Министерство высшего и среднего специального образования
Республики Узбекистан
Андижанский государственный университет
им. Бабура

Педагогический факультет
Кафедра методики начального обучения

РАЗРАБОТКА
занятий по дисциплине

«ТЕОРИЯ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ»
преподавателя Исмановой Г. А.

Андижан – 2013

ТЕМА 1: МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Множества обычно обозначаются большими буквами алфавитов, а элементы множеств – малыми. Символическая запись a A означает, что a есть элемент множества A, или a принадлежит множеству A. Отрицание этого обычно обозначается a A. Применяется также и равносильное обозначение: A a или, соответственно, A a.

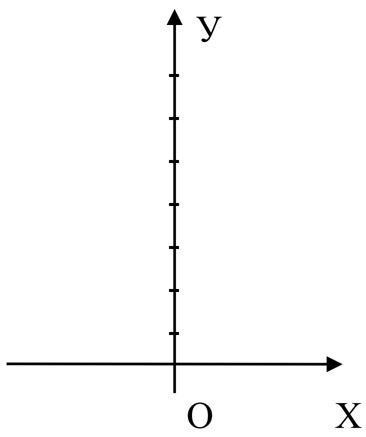
Когда множество задается перечислением его элементов, их обычно заключают в фигурные скобки и пишут: {a, b, c}.

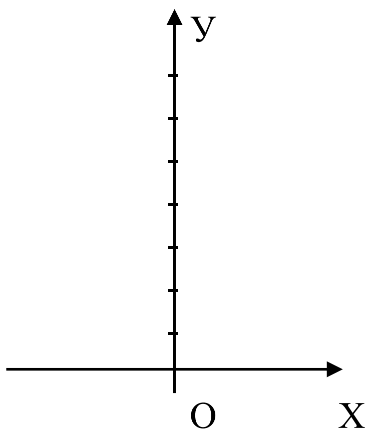
ПРИМЕР 1. Множество C всех пар целых чисел (x, y), по модулю не превосходящих 9 и удовлетворяющих условию $x^2 = y$, может быть задано перечислением его элементов:

$$C = \{(-3,9), (-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9)\}$$

Однако, если мы будем рассматривать множество C\` **всех** пар целых чисел (x,y), удовлетворяющих условию $x^2 = y$, то перечислить все его элементы, очевидно, уже не удастся, так как их бесконечно много.

Сравните множества C и C\` с множеством C\`\` всех **пар действительных чисел,** удовлетворяющих тому же условию, с множеством всех точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению: $x^2 = y$





При изображении множества точками координатной плоскости говорят о графическом способе его задания или его графике.

Одно и то же множество может быть задано несколькими способами. Так множество B={-1,4} задано перечислением его элементов, но его же можно определить указанием каких-либо других характеристических свойств его элементов, например, как множество корней квадратного уравнения

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

или как множество действительных корней уравнения

$$x - 2x^3 - 6x^2 - 7 - 4 = 0.$$

Полезно знать и уметь определять, когда *разные способы или условия задают одно и то же множество. В таком случае принято говорить о* ***равенстве*** *или* ***совпадении множеств.***

Установить равенство множеств А и В можно показав, что всякий элемент множества А содержится в В и наоборот: всякий элемент множества В содержится в А.

Обозначение равенства множеств А и В: А=В

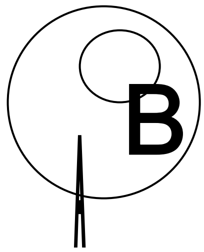
Это может быть символическим языком кратко записано так:

А = В <=>((**V**x   A =>x   B) Λ (**V**x   B =>x   A)).

Обозначения: <=> - тогда и только тогда,
V - любой, для любого,
Λ -и,
=> - следует.

Множество В содержится в множестве А (или В есть **подмножество** А), если каждый элемент множества В является элементом множества А.

B   A <=>(Vx   B=>x   A)



Очевидно, А   А.

Условие равенства множеств в терминах включения множеств (или подмножеств) может быть теперь записано так:

А = В<=>(А   В Λ В   А)

Его иногда называют **принципом двойного включения.**

Объединением двух множеств (А и В) *называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.*

Из определения следует, что

А   А В и В   А   В.

А его символическая запись:

А   В = {x | x A V x B}.

Пересечением двух множеств (А и В) *называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как одному, так и другому множеству.*

Очевидно, что А   В   А и А В   В

Символическая запись этого определения следующая:

А В = {x | x A Λ x B}

Для любого множества само это множество и пустое множество называются ***несобственными подмножествами.*** *Все остальные подмножества носят названия* ***собственных.***

Разностью двух множеств *(А и В) называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих первому из них (А), но не принадлежащих второму (В).*

Обозначение разности множеств А и В: А\В

Символически это записывается так:

$$A\backslash B = \{x \mid x \quad A \wedge x \quad B\}$$

Очевидно, что $A\backslash A = \varnothing$ для любого множества A и $A\backslash B \;\; A$.

Схематическое изображение множеств в виде фигур на плоскости, например, кругов, эллипсов (которые мы уже использовали), прямоугольников и т.п., дает наглядное представление о простейших свойствах множеств. Такие схемы носят название **диаграмм Эйлера – Венна.**

Если A   B , то разность множеств A\B называется ***дополнением*** *множества A до множества B.*

Объектами исследования могут быть и множества, элементами которых являются некоторые множества. Например: множество прямых плоскости, множества решений некоторого множества уравнений (системы уравнений), множества подмножеств какого-либо множества и т.д.

Иногда множество, подмножества которого рассматриваются в некоторой задаче, называют ***универсальным*** *для нее.*

Дополнение до универсального множества U его подмножества называют просто ***дополнением*** *и обозначают A` или* ***C****A.*

Способы задания множеств. Множество считают заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит. Множество можно задать, перечислив все его элементы. Так, если a,b,c,d – обозначения различных объектов, то множество A этих объектов записывают:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

и читают: «A – множество, элементы которого a, b, c, d»

Указанный способ задания множеств применим только для конечных множеств, да и то при условии, что число элементов множества невелико. Другой способ задания множеств состоит в следующем: формулируют *характеристическое свойство* элементов множества, т.е. свойство , которым обладают все элементы этого множества и только они. Например, множество M натуральных чисел, меньших 6. Это множество задано вторым способом: указано характеристическое свойство всех элементов множества M, а именно свойство быть натуральным числом и меньшим числа 6. В данном случае элементы множества M можно перечислить: $M = \{1, 2, 3, 4,5\}$.

Множество, для элементов которого указано некоторое характеристическое свойство обозначать так: в фигурных скобках пишется обозначение элемента, затем проводится вертикальная черта, после которой пишется свойство, которым обладают элементы данного множества и только они. Например, множество M натуральных чисел, меньших 6, запишется так:

$$M = \{x \mid x \quad N \wedge x<6\} \text{ или } M = \{x \mid x \quad N, x<6\}.$$

Таким образом, для того чтобы задать некоторое множество, надо либо перечислить его элементы, либо указать характеристическое свойство его элементов.

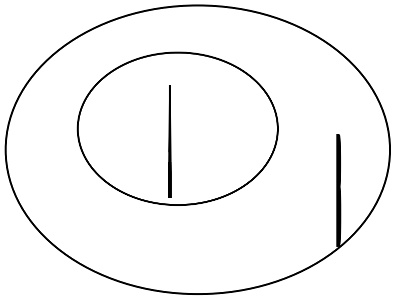
Множества A и B считают *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. В этом случае пишут A = B.

Подмножества. Диаграммы Эйлера – Вена. Пусть A – множество рек в Европе, а B = {Волга, Днепр, Сена, Ока}. Множество B является частью множества A, поскольку каждый элемент B является рекой, протекающей в Европе. Говорят, что B является *подмножеством* множеств A.

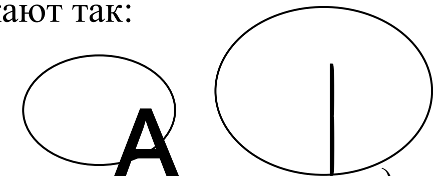
Множество B называют *подмножеством* множества A тогда и только тогда, когда каждый элемент B принадлежит множеству A.

Различают два вида подмножеств множества A: само A и Ø называют *несобственными подмножествами*; все остальные подмножества множества A, если они существуют, - *собственные подмножества A.*

Чтобы наглядно изображать множества и отношения между ними, рисуют геометрические фигуры, которые находятся между собой в этих отношениях. Например, если мы хотим наглядно изобразить, что множество A является собственным подмножеством множества B, то рисуем эти множества:



Если же надо показать, что множества A и B не имеют общих элементов, то эти множества изображают так:



Такие изображения множеств называют *диаграммами Эйлера – Вена.* Диаграммы Эйлера – Вена делают наглядными различные утверждения, касающиеся множеств.

Нередко бывает так, что рассматривают только подмножества одного и того же множества I. Такое множество I называют *универсальным множеством*.

На диаграммах Эйлера – Вена универсальное множество I часто изображают в виде прямоугольника, а его подмножества кругами.

Пересечение множеств. Пусть даны два множества: A = {a, b, c, d } и B = {c, d, e}. Образуем новое множество P, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и A, и B: P = {c, d}. Говорят, что множество P является пересечением множеств A и B.

Пересечением множеств A и B называют множество, в которое входят те и только те элементы, которые одновременно принадлежат множествам A и B. Пересечение множеств A и B обозначается через A∩B, где символ ∩ - знак пересечения множеств.

Так как любой элемент x из множества A∩B обладает свойством «x A и x B», то данное определение пересечения двух множеств можно записать в таком виде:

A∩B = {x | x   A Λ x   B}

Если множества A и B не имеют общих элементов, говорят, что эти множества *не пересекаются,* и пишут A∩B = Ø.

Если же множества A и B имеют хотя бы один общий элемент, то говорят, что множества A и B *пересекаются* или что пересечение множеств A и B *непусто,* и пишут A∩B = Ø

Операция пересечения множеств обладает рядом свойств.

1. *Пересечение множеств коммуникативно:* для любых множеств A и B имеем

A∩B = B∩A

Это свойство вытекает из определения операции пересечения множеств A и B.

2. *Пересечение множеств ассоциативно*: для любых множеств A, B, C имеем

(A∩B) ∩C = A∩(B∩C)

Это позволяет записывать выражение A∩B∩C без скобок и находить пересечение любого числа множеств.

3. *Если A   B, то* A∩B = A.

Объединение множеств. *Объединением двух множеств* A и B называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств. Объединение множеств A и B обозначают AUB, где символ U – знак объединения множеств.

Например, объединением множеств A = {m, n, p, k, l} и B = {p, r, s, n} является множество AUB = { m, n, p, k, l, r, s}.

Операция объединения множеств обладает такими свойствами:

1. *Для любых множеств A и B имеем* AUB = BUA (коммуникативность)
2. *Для любых множеств A,B и C имеем*

   (AUB)UC = AU(BUC) (ассациативность)

   Это свойство позволяет писать выражение (AUB)UC без скобок и говорить про объединение любого числа множеств.
3. *Если B   A, то* AUB=A

   В частности, для любого множества A имеем:

   AUA = A; AUØ = A; AUI = I

   Эти свойства доказываются аналогично тому, как доказывались свойства пересечения множеств.

   Связь между операциями пересечения и объединения множеств отражают свойства *дистрибутивности.*
4. *Для любых множеств A, B и C справедливы равенства:*

   а) A∩ (BUC) = (A∩B)U(A∩C);

   б) AU (B∩C) = (AUB)∩(AUC).

Разность множеств. *Разностью двух множеств A и B* называется такое множество, в которое входят все те элементы, которые принадлежат A и не принадлежат B. Разность множеств A и B обозначают символом A \ B. Например, если A = {a, b, c, d, e}, а B = {b, d, e, k, f, n}, то A \ B = {a, c}. Таким образом, A \ B = A\ (A∩B). Отметим, что A’ = I \ A.

Так как любой элемент x из множества A \ B обладает свойством «x принадлежит A и не принадлежит B», то определение разности множеств A и B можно записать в таком виде:

$$A \setminus B = \{x \mid x \quad A \Lambda x \quad B\}.$$

Для любых множеств A, B и C справедливы следующие равенства, связывающие вычитание множеств с другими операциями над множествами:

а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 1

Тема	**Множества и операции над ними.**
План	**Введение.** **а) Понятие множества. Способы задания множеств. Операции над множествами.** **б) Определение объединения, пересечения и разности двух множеств. Изображение пересечения, объединения, разности двух множеств при помощи кругов Эйлера.**
Цели, Задачи	
Содержание учебного процесса	
Технология организации учебного процесса	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль** **Оценка**

Ожидаемый Результат	**Студент:** **Преподаватель:**
Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение понятию «множество».
2. Что является «элементом» множества?
3. Как в математике называют множество, не содержащее ни одного элемента?
4. В каком случае множество можно считать заданным?
5. Какие способы задания множеств существуют в математике?
6. В каком случае множества можно считать равными?
7. Дайте определение понятию «пересечение множеств».
8. Перечислите свойства, которыми обладает операция пересечения множеств.
9. Продолжите определение: «Объединением двух множеств A и B называется….»
10. Перечислите свойства, которыми обладает операция объединения множеств.
11. Дайте определение понятию «разность множеств».

ТЕМА 2: ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Логические рассуждения. Любое рассуждение состоит из цепочки высказываний, вытекающих друг из друга по определенным качествам. Умение рассуждать, правильно обосновывать свои выводы необходимо людям любой профессии. Рассуждать человек учится с того момента, когда начинает говорить, но целенаправленное обучение логике рассуждений начинается в школе. Уже начальный курс математики предполагает развитие у учащихся навыков проведения сравнения, классификации объектов, анализа фактов, доказательства простейших утверждений. Логичность рассуждений требуется не только для решения математических задач, но и для грамматического анализа, усвоения начал природоведения и т.д. Поэтому учитель начальных классов должен быть знаком с логикой, т.е. с наукой о законах и формах мышления, об общих схемах рассуждений.

Основные типы суждений и умозаключений рассматриваются в классической логике, созданной древнегреческим философом Аристотелем (384-322 гг. до н.э.).

Приведем некоторые примеры рассуждений.

А) Все млекопитающие имеют желудок. Львы – млекопитающие; следовательно, все львы имеют желудок.

Б) У всех птиц два крыла. У орлов два крыла; следовательно, орлы – птицы.

В) Все киты могут летать, поэтому некоторые летающие предметы являются китами.

В примерах а) и б) мы путем рассуждений пришли к верным выводам (у львов есть желудок, а орлы – птицы). Но лишь первое из этих рассуждений правильно построено. Оно состоит из трех различных высказываний. В первом из них говорится о том, что все предметы некоторого класса (класса млекопитающих) обладают некоторым свойством (имеют желудок), т.е. что это свойство – существенное свойство млекопитающих. Второе высказывание состоит в том, что понятие «лев» - частный случай общего понятия «млекопитающие» (все львы – млекопитающие). На этом основании в третьем утверждении делается вывод, что отмеченное выше свойство млекопитающих принадлежит всем львам (все львы имеют желудок). Общая форма этого рассуждения называемого ***силлогизмом,*** такова:

Пусть все предметы класса а обладают свойством ***а*** *и пусть объем класса b – часть объема класса а. Тогда все объекты класса b обладают свойством* ***а.***

Рассуждение же в примере б), хотя и привело нас к правильному выводу, построено неправильно. Ту же форму имеет и следующее рассуждение: «Все негры черноволосы; армяне черноволосы; значит, армяне – негры». Здесь оба исходных утверждения истины, а вывод ложен.

Форма рассуждения считается правильной, если при истинности исходных утверждений она всегда приводит к истинным выводам. Разумеется, если исходные утверждения ложны, то и правильное по форме рассуждение может привести к ложному выводу. Таков пример в) – хотя форма этого рассуждения истинна, его вывод ложен, так как ошибочно исходное утверждение «Все киты могут летать».

Рассмотрим еще некоторые примеры.

А) *Если все a являются b, а все b являются c, то все a являются c.* (так, если все квадраты являются прямоугольниками, а все прямоугольники – параллелограммы, то все квадраты – параллелограммы).

Б) *Если ни одно a не является b, а все c являются a, то ни одно c не является b* (например, если ни одного четного числа десятичная запись не кончается цифрой 5 и все числа, делящиеся на 4, четны, то ни одного числа, делящегося на 4, десятичная запись не кончается цифрой 5).

Рассуждения а) и б) правильны. Неправильными являются, например, такие формы рассуждений.

В) Если ни одно b не является a и ни одно c не является b, то некоторые c не являются a.

Г) Если все a являются b и ни одно c не является a, то ни одно c не является b.

В неправильности этих форм рассуждений можно убедиться, подобрав примеры, когда с их помощью из правильных утверждений получаются ложные выводы. Для формы в) рассмотрим такой пример: «Если ни одна рыба не является млекопитающим и ни один медведь не является рыбой, то некоторые медведи не являются млекопитающими».

А для формы г) опровергающим является пример «Если все лисицы являются млекопитающими и ни один заяц не является лисицей, то ни один заяц не является млекопитающим».

Полученные явно неверные результаты показывают неправильность форм в) и г).

Истинные и ложные высказывания. Правила, по которым преобразуются высказывания, напоминают правила преобразований алгебраических выражений. Правила преобразования высказываний составляют часть *математической логики.* В математической логике *высказыванием* называют любое повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Таким образом, предложения «Все львы имеют желудок» и «Все киты умеют летать» являются высказываниями. При этом первое из них истинно, а второе ложно.

Не считаются высказываниями вопросительные и восклицательные предложения («Который час?», «Да здравствует Солнце!»), поскольку о них нельзя сказать, истинны они или ложны.

Высказывания могут относиться как к отдельным объектам и их свойствам, так и к классам объектов и их свойствам.

В дальнейшем мы будем обозначать высказывания большими буквами латинского алфавита и, как сказано выше, не интересуясь смыслом этих высказываний, будем учитывать лишь их истинность или ложность. Если заданы высказывания A и B, то из них можно составить новые высказывания, используя связки «и», «или», «если….,то..», «либо…, либо…», «в том и только в случае, если», а также частицу «не». Пусть, например, A означает высказывание «Сейчас солнечно», а B – высказывание «Сейчас ветрено». Тогда высказывание «A и B» означает: «Сейчас солнечно и ветрено», высказывание «Если не А, то не В» - «Если сейчас не солнечно, то и не ветрено».

