.**

Bajardi :

10-15 TJBAKT  
Saidova M.

Qabul qildi:

Otajanova N.B.

**BUXORO – 2016**

**Tayanch iboralar:** ehtimollik, hodisalar algebrasi, birgalikda va birgalikda bo'lmagan hodisalar, hodisalar to'liq gruppasi, elementar natijalar, ehtimollikning klassik ta'rifi, ehtimollikning asosiy xossalari, ehtimollikning geometrik va statistik ta'rifi, ehtimolliklarni qo'shish teoremlari, shartli ehtimollik, bog'liq va bog'liqmas hodisalar, ehtimolliklarni ko'paytirish teoremlari.

### **PEΦEPAT REJASI:**

1. Ehtimollik tushunchasi.
2. Hodisalar algebrasi.
3. Birgalikda va birgalikda bo'lmagan hodisalar.
4. Ehtimollikning aksiomatik kiritilishi.
5. Ehtimollikning klassik ta'rifi.
6. Ehtimollikning asosiy xossalari.
7. Ehtimollikning geometrik ta'rifi.
8. Ehtimollikning statistik ta'rifi.
9. Hodisalar yig'indisi va ko'paytmasi.
10. Birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun qo'shish teoremasi.
11. Qarama-qarshi hodisalarning ehtimolliklari.
12. Birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun qo'shish teoremasi.
13. Shartli ehtimollik.
14. Bog'liq va bog'liqmas hodisalar.
15. Bog'liq hodisalar uchun ko'paytirish teoremasi.
16. Bog'liqmas hodisalar uchun ko'paytirish teoremasi.
17. Qo'shish va ko'paytirish teoremlarni umumlashtirish.

Tabiat va jamiyatda kuzatiladigan (ro'y beradigan) barcha hodisalarni ikki sinfga bo'lish mumkin:

I. Ma'lum bir qonuniyat asosida ro'y beradigan hodisalar. Masalan, planetalarning harakati, ximiyaviy reaksiyalarda moddaning saklanishi,

radiusi  $R$  bo'lgan doiraning yuzasi  $S=\pi R^2$  formula bilan xisoblanishi, ishbay mexnat xaki ishlab chikarilgan maxsulot bo'yicha aniqlanishi, yilda turt faslning bo'lishi ana shunday hodisalarga misol bula oladi. Odatda bunday hodisalar **deterministik hodisalar** deb ataladi.

II. Biror bir qonuniyat asosida ro'y bermaydigan hodisalar. Ularga olingan lotoreya билетiga yutuq chikishi, maxsulotni bozorda qanday narxda sotilishi, biror shaharda sutka davomida nechta chaqaloq tug'ulishi, bekatda kerakli avtobusni kancha vaqt ko'tishga to'g'ri kelishi, test sinovida talabanning nechta savolga javob berishi kabi hodisalarni misol qilib ko'rsatish mumkin. Bu hodisalar to'g'risida aniq bir fikr aytib bo'lmaydi, chunki ular turli –tuman tasodifiy omillar asosida shakllanadi. Masalan, qishloq xujalik maxsulotining bozordagi narxi ob-xavoning qanday kelishi, erga kanchalik ishlov berilishi, xosildorlik va sifat, shu maxsulotga bo'lgan talab, boshka maxsulotlarning narxi, haridorning daromadi kabi juda ko'p omillar asosida aniqlanadi. Ikkinchi sinfga kiruvchi hodisalar xayotda **tasodifiy hodisalar** deb ataladi .

Tasodifiy hodisalarni turmushda onda-sonda ro'y beradigan hodisalar deb tushunish yoki qabul kilish butunlay noto'g'ridir. Ular kundalik xayotimizda bizning istar-istamasligimizga bog'liqsiz ravishda doimo uchrab turadi. Dikkatrok va chukurrok karalganda, tabiatda va ayniksa jamiyatda ro'y berayotgan jarayonlar asosan tasodifiy harakterga egadir. Bunga yuqorida keltirilganlardan tashkari yana juda ko'p misollar ko'rsatish mumkin. Shu sababli juda ko'p ilmiy va amaliy masalalarni echishda tasodifiyatlarni xisobga olish va o'rganishga to'g'ri keladi. Birinchi karashda tasodifiy hodisalar to'g'risida oldindan biror

fikr aytish mumkin emasday tuyuladi. Xakikatan ham, «Buxoro viloyatida 2000 yilda 500 ming tonna paxta etishtiriladi» yoki «2005 yil 1-yanvar kuni Toshkent shaxrida kor yogadi» yoki «Siz olgan zayom obligatsiyasiga bir yildan keyin yutuq chiqadi» kabi tasodifiy hodisalar to'g'risida vaqt soati kelgan paytdagina tasdik yoki rad javobini berish mumkin bo'ladi. Bu hodisalar faqatgina bir marta kuzatilishi mumkin va ularni kayta-kayta takrorlab bo'lmaydi. Bunday hodisalarni yakka tasodifiy hodisalar deb olish mumkin va ularni nazariy urganib bo'lmaydi. Ammo shunday tasodifiy hodisalar mavjudki, ularni ma'lum bir S shartlar bajarilgan holda ixtiyoriy marta takrorlab, ro'y berish yoki ro'y bermasligini xech bo'lmaganda nazariy nukta-nazardan tekshirish mumkin.

Masalan, simmetrik tanga tashlanganda uni gerb tomoni bilan tushishi tasodifiy hodisa va bu hodisani tekshirish uchun tangani simmetriklik shartini saqlagan holda ixtiyoriy marta tashlash mumkin. Yoki Buxorodagi oziq-ovqat do'konlariga kunduzi soat 10 bilan 11 orasida nechta haridor kelishi ham tasodifiy hodisa va bu hodisani ham o'rganish uchun ko'rsatilgan turdagi dukonlarda belgilangan vaqt oraligida ixtiyoriy marta kuzatish utkazishimiz mumkin . Bunday hodisalarni ommaviy tasodifiy hodisalar deb atash mumkin va ko'p xollarda ular to'g'risida ma'lum bir fikrni aytish mumkin bo'ladi. Xakikatan ham. tanga bir martagina tashlanganda uni kaysi tomoni bilan tushishi to'g'risida aniq bir xulosa chikarib bo'lmaydi, ammo tanga 100 ming marta tashlanganda (uning simmetriklik shartida) «taxminan 50% holda gerb tomoni bilan tushadi» degan xulosani bemalol aytish mumkin. Xuddi shunday zavod ishlab chikarayotgan maxsulot

to'g'risida uni bitta maxsulotini tekshirish orqali xulosa chikarib bo'lmaydi. Ammo ishlab chikarilgan shu maxsulotlarning bir qismi (chorak yoki yarim qismini) sifatini tekshirib, shu zavod kelajakda ishlab chikaradigan maxsulotning kancha qismi sifatli bo'lishi to'g'risidagi tasodifiy hodisa haqida ma'lum bir fikrni olga surish mumkin.

Endi ommaviy harakterdagi biror A tasodifiy hodisani ko'ramoz va uni tekshirish uchun N ta kuzatuv utkazamiz. Bu kuzatuvlarning barisi bir xil shart-sharoitda utkazilgan bo'lib, ularning ixtiyoriy birining natijasi kolganlarning natijasiga ta'sir kilmaydi deb faraz qilamiz. Masalan, tanga kayta-kayta tashlanganda, uni har safar kaysi tomoni bilan tushishi oldingi natijalarga sira bog'liq bo'lmaydi va keyingi natijalarga ta'sir kilmaydi. Bunday kuzatishlar bog'liqmas kuzatishlar deb ataladi. Utkazilgan N ta bog'liqmas kuzatuvda tasodifiy hodisa N(A)marta ro'y bergan bo'lsin. U holda

$$v_N(A) = \frac{N(A)}{N}$$

con A tasodifiy hodisani **chastotasi** deb ataladi. Kuzatuvlar soni N1, N2,..., Nn bo'lgan bog'liqmas kuzatuvlar seriyasini (ketma-ketligini) utkazamiz. Ularda biz tekshirayotgan A tasodifiy hodisa mos ravishda N1(A), N2(A),..., Nn(A) marta ro'y bergan bo'lsin. Agarda kuzatuvlar soni N1, N2,..., Nm etarli katta bo'lganda

$$v_{N_1}(A) = \frac{N_1(A)}{N_1}, \quad v_{N_2}(A) = \frac{N_2(A)}{N_2}, \quad \dots, \quad v_{N_m}(A) = \frac{N_m(A)}{N_m}$$

chastotalar bir-biridan juda kam fark kilsa, ya'ni

$$v_{N_1}(A) \approx v_{N_2}(A) \approx \dots \approx v_{N_m}(A)$$

shart bajarilsa, u holda  $A$  tasodifiy hodisa **statistik turgunlikka** ega deyiladi. Misol sifatida quyidagi jadvalda frantsuz tabiatshunosi **J.Byuffon** (1707-1788) va ingliz statistigi **K.Pirsonni** (1857-1936) tanga tashlashda uni «gerb» tomoni bilan tushishi bo'yicha kuzatuvlari natijalarini ko'rish mumkin (jadvalga karang).

J a d v a l

| Tajribachi | Tanga tashlashlar soni<br>$N$ | «Gerb» chikishlar soni<br>$N(A)$ | «Gerb» chikish chastotasi<br>$v_N(A)$ |
|------------|-------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|
| Byuffon    | 4040                          | 2048                             | 0,5070                                |
| Pirson     | 1200                          | 6019                             | 0,5016                                |
| Pirson     | 24000                         | 12012                            | 0,5005                                |

Bu jadvaldan kurinadiki,

$$A = \{\text{tanga tashlanganda "gerb" tomoni bilan tushdi}\}$$

tasodifiy hodisasi chastotasi 0,5 atrofida tebranib turadi va shuning uchun bu hodisa statistik turgunlikka ega.

Endi biz ehtimolliklar nazariyasi nima bilan shugullanshini umumiy holda ta'riflashimiz mumkin.

Ehtimolliklar nazariyasi statistik turgunlikka ega bo'lgan ommaviy tasodifiy hodisalar bilan bog'liq bo'lgan masalalarni urganuvchi matematik fandır.

Ehtimolliklar nazariyasi fan sifatida XVII asr urtalarida shakllana boshlagan. Bunda frantsuz olimlari **Paskal** (1623-1662) va **Ferma** (1601-1665) orasidagi yozishma aloxida urin tutadi. Ularning karta uyini

bilan bog'liq ba'zi savollar (masalalar) bo'yicha uzaro fikr almashish jarayonida ehtimolliklar nazariyasini boshlangich tushunchalari va dastlabki oddiy natijalari shakllana boshladi.

1656 yilda golland olimi **Gyuygens** (1629-1695) tomonidan ehtimollar nazariyasidan birinchi makola chop etildi. Ehtimollar nazariyasi bo'yicha dastlabki sof matematik teorema (katta sonlar qonuni) shveytsariyalik matematik **Ya.Bernulli** (1654-1705) tomonidan isbot qilingan. Keyingi chukur natija (markaziy limit teorema) 1730 yilda frantsuz matematigi **Muavr** (1667-1754) tomonidan kashf etilgan. Bu paytga kelib ehtimollar nazariyasi faqatgina kimor uyinlari bilan bog'liq bo'lgan masalalarni echish uchun kullanmasdan, balkim amaliy va ilmiy ahamiyatga ega bo'lgan kator masalalarni echishda ham ishlatila boshlandi. Bunga astronomik ulchashlardagi xatoliklarni o'rganish, meros bilan bog'liq bo'lgan xukukiy adliya masalalarini echish, sugurta tashkilotlari ishini asoslash, axoli usishini tadkikot kilish kabilarni misol qilib ko'rsatish mumkin. Bu omil ehtimolliklar nazariyasini yanada rivojlanishiga olib keldi va frantsuz olimi Laplas (1749-1927), frantsuz va nemis matematiklari Puasson (1781-1840) va Gauss (1777-1855) ishlarida uz aksini topdi. XIX asr oxirlari va XX asr boshlarida ehtimolliklar nazariyasi fanining rivojlanishi rus olimlari P.L.Chebo'shev (1821-1894), A.A.Markov (1856-1922), A.M.Lyapunov (1857-1918) nomlari bilan chambarchas bog'liq. Zamonaviy ehtimolliklar nazariyasi poydevorini, ya'ni uning aksiomalarini yaratishga rus matematigi S.N. Bernshteyn (1850-1968), nemis olimi R.Mizes (1883-1953) va frantsuz matematigi E.Borel (1871-1956) ishlari bagishlangan. Bu masala buyuk matematik

A.N.Kolmogorovning (1903-1987) 1933 yilda chop etilgan «Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari» nomli mashxur kitobida to'liq xal etildi. Kolmogorov aksiomatikasi ehtimolliklar nazariyasining klassik natijalarini asoslab berish bilan bir katorida uning yangi bulimlarini (masalan tasodifiy jarayonlar nazariyasi) ham asoslashga imkon berdi.

XX asrda ehtimolliklar nazariyasi juda katta sur'atlar bilan rivojlandi va bu asosda uning ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi, tasodifiy jarayonlar nazariyasi, ishonchlilik nazariyasi, ma'lumotlar nazariyasi kabi yangi bulimlari paydo buldi. Ehtimolliklar nazariyasi ishlab chiqarishni tashkil etish va boshkarishda, maxsulot sifatini tekshirish va yaxshilashda, murakkab texnik inshoot va kurilmalarni yaratishda juda keng kullanilmokda.

XX asrda zamonaviy ehtimolliklar nazariyasini rivojlantirishda nomlari yuqorida zikr etilgan olimlar bilan bir katorida rus matematiklari B.V.Gnedenko (1912) va Yu.V.Proxorov (1929), amerikalik matematiklar N.Viner (1894-1964), V.Feller (1906-1970) va J.Dub (1910), frantsuz matematigi P.Levi (1886-1971), o'zbek matematiklaridan Sarimsokov T.A. (1915-1995), Sirojiddinov S.X. (1920-1988) nomlarini ham ko'rsatish mumkin.