Такие высказывания называют *составными*, а входящие в них высказывания А и В – *элементарными высказываниями.* Два составных высказывания А и В называются *равносильными* (или *эквивалентными*), если они одновременно истинны или одновременно ложны при любых предположениях об истинности входящих в них элементарных высказываний. В этом случае пишут: А=В.

Операции над высказываниями. Отрицание высказываний. Если А – некоторое высказывание, то, утверждая, что оно ложно, мы получаем новое высказывание, которое называют *отрицанием* высказывания А и обозначают символом А. Символ А читают: «не –А».

Таким образом, если некоторое высказывание истинно, то его отрицание ложно, и наоборот. Этот вывод можно записать при помощи таблицы, в которой буква «И» означает истинное высказывание, а буква «Л» - ложное. Таблицы подобного вида называют *таблицами истинности.*

А	А
И	Л
Л	И

Пусть А- некоторое высказывание. Его отрицание А также является высказыванием, и потому можно образовать отрицание высказывания А, т.е. высказывание А, которое называют *двойным отрицанием* высказывания А. Так, если А есть высказывание «17 – простое число», то отрицание А имеет вид: «17 не является простым числом», а высказывание А будет таким: «Неверно, что число 17 – непростое». Это высказывание можно сформулировать короче: «17 – простое число». Таким образом, сделав двойное отрицание, мы снова вернулись к высказыванию А.

Вообще любое высказывание А равносильно высказыванию А, т.е. А=А. Составим таблицу истинности для высказываний А и А. Из этой таблицы видно, что высказывания А и А либо одновременно истинны, либо одновременно ложны и, следовательно, они равносильны.

А	А	А
И	Л	И
Л	И	Л

Конъюнкция высказываний. Пусть А и В – два элементарных высказывания. Соединив их союзом «и», получим новое высказывание, которое называется *конъюнкцией* данных высказываний и обозначается $A \wedge B$. Запись $A \wedge B$ читают: «А и В».

По определению, конъюнкция двух высказываний истинна в том и только в том случае, когда истинны оба высказывания. Если же хотя бы одно из них ложно, то и конъюнкция ложна.

Это определение конъюнкции можно записать при помощи таблицы истинности:

A	B	AΛB
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Рассмотрим высказывание «7-4=3 и 4-четное число». Оно является конъюнкцией двух высказываний: «7-4=3» и «4-четное число». Так как оба эти высказывания истинны, то по определению истинна и их конъюнкция.

Дизъюнкция высказываний. Соединив два элементарных высказывания A и B союзом «или», получим новое высказывание, называемое *дизъюнкцией* данных высказываний. Дизъюнкцию высказываний A и B обозначают AVB: «A или B».

Дизъюнкция ложна только в том случае, когда оба высказывания, из которых она образована, ложны; во всех остальных случаях дизъюнкция истинна. Таблица истинности дизъюнкции имеет вид:

A	B	AVB
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Для дизъюнкции, так же как и для конъюнкции, можно указать ряд равносильностей. Для любых высказываний A,B и C имеем:

AVB=BVA (коммутативность дизъюнкции);

(AVB)VC=AV(BVC) (ассоциативность дизъюнкции).

При помощи таблиц истинности нетрудно установить, что

(AVB)ΛC=(AΛC)V(BΛC);

(AΛB)VC=(AVC) Λ(BVC).

Первое равенство выражает *дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции,* а второе – *дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции.*

Образуем дизъюнкцию некоторого высказывания A и его отрицания A, т.е. высказывание AVA. Так как из двух высказываний A и A всегда одно истинно, а другое ложно, то дизъюнкция AVA будет истинна для любого высказывания A. Если составить таблицу истинности для высказывания AVA, то мы увидим, что столбец значений этого высказывания содержит только И.

A	A	AVA
И	Л	И
Л	И	И

В этом случае говорят, что формула AVA *тождественно истинна* и записывают: AVA= **И.**

Импликация высказываний. Рассмотрим составное высказывание, которое образованно из двух элементарных при помощи слов «если…., то….».

Высказывание «Если А, то В» называют *импликацией высказываний* А,В и при помощи символов записывают так: А=>В. Высказывание А, входящее в импликацию А=>В, называют *условием,* а высказывание В – *заключением.*

Условились считать, что импликация «Если А, то В» *ложна лишь в одном случае: высказывание А истинно, а высказывание В ложно; во всех других случаях импликация истинна.*

Поэтому таблица истинности импликации «Если А, то В» имеет вид:

А	В	А=>В
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Если высказывание А ложно, то по определению импликация А=>В всегда истинна, независимо от того, истинно или ложно высказывание В.

Операция импликации двух высказываний может быть выражена через операции отрицания и дизъюнкции; для любых высказываний А и В имеем:

(А=>В)=(АVВ)

Переставив местами ее условие и заключение, получим новую импликацию В=>А, которую называют *импликацией, обратной данной*

Другая импликация получается из импликации А=>В путем замены высказываний А и В их отрицаниями. Она имеет вид А=>В и называется *противоположной* импликации А=>В. Наконец, если заменить А и В их отрицаниями и одновременно переставить местами условие и следствие, то получим импликацию В=>А. С помощью таблиц истинности легко проверяется, что высказывания А=>В и В=>А равносильны (*закон контрапозиции):* А=>В=В=>А

Эквиваленция высказываний. Тавтологии. Из двух высказываний А и В можно составить новое высказывание, которое читается: «А в том и только в том случае, если В». Это высказывание называют *эквиваленцией* высказываний А и В и обозначают А<=>В. Считают, что *высказывание* А<=>В *истинно, если оба высказывания А и В истинны или оба высказывания А и В ложны. В остальных случаях (т.е. если одно из этих высказываний истинно, а другое ложно) эквиваленцию считают ложной.* Таким образом, таблица истинности для эквиваленции А и В имеет вид:

A	B	A<=>B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Составные высказывания, истинные при любых предложениях о входящих в них элементарных высказываниях, называют *тавтологиями.* Значит, AΛB<=>BΛA и AVB<=>BVA – тавтологии. Приведем еще один важный пример тавтологии:

((A=>B) ΛA) =>B. Эта тавтология означает, что если истина импликация A=>B и истинно условие A, то истинно и следствие B.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 2

Тема	**Логические исчисления**
План	**Введение.** **а) Логические рассуждения** **б) Высказывания и операции над ними**
Цели, Задачи	
Содержание учебного процесса	

Технология организации учебного процесса	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль** **Оценка**
Ожидаемый Результат	**Студент:** **Преподаватель:**
Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1.Что в математической логике называют высказыванием?

2. В каком случае, по определению, конъюнкция высказываний истинна?

3. Дайте определение понятию «дизъюнкция».

4. Какое высказывание называют импликацией?

5.В каком случае импликация считается ложной?

6.Что такое Эквиваленция?

7. Что в математике называют тавтологиями?

ТЕМА 3: ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Декартово произведение двух множеств. Начнем с примера. Число 27 записывается с помощью двух цифр 2 и 7. Эти цифры следует записывать в определенном порядке: сначала 2, а потом 7. Если их переставить, получится другое число 72. Говорят, что (2,7) – *упорядоченная пара* чисел. Упорядоченную пару чисел х и у будем записывать следующим образом: (х;у).

Упорядоченные пары можно составлять не только из чисел, но и из элементов любых множеств.

Например, из букв множества Х = {а; б; в} можно составить девять упорядоченных пар: (а; а), (а; б), (а; в), (б; а), (б; б), (б; в), (в; а), (в; б), (в; в).

Декартовым произведением X и Y называют множество X x Y, элементами которого являются все пары (x; y) такие, что x   X, y   Y, т.е.

X x Y = {(x; y)| x   XΛy   Y}.

Декартово произведение множеств, не обладает ни свойством коммуникативности, ни свойством ассоциативности, т.е.:

1) *если* Х = У, *то* ХхУ = УхХ
2) *если ни одно из множеств X, У, Z не пусто, то X* х (У х Z) = (X х У) х Z

Элементы декартова произведения двух коечных множеств удобно располагать в виде таблицы, где по вертикали располагают элементы множества Х, по горизонтали – элементы множества У, а элементы множества Х х У пишут на пересечениях соответствующих строк и столбцов. Так, на таблице, приведенной ниже, изображены элементы декартова произведения множеств Х = {a; b; c} и У = {4; 5}.

У X	4	5
a	(a; 4)	(a; 5)
b	(b; 4)	(b; 5)
c	(c; 4)	(c; 5)

Кортежи. Если задано множество Х, то из его элементов можно составлять не только упорядоченные пары, но и упорядоченные тройки элементов, четверки элементов и т.д.

Пусть даны множества X_1 , X_2 ,……,X_n . Возьмем какой–нибудь элемент a_1 из множества X_n. Выбранные элементы расположим по порядку: (a_1; a_2;….; a_n). Мы получаем *упорядоченную n-ку* элементов, выбранных из множества X_1 , X_2 ,……,X_n. Вместо слов «упорядоченная n-ка» говорят короче – «кортеж» (французское слово «кортеж» означает торжественное шествие). Число n называют *длиной кортежа*, элементы a_1; a_2;….; a_n - его *компонентами.*

Можно составлять и кортежи, компонентами которых являются множества, например

({a, b};{c, d};{e, f})

Два кортежа (a_1; a_2;….; a_n) и (b_1; b_2;….; b_n)называют равными, если они имеют одинаковую длину, т.е. n = m, и каждая компонента первого кортежа равна компоненте второго кортежа с тем же номером, т.е. $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$,….., $a_n = b_m$. Например, кортежи (a, b, c) и (a, b, c) равны, а кортежи (a, b, c) и (b, a, c) не равны, так же не равны и кортежи (a, b, c) и (a, b, c, d).

Используя понятие кортежа, можно определить понятие декартова произведения трех, четырех и, вообще, n множеств.

Пусть заданы n множеств A_1, A_2,….., A_n (множества могут иметь общие элементы). Из элементов этих множеств образуем кортежи длины n, первая компонента которых принадлежит множеству A_1, вторая – множеству A_2, n-я – множеству A_n. Множество таких кортежей называют *декартовым произведением множеств* A_1, A_2,….., A_n и обозначают A_1xA_2x….xA_n.

Комбинаторика. Правило суммы. На практике часто приходится выбирать из некоторого множества объектов его подмножества, располагать элементы какого – то множества в том или ином порядке и т.д. Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи называют *комбинаторикой.* По сути дела, в комбинаторике изучают конечные множества, их подмножества, отображения, а также кортежи, составленные из элементов конечных множеств.

Решение большинства комбинаторных задач основано на двух простых правилах, которые называют правилами суммы и произведения. Правило суммы позволяет найти число элементов в объединении двух конечных множеств, а правило произведения – число элементов их декартова произведения.

Обозначим число элементов конечного множества Х через n(X), множество, состоящее из n элементов, назовем *n–множеством.* Например, если Х = {a, b, c, d, e, f}, то n (X) = 6, и поэтому Х является 6-множеством.

Пусть Х содержит m элементов, а У содержит n элементов. Найдем, сколько элементов содержит объединение ХUУ. В этом случае множество ХUУ содержит m+n элементов. Например, если Х = {a, b, c, d, }, У = {e, f, g}, то ХUУ = {a, b, c, d, e, f, g} содержит 4+3 = 7 элементов. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Если множество Х содержит m элементов, а множество У – n элементов, причем эти множества не пересекаются, то ХUУ *содержит m+n элементов.*

Иными словами, из Х∩У = Ø следует

$$n\,(X \cup У) = n\,(X) + n\,(У)$$

Это очевидное утверждение называют в комбинаторике *правилом суммы.*

Правило произведения. Второе основное правило комбинаторики касается подсчета числа кортежей, которые можно составить из элементов данных конечных множеств.

Число упорядоченных пар, которые можно составить из элементов m-множества Х и n- множества У, равно mn, т.е. произведению числа элементов в Х на число элементов в У.

Можно доказать, что справедливо более общее утверждение, называемое *правилом произведения:*

$$n\,(X_1 x X_2 x \ldots x X_n) = n\,(X_1) \bullet n\,(X_2) \bullet \ldots \bullet n\,(X_n)$$

В комбинаторике равенство n (XUУ) = n (X)+ n (У) обычно формулируют следующим образом:

Если элемент x можно выбрать m способами, а элемент y можно выбрать n способами, то упорядоченную пару (x; y) можно выбрать mn способами.

Размещения с повторениями. Из 4-множества X = {a, b, c, d} можно составить 16 кортежей длины 2:

(a; a), (a; b), (a; c), (a; d)
(b; a), (b; b), (b; c), (b; d),
(c; a), (c; b), (c; c), (c; d),
(d; a), (d; b), (d; c), (d; d).

Решим общую задачу.

Найти число кортежей длины k, которые можно составить из элементов m-множества X.

Чтобы решить эту задачу, надо найти число кортежей в декартовом произведении XxXx…..xX, содержащем k множителей (это декартово произведение как раз и состоит из таких кортежей). Но по правилу произведения число элементов в декартовом произведении XxXx…..xУ равно n(X) • n(X) •…..• n (X). Так как по условию n (X) = m (множество X содержит m элементов), то

n (XxXx…..xX) = m • m •…….• m = m.

Итак, число кортежей длины k, составленных из элементов m – множества X, равно m.

Кортеж длины k, составленный из элементов m-множества, называют *размещением с повторениями из m элементов по k,* а число таких кортежей обозначают A_m (от французского слова arrangement – размещение). Таким образом:

$$A_m = m$$

Формула позволяет решить такую задачу.

Найти число подмножеств m-множества X.

Переименуем элементы множества X : X = { x_1, x_2,….., x_m}.

Каждое подмножество A X можно «зашифровать» с помощью кортежа длины m из нулей и единиц; мы пишем на некотором месте 1, если элемент с данным номером входит в подмножество, и 0, если он не входит. Например, если X ={ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}, то кортеж (0; 1; 1; 0; 1) шифрует подмножество {x_2, x_3, x_5}, кортеж (0; 0; 0; 0; 0) – пустое подмножество, а кортеж (1; 1; 1; 1; 1) – все X.

Поэтому найти число подмножеств m-множества X – это все равно, что найти число кортежей длины m, составленных из элементов 2-множества {0; 1}. По формуле n (XUУ) = n (X)+ n (У) число таких кортежей равно 2 . Значит, *число подмножеств m-множества X равно 2 .*

Упорядоченные множества. Конечное множество X называется упорядоченным, если его элементы перенумерованы некоторым образом: X = { x_1, x_2,….., x_m}. Понятие упорядоченного множества – частный случай понятия кортежа. Оно выделяется из общего понятия кортежа условием, что в упорядоченном множестве все элементы различны. Одно и то же множество можно упорядочить различными способами.

Сколькими способами можно упорядочить m-множество X?

Каждое упорядочение заключается в том, что какой-то элемент получает номер 1, какой-то -2, …., какой-то – номер m. Номер 1 может получить любой из элементов множества X. Значит, выбор первого элемента можно сделать m способами. Если первый элемент выбран, то на второе место остается лишь (m – 1) кандидат, так как повторить сделанный выбор нельзя. Значит, имеем m – 1 способ выбора второго элемента. Третий элемент можно выбрать m – 2 способами и т.д. Последний элемент можно выбрать лишь одним способом – все остальные элементы получили свои места, и остался лишь один элемент, который и занимает m – е место. По правилу произведения получаем, что общее число способов упорядочения равно $m (m – 1) \bullet …. \bullet 1$.

Произведение первых m натуральных чисел в математике называют «m – факториал» и обозначают m!. Различные упорядочения m-множества состоят из одних и тех же элементов, а отличаются друг от друга лишь порядком этих элементов. При этом элементы в них не повторяются. Поэтому их называют *перестановками без повторений из m элементов.* Число таких перестановок обозначают P_m (от французского слова permutation – «перестановка»). Итак, мы доказали, что: $P_m = m!$

Сколько упорядоченных k-множеств можно составить из элементов m-множества X?

Чтобы найти число таких упорядоченных подмножеств, надо перемножить k чисел: m, m – 1, m – 2 и т.д. Последнее из них равно m – k + 1 (легко проверить, что в множестве { m, m – 1;…..; m – k+1} содержится k чисел). Поэтому число упорядоченных k-множеств, составленных из элементов m-множества X, равно $m (m-1) \bullet ….. \bullet (m – k + 1)$.

Эти упорядоченные k-множества называют *размещениями без повторений из m элементов по k,* а их число обозначают A_m. Мы доказали, что:

$$A_m = m (m-1)(m-2) \bullet …. \bullet (m – k + 1).$$

Формулу для A_m можно записать иначе, умножив и разделив первую часть формулы на $1\bullet 2……\bullet (m-k)$. Мы получим:

$$A_m = \frac{m (m – 1)(m – 2)…….(m – k +1)(m – k)…..2\bullet 1}{1\bullet 2……….(m – k)} = \frac{m!}{(m – k)}$$

Итак,

$$A_m = \frac{m!}{(m – k)}$$

При этом $A_m = P_m = m!$, так как считают, что 0! = 1.

Сочетания без повторений. *Сколько подмножеств, содержащих по k элементов каждое, можно составить из элементов данного m-множества X?*

Такие подмножества называют *сочетаниями без повторений из m элементов по k,* а их число обозначают C_m (от французского слова combinasison – «сочетание»).

Выведем формулу, выражающую C_m через m и k. Возьмем какое-нибудь k-подмножество A в m-множестве X. Так как A содержит k элементов, то его можно упорядочить k! способами. При этом каждое упорядоченное k-множество, состоящее из элементов множества X, может быть получено таким путем. Значит, число упорядоченных k-множеств, составленных из элементов множества X, в k! раз больше числа неупорядоченных К-подмножеств в X.

Например, из элементов множества A = {a, b, c, d } можно составить четыре 3-подмножества:

{a, b, c,}, {a, b, d }, {a, c, d }, {b, c, d }.

Число же упорядоченных 3-подмножеств в 3! = 6 раз больше:

{a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}
{a, c, b}, {a, d, b}, {a, d, c}, {b, d, c}
{b, a, c}, {b, a, d}, {c, a, d}, {c, b, d}
{b, c, a}, {b, d, a}, {c, d, a}, {c, d, b}
{c, a, b}, {d, a, b}, {d, a, c}, {d, b, c}
{c, b, a}, {d, b, a}, {d, c, a}, {d, c, b}

Но число упорядоченных k-множеств равно A_m, а число k-подмножеств мы обозначили через C_m. Поэтому $A_m = k! \cdot C_m$. Так как $A_m = \frac{m!}{(m-k)}$, то

$$C_m = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

Эта формула выражает число k-подмножеств в m – множестве X.

Свойства чисел C_m. Числа C_m, выражающие количество k-подмножеств в m-множестве X, обладают целым рядом замечательных свойств. Эти свойства выражают различные соотношения между подмножествами множества X.