Hodisa tushunchasi ehtimolliklar nazariyasining boshlangich tushunchalaridan biri bo'lib xisoblanadi va shuning uchun ta'riflanmaydi.

**I. Ehtimollikning klassik ta'rifi:** Agarda  $n$  ta teng imkoniyatli elementar natijalardan  $m(A)$  tasi  $A$  hodisa uchun qulaylik tug'diruvchi bo'lsa,  $A$  hodisa ehtimolligi deb

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} \quad (1)$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi.

**1-m i s o l .** Simmetrik uyin sokkasi tashlanganda  $n=6$  ta teng imkoniyatli elementar natijalardan

$$A = \{3 \text{ yoki } 5 \text{ raqami chiqadi}\} = \{E_3, E_5\} = \{3, 5\}$$

tasodifiy hodisa uchun  $E_3$  va  $E_5$ , ya'ni  $m(A)=2$  tasi qulaylik tug'diruvchi va shu sababli

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

**2-m i s o l .**  $n=180$  ta maxsulot ichida  $m=9$  ta sifatsiz maxsulot bor. Shu maxsulotlardan tasodifiy ravishda bittasi tanlab olingan.

$$A = \{\text{tanlangan maxsulot sifatsiz}\}$$

tasodifiy hodisasi ehtimolligini topamiz.

Tanlovga ixtiyoriy maxsulot tushishi mumkin va shuning uchun bu erda  $n=180$  ta elementar natijalar bo'ladi. Tanlov tasodifiy bo'lgani uchun har bir maxsulot teng imkoniyat bilan tanlanishi mumkin, ya'ni ko'rilayotgan elementar natijalar teng imkoniyatli. A hodisa ro'y berishi uchun tanlangan maxsulot sifatsiz bo'lishi kerak va shuning uchun qulaylik tug'diruvchi natijalar soni  $m(A)=9$  bo'ladi. Demak, klassik ta'rifga asosan,

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{9}{180} = 0,05.$$

Ehtimollikning klassik ta'rifidan uning quyidagi asosiy xossalari kelib chiqadi.

**I xossa .** Ixtiyoriy A hodisa uchun uning ehtimolligi

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (2)$$

shartni kanoatlantiradi.

**I s b o t.** A hodisaga qulaylik tug'diruvchi natijalar soni barcha natijalar sonidan katta bula olmaydi, ya'ni  $m(A) \leq n$ . Ma'nosiga kura  $n > 0$ ,  $m(A) \geq 0$ .

Shuning uchun

$$0 \leq m(A) \leq n \Rightarrow \frac{0}{n} \leq \frac{m(A)}{n} \leq \frac{n}{n} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

**II xossa.** Muqarrar hodisa  $\Omega$  ehtimolligi birga teng, ya'ni

$$P(\Omega) = 1 \quad (3)$$

**I s b o t.** Muqarrar hodisa  $\Omega$  ta'rifiga asosan u ixtiyoriy  $E_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  natijada ro'y beradi ((2) tenglikka ham karang), ya'ni barcha  $n$  ta natijalar  $\Omega$  uchun qulaylik tug'diruvchi bo'ladi. Shu sababli  $m(\Omega) = n$  va klassik ta'rifga asosan

$$P(\Omega) = \frac{m(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

**III xossa.** Mumkin bo'lmagan hodisa  $\emptyset$  ehtimolligi nolga teng, ya'ni

$$P(\emptyset) = 0 \quad (4)$$

**I s b o t.** Mumkin bo'lmagan hodisa  $\emptyset$  ta'rifiga asosan u ixtiyoriy  $E_i$  natijada ham ro'y bermaydi, ya'ni uning uchun qulaylik tug'diruvchi natijalar yuk. Demak  $m(\emptyset) = 0$  va  $n > 0$  bo'lgani uchun

$$P(\emptyset) = \frac{m(\emptyset)}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

II. Endi  $\{E_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , elementar hodisalar (natijalar) albatta teng imkoniyatli bo'lmasdan, ular  $p_i = P\{E_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$  ehtimolliklar bilan aniqlanadigan imkoniyatlarga ega bo'lsin. Bu ehtimolliklar

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (5)$$

shartni kanoatlantirishi kerak.

Bu shart har bir kuzatuv natijasida  $\{E_i\}$  elementar hodisalardan qaysidir biri albatta ro'y berishini ifodalaydi. Bu holda

$A = \{E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_m}\}$  tasodifiy hodisa ehtimoligi  $P(A)$  sifatida

$$P(A) = P(E_{i_1}) + P(E_{i_2}) + \dots + P(E_{i_m}) = \sum_{k=1}^m p_{i_k} \quad (6)$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi.

Bu usulda aniqlangan  $R(A)$  ehtimollik ham (2) –(5) xossalarga ega bo'lishini ko'rsatish talabiga mustaqil ish sifatida xavola qilinadi.

**Misol:** Agarda  $\{E_i\}$  elementar natijalar teng imkoniyatli bo'lsa, u holda  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$  bo'ladi va (6) shartga asosan

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = p + p + p + \dots + p = 1, \quad p = \frac{1}{n}$$

ya'ni  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$  bo'ladi. Bu holda (10) formuladan

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

natijaga, ya'ni ehtimollikning klassik ta'rifiga kelamiz.

III. Yuqorida ko'rib utilgan chekli sxemani  $\{E_i, i=1,2,3,\dots, \infty\}$  canokli sxema umumlashtiradi.

Bu erda elementar natijalar ehtimolliklari  $P\{E_i\} = p_i, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$  bo'lsa,

$A = \{E_{\alpha}, \alpha \in I\}$  tasodifiy hodisa ehtimolligi

$$P(A) = \sum_{\alpha \in I} P_{\alpha}$$

formula bilan aniqlanadi. Bunda  $I$  – chekli yoki sanokli natural sonlar to'plami.

**IV. Ehtimolning geometrik ta'rifi.** Yuqorida biz elementar natijalar to'plami  $\Omega = \{E_\alpha, \alpha \in I\}$  chekli yoki sanokli bo'lgan holda tasodifiy hodisalarning ehtimolligini topish masalasi bilan shugullangan edik. Amaliyotda bu xollar bilan bir katorida ko'pincha  $\Omega$  sanokli bo'lmagan (sanoksiz) cheksiz tuplam bo'lgan holda turli tasodifiy hodisalar ehtimolligini topish masalasiga duch kelamiz. Bu masalani quyidagi xususiy holda ko'rib chikamiz.