1) *Если $0 \le k \le m$, то верно равенство* $C_m = C_m$
2) *Для любых k и m, таких, что $0 \le k \le m$, верно равенство* $C_m = C_m + C_m$

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 3

Тема	**Комбинаторика.**
План	**Введение.** **а) Понятие о комбинаторной задаче. Правила суммы и произведения.** **б) Размещения, перестановки и сочетания без повторений. Свойства чисел С**
Цели, Задачи	

Содержание учебного процесса	
Технология организации учебного процесса	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль** **Оценка**
Ожидаемый Результат	**Студент:** **Преподаватель:**
Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1.

ТЕМА 4: ПРЕДИКАТЫ И ТЕОРЕМЫ

Одноместные предикаты. Предложение «Поэт x написал поэму «Полтава»» не является высказыванием, поскольку, неуказанно, какой поэт имеется ввиду. Если заменить в этом предложении букву x словом «Пушкин», получится истинное высказывание «Поэт Пушкин написал поэму «Полтава»». Если же заменить x словом «Некрасов», получится ложное высказывание. Заменяя x в том же предложении словом «дом», получим бессмысленное предложение, так как словосочетание «Поэт дом» смысла не имеет. Для простоты мы и такие предложения будем считать ложными высказываниями.

Пусть предложение содержит переменную, которая может принимать различные значения, причем подстановка любого из значений переменной превращает предложение в истинное или ложное высказывание. Тогда это предложение называют *одноместным предикатом.* Для каждого одноместного предиката надо указать множество значений, которые может принимать переменная x. Его называют *областью определения* предиката.

Каждый предикат A(x), x X, определяет подмножество T X, состоящее из элементов, при подстановке которых в A(x) вместо x получается истинное высказывание. Это подмножество называют *множеством истинности* предиката.

Предикаты, заданные на конечных множествах, можно задавать таблицами, в первой строке которых указывается элемент множества, а во второй – истинно или ложно высказывание, получаемое из предиката, если заменить переменную этим элементом. Например, пусть задан предикат A(x): «x – четное число» на множестве X={1; 2; 3; 4; 5; 6}. Так как высказывание «1 – четное число» ложно, то числу 1 соответствует значение предиката «Л» (ложь). Числу же 2 соответствует истинное высказывание «2 – четное число». Получаем такую таблицу:

x	1	2	3	4	5	6
A(x)	Л	И	Л	И	Л	И

Может случится, что два предиката A(x) и B(x), заданные на одном и том же множестве X, имеют одинаковые множества истинности. Такие предикаты называют *эквивалентными.* Например, эквивалентны предикаты «Натуральное число x делится на 3» и «Сумма цифр десятичной записи натурального числа x делится на 3». Оба предиката заданны на множестве натуральных чисел и одновременно истинны и ложны. Если предикаты A(x) и B(x) эквивалентны, то пишут A(x)~B(x).

Кванторы. Пусть на множестве X простых чисел задан предикат P(x):»Простое число x – нечетно». Поставим перед этим предикатом слово «всякое». Получим ложное высказывание «Всякое простое число x нечетно» (это высказывание ложно, так как 2 – простое четное число).

Поставив перед данным предикатом P(x) слово «существует», получим истинное высказывание: «Существует простое число x, являющееся нечетным» (например, x = 3).

Таким образом, превратить предикат в высказывание можно не только, подставив вместо переменной ее значение, но и поставив перед предикатом слова: «все», «существует» и др., называемые в логике *кванторами.*

Различают два основных вида кванторов: *квантор общности и квантор существования.*

Пусть P(x) – некоторый предикат, заданный на множестве X. Поставив перед нам квантор общности, получим высказывание: «Для всех x   X выполняется предикат P(x)». Оно истинно в том и только в том случае, если для всех элементов а из множества X высказывания P(a) истинны.

Рассматриваемое высказывание условилось записывать при помощи символов в таком виде:

(Vx   X) P (x)

(читают: «Для всех х из Х справедливо Р от х»).

Символ V – это перевернутая буква английского слова All – все. Часто вместо слова «все» можно встретить слова «каждый», «любой», «всякий».

Если поставить перед P (x) квантор существования   , получим высказывание: «Существует такое x   X, что выполняется предикат P(x)». Это высказывание истинно в том и только в том случае, когда хотя бы для одного элемента а из множества X высказывание P(a) истинно.

Высказывание «Существует такое x, что выполняется предикат P(x) записывают при помощи символов так:

(читают: «Существует такое х из Х, что Р от х»). Символ   - это перевернутая первая буква английского слова Exist – существует. Часто вместо слова «существует» употребляют обороты «найдется», «хотя бы один».

Приведем пример употребления кванторов.

Пусть на множестве **N** натуральных чисел задан предикат Р(х): «Число х кратно 5». Используя кванторы, из данного предиката можно получить, например, следующие высказывания: 1) любое натуральное число кратно 5; 2) каждое натуральное число кратно 5; 3) все натуральные числа кратны 5; 4) существуют натуральные числа, кратные пяти; 5) найдется натуральное число, кратное 5; 6) хотя бы одно натуральное число кратно 5.

Первые три высказывания ложны и имеют и тот же смысл. При помощи символов они запишутся так: (**Vx   N)** P(x).

Последние три высказывания истинны и имеют форму: (x   N) P(x).

Операции над предикатами. Предикаты, так же как и высказывания, бывают элементарными и составными. Составные предикаты образуются из элементарных при помощи логических связок: «и», «или», «неверно, что», «если…,то…» и др., смысл которых тот же, что и в логике высказываний.

Если T – множество истинности предиката A(x), x   X, то множеством истинности предиката A(x),x   X, является дополнение T′ к множеству T в множестве X.

Пусть теперь на множестве X заданы два предиката: A(x) и B(x). Тогда их *конъюнкцией* будет предикат A(x)ΛB(x). Он истинен при тех значениях x из множества X, при которых истинны оба предиката A(x) и B(x).

Так, если на множестве X = {10; 15; 16; 20; 35} заданы предикаты: A(x): «Число x четно», B(x): «Число x кратно 5», то их конъюнкцией является предикат A(x)ΛB(x): «Число x четно и кратно 5».

Множеством истинности предиката A(x) в данном случае является {10; 16; 20}, а множеством истинности предиката B(x) – {10; 15; 20; 35}. Предикат «Число x четно и кратно 5» обращается в истинное высказывание только тогда, когда x = 10 и x = 20. Множество истинности {10; 20} этого предиката – пересечение множеств истинности предикатов A(x) и B(x).

Вообще, *если T_1 – множество истинности предиката A(x), x X, а T_2 – множество истинности предиката B(x), x X, то множество истинности T предиката* A(x)ΛB(x) *, x X, - пересечение истинности предикатов A(x) и B(x), т.е. $T = T_1 \cap T_2$.*

Предикат A(x)VB(x), x X, называется *дизъюнкцией предикатов* A(x), B(x), x X.. Он истинен при тех значениях из множества X, при которых истинен хоть один из предикатов A(x), B(x).

Множеством T истинности предиката A(x) V B(x), x X, является $T_1 U T_2$, где T_1 – множество истинности предиката A(x), а T_2 – множество истинности предиката B(x), $T = T_1 U T_2$.

Импликация и эквиваленция предикатов. Из предикатов A(x) и B(x), заданных на одном и том же множестве X, можно составить предикат A(x)=>B(x). Его называют *импликацией* этих предикатов и читают: «Если A(x), то B(x)». Например, из предикатов «Натуральное число x делится на 3» и «Натуральное число x делится на 4» можно составить предикат «Если натуральное число x делится на 3, то оно делится и на 4». Этот предикат истинен при некоторых натуральных значениях x и ложен при других.

Предикат A(x)=>B(x) превращается в ложное высказывание лишь при подстановке вместо x таких значений a, для которых A(a) истинно, а B(x) ложно. Иными словами, если обозначить через T_1 множество истинности предиката A(x), а через T_2 –множество истинности предиката B(x), то A(x)=>B(x) ложно на множестве $T_1 \cap T'_2$, (именно на этом множестве A(x) истинно, а B(x) ложно). На дополнении к множеству $T_1 U T_2$,предикат A(x)=>B(x) истинен. Но по формуле имеем: $(T_1 \cap T'_2)' = T_1 U(T'_2)' = T_1 U T'_2$.

Значит, множеством истинности предиката A(x)=>B(x) *является объединение множества T_2 истинности предиката B(x) и дополнения к множеству T_1 истинности предиката A(x).*

Предикат A(x)=>B(x) *истинен для всех x X в том и только в том случае, когда множество T_1 истинности предиката A(x) содержится в множестве T_2 истинности предиката B(x), т.е. когда T_1 T_2.*

В том случае, когда импликация A(x)=>B(x) , x X, истинна при всех значениях из множества X, говорят, что *предикат B(x) логически следует из предиката A(x), и предикат B(x) называют необходимым условием для предиката A(x), предикат A(x) – достаточным условием для B(x).*

Так, в импликации «Если x – число натуральное, то оно целое» предикат B(x): «x – число целое» логически следует из предиката A(x): «x – число натуральное». Следовательно, предикат «x – число целое» является необходимым условием для предиката «х – число натуральное», а предикат «х – число натуральное» является достаточным условием для предиката «х – число целое».

Используя эти термины, импликацию «Если число натуральное, то оно целое» можно выразить такими словами.

1. Для того чтобы число х было натуральным, необходимо, чтобы оно было целым.
2. Для того, чтобы число х было целым, достаточно, чтобы оно было натуральным.

Если предикаты А(х) и В(х), заданные на множестве Х, эквивалентны, т.е. если множества их истинности T_1 и T_2 совпадают, $T_1 = T_2$, то для всех х Х истинна эквиваленция А(х) <=> В(х).

Если предикаты А(х) и В(х) на множестве Х эквивалентны, то каждый из них называют *необходимым и достаточным условием* для второго. Например, для того чтобы натуральное число х делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра в десятичной записи этого числа была равна 0.

Многоместные предикаты. Предложение «Поэт х написал поэму у» содержит две переменные х и у. В этом случае надо задать два множества Х и У – одно из них состоит из фамилий, а второе – из названий поэм. Из элементов этих множеств будем составлять упорядоченные пары, например: (Пушкин; «Двенадцать»), (Пушкин; «Цыганы»), (Есенин; «Хорошо!»), (Маяковский; «Во весь голос») и т.д. Некоторым из этих пар (например, (Пушкин; «Цыганы»), (Маяковский; «Во весь голос»)) соответствуют истинные высказывания («Поэт Пушкин написал поэму «Цыганы»», «Поэт Маяковский написал поэму «Во весь голос»»), другим парам ложные высказывания («Поэт Пушкин написал поэму «Двенадцать»»).

Пусть, вообще, некоторое предложение Р(х,у) содержит две переменные, причем переменная х принимает значения из множества Х, а переменная у – из множества У (эти множества могут и совпадать). Пары (х;у), х Х, у У, образуют, как мы знаем, декартово произведение Х х У при замене в предложении Р (х; у) переменной х ее значением а, а переменной у значением b получается высказывание Р (а; b). Тогда говорят, что Р (х; у) – *двухместный предикат,* заданный на Х х У. Совокупность Т пар (а; b), при подстановке которых в двухместный предикат Р (х; у) получается истинное высказывание, называют *множеством истинности* этого предиката. Это множество является подмножеством произведения Х х У.

Точно так же определяются трехместные предикаты, четырехместные и т.д. предикаты.

Как и в случае одноместных предикатов, многоместные предикаты называются *эквивалентными,* если области определения и множества истинности этих предикатов совпадают. Например, предикат «Треугольник х подобен треугольнику у» эквивалентен предикату «Углы треугольника х имеют ту же величину, что и соответствующие углы треугольника у». А предикат «Дом х находится на пересечении улиц у и z» эквивалентен предикату «Дом х находится на улице у и дом х находится на улице z». Мы будем обозначать эквивалентность предикатов знаком ~:

A(x, y) ~ B(x, y) и т.д.

Строение теоремы. Изучение любого раздела математики сопровождается, как правило, рассмотрением предложений, называемых *теоремами.*

Рассмотрим следующую теорему: «Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла». Условием этой теоремы является предложение «Точка лежит на биссектрисе угла», а заключением – предложение «Точка равноудалена от сторон угла». Видим, что и условие, и заключение данной теоремы представляют собой предикаты, заданные на множестве Р всех точек плоскости. Действительно, предложение «Точка лежит на биссектрисе угла» обращается в истинное высказывание, если говорить о точке из множества Р, лежащей на биссектрисе данного угла, и будет ложным для всех точек плоскости, которые на биссектрисе этого угла не лежат. То же самое можно сказать и о предложении «Точка равноудалена от сторон угла». Обозначим эти предикаты соответственно через А(х) и В(х), где х обозначает любую точку из множества Р. Тогда рассматриваемая теорема состоит в том, что импликация этих предикатов А(х)=>В(х), то есть предикат «Если точка х лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла», обращается в истинное высказывание при всех х из множества Р. При помощи квантора общности это можно записать так:

(Vx P) (A(x)=>B(x)).

Таким образом, говоря о строении теоремы «Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла», мы выделили в ней три части:

1.*Условие теоремы:* предикат А(х), заданный на множестве Р всех точек плоскости.

2. *Заключение теоремы*: предикат В(х), заданный на множестве Р всех точек плоскости.

3. *Разъяснительная часть:* в ней описываются множества объектов, о которых идет речь в теореме. В символической записи теоремы к разъяснительной части теоремы следует отнести запись Vx P.

Заметим, что в словесной формулировке теорем разъяснительная часть обычно не формулируется явно, но она всегда подразумевается, и при работе с теоремами ее необходимо выделять.

Очевидно, что строение любой теоремы, словесная формулировка которой включает слова «если…., то…..», будет таким же, как и строение рассмотренной теоремы, т.е. ее можно записать виде:

(Vx X) (A(x)=>B(x)),

где А(х) – предикат «Четырехугольник х – ромб», а В(х) – предикат «Диагонали четырехугольника х взаимно перпендикулярны», заданные на множестве X.

Пусть (Vx X) (A(x)=>B(x)) – запись истинной теоремы. Тогда ее условие и заключение образуют импликацию, истинную при всех х из множества X, и, следовательно, предикат В(х) логически следует из предиката А(х). Поэтому заключение теоремы В(х) является *необходимым условием* для условия А(х) теоремы, а условие А(х) – *достаточным условием* для заключения теоремы В(х).

Пользуясь этой терминологией, теорему «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» можно прочитать следующим образом:

1. Для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.
2. Для того чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны, достаточно, чтобы он был ромбом.

Теорема, обратная данной. Теорема «Если сумма цифр натурального числа кратна 9, то и само число кратно 9» может быть записана в таком виде:

(Vx **N**) (A(x)=>B(x)),

где запись Vx **N** представляет разъяснительную часть теоремы: теорема справедлива для всех натуральных чисел x; предикат A(x): «сумма цифр числа x кратна 9» является условием теоремы, а предикат B(x): «Число кратно 9» - ее заключением.

Поменяем местами условие и заключение этой теоремы, оставив без изменения разъяснительную часть. Получим новую теорему вида (Vx N) (B(x)=>A(x)), словесная формулировка которой такова: «Если натуральное число кратно 9, то и сумма его цифр кратна 9». Полученную теорему называют *обратной данной.*

Вообще, если A(x) и B(x) – два предиката, заданные на множестве X, то теоремы (Vx N) (A(x)=>B(x)) и (Vx N) (B(x)=>A(x)) называют *обратными* друг другу. Разъяснительная часть у них одинаковая.

Теорема, противоположная данной. Если в теореме

(Vx X) (A(x)=>B(x))

условие и заключение заменить их отрицаниями, то получится новая теорема вида

(Vx X) (A(x)=>B(x)).

Эту теорему называют *противоположной данной* теореме. Пусть, например, на множестве **N** всех натуральных чисел заданы предикаты A(x): «Десятичная запись числа x оканчивается нулем» и B(x): «Число x делится на 5». Тогда словесная формулировка теоремы прозвучит так: «Если десятичная запись натурального числа оканчивается нулем, то оно делится на 5». Теорема, противоположная этой теореме, будет следующей: «Если десятичная запись натурального числа не оканчивается нулем, то оно не делится на пять».

Теорему вида

(Vx X) (B(x)=>A(x))

называют теоремой, *противоположной обратной.*

Заметим, что теоремы (Vx X) (A(x)=>B(x)) и (Vx X) (B(x)=>A(x)) равносильны, т.е. теорема (Vx X) (A(x)=>B(x)) истинна в том и только в том случае, когда истинна и теорема (Vx X) (B(x)=>A(x)). Этот факт лежит в основе доказательства *методом контрапозиции,* суть которого заключается в следующем: чтобы доказать истинность теоремы (Vx X) (A(x)=>B(x)), доказывают истинность теоремы, противоположной обратной, т.е. теоремы (Vx X) (B(x)=>A(x)), поскольку, если эта теорема истинна, то и теорема (Vx X) (A(x)=>B(x)) тоже истинна.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 4

Тема	**Предикаты и теоремы.**
План	**Введение.** **а)Предикаты и операции над предикатами. Многоместные предикаты.** **б) Теоремы. Примеры теорем.**
Цели, Задачи	
Содержание учебного процесса	
Технология организации учебного процесса	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль** **Оценка**

Ожидаемый результат	**Студент:** **Преподаватель:**
Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

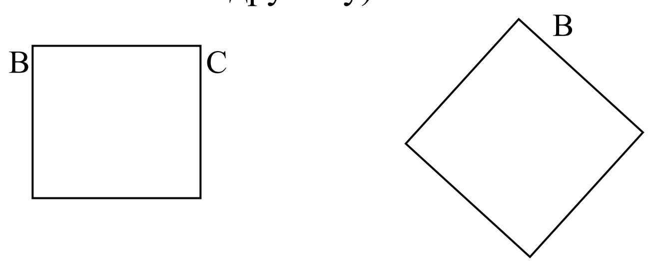
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В каком случае предложение можно назвать одноместным предикатом?
2. Закончите предложение: «Предикаты называют эквивалентными, когда…».
3. Что в логике называют кванторами?
4. Какие основные виды кванторов различают в математике?
5. Дайте определение понятию «теорема».
6. Из чего состоит теорема?
7. В чем заключается суть метода контропозиции?

ТЕМА 5: ОБЪЕМ, ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Объем и содержание понятия. Всякий математический объект обладает определенными свойствами. Например, квадрат имеет четыре стороны, четыре прямых угла, равные диагонали. Можно указать и другие свойства квадрата.

Среди свойств объекта различают свойства **существенные и несущественные** для его выделения из других объектов. Свойство считают **существенным** для объекта, если оно присуще этому объекту и без него он не может существовать. **Несущественные** свойства – это такие свойства, отсутствие которых влияет на существование объекта. Так, названные выше свойства квадрата являются существенными, а свойство «сторона AD квадрата ABCD горизонтальна» несущественное (если квадрат ABCD повернуть, то сторона AD окажется расположенной по другому).



A C

A D

D

Поэтому, чтобы понимать, что представляет собой данный объект достаточно знать его существенные свойства. В этом случае говорят, что имеется **понятие об этом объекте.**

Совокупность всех взаимосвязанных существенных свойств объекта называют **содержанием понятия** об этом объекте.

Объем понятия – это совокупность всех объектов, обозначаемых одним и тем же термином.

Таким образом, всякое понятие характеризуется **термином, объемом и содержанием.**

Между объемом понятия и его содержанием существует связь: чем «больше» объем понятия, тем «меньше» его содержание, и наоборот.

Определение понятий. В содержании понятия о каком – либо математическом объекте входит много различных существенных свойств этого объекта. Однако чтобы установить, содержится ли объект в объеме данного понятия (т.е распознать его), необходимо проверить наличие у него лишь некоторых существенных свойств. Указание этих существенных свойств объекта, которые достаточны для распознания объекта, называется **определением понятия** об этом объекте.

Вообще **определение – это логическая операция, раскрывающая содержание понятия.**

Способы определения понятия различны. Прежде всего различают **явные и неявные** определения.

Явные определения имеют форму равенства, совпадения двух понятий. Например, прямоугольный треугольник – это треугольник с прямым углом. Если обозначить через а понятие «прямоугольный треугольник», а через b понятие «треугольник с прямым углом», то схема данного определения прямоугольного треугольника будет такова: «а есть b».

Неявные определения не имеют формы совпадения двух понятий. Примерами таких определений являются так называемые **контекстуальные и остенсивные** определения.

В контекстуальных определениях содержание нового понятия раскрывается через отрывок текста, через контекст, через анализ конкретной ситуации, описывающей смысл вводимого понятия. Примером контекстуального определения может быть определение уравнения и его решения. Здесь после записи $3 + x = 9$ и перечня 2, 3, 6 и 7 идет текст: «х – неизвестное число, которое надо найти. Какое из этих чисел надо поставить вместо х, чтобы равенство было верным? Это число 6». Из этого текста следует, что уравнение – это равенство с неизвестным числом, которое надо найти, а решить уравнение – это значит найти такое значение х, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство.

Остенсивные определения используются для введения терминов путем демонстрации объектов, которые этими терминами обозначают. Поэтому остенсивные определения называют еще определениями путем показа. Например, таким способом определяются в начальной школе понятия равенства и неравенства.

$2 \cdot 7 > 2 \cdot 6$	$9 \cdot 3 = 27$
$78 - 9 < 78$	$6 \cdot 4 = 4 \cdot 6$
$37 + 6 > 37$	$17 - 5 = 8 + 4$
Это неравенства	Это равенства

В явных определениях, как уже было отмечено, отождествляются два понятия. Одно из них называют **определяемым понятием**, другое – **определяющим.** Через определяющее раскрывается содержание определяемого понятия.

Проанализируем, например, структуру определения квадрата: «Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны». Она такова: сначала указано определяемое понятие – «квадрат», а затем приведено определяющее, которое включает свойства: быть прямоугольником; иметь все равные стороны.

Свойство «быть прямоугольником» указывает, что все квадраты являются прямоугольниками, т.е. понятие «прямоугольник» является более общим, чем понятие «квадрат». Его называют родовым по отношению к определяемому понятию «квадрат».

Второе свойство – «иметь равные стороны» - это указание видового свойства, которое отличает квадрат от других видов прямоугольника.

Схематично структуру таких определений можно представить следующим образом:

$\boxed{\text{Определяемое понятие}} = \boxed{\text{Родовое понятие}} + \boxed{\text{Видовое отличие}}$

Определяемое понятие

Определение понятия по такой схеме называют определением через **род и видовое отличие.**

Встречаются в математике и определения, построенные по другому. Рассмотрим, например, такое определение треугольника: «Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков». В этом определении указано родовое понятие по отношению к треугольнику – фигура, а затем дан способ построения такой фигуры, которая является треугольником: взять три точки, не лежащие на одной прямой, и соединить каждую их пару отрезком. Такие определения называют **генетическими** (от слова «генезис», т.е. происхождение).

Обратимся теперь к определению арифметической прогрессии: «Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом». Здесь определяемое понятие – «арифметическая прогрессия», а далее описывается способ получения всех членов прогрессии, начиная со второго. Это определение можно записать в виде формулы $a_n = a_{n-1} + d$, где $n \geq 2$. Такое определение называют **индуктивным** (от слова «индукция», т.е. наведение на рассуждение от частного к общему) или **рекуррентным** (от слова «рекурсия», т.е. возвращение).

Требования к определению понятий. Прежде всего **определяемое и определяющее понятия должны быть соразмерны.** Это значит, что совокупности предметов, охватываемые ими, должны совпадать. Соразмерны, например, понятия «прямоугольник» и «четырехугольник, в котором все углы прямые». Если же объем определяющего понятия включает в себя объем понятия определяемого, то говорят об ошибке слишком широкого определения.

Второе правило определения **запрещает порочный круг:** нельзя определять понятие через само себя или определять его через другое понятие, которое, в свою очередь, определяется через него.

Третьим важным требованием к логически правильному определению понятия является следующее: **в определении должны быть указаны все свойства, позволяющие однозначно выделять объекты, принадлежащие объему определяемого понятия.**

Еще одно требование к правильному определению понятия – **отсутствие в нем избыточности.** Это означает, что в определении не должно быть указано лишних свойств, вытекающих из других свойств, также включенных в определение понятия.

Следует сказать, что в любом определении понятия есть элемент произвола, что проявляется, во-первых, в выборе термина (прямоугольник, в котором все стороны равны, мог бы называться и по-другому), а во-вторых, в выборе свойств, включаемых в определение.

Еще одним требованием к логически правильному определению понятия является следующее: необходимо, чтобы определяемый объект существовал. Рассмотрим, например, такое определение: «Тупоугольным треугольником называется треугольник, у которого все углы тупые, не существует. Следовательно, данному определению реально ничего не соответствует, и поэтому оно не может считаться логически правильным.

Правила построения отрицаний высказываний, содержащих кванторы. Рассмотрим высказывание: «Все натуральные числа делятся на 3». В том, что это ложное высказывание, легко убедится, приведя контрпример. Так, натуральное число 17 не делится на 3.

Построим отрицание данного высказывания. Можно сказать: «Неверно, что все натуральные числа делятся на 3». Это предложение истинное, и по смыслу оно совпадает с предложением «Существуют натуральные числа, которые не делятся на три».

Таким образом, отрицание высказывания «Все натуральные числа делятся на три» можно построить двумя способами:

1) **поставив перед данным предложением слова «неверно, что»;**
2) **заменив квантор общности на квантор существования, а предложение, стоящее после квантора, его отрицанием.**

Заметим, что предложение «Все натуральные числа не делятся на 3» не является отрицанием высказывания «Все натуральные числа делятся на 3», поскольку оно ложно так же, как и данное высказывание.

При построение отрицаний высказываний мы воспользовались правилом, которое принимаем без доказательства.

Отношения следования и равносильности между предложениями. Из предложения А следует предложение В, если всякий раз, когда истинно предложение А, истинно и предложение В.

Предложение «Из А следует В» можно записать, используя символ =>, таким образом А => В. Знак «=>» - это знак отношения следования между предложениями.

Запись А => В читают по-разному: а) из А следует В; б) В следует из А; в) если А, то В; г) есть А, следовательно В; в) всякое А есть В.

Например, предложение «Из того, что число х кратно 4, следует, что оно кратно 2» можно сформулировать еще и так: а) всякое число, которое делится на 4, делится и на 2; б) если число делится на 4, то оно делится и на 2; в) число х делится на 4. Следовательно, оно делится и на 2.

Если из предложения А следует предложение В, а из предложения В следует предложение А, то говорят, что предложения А и В равносильны.

Согласно этому определению предложения «Треугольник равнобедренный» и «Углы при основании треугольника равны» равносильны.

Предложение «А равносильно В» записывают, используя знак <=>: А<=>В.

Запись А<=>В читают по-разному: а) А равносильно В; б) А тогда и только тогда, когда В; в) А, если и только, если В.

В геометрии доказано, что если углы вертикальные, то они равны, т.е. А=>В, а вот следования В=>А нет: из того, что углы равны, не следует, что они вертикальные. Значит, данные предложения не равносильны, они находятся только в отношении следования, причем А следует из В.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 5

Тема	**Объем, понятия, определения.**
План	**Введение.** **а)Объем и содержание понятия. Определение понятий. Требования к определению понятий.** **б) Правила построений отрицаний высказываний, содержащих кванторы. Отношения следования и равносильности между предложениями.**
Цели, Задачи	
Содержание учебного процесса	
Технология организации учебного процесса	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль** **Оценка**
Ожидаемый результат	**Студент:** **Преподаватель:**

Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие свойства различают среди свойств объекта?
2. В каком случае свойство можно считать существенным, а в каком несущественным?
3. Дайте определение понятию «содержание понятия».
4. Продолжите предложение: «Объем понятия – это…»
5. Какая связь существует между объемом понятия и его содержанием?
6. Продолжите предложение: «Определение – это…».
7. Дайте определения понятиям «контекстуальные» и «остенсивные» определения.
8. Какие определения называют генетическими?
9. От какого слова происходит слово «индуктивный»?
10. Какое определение называют рекуррентным?
11. Какими способами может быть построено отрицание высказывания с квантором (общности или существования)?

ТЕМА 6: ОТНОШЕНИЯ, СООТВЕТСТВИЯ.

Основные свойства отношений. Пусть на множестве X задано некоторое отношение R.

1. Отношение R называется *рефлексивным*, если для любого x из множества X истинно xRx. Другими словами, отношение R на множестве X рефлексивно, если каждый элемент x X находится R с самим собой.

Так, рефлексивно отношение конгруэнтности на множестве геометрических фигур, поскольку каждая фигура конгруэнтна самой себе.

2. Отношение R называется *антирефлексивным*, если ни один элемент x из множества X не находится в отношении R с самим собой.

Например, отношение «Прямая x перпендикулярна прямой y» на множестве прямых плоскости антирефлексивно, так как ни одна прямая не перпендикулярна самой себе.

Существуют отношения, не являющиеся на рефлексивными, ни антирефлексивными. Примером такого отношения может служить отношение «Точка x симметрична точке y относительно прямой l», заданное на множестве точек плоскости. Действительно, все точки прямой *l* симметричны самим себе, а точки, не лежащие на прямой l, себе не симметричны.

3. Отношение R называется *симметричным*, если для любых элементов x и y из множества X из xRy следует yRx.

Так, симметрично отношение параллельности на множестве прямых плоскости: если прямая x параллельна прямой y, то и прямая y параллельна прямой x.

4. Отношение R называется *ассиметричным,* если ни для каких элементов x и y из множества X не может случится, что одновременно и xRy, и yRx.

Примером ассиметричного отношения является отношение «x<y», заданное на множестве действительных чисел, так как ни про какую пару чисел x и y нельзя сказать, что одновременно и x<y, и y<x.

5.Отношение R *антисимметрично,* если xRy и yRx одновременно выполняются в том и только в том случае, когда x = y. Антисимметричное отношение – объединение асимметричного отношения с отношением тождества.

6. Отношение R называется *транзитивным,* если для любых элементов x, y и z из множества X из того, что xRy и yRz, следует, что xRz.

Например, транзитивно отношение «Отрезок x длиннее отрезка y» в множестве отрезков: если отрезок x длиннее отрезка y и отрезок y длиннее отрезка z, то отрезок x длиннее отрезка z.

Отношения эквивалентности. Если отношение R в множестве X обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, то его называют отношением *эквивалентности.*

Для того чтобы отношение R позволяло разбить множество X на классы, необходимо и достаточно, чтобы R было отношением эквивалентности.

Доказательство необходимости условия.

Пусть задано разбиение множества X на классы. Покажем, что это разбиение позволяет определить в множестве X некоторое отношение эквивалентности.

Зададим в множестве X отношение R: «Элемент x находится в том же классе разбиения, что и элемент y». Это отношение рефлексивно, поскольку всякий элемент x находится в одном классе с самим собой. Далее, для любых элементов x и y из множества X из того, что x лежит в том же классе, что и y, следует, что y лежит в том же классе, что и x. Таким образом, отношение R симметрично. Кроме того, отношение R транзитивно, так как для любых трех элементов из множества X справедливо следующее утверждение: если x лежит в том же классе, что и y, а y – в том же классе, что и z то x находится в том же классе, что и z.

Итак, отношение R: «находиться в одном и том же классе» рефлексивно, симметрично и транзитивно. Следовательно R – отношение эквивалентности на множестве X.

Д о к а з а т е л ь с т в о д о с т а т о ч н о с т и у с л о в и я.

Докажем теперь, что каждое отношение эквивалентности (т.е. любое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение) в множестве X определяет разбиение этого множества на попарно – непересекающиеся подмножества. Для этого поставим в соответствие каждому элементу a множества X его образ при отношении R, т.е. множество R(a) таких элементов x, что aRx (например, если xRy – отношение «Прямая x параллельна прямой y», то класс R(a) состоит из всех прямых, параллельных прямой a). Так как отношение R рефлексивно, то для любого a   X имеем aRa, а это значит, что каждый элемент a принадлежит соответствующему ему классу R(a), a   R(a).

Покажем, что если b   R(a), то классы R(a) иR(b) совпадают. В самом деле, в этом случае имеем aRb. Если c   R(b), то bRc, а тогда из aRb и bRc в силу транзитивности R имеем aRc. Но тогда c   R(a). Значит, каждый элемент множества R(b) принадлежит R(a), т.е. R(b)   R(a). Обратно, пусть c   R(a), т.е. пусть aRc. Так как aRb, то в силу симметричности отношения R имеем bRa, а тогда из bRa и aRc следует, что bRc, и потому c   R(b). Значит, любой элемент из R(a) принадлежит R(b), т.е. R(a)   R(b). Так как R(b)   R(a) и R(a)   R(b), то R(a) = R(b)/

Из доказанного утверждения следует, что если множества R(a) и R(b) имеют хоть один общий элемент c, то они совпадают. В самом деле, в этом случае оба множества R(a) и R(b) совпадают с R(c), а потому равны друг другу. Таким образом, любые два множества R(a) и R(b) либо совпадают друг с другом (если b R(a)) , либо не пересекаются друг с другом. А так как каждый элемент a принадлежит своему классу R(a), то мы получили разбиение X на попарно – непересекающиеся классы.

Рассмотрим несколько примеров отношений эквивалентности.

1. Отношение «Выражения x и y имеют одинаковые числовые значения» на множестве числовых выражений является отношением эквивалентности, поскольку оно

а) рефлексивно: значение выражения x совпадает со значением выражения x;
б) симметрично: значение выражения x совпадает со значением выражения y, то и значение выражения y совпадает со значением выражения x;
в) транзитивно: если значение выражения x совпадает со значением выражения y, а значение выражения y совпадает со значением выражения z, то значение выражения x совпадает со значением выражения z.

Множество всех числовых выражений разбивается этим отношением на классы, в каждом из которых находятся выражения, значения которых попарно совпадают. Так, выражения 5 +3, 2^3, 2 + 2 + 2 + 2 находятся в одном классе (их значения равны восьми), а выражения 7 – 3, 2^2, 16:4 – в другом (их значения равны четырем).

2. В множестве прямых на плоскости отношение параллельности является отношением эквивалентности. Прямые х и у, лежащие в одной плоскости, параллельны, если они либо не пересекаются, либо совпадают. Поэтому отношение параллельности

а) рефлексивно: х || х для любой прямой х;
б) симметрично: если х || у, то у || х;
в) транзитивно: если х || у и у || z, то х || z.

Отношением параллельности множество всех прямых плоскости разбивается на классы, состоящие из параллельных друг другу прямых. Такие классы называют *пучками* параллельных прямых.

3. В множестве геометрических фигур отношениями эквивалентности являются, например, такие отношения:

а) «Фигура х конгруэнтна фигуре у».
б) «Фигура х подобна фигуре у».

Отношение «Фигура х конгруэнтна фигуре у» разбивает множество на классы эквивалентности, состоящие из попарно конгруэнтных фигур.

Бинарные соответствия. Дадим общее определение *бинарного соответствия* между элементами множеств Х и У (слово «бинарный» происходит от латинского слова bis, означающего «дважды», и показывает, что речь идет о двух множествах Х и У). Каждое такое соответствие задается некоторым двухместным предикатом R(х, у), в котором х пробегает множество Х, а у – множество У. Если множества Х и У совпадают, Х = У, то говорят не о соответствии, а об *отношении между элементами множества Х.* При этом может случиться, что два различных предиката R(х, у) и S(х, у), такие, что в обоих х пробегает множество Х, а у – множество У, имеют одинаковое множество истинности Т. Например, предикаты «Число х не превосходит числа у» и «Число х является делителем числа у». Но если Х = {2; 4; 75}, а У = {1; 4; 8; 16}, то множества истинности этих предикатов одинаковы: они состоят из пар (2; 4), (2; 8), (2; 16), (4;4), (4;8), (4; 16). В таких случаях мы будем считать, что предикаты R(х, у) и S(х, у) задают одно и то же соответствие между множествами Х и У.

Таким образом, чтобы задать соответствие R между множествами Х и У, достаточно указать подмножество Г декартова произведения Х х У. Иными словами, соответствие R – тройка множеств (Х, У, Г), где Г   ХхУ. Если а и b – элементы множеств Х и У, на которых задан предикат R(х, у), то запись aRb означает то же, что и высказывание R(a, b). Она является обобщением записи многих соответствий и отношений, употребляемых в математике. Сравните, например, запись aRb с записью отношения равенства и неравенства действительных чисел: a = b, a > b,
a < b; или с записью отношения параллельности и перпендикулярности прямых:
a || b, a $\perp$ b.