To'g'ri chizik, tekislik yoki fazoda biror  $\Omega$  soxa berilgan bo'lsin va  $\mu(\Omega)$  o'lchamga ega bo'lsin. Bu erda  $\mu$  o'lcham deganda uzunlik (to'g'ri chizikda), yuza (tekislikda) yoki xajm (fazoda) ko'zda tutiladi.  $\Omega$  soxaga tasodifiy ravishda tashlangan nuqtani o'lchamli  $A \subset \Omega$  soxaga tushish hodisasini ham  $A$  deb belgilaymiz. Bu hodisani  $P(A)$  ehtimolligini topish uchun quyidagi shartlarni kuyamiz:

1. Tasodifiy tashlangan nuqta  $\Omega$  soxaning ixtiyoriy nuqtasiga tushishi mumkin, ya'ni  $\Omega$  soxaning barcha nuqtalari teng imkoniyatli.
2.  $P(A)$  ehtimollik  $A$  soxani fakat  $\mu(A)$  o'lchamiga proporsional ravishda bog'liq bo'lib, bu soxaning ko'rinishiga (shakliga) va  $\Omega$  soxani kaerida joylashganiga bog'liq emas.

Bu shartlarda  $A$  hodisa ehtimolligi deb

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \quad (7)$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi. Bu ehtimollikning geometrik ta'rifi deb aytiladi. (7) formula bilan aniqlangan ehtimollik ham (6)-(8) xossalarni kanoatlantirishini ko'rsatish talabalarga mustaqil ish sifatida xavola qilinadi.

**M i s o l** :  $\Omega$  doira ichiga tasodifiy tashlangan nuqtani unga ichki chizilgan  $A$  kvadrat ichiga tushish ehtimolligini topamiz.

**E ch i sh** : Doira diametrini  $d$  deb olsak, u holda barcha elementar natijalar to'plami o'lchami

$$\mu(\Omega) = S(\text{doira}) = \frac{\pi d^2}{4},$$

qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar to'plami o'lchami kvadrat yuzasi bo'lib,

$$\mu(A) = S(\text{kvadrat}) = \frac{d^2}{2}$$

Ehtimolning geometrik ta'rifiga asosan

$$P(A) = \mu(A) / \mu(\Omega) = \frac{d^2}{2} / \frac{\pi d^2}{4} = \frac{2}{\pi}.$$

**V. Ehtimollikning statistik ta'rifi.**  $A$  tasodifiy hodisa statistik turgunlikka ega bo'lsa, uning  $\nu_N(A) = N(A)/N$  chastotasi turli  $N$  qiymatlarida bir-biridan keskin fark kilmaydigan sonlardan iborat bo'lishi aytilgan edi. Shu sababli  $N \rightarrow \infty$  bo'lganda  $\nu_N(A)$  limiti to'g'risida suz yuritish mumkin. Agarda bu limit mavjud bo'lsa, uning qiymati  $A$  hodisaning  $P(A)$  ehtimolligi sifatida qabul qilinadi. Shunday qilib ehtimollikning statistik ta'rifi

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \nu_N(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} N(A)/N \quad (8)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Bu holda ham ehtimollikning barcha asosiy xossalari saqlainb qolishini ko'rsatish qiyin emas.

Ehtimolliklar nazariyasining asosiy masalalaridan biri «soddaroq» tasodifiy hodisalar ehtimolliklari asosida ulardan tashkil topgan «murakkabroq» hodisalarni ehtimolliklari haqida xulosa chiqarish bo'lib

xisoblanadi. Misol sifatida  $A$  va  $B$  hodisalarining ehtimolliklari yordamida ularning yig'indisi  $A+B$  va ko'paytmasi  $AB$  hodisalari ehtimolliklarini topish masalasini ko'ramoz.

**T E O R E M A № 1.** Agarda  $A$  va  $B$  hodisalari birgalikda bo'lmasa, u holda

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \quad (9)$$

**I s b o t :**  $A, B, A+B$  hodisalar ko'rilayotgan kuzatuvlarda  $n$  ta elementar natijalar bo'lib,  $A$  va  $B$  hodisalarga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar soni  $m(A)$  va  $m(B)$  bo'lsin. Ehtimollikning klassik ta'rifiga asosan

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}, \quad P(B) = \frac{m(B)}{n} \quad (a)$$

$A$  va  $B$  birgalikda bo'lmagani uchun ularga qulaylik tug'diruvchi natijalarning birortasi ham ustma-ust tushmaydi. Bu holda  $A+B$  yigindi ta'rifiga asosan unga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar soni  $m(A+B)$  uchun

$$m(A+B) = m(A)+m(B) \quad (v)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.  $A+B$  hodisa uchun ehtimollikning klassik ta'rifini qo'llab va (a),(v) munosabatlardan foydalanib isbotlash kerak bo'lgan (1) formulani olamiz:

$$P(A+B) = \frac{m(A+B)}{n} = \frac{m(A)+m(B)}{n} = \frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n} = P(A) + P(B)$$

**Natija № 1 .** Agarda  $A_1, A_2, \dots, A_n$  birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa

$$P(A_1 + A_2, \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \quad (9')$$

**I s b o t :** Bu xulosa (1) formulani ketma-ket qo'llash orqali va matematik induksiya yordamida keltirib chiqariladi.

**Natija № 2 .**  $A_1, A_2, \dots, A_n$  birgalikda bo'lmagan hodisalar to'liq gruppani tashkil etsa, u holda

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k) = 1 \quad (9'')$$

**I s b o t :**  $A_1, A_2, \dots, A_n$  to'liq grupp bo'lgani uchun

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega \quad (s)$$

Ular birgalikda bo'lmagani uchun (1') tenglik va (s) munosabatga asosan

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(\Omega) = 1.$$

Bu erda muqarrar hodisa  $\Omega$  uchun  $P\{\Omega\} = 1$  ekanligidan foydalanildi.

**Natija № 3.** Qarama-qarshi hodisalar ehtimolliklari yig'indisi birga teng, ya'ni

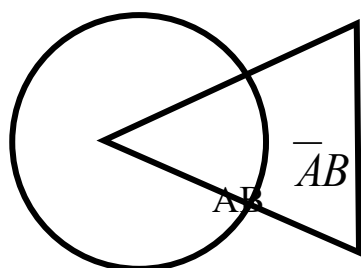
$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (9''')$$

Bu natija isboti talabalarga mustaqil ish sifatida koldiriladi.

**T E O R E M A № 2.** Agarda  $A$  va  $B$  hodisalar birgalikda bo'lsa, u holda

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (10)$$

**I s b o t :** Muloxazalarimizga yakkollik (ravshanlik) kiritish maqsadida  $A$  va  $B$  hodisalarini tekislikdagi kesishuvchi (chunki ular birgalikda) doira va uchburchak ko'rinishda tasvirlaymiz (chizmaga karang)



Bu chizmaga asosan

$$A + B = \bar{A}B + AB + \bar{A}\bar{B} \quad ,$$

$$A = \bar{A}B + AB, B = \bar{A}\bar{B} + AB$$

tengliklarni (ayniyatlarni) yozish mumkin. Bu

erda  $\overline{AB}, AB, \overline{AB}$  hodisalar birgalikda emas (chunki ularning tasvirlari kesishmaydi) va shuning uchun (1'), (1) formulalarga asosan

$$P(A+B)=P(\overline{AB} + AB + \overline{AB})=P(\overline{AB}) + P(AB) + P(\overline{AB}),$$

$$P(A) = P(\overline{AB} + AB) = P(\overline{AB}) + P(AB)$$

$$P(B) = P(\overline{AB} + AB) = P(\overline{AB} + AB)$$

Oxirgi ikki tenglikdan  $P(\overline{AB})$ ,  $P(\overline{AB})$  ehtimolliklarni topib va ularni birinchi tenglikka qo'yib, (2) formulani xosil qilamiz.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, (2) formulani A va B hodisalar birgalikda bo'lmagan holda qo'llash mumkin, chunki bu holda

$AB = \emptyset \Rightarrow P(AB) = P(\emptyset) = 0$  tenglik o'rinli bo'ladi va shu sababli (2) formuladan (1) formula kelib chiqadi.

**T A ' R I F 1:** Teorema №1 va №2 ehtimollarni qo'shish teoremlari deb ataladi.

Endi A va B hodisalar ko'paytmasi AB ehtimollikni xisoblash formulasiga o'tamiz. Buning uchun ehtimollar nazariyasining muxim tushunchalaridan biri bo'lgan shartli ehtimollik tushunchasini kiritamiz.

**T A ' R I F 2:** A hodisaning B hodisa ro'y berdi shartda xisoblangan ehtimollik uning shartli ehtimollik deyiladi va  $P(A/B)$  ko'rinishda belgilanadi.

Bu nuqtai nazardan  $P(A)$  shartsiz ehtimol deb tushuniladi.

**M i s o l :** Kutida 2 ta sifatli va bitta sifatsiz maxsulot bor. Bu kutidan tasodifiy ravishda ikkita maxsulot olindi. Bu erda

$$A = \{ \text{I tanlangan maxsulot sifatli} \}$$

$B = \{ \text{II tanlangan maxsulot sifatli} \}$  hodisalarni ko'ramoz. B hodisa ro'y

berganligi yoki ro'y bermaganligi ma'lum bo'lmasa, ya'ni II tanlangan maxsulot sifati to'g'risida ma'lumot bo'lmasa, shartsiz ehtimollik  $P(A)=2/3$  bo'ladi. Agarda B hodisa ro'y bergan bo'lsa, ya'ni II maxsulot sifatli bo'lsa, shartli ehtimollik  $P(A/B)=1/2$  bo'ladi. Talabaga mustaqil ish sifatida  $P(A/\bar{B})$ ,  $P(B/A)$ ,  $P(B/\bar{A})$  ehtimolliklarni xisoblash va ixtiyoriy A, B hodisalar uchun

$$P(A/B) + P(\bar{A}/B) = 1$$

ayniyatni isbotlash tavsiya qilinadi.

**THEOREM № 3 :** Ixtiyoriy A va B hodisalar uchun

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) \quad (11)$$

formula o'rinli bo'ladi.

**I s b o t :** A,B,AB hodisalar ko'rilayotgan kuzatuvlarda n ta elementar natija bo'lib, ulardan m(A) tasi A uchun, m(AB) tasi AB uchun qulaylik tug'diruvchi bo'lsin. Ehtimollikni klassik ta'rifiga asosan

$$P(AB) = \frac{m(AB)}{n}, \quad P(A) = \frac{m(A)}{n} \quad (d)$$

Endi  $P(B/A)$  shartli ehtimollikni topamiz. A hodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lgani uchun, endi n ta emas, balkim faqatgina m(A) ta elementar natijalar ro'y berishi mumkin. Shartga asosan ulardan m(AB) tasida B ro'y berishi mumkin va shu sababli klassik ta'rif bo'yicha

$$P(B/A) = \frac{m(AB)}{m(A)} \quad (e)$$

(d) va (e) munosabatlardan (3) formula quyidagicha kelib chiqadi .

$$P(AB) = \frac{m(AB)}{n} = \frac{m(AB)}{n} \cdot \frac{m(A)}{m(A)} = \frac{m(A)}{n} \cdot \frac{m(AB)}{m(A)} = P(A)P(B/A)$$

Ko'paytma ta'rifiga asosan  $AB=BA$  bo'lgani uchun bu tenglikdan

$$P(AB)=P(BA) =P(B)P(A/B)$$

tenglik ham kelib chiqadi.

**Misol:** Oldingi kurilgan misolda

$$C = \{\text{ikkala tanlangan maxsulot sifatli}\}$$

hodisa ehtimolligini topamiz.  $C=AB$ ,  $P(A)=2/3$ ,  $P(B/A)=1/2$  bo'lgani uchun

$$P(C)=P(AB)=P(A) P(B/A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

**T A ' R I F 3 :** Agarda  $P(A/B)=P(A)$  shart bajarilsa, A va B hodisalar bog'liq emas deyiladi. Aks holda ular bog'liq hodisalar deb ataladi.

Shunday qilib A hodisaning ehtimolligi B hodisani ro'y bergan yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lmasa, u holda A va B hodisalar bog'liqmas bo'ladi. Bu tushuncha ham ehtimolliklar nazariyasining muxim tushunchalaridan biri bo'lib xisoblanadi.

**Misol:** Oldingi misolda tasodifiy tanlangan I va II maxsulot sifatini ifodalovchi A va B hodisalar bog'liq , chunki

$$P(A)=\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} = P(A / B)$$

Endi ko'rilayotgan misolda I tanlangan maxsulot sifati aniqlangach, u yana kutiga kaytib solindi va sungra II maxsulot tasodifiy ravishda tanlab olindi deb faraz qilamiz. Bu holda endi A va B hodisalar bog'liqmas, chunki

$$P(B/A)=P(B/\bar{A}) = \frac{2}{3} = P(B)$$

Amaliyotda ko'pincha A va B hodisalarni bog'liq yoki bog'liqmasligi ularni mazmuniga asosan aniqlanadi. Masalan, tanga

yoki uyin sokkasi ikki marta tashlanganda, har gal ularni ma'lum bir tomoni bilan tushishini ifodalovchi  $A$  va  $B$  hodisalar bog'liqmas bo'ladi.

Talabaga mustaqil ish sifatida bog'liqmas  $A, B$  hodisalar uchun

$$P(A/B)=P(A) \Leftrightarrow P(B/A)=P(B)$$

munosabatlarni o'rinli bo'lishini tekshirish tavsiya qilinadi.

**K u r s a t m a :** (10) formuladan foydalaning.

**T E O R E M A № 4 :** Agarda  $A$  va  $V$  hodisalar bog'liq emas bo'lsa, u holda

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (11)$$

formula o'rinli bo'ladi.

**I s b o t :**  $P(B/A)=P(B)$  bo'lgani uchun (10) formulaga asosan

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P(B)$$

**M i s o l :** Ishlab chikarilayotgan maxsulot sifati ketma-ket ikki nazoratchi tomonidan tekshirilmokda. Bunda I nazoratchi maxsulot sifatini 0,85 ehtimollik bilan, II nazoratchi esa 0,7 ehtimollik bilan to'g'ri baxolaydi.

$$A=\{\text{ikkala nazoratchi maxsulot sifatini to'g'ri baxoladi}\}$$

tasodifiy hodisa ehtimolligini topamiz. Buning uchun

$$A_k=\{k - \text{nazoratchi maxsulot sifatini to'g'ri baxoladi}\}, k=1,2$$

tasodifiy hodisalarni kiritamiz. Shartga  $P(A_1)=0,85$ ,  $P(A_2)=0,7$ .