Для бинарных соответствий применяется своя терминология, отличающаяся от терминологии, применяемой для двухместных предикатов. Например, множество

Х называют *областью отправления соответствия R,* множество У – *областью прибытия,* а множество Г – *графиком соответствия.* Таким образом, график Г соответствия R – это совокупность всех пар (х; у), где х Х, у У, для которых истинно хRу. Например, если R – соответствие «х делится на у» и Х = {10; 20; 30; 40}, У = {2; 3; 4}, то Г состоит из пар (10; 2), (20; 2), (20; 4), (30; 2), (30; 3), (40; 2), (40; 4).

Если множества Х и У конечны, то бинарные соответствия между ними можно задать таблицами. Например, таблица 1 задает соответствие «Школьник х дежурит в день у». Здесь Х = {Алексеев; Бочкарева; Васильев; Григорьев; Денисов; Ефимов} и У = {понедельник; вторник; среда}. Заштрихованные клетки таблицы образуют график рассматриваемого соответствия.

<table>
<tr><td>Дни недели / Фамилии</td><td>Понедельник</td><td>Вторник</td><td>Среда</td></tr>
<tr><td>Алексеев</td><td>||||||||||||||||||||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Бочкарева</td><td></td><td>||||||||||||||||||||</td><td></td></tr>
<tr><td>Васильев</td><td></td><td></td><td>||||||||||||||||||||</td></tr>
<tr><td>Григорьев</td><td>||||||||||||||||||||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Денисов</td><td></td><td>||||||||||||||||||||</td><td></td></tr>
<tr><td>Ефремов</td><td></td><td></td><td>||||||||||||||||||||</td></tr>
</table>

Для конечных множеств соответствия изображают также при помощи особых чертежей, состоящих из точек и направленных линий (стрелок), идущих из одной точки в другую. Такие чертежи в математике называют *ориентированными графами* (от греческого слова «графо» - «пишу»). Элементы множеств Х и У обозначают точками, а стрелки проводят из точки х в точку у, если (х; у) Г, т.е. если хRу. Например, граф, изображенный ниже задает то же соответствие «Школьник х дежурит в день у», что и таблица 1.

Алексеев •
Бочкарева • • понедельник
Васильев •
Григорьев • • вторник
Денисов •
Ефремов • • среда

Некоторые типы соответствий. Операции над соответствиями. Если график Г соответствия R между множествами Х и У совпадает со всем декартовым произведением Х х У, то это соответствие называют *полным*. Если же график соответствия R пуст (Г = Ø), то R называют *пустым соответствием*. Например, соответствие «х питается тем же, чем у» пусто, если Х – множество зайцев, а У – множество тигров.

Полное и пустое соответствия существуют между любыми двумя множествами Х и У. Если заданы не пустые множества Х и У, то между ними можно установить целый ряд иных соответствий, выбирая по-разному подмножества Г в декартовом произведении Х х У. Над подмножествами декартова произведения можно выполнять различные операции: объединять их, пересекать и т.д. Каждой из этих операций отвечает операция над соответствиями.

Например, если между X и У заданы соответствия xPy и xQy, то их *пересечением* R = P ∩ Q называют соответствие xRy, график которого является пересечением графиков этих соответствий. Иными словами, xRy в том и только в том случае, когда xPy и xQy. Если соответствие xPy задано предикатом P(x, y), соответствие xQy – предикатом Q(x, y), то xRy задается предикатом R(x, y) = P (x, y) Λ Q(x, y).

Объединением S = P U Q соответствий xPy и xQy называют соответствие xSy. Иными словами, xSy в том и только в том случае, когда xPy или xQy. Если соответствие xPy задано предикатом P(x, y), а xQy – предикатом Q(x, y), то xSy задается предикатом S(x, y) = P(x, y) V Q(x, y). Например, соответствие x = y для чисел является объединением соответствий x < y и x > y – если x = y, то или x < y, или x > y. Обратно, если x < y или x > y, то x = y. А соответствие x< y для чисел – пересечение соответствий x ≤ y и x = y – если x ≤ y и x = y, то x < y, а если x < y, то x ≤ y и x = y.

Может случиться, что графики соответствий xPy и xQy – дополнительные множества в X x У (т.е. они не пересекаются, а их объединением является все X x У). Такие соответствия называют *противоположными.* Например, соответствие «Число x больше числа y» противоположно соответствию «Число x не превосходит числа y». Если соответствие xPy задано предикатом P(x, y), то противоположное ему соответствие задается отрицанием этого предиката, т.е. предикатом P(x,y).

Если график соответствия xPy является подмножеством графика соответствия xQy, говорят, что xQy – *следствие* xPy. В этом случае для любой пары (x; y), такой, что xPy, имеем и xQy. Например, соответствие «Треугольники x и y подобны» - следствие соответствия «Треугольники x и y конгруэнтны» - любая пара конгруэнтных треугольников подобна.

Каждому бинарному соответствию между множествами X и У отвечает бинарное соответствие между У и X. Например, можно сказать «Прямая x касается окружности y» - это будет соответствием между множеством X прямых и множеством У окружностей. Но если прямая касается окружности, то окружность, в свою очередь, касается прямой, и мы получаем соответствие «Окружность y касается прямой x», для которого областью отправления служит У, а областью прибытия X. Иными словами, при переходе к новому соответствию области отправления и прибытия поменялись ролями – область отправления стала областью прибытия и, наоборот, область прибытия стала областью отправления. В парах (x; y), входящих в график соответствия, компоненты тоже меняются местами – вместо (x; y) надо писать (y; x).

Вообще, пусть задано соответствие xRy между множествами X и У. *Обратным* ему называют соответствие ySx между множествами У и X, такое, что ySx в том и только в том случае, когда xRy. Обычно вместо ySx пишут yR x.

Отношения порядка

Отношения строгого порядка. Слово «порядок» часто употребляют и в обыденной речи, и в математике. В слово «порядок» вкладывается такой смысл: оно означает, какой элемент того или иного множества за каким следует.

Таким образом, интуитивное понятие порядка между элементами некоторого множества связано с заданием на этом множестве отношения «x следует за y», причем это отношение должно быть транзитивным: если x следует за y и y следует за z, то x следует за z. Кроме того, отношение «следует за» должно обладать свойством асимметричности: из того, что x следует за y, вытекает, что y не следует за x.

Но свойством транзитивности и асимметричности обладают многие другие отношения, например, отношение «больше» на множестве натуральных чисел или отношение «выше» на множестве людей, сравниваемых по росту. Об отношениях «следует за», «больше», «выше» говорят, что они являются отношениями строгого порядка.

Вообще, отношение R на множестве X называется *отношением строгого порядка,* если оно транзитивно и асимметрично.

Построим граф отношения «$x < y$» на множестве $X = \{3; 1; 5; 2; 4\}$. Мы видим, что граф данного отношения не имеет петель и любую пару чисел $(x; y)$, такую, что

$x < y$, соединяет только одна стрелка, идущая от x к y. Если из x идет стрелка в y, а из y – в z, то из x идет стрелка в z.

Построенный граф позволяет расположить элементы множества X в таком порядке: число 1(оно меньше всех остальных), затем число 2 и т.д. Получим множество $X = (1; 2; 3; 4; 5)$, про которое говорят, что оно упорядоченно отношением «$x < y$».

График отношения «$x < y$» на множестве $X = \{3; 1; 5; 2; 4\}$ есть множество $G = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2, 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5), (4; 5)\}$.

Отношения нестрогого порядка. Наряду с отношением «$x < y$» («$x > y$») в математике рассматривают отношения «$x \le y$» («$x \ge y$»), представляющие собой объединение отношений «$x < y$» и «$x = y$» («$x > y$» и «$x = y$»). Говорят, что «$x \le y$» является отношением нестрогого порядка.

Вообще, отношение R множестве X называется *отношением нестрого порядка* , если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Такие отношения являются объединениями отношения строгого порядка с отношением тождества.

К этому типу принадлежат, например, такие отношения: «не выше» (на множестве людей, сравниваемых по росту); «не больше» (на множестве действительных чисел); «быть делителем» (на множестве натуральных чисел).

Если на множестве $X = \{3; 1; 5; 2; 4\}$ рассмотреть отношение нестрогого порядка «$x \le y$», то граф этого отношения в каждой вершине будет иметь петли. Чтобы построить график отношения «$x \le y$» на координатной плоскости, надо к графику отношения «$x < y$», заданного на том же множестве X, добавить точки (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), лежащие на биссектрисе прямого угла.

Упорядоченные множества. Множество X, на котором задано отношение порядка R (строгого или нестрогого), называется *частично упорядоченным множеством.* Часто говорят также, что в этом случае множество X упорядоченно отношением R.

Рассмотрим на множестве X = {3; 1; 5; 2; 4} отношение «Число x кратно числу y». Это отношение транзитивно: если x кратно y и y кратно z, то x кратно z. Данное отношение антисимметрично: x кратно y и y кратно x одновременно только в том случае, когда x = y. Кроме того, оно рефлексивно: любое число из множества X кратно самому себе. Следовательно, отношение «быть кратным» на множестве
X = {3; 1; 5; 2; 4} является отношением нестрогого порядка.

Если отношение порядка R (строгого или нестрогого) не множестве X обладает свойством: для любых элементов x и y из множества X либо xRy, либо yRx, то R – *отношение линейного порядка*, а множество X – *линейно упорядоченное множество.* Если множество X конечно и состоит из n элементов, то линейное упорядочивание X сводится к нумерации его элементов числами 1,2,….., n.

Например, множество натуральных чисел отношением «меньше» упорядочивается линейно. Отношение делимости упорядочивает множество натуральных чисел нелинейно.

Линейно упорядоченные множества обладают рядом свойств. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть a, b, c – элементы множества X, упорядоченного отношением R. Если известно, что aRb и bRc, то говорят, что элемент b *лежит между элементами a и c.*

Например, если множество натуральных чисел упорядоченно отношением «x < y», то из того, что 3 < 5 и 1 < 3, следует, что число 3 лежит между числами 5 и 1.

Множество X, линейно упорядоченное отношением R, называется *дискретным*, если между любыми двумя его элементами лежит лишь конечное множество элементов.

Линейно упорядоченное множество называется *плотным,* если для любых двух различных элементов этого множества существует элемент множества, лежащий между ними.

Так, множество **Q** рациональных чисел, упорядоченное отношением «x< y», плотно, поскольку для любых рациональных чисел x и y (x = y) существует число $z = \frac{x + y}{2}$ такое, что z лежит между x и y.

Отображения. Рассмотрим еще один важный частный случай общего понятия соответствия – отображения множеств. При соответствии R между множествами X и У образ элемента a   X может оказаться пустым, а может содержать и несколько элементов. *Отображением* множества X в множество У называют такое соответствие между этими множествами, что образ любого элемента a   X состоит из одного и только одного элемента множества У. Иными словами, для любого a   X найдется один и только один элемент b   У, такой, что aRb.

Таким образом, график отображения множества Х в множество У не может содержать двух различных пар (а; y_1) и (а; y_2) с одной и той же первой компонентой. При этом для любого а Х в нем найдется Х в множество У графом, то из каждой точки множества Х буде выходить одна и только одна стрелка.

Отображения множеств обозначают так:

$$f : X \to У, X \to У.$$

Здесь f – символ самого отображения. Если при отображении элементу х соответствует элемент у, то пишут:

$$f : x \to y \text{ или } x \to y \text{ или } y = f(x)$$

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 6

Тема	**Отношения, соответствия.**
План	**Введение.** **а)Отношение между элементами двух множеств. Способ задания отношений и их свойства. Отношения эквивалентности.** **б) Бинарные соответствия. Операции над соответствиями.** **в) Отношения порядка. Отображении.**
Цели, Задачи	
Содержание учебного процесса	
Технология организации учебного процесса	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль** **Оценка**
Ожидаемый результат	**Студент:** **Преподаватель:**
Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Перечислите свойства отношений и дайте каждому определение.

2. Какие отношения называют отношениями эквивалентности?

3. Как называют выражения, принадлежащие одному и тому же классу эквивалентности?

4. Какими свойствами обладает отношение строгого порядка?

5. Чем отличаются отношение строгого порядка и нестрогого порядка?

6. Дайте определение понятию «отображения».

ТЕМА 7: ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Общее понятие алгебраической операции. В школе изучают различные операции над числами: сложение, вычитание, умножение и деление. При выполнении каждой из этих операций по заданным двум числам находят результат операции, который также является числом. Наконец, деление 5 : 9 можно выполнить в множестве рациональных чисел, где получается ответ 5/9, и нельзя выполнить в множестве натуральных чисел.

Каждая из операций над числами имеет свои свойства. Операции можно производить не только над числами, но и над иными объектами. Мы уже встречались с операциями пересечения и объединения множеств, дизъюнкции и конъюнкции высказываний, композиции преобразований и т.д. Многие из них обладали похожими свойствами.

Во всех рассмотренных выше примерах операций мы имели дело с некоторым множеством X (множеством чисел, высказываний, преобразований и т.д.). При выполнении операции по двум элементам этого множества находят третий элемент того же множества (по двум заданным числам находят их сумму, по двум заданным высказываниям – их конъюнкцию и т.д.). При этом ответ, вообще говоря, зависит от порядка этих элементов.

Алгебраической операцией в множестве X называют отображение (x; y) → z, ставящее в соответствие любой упорядоченной паре элементов (x; y) этого множества третий элемент z того же множества.

Выше мы назвали множество X x X упорядоченных пар (x; y), где x X, y X, декартовым произведением X на X. Значит, алгебраическая операция в множестве X является отображением X x X в X. Элемент x называют *первой компонентой* операции, элемент y – ее *второй компонентой,* а элемент z – *результатом операции.* В математике рассматривают и более общее понятие алгебраической операции, при котором отображают в X декартово произведение вида X x ……x X. Такую операцию называют *n-арной..* Например, операция, при которой заданным пяти числам a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 становится в соответствии их сумма $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, является 5-арной. Чтобы особо выделить изучаемый нами случай, отображение

X x X в X называют *бинарной* алгебраической операцией. Любое отображение множества X в X следует называть *унарной* алгебраической операцией.

Частичной алгебраической операцией в множестве X называется отображение некоторого подмножества У декартова произведения X x X в X.

Иными словами, в множестве x задана частичная алгебраическая операция, если н е к о т о р ы м парам (x; y), x X, y X, поставлен в соответствие однозначно определенный элемент z X.

Множество У пар (x; y), которым соответствует элемент z, называют *областью определения* частичной алгебраической операции. Вычитание и деление в множестве натуральных чисел являются частичными алгебраическими операциями. Частичная алгебраическая операция может оказаться и пустой, т.е. такой, что ни одной паре
(x; y) не соответствует элемент z.

Если для любой пары (x; y) элементов из A соответствующий элемент z тоже принадлежит A, то говорят, что подмножество A *замкнуто* относительно данной алгебраической операции.

Ассоциативные алгебраические операции. Обозначим эту операцию *. Важнейшим из свойств алгебраических операций, используемых при преобразовании выражений, является свойство *ассоциативности*. Оно состоит в том, что для любых трех элементов a, b, c из X выполняется равенство

$$a*(b*c) = (a*b)*c$$

Если операция * обладает свойством ассоциативности, то выражения, содержащие лишь эту операцию, можно записывать, опуская скобки. Это вытекает из следующего утверждения, доказательство которого мы опускаем:

*Если алгебраическая операция * в множестве X ассоциативна, а* $(x_1,\ldots\ldots,x_н)$ *– кортеж длины n, составленный из элементов множества X, то все выражения, получаемые из такого кортежа путем расстановки скобок и применения операции* *, имеют одно и то же значение (это означает, что после выполнения действий в порядке, указанном скобками, мы во всех случаях получим одно и то же значение выражения).

Например, если операция * ассоциативна, то все выражения (a*b) *(c*d),
((a* b) * c) * d, ((a*(b*c)) *d, a*(b*(c*d)), a*((b*c) *d) имеют одно и тоже значение.

Общее значение выражений, получаемых описанным выше способом из кортежа
$(x_1,\ldots\ldots,x_н)$, обозначают $x_1*\ldots\ldots*.x_н$. Например, пишут не (3+9)+(4+7), а 3+9+4+7. Это значение можно вычислить, складывая числа слева направо:

$$3 + 9 + 4 + 7 = 12 + 4 + 7 = 16 + 7 = 23.$$

Для ассоциативных операций имеет смысл понятие *степени элемента.* Возьмем какой-нибудь элемент a и кортеж длины n, все координаты которого равны a, т.е. кортеж (a;……;a)(n раз). Этому кортежу соответствует элемент из X, равный a*…*a. Его обозначают a^n и называют *n-й степенью элемента a.* Например, $a^3 = a*a*a$. При n = 1 полагают $a^1 = a$.

В случае когда * - операция умножения, введенное понятие степени совпадает с обычным $a^n = a\ldots.a$ (n раз). Если же * - операция сложения, то обозначение a^n означает a+ …..+a. Обычно в этом случае вместо a^n пишут na и называют na кратным числа a, а не степенью этого числа.

Из ассоциативного операции * вытекают следующие правила действий над степенями:

1) $(a^n)*(a^{nn}) = a^{n\,+\,nn}$,
2) $(a^n)^{nn} = a^{n\,nn}$.

Чтобы доказать свойство 1), заметим, что

$$a^n*a^{nn} = (a*\ldots.*a)*(a*\ldots..*a).$$

Но в силу ассоциативности операции *, это выражение равно a*….*a (n+m раз), т.е. $a^{n\,+\,nn}$. Значит, $a^n * a^{nn} = a^{n\,+\,nn}$. Свойство 2) доказывается аналогично.

В случае когда * - операция сложения, получаем из свойств 1) и 2) следующие правила действий над кратными:

1) na + nb = n (a + b),
2) m (na) = (mn) a.

Операция пересечения множеств ассоциативна. Однако для этой операции нецелесообразно говорить о степени: для любого множества A имеем A∩A = A, и потому любая «степень» множества A совпадает с этим множеством. Нецелесообразно говорить о степени и для операции объединения множеств.

Коммутативность. Алгебраическую операцию * называют *коммуникативной,* если результат ее применения не зависит от порядка компонент, т.е. если для любых двух элементов a и b из X выполняется равенство a*b = b*a.

Примерами коммутативных операций могут служить сложение и умножение натуральных чисел, поскольку для любых натуральных чисел m и n выполняются равенства:

$$m + n = n + m$$
$$mn = nm.$$

Эти равенства справедливы не только для натуральных чисел, но и для любых действительных чисел: в множестве R действительных чисел операции сложения и умножения тоже коммутативны.

Примером некоммутативной операции может служить вычитание в множестве Z целых чисел. Некоммутативно и деление в множестве положительных рациональных чисел.

Если операция * коммутативна и ассоциативна, то любое выражение, содержащие лишь эту операцию, можно представить в виде a * ……* a , где элементы $a_1,\ldots.a_k$ попарно различны. Для такого преобразования достаточно, воспользовавшись ассоциативностью и коммутативностью, переставить элементы, входящие в это выражение, так, чтобы равные друг другу элементы шли подряд. Например,

$$((a_1*a_2)*(a_1*a_1))*(a_1*a_2) = a_1*a_2*a_1*a_1*a_1*a_2 = a_1* a_1* a_1* a_1*a_2* a_2 = a_1 * a_2$$

Докажем следующее свойство степеней, имеющее место, если операция * коммутативна и ассоциативна:

$$a^n*b^n = (a*b)^n$$

В самом деле, по определению

$$(a*b)^n = (a*b)*\ldots..*(a*b) = a*b*\ldots..*a*b.$$

Переставляя элементы, можем записать это выражение в виде

$$(a*\ldots\ldots..*a)*(b*\ldots\ldots\ldots*b) = a^n*b^n$$

Значит, $(a*b)^n = a^n*b^n$.

Если * - операция умножения чисел, то из равенства (1) следует, что $a^n*b^n = (ab)^n$. Если же * - операция сложения, то равенство (1) означает, что $na + nb = n(a + b)$.

Дистрибутивность. Чаще всего рассматривают пары операций, связанные друг с другом дистрибутивностью. Назовем операцию *дистрибутивной* относительно операции *, если для любых трех элементов a, b, c множества X выполняются равенства:

$$a \circ (b*c) = (a\circ b)*(a\circ c) \qquad (1)$$

и

$$(b*c)\circ a = (b\circ a)*(b\circ c). \qquad (2)$$

В случае когда * и ○ – частичные алгебраические операции, равенство (1) понимается следующим образом: хотя бы одно из выражений $a \circ (b*c)$ и $(a\circ b)*(a\circ c)$ имеет смысл, то имеет смысл и второе выражение, причем значения этих выражений равны друг другу.

Операция умножения натуральных чисел дистрибутивна относительно операции сложения: для любых трех натуральных чисел a, b, c имеет место равенство

$$a(b + c) = ab + ac$$

Операция умножения натуральных чисел дистрибутивна и относительна операции вычитания: если $b > c$, то

$$a(b - c) = ab - ac$$

Операция сложения не является дистрибутивной относительно операции умножения, поскольку $a + bc = (a + b)(a + c)$.

Если операция ○ дистрибутивна относительно операции *, причем обе операции ассоциативны, то в любом выражении, содержащем лишь эти две операции, можно раскрыть все скобки. Например, мы знаем, что умножение действительных чисел дистрибутивно относительно сложения. Поэтому

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d).$$

Используя еще раз дистрибутивность умножения и ассоциативность сложения, получаем, что

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd. \qquad (3)$$

Если * и ○ – любые две алгебраические операции, такие, что * ассоциативна и ○ дистрибутивна относительно *, то имеет место равенство

$$(a*b) \circ (c*d) = (a\circ c)(a\circ d)(b\circ c)(b\circ d). \qquad (4)$$

Раскрытие скобок позволяет привести выражения, содержащие две операции ○ и *, к стандартному виду. Пусть обе эти операции ассоциативны, причем ○ дистрибутивно относительно *. Назовем «одночленом» выражение вида $a_1\circ\ldots.\circ a_n$, а «многочленом» выражение вида $A_1*\ldots.*A_k$, где $A_1,\ldots.,A_k$ – одночлены. Можно доказать, что любое выражение, содержащее лишь операции ○

и *, после раскрытия скобок превращается в «многочлен». Дальнейшее упрощение возможно при условии, что операции ○ и * коммутативны. Тогда любой «одночлен» можно записать как произведение степеней различных элементов, а в «многочленах» привести подобные члены.

В частности, любое буквенное выражение, содержащее лишь операции сложения и умножения, можно представить в виде суммы одночленов. При этом, пользуясь коммутативностью умножения, можно каждый одночлен представить в виде произведения степеней.

Применяя такие преобразования к выражениям $(a + b)^2$ и $(a + b)^2$, получаем известные из школы формулы сокращенного умножения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Они являются частичными случаями общей формулы, называемой формулой *бинома Ньютона.*

Сократимость. Алгебраическая операция * в множестве X называется *сократимой,* если из условия $a*x = a*y$ следует, что $x = y$, и из условия $x*a = y*a$ следует $x = y$.

Обратные операции. Операция вычитания обратна операции сложения, а операция деления – операции умножения. Это значит, что из $b+x = a$ следует
$x = a – b$, а из $bx = a$ вытекает $x = a : b$. Операции вычитания и деления имеют общие свойства; например, равенства $a – (b + c) = a – b – c$ и $a : (bc) = a : b : c$ аналогичны.

Для каждой сократимой и коммутативной алгебраической операции * обратную ей частичную алгебраическую операцию T и выведем общие свойства таких операций, из которых, в частности, будут вытекать свойства операций вычитания и деления.

Пусть * - сократимая и коммутативная алгебраическая операция на множестве X. Обозначим через У множество пар (a; b), a X, b X, для которых найдется такое x X, что $b*x = a$ и $b*y = a$, то в силу сократимости операции * имеем $x = y$. Это значит, что, сопоставляя каждой паре (a; b) из У соответствующий элемент x (такой, что $b*x = a$), мы определяем частичную операцию T в X : $x = aTb$. Иначе можно сказать, что
$x = aTb$ в том и только в том случае, когда $b*x = a$.

Операцию T называют *обратной операцией* к *.Изучим ее свойства. Заметим, что так как операция * не только сократима, но и коммутативна, то из $b*x = a$ вытекает, что $x*b = a$. Покажем, что для любых двух элементов b и c из X выполняется равенство

$$(b*c)\ Tb = c$$

а если (a; b) У (т.е. если существует элемент $x = aTb$), то и равенство

$$b*(aTb) = a.$$

Рассмотрим теперь тождества, в которые входят три элемента a, b, c. Предположим, что операция * не только коммутативна и сократима, но, кроме того, ассоциативна. В этом случае при условии существования элемента aT(b*c) справедливо тождество

$$aT\,(b*c) = aTcTb \qquad (7)$$

Поскольку операция * по условию коммутативна, то наряду с этим тождеством имеем: $aT\,(b*c) = aTbTc$

Докажем теперь, что *если существует элемент bTc, то*

$$A*\,(bTc) = (a*b)\,Tc.$$

Аналогично доказывается, *что если существует не только bTc, но и aTc, то*

$$A*\,(bTc) = (aTc)*b.$$

Далее, если существуют aTb и aT(bTc), то

$$aT(bTc) = (a*c)\,Tb.$$

Если существует и aTb, то

$$aT(bTc) = (aTb)*c.$$

Это утверждение доказывается аналогично, как и соотношение

$$aT\,(aTb) = b, \qquad (12)$$

имеющее место, если существует aTb.

Соотношения (7) – (12) можно применять к самым разнообразным алгебраическим операциям, лишь бы они были коммутативны, ассоциативны и сократимы.

Нейтральный и поглощающий элементы. Пусть в множестве X задана алгебраическая операция *. Элемент e из X называют *нейтральным* относительно этой операции, если для всех элементов a из X выполняются равенства

$$a*e = e*a = a.$$

Пусть * - алгебраическая операция в множестве X. Элемент w называется *поглощающим* относительно этой операции, если для любого a X выполняются равенства w*a = a*w = w. Таким образом, 0 – поглощающий элемент относительно операции умножения.

Симметричные элементы. Пусть в множестве X существует элемент e, нейтральный относительно алгебраической операции *. Назовем элемент a *симметричным* элементу a, если выполняются равенства

$$a*a = a*a = e.$$

Если алгебраическая операция * в множестве X ассоциативна, то ни один элемент a из X не может иметь двух различных симметричных элементов.

Равенства a*a = e и a*a = e переходят друг в друга при перестановке элементов a и a. Поэтому, *если a симметрично a, то a симметрично a.* Иными словами, если существует элемент a, то должно выполнятся равенство

$$a = a.$$

Докажем теперь, что *если операция * ассоциативна и у элементов a и b есть симметричные элементы a и b, то и a*b имеет симметричный элемент, причем*

$$(a*b) = b*a.$$

В самом деле, в силу ассоциативности операции * имеет место равенство

$$(a*b)*(b*a) = a*(b*b)*a = a*e*a = a*a = e/$$

Точно также доказывается равенство

$$(b*a) * (a*b) = e.$$

Эти равенства показывают, что элементы $a*b$ и $b*a$ симметричны.

*Если операция * ассоциативна и каждый элемент a имеет симметричный ему элемент a, то операция * сократима.*

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 7

Тема	**Основные алгебраические структуры.**
План	**Введение.** **а) Понятие об алгебраической операции и алгебраической структуры.** **б) Законы алгебраических операций и их свойства.**
Цели, Задачи	
Содержание учебного процесса	

Технология организации учебного процесса	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль** **Оценка**
Ожидаемый результат	**Студент:** **Преподаватель:**
Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1.Какую операцию называют алгебраической?

2.От какого латинского слова произошло слово «бинарный»?

3.Какую операцию называют унарной?

4.Дайте определение понятию «частичная алгебраическая операция».

5.Может ли частичная алгебраическая операция оказаться пустой?

6.Какими свойствами обладают алгебраические операции?

ТЕМА 8: СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Запись натуральных чисел в десятичной системе счисления. Назовем *десятичной записью натурального числа n* представление в виде суммы следующего вида:

$$n = n_k\ 10 + n_{k-1}\ 10 + ... + n_0.$$

Здесь $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_0$ – целые неотрицательные числа, принимающие значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. При этом $n_k = 0$. Для краткости пишут так: $n = n_k n_{k-1} \ldots n_0$ (черта сверху позволяет отличить эту запись от произведения чисел $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_0$; если вместо букв пишутся цифры, то черта не нужна). Например:

$$4705 = 4\ 10^3 + 7\ 10^2 + 0\ 10 + 5\ .$$

Для любого натурального числа n выполняется неравенство $n < 10^n$. В самом деле, если $k < l$, то $10 < 10$, и потому числа $10, 10^2, \ldots, 10^n$ попарно различны. Поэтому наибольшее из них больше, чем n, а это значит, что $n < 10^n$. Обозначим через A_n множество натуральных чисел s таких, что $10 < n$. Так как $n < 10^n$, то для всех s из

A_n имеем $s \leq n$, и потому в множестве A_n есть наибольшее. Обозначим его k. Тогда $10 \leq n < 10$.

Докажем существование десятичной записи любого натурального числа n с помощью математической индукции по k, где $10 \leq n < 10$. При $k = 0$ выполняется неравенство $1 \leq n < 10$. В этом случае n – однозначное число и записывается с помощью лишь одной цифры. Предположим теперь, что для всех натуральных чисел, меньших чем 10 , доказано существование десятичной записи. Возьмем тогда любое число n, заключенное между 10 и 10 :$10 \leq n < 10$. Если n делится на 10 , то $n = n_k \bullet 10$, где $1 \leq n_k < 10$ получается остаток r ($n = n_k \bullet 10 + r$), то $r < 10$, и по предположению индукции r имеет десятичную запись $r = n_s\ 10 + ... + n_0$. Но тогда

$$n = n_k \bullet 10 + r = n_k 10 + n_s 10 + ... + n_0.$$

Эта запись еще не является десятичной, так как при $s < k - 1$ в нее входят некоторые степени 10. В этом случае достаточно добавить несколько слагаемых с нулевыми коэффициентами и получить требуемую десятичную запись:

$$n = n_k \bullet 10 + n_{k-1} 10 + ... + n_0. \qquad (1)$$

Мы доказали, что все числа, меньшие 10, имеют десятичную запись, а из существования записи у чисел, меньших 10 , вывели существование такой записи у всех чисел n, таких, что $10 \le n < 10$. Отсюда, в силу принципа математической индукции вытекает, что *все натуральные числа имеют десятичную запись.*

Докажем теперь, что каждое число n имеет только одну десятичную запись. Число k в равенстве (1) однозначно определяется условием $10 \le n < 10$. После того как k определено, коэффициент n_k определяется требованием $n_k 10 \le n < (n_k + 1) 10$. Далее определяем аналогичным образом цифры $n_{k-1}, \ldots, n_0$.

Десятичная запись чисел облегчает их изучение. В частности, совсем просто решается вопрос о сравнении двух натуральных чисел по их десятичной записи.

Пусть $$n = n_k \cdot 10 + n_{k-1} 10 + \ldots + n_0,\ n_k = 0,$$

$$m = m_l \cdot 10 + m_{l-1} 10 + \ldots + m_0,\ m_l = 0.$$

Если выполнено одно из следующих условий:

а) $k < l$

б) $k = l$, но $n_k < m_k$;

в) $k = l$, $n_k = m_k, \ldots, n_s = m_s$, $n_{s-1} < m_{s-1}$,

то число nменьше числа m.

В самом деле, пусть $k < l$. Тогда выполняется неравенство $10 \le 10$. А так как $n < 10$ и $10 \le m$, то $n < 10 \le 10 \le m$, т.е. $n < m$.

Легко видеть, что если n и m – различные натуральные числа, то выполняется либо одно из условий а) – в), либо одно из условий, получаемых из них изменением ролей n и m. Поэтому, если $n = m$, то указанные условия позволяют установить, что $n < m$ или $m < n$.

Непозиционные системы счисления. Еще в глубокой древности возникла необходимость в записи натуральных чисел. Самой простой формой записи были зарубки или черточки на бирке, узлы на веревке. Число таких зарубок. Черточек, узлов равнялось числу единиц в записываемом натуральном числе. Если какое – нибудь число должны были запомнить два человека (например, продавец и покупатель), то брали деревянную бирку, делали на ней соответствующее число зарубок, а потом раскалывали бирку пополам.

Такой способ «записи» чисел был не слишком удобным, так как для записи больших чисел надо было делать много зарубок или узлов, а это затрудняло не только запись, но и сравнение чисел друг с другом. Весьма сложно было и выполнять действия над числами. Поэтому возникли иные, более экономные способы записи. Черточки, зарубки, узлы и т.д. стали объединять в группы, состоящие из одинакового числа элементов. Так как чаще всего счет велся с помощью пальцев, то в одну группу обычно относили 10 черточек – каждая группа изображала пальцы одного человека. При этом счет вели несколько людей. Первый загибал по очереди пальцы на руках, а когда все пальцы оказались загнутыми, он разгибал их, а второй человек загибал один палец. После этого отсчитывали второй десяток и т.д. Когда все пальцы второго оказывались загнутыми, он разгибал их а третий человек загибал палец. Результат счета выражался примерно следующим образом: четыре пальца третьего человека, шесть пальцев второго человека и два пальца первого человека (по – нашему это 462).

Наряду с группами в 10 черточек встречались и группы в 20 черточек (пальцы обеих рук м обеих ног). Такой счет двадцатками был принят у американского племени майя, создавшего замечательную культуру, которая была разрушена в XVI в н.э. испанскими колонизаторами. До сих пор и французы вместо «восемьдесят семь» говорят «четыре раза двадцать и семь» (quatre – vingts sept). Сохранились следы счета двадцатками в датском и некоторых других европейских странах. Иногда применялся счет группами в 12 черточек (некоторые ученные объясняют это тем, что на четырех пальцах одной руки, кроме большого, 12 суставов и счет вели по этим суставам, прикасаясь к ним большим пальцем).

Чтобы не изображать слишком много черточек, стали обозначать целую группу черточек одним знаком. Уже в самых древних памятниках письменности, дошедших до наших дней, встречаются особые знаки для чисел 10, 100 и т.д. Самые древние математические тексты, дошедшие до нас, были написаны в древнем Вавилоне около 5000 лет тому назад (ученные полагают, что многие знания, изложенные в этих текстах, вавилоняне получили от еще более древнего народа – шумеров). Дошли до нашего времени и математические тексты, написанные более 4000 лет тому назад в Древнем Египте.

До сих пор иногда применяется непозиционная система записи чисел, которой пользовались древние римляне. Поскольку римляне завоевали многие страны, их способ записи чисел долго применялся в странах Западной Европы. Еще 200 лет тому назад в деловых бумагах числа должны были обозначаться римскими цифрами, так как считалось, что их труднее подделать, чем применяемые нами арабские цифры.

В основе римской системы записи чисел лежали знаки I, V, X, L, C, D, M, которыми обозначали соответственно числа 1, 5, 10, 50, 100, 500, и 1000. Таким образом, эта система записи была связана со счетом на пальцах и носила черты как десятичного счета, так и счета пятерками. Это видно и из обозначения цифр: I обозначает один палец, V – раскрытую ладонь (т.е. пять пальцев), X – две сложенные ладони (т.е. 10 пальцев). А обозначение C для 100 и M для 1000 – это первые буквы соответствующих латинских слов (centum – «сто», отсюда сантиметр – сотая часть метра, mille – «тысяча», отсюда миллиметр – тысячная часть метра и миля – тысяча двойных шагов).

Чтобы записать число, римляне разлагали его на сумму тысяч, полутысяч, сотен, полусотен, десятков, пятков и единиц. Например, XXXVII означало число 37 (три десятка, пяток и две единицы). При этом цифры записывались в порядке убывания их значений слева направо. Но иногда порядок цифр менялся и цифра с меньшим значением оказывалась записанной левее цифры с большим значением. В этом случае вместо сложения надо было вычитать из большего числа меньшее. Например, IV означало число $4 = 5 - 1$, IX означало $9 = 10 - 1$. Таким образом, запись MCMLXIX читается 1969.

Непозиционной была система счисления и у древних греков. Они обозначали числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 первыми девятью буквами греческого алфавита, например, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 5$, $\zeta = 6$ и т.д. Для обозначения чисел 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 применяли следующие девять букв ($10 = \iota$, $20 = \eta$, $30 = \lambda$, $40 = \mu$, $50 = \nu$ и т.д.), а для обозначения чисел 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 – последние девять букв ($100 = \rho$, $200 = \sigma$, $300 = \tau$ и т.д.). Например, число 243 они обозначали $\sigma\ \mu\ \alpha$.

Развитие хозяйства, ремесел, военного дела привело к необходимости считать очень большие множества. Чтобы записать число, содержащее несколько тысяч, греки отдельно записывали число тысяч с помощью тех же букв, но слева внизу писали штрих. После этого записывали число сотен, десятков и единиц. Число 10000 называлось мириадой, и обозначалось буквой М. Если надо было записать число, содержавшее несколько мириад, то число мириад писалось над буквой М.