Mazmuniga kura  $A=A_1 \cdot A_2$  ba  $A_1, A_2$ - bog'liqmas hodisalar. Shuning uchun

$$P(A)=P(A_1 A_2)= P(A_1) \cdot P(A_2)=0,85 \cdot 0,7=0,595$$

**T A ' R I F 4:** Teorema №3 va №4 ehtimolliklarni ko'paytirish teoremlari deyiladi.

Bu teoremlarni  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hodisalar uchun ham umumlashtirish mumkin. Masalan  $n=3$  bo'lganda

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \quad (11)$$

va  $A_1 A_2 A_3$  bog'liqmas bo'lsa

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) \quad (11')$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Bu erda biz amaliy masalalarni echishda juda ko'p uchrab turadigan ba'zi bir diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini ko'rib chiqamiz.

**I. Binomial taqsimot.** Bernulli sxemasida, ya'ni  $P(A)=p$  ehtimolli  $A$  tasodifiy hodisa ustida  $n$  ta bog'liqmas kuzatuv utkazilganda,  $A$  hodisaning ro'y berishlar sonini  $X$  bilan belgilaylik. Aniqlanishi bo'yicha  $X$  diskret tasodifiy miqdor bo'lib u uzining  $k=0,1,2,\dots,n$  mumkin bo'lgan qiymatlarini

$$P\{X=k\} = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q=1-p \quad (1)$$

ehtimolliklar bilan qabul qilishi va

$$\sum_{k=0}^n P\{X=k\} = 1$$

bo'lishi oldin ko'rib utilgan edi. (1) ehtimolliklarga ega bo'lgan  $X$  binomial taqsimotli tasodifiy miqdor deyiladi. Shu tasodifiy miqdorning matematik ko'tilishi va dispersiyasini topamiz. Ta'rif bo'yicha ular

$$M(X) = \sum_{k=0}^n x_k p_k = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$D(X) = \sum_{k=0}^n x_k^2 p_k - [M(X)]^2 = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} - [M(X)]^2$$

formula bilan topiladi. Ammo bu formulalardagi yigindilarni xisoblash ancha murakkab va shu sababli  $M(X)$ ,  $D(X)$  ko'rsatgichlarni boshkacha

usulda topamiz. Buning uchun  $X_m$ ,  $m=1,2,\dots,n$ , yordamchi tasodifiy miqdorlarni kiritamiz. Bu erda  $X_m=1$  ( $X_m=0$ ) agarda  $m$  – kuzatuvda  $A$  hodisa ro'y bersa (ro'y bermasa) deb olamiz. Shartga asosan  $P(A)=p$ ,  $P(A)=1-p=q$  bo'lgani uchun,  $X_m$  diskret tasodifiy miqdorlar bir xil

|       |   |   |
|-------|---|---|
| $X_m$ | 1 | 0 |
| P     | p | q |

$m=1,2,\dots, n$ . taqsimot qonuniga ega bo'ladi. U holda ixtiyoriy  $m=\overline{1,n}$  uchun

$$M(X_m) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$$

$$D(X_m) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - [M(x)]^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$X_m$ ,  $m=\overline{1,n}$  tasodifiy miqdorlarning aniqlanishiga kura ularning yig'indisi  $n$  ta kuzatuvda  $A$  hodisa necha marta ro'y berganini bildiradi, ya'ni

$$X_1 + X_2 + \dots + X_m = X$$

kuzatuvlar bog'liqmas bo'lgani uchun  $X_m$ ,  $m=\overline{1,n}$ , tasodifiy miqdorlar ham bog'liqmas bo'ladi. Shu sababli  $M(X)$  va  $D(X)$  xossalriga asosan

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + \dots + X_m) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n) = p + p + \dots + p = np$$

$$D(X) = D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n) = pq + pq + \dots + pq = npq.$$

Demak (1) binomial taqsimotga ega bo'lgan  $X$  tasodifiy miqdor uchun

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq} \quad (2)$$

## II. Puasson taqsimoti. Binomial taqsimot uchun

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda = np, \quad k = \overline{0, n}$$

Puasson asimptotik formulasini chikargan edik. Endi mumkin bo'lgan qiymatlari manfiy bo'lmagan  $k=0,1,2,\dots$  butun sonlardan iborat bo'lgan  $X$  diskret tasodifiy miqdorni ko'ramoz va uning bu qiymatlari ehtimolliklarini

$$P\{X=k\} = P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda > 0 \quad (3)$$

formula bilan aniqlaymiz. Avvalo (3) ehtimolliklardan tuzilgan kator yig'indisi birga teng bo'lishini ko'rsatamiz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

Bu erda  $y = e^x$  funktsiya uchun

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Makloren katoridan foydalanildi. Demak (3) ehtimolliklar taqsimot qonunini tashkil etadi va u  $\lambda$  parametrli Puasson taqsimoti deyiladi.

Masalan, kichik ehtimollik bilan sifatsiz bo'lishi mumkin bo'lgan maxsulotlarning katta xajmli partiyasidagi sifatsiz maxsulotlar soni Puasson taqsimotiga ega bo'ladi.

Puasson taqsimotining matematik ko'tilishini uning ta'rifi bo'yicha xisoblaymiz :

$$\begin{aligned} M(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k P(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right)'_{\lambda} = \lambda e^{-\lambda} (e^{\lambda})' = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

Xuddi shunday xisoblashlar orqali  $D(X) = \lambda$  ekanligini ko'rsatish mumkin. Shunday qilib Puasson taqsimotida

$$M(X) = D(X) = \lambda \quad (4)$$

Bu xususiyat faqatgina Puasson taqsimotiga xosdir.

**III. Geometrik taqsimot** Bog'liqmas kuzatuvlarning har birida  $A$  tasodifiy hodisa bir xil  $P(A)=p$  ehtimollik bilan ro'y berishi mumkin bo'lsin.  $X$  orqali  $A$  hodisa birinchi marta ro'y bergan kuzatuvning tartib raqamini belgilaymiz. Bu holda  $X$  diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari barcha natural sonlardan iborat bo'ladi va

$$\{X = n\} = \bar{A} \cdot \bar{A} \dots \bar{A} A, \quad n=1,2,3,\dots$$

$n-1$

Кузатувлар богликмас булгани учун эхтимолликларни купайтириш теоремасига асосан

$$P\{X=n\} = P\{\bar{A} \cdot \bar{A} \dots \bar{A} A\} =$$

$n-1$

$$=P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \dots P(\bar{A}) \cdot P(A) = q^{n-1}p = pq^{n-1}, \quad q=1-p.$$

Shunday qilib kiritilgan  $X$  tasodifiy miqdor uchun

$$P\{X=n\} = pq^{n-1}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (5)$$

(5) ehtimolliklar taqsimot qonuni tashkil etishini ko'rsatish uchun ulardan tuzilgan kator yig'indisini topamiz :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X=n\} = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

Bu erda biz  $0 < q < 1$  bo'lgani uchun  $q^{n-1}$ ,  $n=1,2,3,\dots$  cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya tashkil etishidan va uning barcha xadlar yig'indisi  $S=1/(1-q)$  bo'lishidan foydalandik.