Культура Древней Руси была тесно связана с византийской, т.е. греческой культурой. Поэтому и обозначения чисел были похожи на греческие – числа тоже обозначались буквами, над которыми писали особый знак (титло). Но была и другая система обозначения чисел. В славянском языке применялись следующие названия для обозначения высших десятичных разрядов: 10 тысяч называли *тьмой* (сравните слова «тьма народа»), 10 тем – *легионом,* 10 легионов – *леодром* (слово «тьма», «легион» применялись и для обозначения воинских соединений). Наряду с этой системой была другая, в которой легион обозначал тьму тем, леодр – легион легионов и т.д. Леодр леодров назывался *вороном*, 10 воронов – *колодой.*

Чтобы обозначить тьмы, буквы, соответствующие числам от 1 до 9, обводились сплошным кружком, для обозначения легионов эти же буквы обводились кружком из точек, а для обозначения леодров – кружком из лучей. В этих обозначениях видны зачатки позиционной системы счисления.

Разумеется, такие системы записи чисел, как римская или греческая, были гораздо удобнее, чем зарубки на бирках, так как позволяли коротко записывать большие числа. Однако выполнять действия над числами в этих системах записи было не слишком удобно. Для облегчения вычислений использовались счетные доски – абаки, на которых числа каждого разряда изображались камешками.

Сложение чисел в десятичной системе исчисления. В общем виде алгоритм сложения натуральных чисел, заданных в десятичной системе счисления, таков.

а) Запишем второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды были записаны друг под другом. В случае необходимости припишем перед меньшим из слагаемых несколько нулей, чтобы уравнять число разрядов в обоих слагаемых.

б) Сложим цифры разряда единиц (здесь и ниже мы для краткости говорим «цифра» вместо «однозначное число, изображаемое цифрой»). Если сумма меньше десяти, записываем ее в разряд единиц ответа и переходим к следующему разряду (десятков).

в) Если сумма цифр единиц больше или равна десяти, то представляем ее в виде

$n_0 + m_0 = 10 + L_0$, *где* L_0 *–однозначное число, записываем* L_0 *в разряд единиц ответа и прибавляем 1 к цифре десятков первого слагаемого, после чего переходим к разряду десятком.*

г) Далее повторяем те же операции с десятками, потом – с сотнями и т.д. Процесс заканчивается цифры старших разрядов (при этом если их сумма окажется больше или равна десяти, то приписываем впереди обоих слагаемых нули, увеличиваем нуль перед первым слагаемым на 1, и делаем сложение: 1 + 0 = 1).

Вычитание в десятичной системе исчисления. Пусть из числа 7845 надо вычесть 342. Уравняем количество цифр в уменьшаемом и вычитаемом, записав вычитаемое в виде 0342. Запишем эти числа в виде:

$$7845 = 7\cdot10^3 + 8\cdot10^2 + 5$$

$$0342 = 0\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 4\cdot10 + 2.$$

А теперь разность 7845 – 0342 можно записать в виде:

$$7843 - 0342 = (7\cdot10^3 + 8\cdot10^2 + 5) - (0\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 4\cdot10 + 2) = 7\cdot10^3 + 8\cdot10^2 + 5 - 0\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 4\cdot10 + 2.$$

Используя свойства суммы и разности, это выражение можно переписать следующим образом:

$7845 – 0342 = (7 – 0) \cdot 10^3 + (8 – 3) \cdot 10^2 + (4 – 4) \cdot 10 + (5 – 2) = 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 3 = 7503.$

Таким же образом можно найти разность $n – m$, где

$$n = n_k \cdot 10 + ...+n_0, m = m_k \cdot 10 +....+ m_0,$$

Тогда получаем, что

$$n \cdot m = (a_k \cdot 10 + b_k) \cdot 10+...+(a_0 \cdot 10 + b_0) = (a_k \cdot 10+....+ a_0 \cdot 10) + (b_k \cdot 10+.....+ b_0).$$

Выполняя после этого сложение, получим ответ.

Наконец, рассмотрим умножение многозначных чисел друг на друга. В силу свойств умножения имеем

$$n (m_l 10 +...+m_0) = (nm) \cdot 10 +.....+nm_0.$$

Последовательно умножая число n на однозначные числа m,......,m_0, а потом полученные произведения 10, ……, l, найдем слагаемые, сумма которых и равна искомому произведению nm, где

$$m = m_l \cdot 10 +.....+ m_0/$$

Описанное правило дает обоснование обычно применяемому способу умножения «столбиком».

Деление в десятичной системе счисления. Пусть надо разделить 256 на 6 с остатком. Так как $60 < 256< 600$, то неполное частное заключено между 10 и 100. Более точную оценку дает использование таблицы умножения: так $6 \cdot 40 = 240$, а $6 \cdot 50 = 300$ и $240 < 256 < 300$, то неполное частное заключено между 40 и 50. Это означает, что цифра десятков неполного частного равна 4, т.е. оно имеет вид $q = 4 \cdot 10+q_0$. Но тогда должны выполняться равенства $(40 + q_0) \cdot 6 \leq 256 < (40 + q +1) \cdot 6$, т.е. $240 +6q_0 \leq 256 < 240 + 6 (q_0 + 1)$. Из них находим, что $6q_0 \leq 16 < 6 (q_0 +1)$. Вторично применяя таблицу умножения, получаем, что $q_0 = 2$. Значит, неполное частное равно 42, а тогда остаток от деления равен $256 - 42 \cdot 6 =4$. Итак, при делении 256 на 6 получается неполное частное 42 и остаток 4: $256 = 42 \cdot 6 + 4$.

Точно так же выполняется деление многозначных чисел. Например, если надо разделить 7824 на 84, то сначала замечаем, что $840 \leq 7824 < 8400$, а потому неполное частное двузначно. Цифру десятков можно было бы найти перебором, последовательно умножая 84 на 10, 20, 30 и т.д., пока не получилось бы число, больше чем 7824. Тогда из неравенства $84 \cdot 10 \cdot q_1 \leq 7824 < 84 \cdot 10 (q_1 + 1)$ получили бы, что цифра десятков неполного частного равна q_1. Этот перебор можно сократить, если заметить, что 84 < 90, а 80·90 = 7200 < 7824. Значит, тем более 80·84 < 7824 и рассмотреть надо лишь две возможности: q_1= 8 или q_1= 9. Проверка показывает, что q_1= 9. А теперь умножаем 84 на 90, вычитаем полученное произведение 7560из 7824 и к полученной разности 264 применяем тот же процесс. Он показывает, что цифра единиц неполного частного равна 3, а потому оно равно 93. Остаток равен 264 - 84·3 = 12.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 8

Тема	**Система счисления.**
План	**Введение.** **а) Запись целых неотрицательных чисел.** **б) Запись чисел в десятичной системе счисления.** **в) О возникновении и развитии способов записи целых неотрицательных чисел.** **г) О записи чисел в Древней Руси.** **д) Сложение многозначных чисел в десятичной системе**

	счисления. **е) Вычитание многозначных чисел в десятичной системе счисления.** **ж) Умножение многозначных чисел в десятичной системе счисления.** **з) Деление многозначных чисел в десятичной системе счисления.** **и) Запись чисел в позиционных системах счисления, отличных от десятичной.** **к) Действия над числами в позиционных системах счисления отличных от десятичной.**
Цели, **Задачи**	
Содержание **учебного** **процесса**	
Технология **организации** **учебного** **процесса**	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль**

	Оценка
Ожидаемый результат	**Студент:** **Преподаватель:**
Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие непозиционные системы счисления вы знаете?

2. Запись целых неотрицательных чисел.

3. Запись чисел в десятичной системе счисления.

4. О возникновении и развитии способов записи целых неотрицательных чисел.

5. О записи чисел в Древней Руси.

6. Сложение многозначных чисел в десятичной системе

ТЕМА 9: ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Свойства отношения делимости. Для краткости вместо слов «целое неотрицательное число» будем писать «число».

Говорят, что *число а делится на число b,* если существует такое число с, что а = bc. В этом случае пишут а : b. Например, 8 : 2, так как 8 = 2 · 4. В то же время 8 не делится на 3, так как нет целого неотрицательного числа с, такого, что 8 = 3с.

Докажем некоторые свойства отношения делимости.

1) Число 0 делится на любое число, (Vb Z_0) 0 : b.

В самом деле, для любого b Z_0 имеем: 0 = b 0. Так как 0 Z_0, то по определению делимости 0 : b.

2) Ни одно отличное от нуля число не делится на 0: (Vb Z_0) а : 0.

В самом деле, пусть а = 0. Так как 0 b = 0 для всех b Z, то равенства а = 0 b не может выполняться ни для какого значения b. Значит, а не делится на 0.

3) Любое число делится на 1.

4) Отношение делимости рефлексивно, т.е. любое число делится на себя.

5) Если а:b и а > 0, то а ≥ b.

6) Отношение делимости антисимметрично.

7) Отношение делимости транзитивно, т.е. из а:b и b:с следует, что а:с.

8) Если числа а и b делятся на с, то и их сумма делится на с.

9) Ели число а делится на с, то все числа вида ах делятся на с.

10) Если число ас делится на bc, причем с= 0, то а делится на b.

Свойства наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя.

1) Если число с является общим делителем натуральных чисел а и b, то число l= ab

общее кратное чисел a и b.
2) Число $d = \frac{ab}{k}$, где $k = К(a; b)$ является наибольшим общим делителем чисел a и

b.

2`) Произведение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух натуральных чисел равно произведению этих чисел.

2``) Наименьшее общее кратное двух взаимно простых натуральных чисел равно произведению этих чисел.

3) Наибольший делитель d натуральных чисел a и b делится на любой общий делитель с этих чисел.

4) Если произведение ab натуральных чисел a и b делится на натуральное число m и a взаимно просто с m, то b делится на m.

5) Если натуральное число a делится на каждое из взаимно простых чисел b и c, то оно делится и на их произведение bc.

Из свойства 5) вытекают признаки делимости числа, являющиеся произведениями двух взаимно простых чисел. Например, для того чтобы натуральное число x делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

В самом деле, если x делится на 6, то оно делится на 2 и на 3, так как 2 и 3- делители числа 6. Обратно, пусть x делится и на 2, и на 3. Так как числа 2 и 3 взаимно просты, по утверждению 5) число x делится на их произведение, т.е. на 6.

Точно так же доказываются утверждения:

1) Для того чтобы натуральное число x делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 4.

2) Для того, чтобы натуральное число x делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5.

Например, число 975 делится на 15. В самом деле, последняя цифра его десятичной записи равна 5, и потому оно делится на 5. С другой стороны, 9 + 7 + 5 = 21 делится на 3. Значит, 975 делится и на 5, и на 3, а потому делится на 15.

Алгоритм Евклида. Отыскание наибольшего общего делителя двух натуральных чисел по их каноническому разложению требует предварительного разложения этих чисел на простые множители. Это несложно сделать, если числа невелики, но для многозначных чисел найти их канонические разложения бывает трудно.

Существует способ отыскания наибольшего общего делителя, требующий лишь выполнения операции деления с остатком. Этот способ предложил Евклид, и его называют алгоритмом Евклида. Алгоритм Евклида основан на следующих трех утверждениях:

1) Если a делится на b, то D (a, b) = b.

2) Если a = bq + r, где числа a, b и r отличны от нуля, то множество общих делителей a и b совпадает с множеством общих делителей b и r.

3) Если a = bq + r, где a, b и r – отличны от нуля, то D (a, b) = D (b, r).

Теперь мы можем уже описать алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя чисел a и b. Пусть a ≥ b. Если a делится на b без остатка, то по утверждению 1) имеем D (a, b) = b. Пусть при делении a и b получается остаток r, a = bq + r. В этом случае по утверждению 3) имеем D (a, b) = r и задача свелась к отысканию наибольшего общего делителя чисел b и r. Если b делится r, то, как мы уже знаем, D (b, r) = r, а тогда и D (a, b) = r. Если же при делении b на r получится остаток r_1, то $b = rq_1 + r_1$ и потому D (a, b) = D (b, r) = D (r, r_1).

Продолжая описанный процесс, мы будем получать все меньшие и меньшие остатки: r_1, r_2,......,r_n. В конце концов, мы дойдем до остатка, на который предыдущий остаток будет делится. Этот наименьший отличный от нуля остаток и будет наибольшим общим делителем чисел a и b.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 12

Тема	**Делимость целых неотрицательных чисел.**
План	**Введение.** **а) Свойства отношения делимости.** **б) Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.** **в) Нахождение НОД способом разложения на простые множители. Алгоритм Евклида.**
Цели, **Задачи**	

Содержание учебного процесса	
Технология организации учебного процесса	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль** **Оценка**
Ожидаемый результат	**Студент:** **Преподаватель:**
Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какими свойствами обладает отношение делимости?
2. Перечислите свойства наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя.
3. Что в математике называют алгоритмом Евклида?
4. На каких трех утверждениях основан алгоритм Евклида?

ТЕМА 10: МНОЖЕСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Аксиоматический метод в математике. Математические понятия, как правило, проходят длительный путь исторического развития. Первоначально они возникают в процессе решения тех или иных задач и, естественно, носят отпечаток своего происхождения.

Разумеется, при возникновении математических понятий из практической деятельности человека они не имеют еще строгих определений. Вместо таких определений даются расплывчатые, приблизительные пояснения, указания на те наглядные представления, отражением и идеализацией которых являются соответствующие понятия.

Следы первоначального этапа сохраняются и при переходе на более высокий уровень знакомства с математическими понятиями, когда место наглядных рассмотрений занимают рассуждения. На первых порах в рассуждениях делаются ссылки на наглядность, на чертеж (а иногда и эти ссылки пропускаются, поскольку свойства математического понятия неявно отождествляются со свойствами соответствующих образов реального мира).

Вообще, при аксиоматическом построении какой – нибудь теории поступают следующим образом. Выбирают некоторые понятия, которые не определяются, а принимаются за исходные, указывают также *неопределяемые отношения*, связанные с этими понятиями, а потом формулируют несколько высказываний, выражающих свойства этих понятий и отношений. Эти высказывания называют *аксиомами* данной теории. После введения основных понятий, отношений и аксиом все дальнейшее развитие теории должно протекать лишь на основе логических рассуждений, без какой – либо ссылки на свойства тех или иных реальных объектов.

Разумеется, при построении аксиоматической теории выбор основных понятий, отношений и аксиом не является произвольным, они должны отражать некоторые реальные объекты и их свойства. Например, если бы мы задали аксиому: *для* *любых трех точек A, B, M сумма расстояний точки M до точек A и B меньше расстояния между этими точками,* то получилась бы теория не имеющая отношения к реальному миру – в реальном мире $|MA| + |MB| \geq |AB|$.

Таким образом, аксиоматическая теория должна давать математическую модель действительности.

Модели системы аксиом. Множество с заданными в нем отношениями называется *моделью* (или интерпретацией) данной системы аксиом, если в нем выполняются все аксиомы этой системы. Рассмотрим два примера.

П р и м е р 1. Рассмотрим аксиоматическую систему с единственным отношением «$a \sim b$» (a эквивалентно b), удовлетворяющим трем аксиомам:

1) для всех a выполняется $a \sim a_2$;

2) для любых a и b из $a \sim b$ следует $b \sim a$;

3) для любых a, b, c из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует $a \sim c$.

Из этих аксиом вытекает ряд утверждений, например: если $a \sim b$ и $c \sim d$, то $a \sim c$.

Из этих утверждений мы вывели, что любое множество X, в котором задано отношение эквивалентности, распадается на попарно – непересекающиеся классы эквивалентных элементов.

Теперь мы можем применять это утверждение к любому множеству X, в котором определено отношение эквивалентности со свойствами 1) – 3). Все эти множества будут моделями системы аксиом 1) – 3).

П р и м е р 2. Рассмотрим другую аксиоматическую систему с одним отношением $a< b$ (a предшествует b) и аксиомами:

1) для любых a и b из $a< b$ следует, что ложно $b < a$,

2) для любых a, b и c из $a< b$ и $b < c$ следует $a< c$.

Эти аксиомы задают отношение строгого порядка. Интерпретациями этой системы могут быть: «человек a выше человека b» в множестве людей, «тело a тяжелее тела b» и т.д. Добавив к этой системе аксиому

3) из $a = b$ следует, что $a< b$ или $b < a$,

получим систему аксиом строгого линейного порядка.

Может случится, что две модели данной системы аксиом отличаются друг от друга лишь внешне, а по сути дела они одинаковы.

Например, множества X = {a, b, c} и У = {1, 2, 3} задают модели системы аксиом порядка, если положить, что a< b, b < c и a< c, а также, что 1< 2, 2 < 3 и 1 < 3. Достаточно переименовать a в 1, b в 2 и c в 3, чтобы первая модель превратилась во вторую.

Такие две модели называются *изоморфными моделями* данной системы аксиом. Две изоморфные модели данной системы аксиом по сути дела одинаковы.

Непротиворечивость, независимость и категоричность системы аксиом. Мы уже говорили, что систем аксиом должна возможно точнее отражать свойства реального мира. Но, кроме того, она должна удовлетворять некоторым требованиям логического характера. В первую очередь, эта система должна быть *непротиворечивой*. Непротиворечивость системы аксиом означает, что из данной системы аксиом нельзя вывести

заведомо ложное утверждение, например, что одновременно истинны высказывания А и его отрицание А.

Вторым требованием, которое часто предъявляют к аксиоматической системе, является *независимость*ю Это значит, что ни одну из аксиом нельзя вывести из остальных аксиом этой системы.

Отметим еще одно свойство, которым обладают некоторые системы аксиом. Назовем систему аксиом *категорической*, если все ее модели изоморфны друг другу. Ни система аксиом эквивалентности, ни система аксиом линейного порядка не являются категорическими – они имеют много неизоморфных моделей.

Возникновение понятия натурального числа. Как и все математические понятия, натуральные числа возникли из потребностей практики. Уже в глубокой древности надо было сравнивать между собой конечные множества, чтобы узнать, поровну ли в них элементов, например, хватит ли оружия на всех охотников, рыб на всех членов племени и т.д. Самым простым способом сравнения двух множеств, не требовавшим их пересчета, было установление взаимно – однозначного соответствия или между самими множествами, или между одним из множеств и подмножеством другого множества.

Для сравнения двух множеств стали применять множества-посредники, состоявшие из пальцев, камешков, раковин и т.д.

Одно и то же множество – посредник можно было сравнивать и с множеством скота в стаде, и с множеством убитых зверей, и с множеством дней. Поэтому названия множеств – посредников стали применять для выражения численности сравниваемых с ними множеств, т.е. как имена числительные.