(5) ehtimolliklar birinchi xadi  $p$ , maxraji esa  $q$  bo'lgan geometrik progressiya xadlaridan tashkil topgani uchun u geometrik taqsimot qonuni deb ataladi. Matematik kutilish ta'rifiga asosan

$$\begin{aligned} M(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} n P\{X=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} = p \left( \sum_{n=1}^{\infty} q^n \right)'_q = \\ &= p \cdot \left( \frac{q}{1-q} \right)' = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Xuddi shunday xisoblashlar orqali  $D(X)=q/p^2$  ekanligini topish mumkin. Shunday qilib geometrik taqsimotda

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2} \quad (6)$$

**IV. Gipergeometrik taqsimot.** Bu taqsimotni ushbu masala orqali aniqlaymiz. Maxsulotlar partiyasida  $N$  dona maxsulot bo'lib, ulardan  $M$  donasi ( $0 \leq M \leq N$ ) sifatlidir. Shu partiyadan tasodifiy ravishda  $n$  dona ( $0 \leq n \leq N$ ) maxsulot tanlab olindi, ular orasidagi sifatli maxsulotlar soni  $X$  deb olindi. Bu holda  $X$  mumkin bo'lgan qiymatlari  $0, 1, 2, \dots, n$  bo'lgan diskret tasodifiy miqdor bo'lib, ehtimollikning klassik ta'rifiga asosan

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (7)$$

tenglikni xosil qilish mumkin. Kombinatorika nazariyasidagi qo'shish teoremasiga asosan

$$\sum_{m=0}^n P(X = m) = \frac{1}{C_N^n} \sum_{m=0}^n C_M^m C_{N-M}^{n-m} = \frac{1}{C_N^n} C_N^n = 1$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak (7) ehtimolliklar taqsimot qonunini xosil qiladi va u gipergeometrik taqsimot deb ataladi.

Kombinatorik formulalardan foydalanib, gipergeometrik taqsimot matematik ko'tilishi va dispersiyasi uchun

$$M(X) = \frac{nM}{N}, \quad D(X) = \frac{nM(N-M)}{N^2} \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

tengliklar o'rinli ekanligini isbotlash mumkin.

Biz diskret  $X$  tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni uni to'liq aniqlashini ko'rib utdik. Ammo mumkin bo'lgan qiymatlari biror chekli yoki cheksiz intervalni to'liq tuldiradigan  $X$  uzluksiz tasodifiy miqdor uchun taqsimot qonuni ma'noga ega bo'lmaydi. Shu sababli biz endi  $X$  tasodifiy miqdorni biror  $x$  qiymatni qabul qilish ehtimolligi urniga uni biror soxaga tushish ehtimolligini ko'rishimiz kerak. Ehtimolliklar nazariyasida bunday soxalar sifatida  $(-\infty, x)$  intervallar kuriladi va  $x$  uzgaruvchining ixtiyoriy qiymatida ular uchun

$$P\{X \in (-\infty, x)\} = P\{X < x\}$$

ehtimolliklar aniqlangan deb qabul qilinadi. Bu ehtimolliklar  $x$  uzgaruvchini qiymatiga bog'liq bo'ladi, ya'ni biror

$$F(x) = P\{X < x\}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

funktsiyani aniqlaydi.

**T A ' R I F 1:** (1) tenglik bilan aniqlangan  $F(x)$  funktsiya  $X$  tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi deb ataladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki  $F(x)$  taqsimot funktsiyasi ham diskret, ham uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ma'noga ega.

Taqsimot funktsiyalari quyidagi xossalarga ega :

**I - x o s s a :**  $F(x)$  kamaymovchi funktsiya , ya'ni

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

**I s b o t :** Quyidagi tasodifiy hodisalarni kiritamiz :

$$A\{x < x_2\} , B\{x < x_1\} , C\{x_1 \leq x < x_2\}$$

Ular birgalikda emas va  $x_2 > x_1$  bo'lgani uchun  $A=B+C$  tenglik o'rinli bo'ladi. Ehtimolliklarni qo'shish teoremasiga asosan

$$P(A)=P(B)+P(C) \Rightarrow P(A)-P(B)=P(C)$$

$$P\{X < x_2\} - P\{X < x_1\} = P\{x_1 \leq X < x_2\} \geq 0$$

Bu erdan (1) formulag asosan

$$F(x_2) - F(x_1) \geq 0 \Rightarrow F(x_2) \geq F(x_1).$$

**II x o s s a :**  $F(-\infty) = 0$  ,  $F(+\infty)=1$

**I s b o t :** Taqsimot funktsiyasi ta'rifi va ehtimolliklar xossasiga asosan

$$F(-\infty) = P\{X < +\infty\} = P\{\emptyset\} = 0$$

$$F(+\infty) = P\{X < \infty\} = P\{\Omega\} = 1$$

Bu erda  $\emptyset$  va  $\Omega$  mumkin bo'lmagan va muqarrar hodisa ekanligini eslatib o'tamiz.

**III x o s s a :**  $0 \leq F(x) \leq 1$  ,  $x \in (-\infty, \infty)$

**I s b o t :** Bu xossa (1) formula va ehtimollikni xossalaridan kelib chiqadi.

Endi uzining  $x_k$  qiymatlarini  $P\{X=x_k\}=p_k$  ,  $k=\overline{1, n}$  ehtimolliklar bilan qabul kiladigan diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi kuriishini aniqlaymiz. Umumiylikni kamaytirmasdan  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$  deb olish mumkin. Bu holda quyidagilarga ega bulamiz :

$$x \leq x_1 \Rightarrow F(x) = P\{X < x\} = P\{X < x_1\} = P(\emptyset) = 0 \quad (8)$$

.....

$$x_k < x \leq x_{k+1} \Rightarrow F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_k = \sum_{i=1}^k p_i , \quad 1 \leq k \leq n-1$$

.....

$$x > x_n \Rightarrow F(x) = 1$$

Bu funktsiyaning sxematik grafigini chizamiz : Demak  $X$  diskret tasodifiy miqdorning  $F(x)$  taqsimot funktsiyasi pogonasimon bo'lib, u uzining qiymatlarini fakat  $x_k$  nuqtalarda  $p_k$  miqdorga sakrash orqali uzgartiradi.

Bundan kelib chiqadiki, agarda  $X$  diskret tasodifiy miqdorning fakat  $F(x)$  taqsimot funktsiyasi ma'lum bo'lsa, u holda  $X$  taqsimot qonunini topish mumkin. Bunda  $F(x)$  funktsiyaning  $x_k$  uzilish nuqtalari  $X$  qabul kiladigan qiymatlarni, bu nuqtalardagi

$$\Delta F = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

sakrash miqdori esa  $P\{X=x_k\}=p_k$  ehtimolliklarni aniqlaydi. Shunday qilib  $F(x)$  taqsimot funktsiyasi diskret  $X$  tasodifiy miqdorni to'liq harakterlaydi.

**TEOREMA :** Agar  $F(x)$  diskret yoki uzluksiz  $X$  tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi bo'lsa, ixtiyoriy  $[a, \theta)$  yarim interval uchun

$$P\{X \in [a, \theta)\} = P\{a \leq X < \theta\} = F(\theta) - F(a)$$

formula o'rinli bo'ladi.

**Isbot :** Oldin kurilgan (3) formulada  $x_1 = a$ ,  $x_2 = \theta$  deb (5) formulani xosil qilamiz.

Bu teoremadan kelib chiqadiki  $F(x)$  uzluksiz  $X$  tasodifiy miqdorni ham to'liq harakterlaydi, chunki uni ixtiyoriy oralikka tushishini aniqlaydi.

**TA'RIF 2 :** Agarda  $F(x)$  taqsimot funktsiyasi differentsiallanuvchi bo'lsa, uning xosilasi zichlik funktsiyasi deb ataladi.

Shunday qilib zichlik funktsiyasi  $f(x)$

$$f(x) = F'(x)$$

formula bilan aniqlanadi.

Oldin ko'rib utilgan ediki,  $X$  diskret tasodifiy miqdor bo'lsa, uning taqsimot funktsiyasi  $F(x)$  pogonasimon bo'lib, uzilishlarga ega va shu sababli u differentsiallanuvchi bula olmaydi. Demak, diskret tasodifiy miqdorlar uchun  $f(x)$  zichlik funktsiyasi aniqlanmagan (ma'noga ega emas). Shu sababli uzluksiz tasodifiy miqdorlarni quyidagicha ta'riflash mumkin.

**T A ' R I F :** Agarda  $X$  tasodifiy miqdorning  $F(x)$  taqsimot funktsiyasi differentsiallanuvchi bo'lsa, u uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

Endi  $f(x)$  zichlik funktsiyasini asosiy xossalarini ko'rib o'tamiz.

**I x o s s a :**  $f(x) \geq 0, \quad x \in (-\infty, \infty)$

**I s b o t :** Taqsimot funktsiyasi  $F(x)$  kamaymovchi bo'lgani uchun uning xosilasi  $F'(x) = f(x)$  manfiy bula olmaydi.

**II x o s s a :**  $X$  uzluksiz tasodifiy miqdor  $f(x)$  zichlik funktsiyasi bilan berilgan bo'lsa, uning taqsimot funktsiyasi  $F(x)$  quyidagicha topiladi :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (9)$$

**I s b o t :** Zichlik funktsiyasi ta'rifi va taqsimot funktsiyasi 2 – xossasiga asosan

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x F'(t) dt = F(t) \Big|_{-\infty}^x = F(x) - F(-\infty) = F(x)$$

Demak  $f(x)$  zichlik funktsiyasi ham  $X$  tasodifiy miqdorni to'liq harakterlaydi.

**III – x o s s a :**  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

**I s b o t :** (8) formula va taqsimot funktsiyasining 2-xossasiga asosan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F'(x) dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1.$$

**IV - x o s s a :** Ixtiyoriy  $[a, \epsilon)$  yarim interval uchun

$$P\{X \in [a, \epsilon)\} = P\{a \leq X < \epsilon\} = \int_a^{\epsilon} f(x) dx \quad (10)$$

**I s b o t :** Zichlik funktsiyasi ta'rifi, Nyuton Leybnits formulasi va (5) formulaga asosan

$$\int_a^{\epsilon} f(x) dx = \int_a^{\epsilon} F'(x) dx = F(x) \Big|_a^{\epsilon} = F(\epsilon) - F(a) = P\{a \leq X < \epsilon\}$$

**V - x o s s a :**  $X$  uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lsa, uni ixtiyoriy  $a$  soniga teng bo'lish ehtimoli nolga teng, ya'ni

$$P = \{X = a\} = 0 \quad (11)$$

**И с б о т :** Ихтиёрый  $\Delta x > 0$  учун

$$P\{a \leq X < a + \Delta x\} = F(a + \Delta x) - F(a) = \Delta F$$

Uzluksiz tasodifiy miqdor uchun  $F(x)$  ham uzluksiz funktsiyadan iborat bo'ladi va shuning uchun

$$P\{X = a\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P\{a \leq X < a + \Delta x\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F = 0$$

Bu xossadan kelib chiqadiki, uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun

$$P\{X \in (a, \epsilon)\} = P\{X \in [a, \epsilon)\} = P\{X \in [a, \epsilon]\} = P\{X \in (a, \epsilon]\}$$

**I z o x :** Bu erda  $P\{X = a\} = 0$  ekanligidan  $\{X = a\} = \emptyset$ , ya'ni mumkin bo'lmagan hodisa deb xulosa chikarib bo'lmaydi. Bu tenglik  $X$  ustida ixtiyoriy marta kuzatuv utkazilganda ham  $X = a$  hodisa ro'y bermasligi mumkinligini anglatadi.

**VI – x o s s a :**  $X$  uzluksiz tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari  $[a, \epsilon]$  kesmada yotsa, ya'ni  $X \in [a, \epsilon]$  bo'lsa, u holda

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b] \quad (12)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

**I s b o t :**  $X \in [a, b]$  bo'lgani uchun  $F(x)$  taqsimot funktsiyasi ta'rifiga asosan ixtiyoriy  $x < a$  ( $x > b$ ) uchun  $F(x) = 0$  ( $F(x) = 1$ ) va shuning uchun bu coxalarda  $f(x) = F'(x) = 0$ .

Oldingi ma'ruzada diskret tasodifiy miqdorlar uchun  $M(X)$  matematik kutilish va  $D(X)$  dispersiya ko'rsatgichlarini kiritgan edik. Endi bu ko'rsatgichlarni uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun aniqlaymiz.

### S a v o l l a r :

1. Birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun qo'shish teoremasini keltiring.
2. Qarama-qarshi hodisalarning ehtimolliklari qanday shartni kanoatlantiradi ?
3. Birgalikda bo'lgan hodisalar uchun qo'shish teoremasini ifodalang.
4. Shartli ehtimollik qanday aniqlanadi ?
5. Qachon hodisalar bog'liqmas (bog'liq) deyiladi ?
6. Bog'liqmas hodisalar uchun ko'paytirish teoremasi qanday ifodalanadi ?
7. Bog'liq hodisalar ko'paytmasi ehtimolligi qanday formula bilan topiladi ?

## **ADABIYOTLAR RO'YXATI.**

- 1. SIROJIDDINOV S.X. , MAMATOV M. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent, O'qituvchi, 1978 y.**
- 2. GMURMAN V.E. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent, O'qituvchi, 1977 y.**
- 3. GMURMAN V.E. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar echish bo'yicha qo'llanma. Toshkent, Ukituvchi, 1980 y.**