Постепенно все эти названия стали заменятся общим названием данного множества – посредника. Этот процесс абстрагирования привел к возникновению общего понятия о числах «один», «два» и т.д.

Лишь потом стали располагать числа в один ряд, прибавляя каждый раз по одному элементу, например, 1, 2, 3, 4, 5…..

Так возникло понятие *ряда натуральных чисел.* Термин «натуральное число» впервые употребил римский ученый Боэций (475 – 524 г н.э.).

Размышляя над числами, ученые поняли, что натуральный ряд чисел бесконечен, что к каждому натуральному числу можно прибавить единицу и получить большее число.

Количественная теория натуральных чисел. После того как в XIX в Г.Кантором была создана теория множеств, на ее основе построили теорию натуральных чисел. В основу теории были положены понятия конечного множества и взаимно – однозначного соответствия. Два конечных множества А и В назовем *равночисленными*, если между ними можно установить взаимно – однозначное соответствие. Отношение «Множество А равночисленно множеству В» рефлексивно, симметрично и транзитивно. Следовательно, отношение равночисленности является отношением эквивалентности и определяет разбиение совокупности всех конечных множеств на классы эквивалентности.

Назовем натуральным числом общее свойство класса непустых конечных эквивалентных друг другу множеств. Так число 3 означает не три пальца, три палочки, а то общее свойство, которым обладают все эти множества – их общую количественную характеристику.

Число, определенное множеством М, обозначают |М| или n (М) и называют *мощностью* множества М.

Отношение порядка в множестве натуральных чисел и его свойства. Введем в множестве N натуральных чисел отношение порядка. При этом мы не можем ссылаться на какие – либо наглядные представления о конечных множествах, их расположениях и отображениях, а должны опираться лишь на понятие суммы элементов и аксиомы 1) – 4). Разумеется, рассмотрения, связанные с конечными множествами, помогут в выборе определения, что значат слова «натуральное число a меньше натурального числа b».

Мы знаем, что при объединении конечного множества А с непустым конечным множеством С, таким, что $A \cap C = \varnothing$, получается множество $B = A \cup C$, содержащее больше элементов, чем А.

Умножение натуральных чисел. Определим теперь в множестве N натуральных чисел новую бинарную алгебраическую операцию – умножение. Умножением натуральных чисел называется бинарная алгебраическая операция в N, ставящая в соответствие паре (a, b), a N, b N, число ab из N, которое называется произведением чисел a и b, причем:

1) для любого натурального числа a выполняется равенство $a \cdot 1 = a$.
2) Для любых натуральных чисел a и b выполняется равенство $a\,(b + 1) = ab + a$.

Вычитание натуральных чисел. Так как сложение натуральных чисел коммутативно и сократимо, то для него существует однозначно определенная обратная частичная операция, позволяющая по сумме и одному из слагаемых находить второе слагаемое.

Иными словами, вычитание натуральных чисел определяется следующим образом. Пусть даны натуральные числа a и b. Разностью этих чисел (если он существует) называется такое натуральное число c, что $a = b + c$. Это число обозначают $a – b$. Число a называют уменьшаемым, а число b – вычитаемым.

Деление натуральных чисел. Деление с остатком. Так как умножение натуральных чисел коммутативно и сократимо, то для него существует частичная операция, позволяющая по произведению двух чисел и одному из множителей однозначно определить второй множитель. Эту операцию называют делением натуральных чисел.

Иными словами, деление натуральных чисел определяется следующим образом. Пусть даны два натуральных числа a и b. Частным чисел a и b (если оно существует) называют такое натуральное число c, что $a = bc$. Это число c обозначают $a : b$. Число a называют делимым, а число b – делителем. Таким образом, частное чисел a и b существует в том и только в том случае, когда a кратно b, т.е. когда существует такое число c, что $a = bc$. В этом случае говорят также, что a делится на b.

Если a делится на b, то частное чисел a и b однозначно определено.

Если натуральное число a делится на натуральное число b, то $b \leq a$.

Если $b \leq a$ и a не делится на b, то существуют натуральные числа q и r такие, что $a = bq + r$, причем $r < b$. Пара чисел (q, r) однозначно определяется парой $(a; b)$.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 10

Тема	**Множество натуральных чисел.**
План	**Введение.** **а) Системы аксиом и их свойства.** **б) Аксиоматика множества натуральных чисел.** **в) Арифметика натуральных чисел.**
Цели, Задачи	
Содержание учебного процесса	
Технология организации учебного процесса	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль**

	Оценка
Ожидаемый Результат	**Студент:** **Преподаватель:**
Перспектива (анализ, Корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют моделью данной системы аксиом?
2. Каким требованиям логического характера должна удовлетворять система аксиом?
3. Как возникло понятие «ряда натуральных чисел»?
4. Кто впервые употребил термин «натуральное число»?
5. В каком случае два конечных множества можно назвать равночисленными?
6. Каким образом обозначают мощность множества М?
7. Дайте определение понятиям «уменьшаемое» и «вычитаемое».

ТЕМА 11: МНОЖЕСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Положительные рациональные числа. Поскольку длина отрезка должна выражаться одним числом, эквивалентные дроби являются различными представлениями одного и того же числа. Числа, которые можно представить в виде дробей, называются положительными рациональными числами. Можно сказать, что положительным рациональным числом называется множество эквивалентных дробей.

Т е о р е м а. Для любого положительного рационального числа a (т.е. для любого множества эквивалентных дробей) найдется одна и только одна представляющая его дробь, числитель и знаменатель которой взаимно просты.

Если t - натуральное число a te, то для любого натурального числа n имеем na (nt)e. Это показывает, что длину отрезка a можно выразить не только натуральным числом t, но и дробями вида __n__. Иными словами, натуральное число t

n

совпадает с положительным рациональным числом вида:

Сложение положительных рациональных чисел. В этом пункте мы определим операцию сложения в множестве Q+ положительных рациональных чисел. Сначала докажем следующее утверждение.

Любые два числа a и b из Q+ можно представить в виде дробей, имеющих одинаковые знаменатели.

Чтобы сложить положительные рациональные числа a и b, надо представить их дробями , имеющими одинаковые знаменатели.

Свойства сложения. Вычитание. Из определения сложения в Q+ легко следует, что операция сложения обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и сократимости: для любых чисел a, b, c из Q+ имеем a + b = b + a и a + (b + c) = (a + b) + c, а из a + c = b + c следует, что a = b. Кроме того, легко проверить, что для любых чисел a и b из Q + имеем a + b = a.

Отношение порядка в множестве Q+ обладает двумя свойствами, отличными от свойств такого же отношения в множестве N натуральных чисел. Напомним, что среди натуральных чисел дискретно – для каждого натурального числа есть непосредственно следующее за ним число. Иначе обстоит дело в множестве Q+:

а) в множестве Q+ нет наименьшего числа;

б) между любыми двумя различными числами a и b из Q+ заключено бесконечно много чисел того же множества.

Умножение и деление положительных рациональных чисел. Пусть отрезок a соизмерим с единичным отрезком $\mathbf{e}_1$, а отрезок $\mathbf{e}_1$- с отрезком $\mathbf{e}_2$, причем $a = \frac{p}{N}\mathbf{e}_1$,

$\mathbf{e}_1 = \frac{t}{q}\mathbf{e}_2$, т. е. $na = p\,\mathbf{e}_1$, $q\,\mathbf{e}_1 = t\,\mathbf{e}_1$. Тогда $(nq)a = (pq)\,\mathbf{e}_1$, $(pq)\,\mathbf{e}_1 = (pt)\,\mathbf{e}_2$, и потому$(nq)a$ q

$= (pt)\,\mathbf{e}_2$. Это показывает, что длина отрезка a при единичном отрезке $\mathbf{e}_2$ выражается дробью $\frac{pt}{nq}$, т.е. что число $m_2(a) = \frac{p}{n}$, $m_2(\mathbf{e}_1) = \frac{t}{q}$

Поэтому если потребовать выполнения свойства мультипликативности $m_1(a)m_2(\mathbf{e}_1)$, то должно выполнятся равенство $\frac{pt}{nq} = \frac{p}{n}\,\frac{t}{q}$.

Таким образом, правило *умножения* положительных рациональных чисел естественно сформулировать следующим образом:

Произведение числа a, выражаемого дробью $\frac{p}{n}$, *на число b, выражаемое дробью*

$\frac{n}{q}$ $\frac{t}{}$, выража ется дробью $\frac{pt}{nq}$.

Преобразование обыкновенных дробей в десятичные. Дробь $\frac{8}{25}$

эквивалентна дроби $\frac{32}{100}$, и потому ее можно записать в виде о, 32. Выясним, при

каком условии дробь $\frac{m}{n}$ эквивалентна десятичной дроби.

Для того чтобы несократимая дробь $\frac{m}{n}$ была эквивалентна десятичной дроби,

необходимо и достаточно, чтобы в разложение ее знаменателя n на простые множители входили лишь простые числа 2 и 5.

Бесконечные периодические десятичные дроби. Дробь 1 невозможно

3

превратить в конечную десятичную дробь. Но, деля 1 на 3, получаем, что 0, 3 < 1<

3

0,4. Далее находим, что 0,33 < 1 <0,34, 0,333 < 1 < 0,334 и т.д.

3 3

Вообще для любого n имеем:

0,33…..3 < 1 < 0,33…..4.

3

Вместо того, чтобы писать бесконечное множество неравенств, говорят, что дроби 1

3

соответствует бесконечная дробь 0,3333….3. Это означает, что если отбросить в бесконечной дроби все цифры, начиная с некоторой, то получится число, меньшее 1

3,

а если в полученном числе увеличить последнюю цифру на 1, то получится число, большее 1 .

3

Каждое положительное рациональное число можно представить в виде *бесконечной десятичной дроби.* Получающиеся при этом десятичные дроби оказываются *периодическими.* Это значит, что, начиная с некоторого места, они получаются бесконечным повторением одной и той же группы цифр. Например,

число 3 выражается бесконечной десятичной дробью 0,272727…27…, а 11

число 8 – бесконечной десятичной дробью 0,1454545…45….. Для краткости первую 55

из этих дробей пишут в виде 0, (27), а вторую – в виде 0,1(45). В скобки заключают повторяющуюся группу цифр, которую называют периодом этой дроби.

Причина появления периода состоит в следующем. Пусть надо обратить в бесконечную десятичную дробь число а, представляемое несократимой дробью $\frac{m}{n}$

N Для этого надо выполнить деление натурального числа m на натуральное число n. При этом будут получаться остатки, меньшие n, т.е. числа вида 0,1,….., n – 1. Если хотя бы один из остатков окажется равным нулю, то после деления получится конечная десятичная дробь. Если же все остатки отличны от нуля, то деление никогда не закончится, но поскольку количество различных остатков конечно, то, начиная с некоторого шага, какой-то остаток повторится, а тогда в частном начнут повторяться цифры.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 11

Тема	**Множество положительных рациональных чисел.**
План	**Введение.** **а) Понятие дроби. Понятие положительного числа Q+.** **б) Сложение и вычитание в Q+. Умножение и деление в Q+. Упорядоченность Q+ множества положительных рациональных чисел.** **в) Запись положительных рациональных чисел в виде десятичных дробей. Бесконечные десятичные периодические дроби. Понятие положительного иррационального числа.** **г) Действия над положительными числами. Отрицательные числа.**
Цели, Задачи	
Содержание учебного процесса	
Технология организации учебного процесса	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль** **Оценка**
Ожидаемый результат	**Студент:** **Преподаватель:**
Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

ТЕМА 12: УРАВНЕНИЕ И НЕРАВЕНСТВА

Уравнения с одной переменной. Дадим поэтому более точное определение уравнения и его корней. Пусть заданы два выражения $f_1(x)$ и $f_2(x)$, содержащие переменную x, которая пробегает некоторое множества X. Назовем *уравнением* одноместный предикат $f_1(x) = f_2(x)$, x X. Решить уравнение – значит найти значения переменной x, при подстановке которых в уравнение получается истинное равенство, т.е. найти множество истинности T данного предиката. В дальнейшем мы будем называть множество истинности предиката $f_1(x) = f_2(x)$, x X, множеством решений уравнения, а числа, входящие в это множество, - корнями уравнения.

Например, уравнение (x – 1)(x -3) = 0 имеет два корня, 1 и 3. Значит, множество решений этого уравнения имеет вид T = {1; 3}.

Может случиться, что $f_1(x)$ или $f_2(x)$ не имеет значения при некотором a из множества X. Тогда равенство $f_1(x) = f_2(x)$ считается ложным, и потому a не может быть одним из корней уравнения $f_1(x) = f_2(x)$. Например, ни 4, ни 6 не могут быть корнями уравнения $x + \frac{1}{x-4} = 7 + \frac{1}{x-6}$ при x = 4 не имеет значения дробь $\frac{1}{x-4}$

а при x = 6 $\frac{1}{x-6}$. Отсюда ясно, что, прежде чем решать уравнение $f_1(x) = f_2(x)$,

полезно найти множество A, на котором и $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют определенные значения. Это множество называют *областью допустимых значений* переменной x или *областью определения уравнения.* Для уравнения $x + \frac{1}{x-4} = 7\ \frac{1}{x-6}$

такой областью является все множество действительных чисел, из которого исключены точки 4 и 6. Это множество можно задать следующим образом:

$$A =]-\infty; 4[\ \cup\ ]4; 6]\ 6; +\infty[.$$

Два уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ и $F_1(x) = F_2(x)$ называются равносильными, если их множества решений равны, т.е. если каждое решение первого уравнения является решением второго уравнения и, обратно, всякое решение второго уравнения удовлетворяет и первому уравнению. При этом мы считаем, что оба уравнения имеют одну и ту же область определения X Иными словами, уравнения равносильны, если эквивалентны предикаты $f_1(x) = f_2(x)$ и $F_1(x) = F_2(x)$.

Если множество решений уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ является подмножеством множества решений уравнения $F_1(x) = F_2(x)$, $F_1(x) = F_2(x)$ называют следствием уравнения $f_1(x) = f_2(x)$. Иными словами, $F_1(x) = F_2(x)$ – следствие уравнения $f_1(x) = f_2(x)$, если каждый корень уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ удовлетворяет уравнению $F_1(x) = F_2(x)$.

Например, уравнение $(x + 1)^2 = 16$ является следствием уравнения $x + 1 = 4$. В самом, уравнение $x + 1 = 4$ имеет только один корень $x = 3$. Подставляя этот корень в уравнение $(x + 1)^2 = 16$, получаем истинное равенство $(3 + 1)^2 = 16$, показывающее, что 3 удовлетворяет и уравнению $(x + 1)^2 = 16$.

Два уравнения равносильны в том и только в том случае, когда каждое из них является следствием другого.

Теоремы о равносильности уравнений. Т е о р е м а 1. Если к обеим частям уравнения $f_1(x) = f_2(x)$, $x \quad X$, прибавить выражение $F(x)$, имеющее значение при всех x из X, то получится новое уравнение

$$f_1(x) + F(x) = f_2(x) + F(x),\ x \quad X,$$

являющееся следствием данного.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, пусть a – корень уравнения (1), т.е. пусть $f_1(a) = f_2(a)$. Прибавив к обеим частям этого равенства одно и то же число $F(a)$, получим истинное равенство $f_1(a) + F(a) = f_2(a) + F(a)$. Оно показывает, что a является и корнем уравнения (2). Значит, каждый корень уравнения (1) является корнем и уравнения (2), т.е. уравнение (2) – следствие уравнения (1).

Например, уравнение $76 – 62 = 2x$ является следствием уравнения $76 -2x = 62$, оно получается из него прибавлением к обеим частям одного и того же выражения $2x – 62$.

Уравнение $f_1(x) = f_2(x)$, в свою очередь, получается из уравнения $f_1(x) + F(x) = f_2(x) + F(x)$ прибавлением к обеим частям одного и того же выражения $– F(x)$. Поэтому не только уравнение (2) – следствие уравнения (1), но и (1) – следствие уравнения (2), и, значит, эти уравнения равносильны.

Неравенства с одной переменной. Неравенства, содержащие переменную x, например $f_1(x) < f_2(x)$, $x \quad X$; $f_1(x) > f_2(x)$, $x \quad X$ и т.д., также являются одноместными предикатами. Решить такое неравенство означает найти множество

T чисел, при подстановке которых вместо x получаются истинные неравенства. Это множество чисел называют *множеством решений неравенства.*

Может случится, что каждое решение одного неравенства удовлетворяет другому неравенству. Тогда второе неравенство называют *следствием* первого. Возьмем, например, неравенства $x > 4$ и $x > 2$. Ясно, что если какое – нибудь число больше четырех, то оно больше двух. Поэтому неравенство $x > 2$ – следствие неравенства

$x > 4$. Множество Q решений следствия данного неравенства включает в себя множество T решений заданного неравенства.

Если два неравенства имеют одно и то же множество решений, их называют равносильными. В этом случае оба неравенства являются следствиями друг друга. Например, сказать, что какое – нибудь число a больше 5, равносильно утверждению, что число a +1 больше 6. Поэтому неравенства $x > 5$ и $x + 1 > 6$ равносильны.

Поскольку неравенства, содержащие x, являются предикатами, можно говорить об их конъюнкции и дизъюнкции. Например, число a удовлетворяет конъюнкции неравенств

$$(3x - 8 > 1) \land (2x + 5 < 15),$$

если оно удовлетворяет и неравенству $3x - 8 > 1$, и неравенству $2x + 5 < 15$. Таким числом является, например,4.

Дизъюнкция двух или большего числа неравенств истинна при некотором значении a, если при этом значении истинно хоть одно из этих неравенств. Например, число – 2 принадлежит множеству решений дизъюнкции неравенств

$$(2x > 8) \lor (3x < -3).$$

В самом деле, если подставить это число в первое из неравенств, получится ложное неравенство $2 \cdot (-2) > 8$. Но при подстановке того же числа во второе неравенство получаем истинное неравенство $3 \cdot (-2) < -3$. Значит, число -2 принадлежит множеству решений дизъюнкции (5). А число 0 не принадлежит этому множеству, так как при подстановке этого числа в оба неравенства, входящие в (5), получаем ложные неравенства $2 \cdot 0 > 8$ и $3 \cdot 0 < -3$.

Как правило, множества решений неравенств бесконечны; для наглядности эти множества изображают на координатной оси.

Уравнения с двумя переменными. Уравнение, содержащее две перемененные x и y, является двухместным предикатом. Пара чисел (a; b) называется решением этого уравнения, если при замене x на a и y на b получаем истинное равенство.

Каждому уравнению с двумя переменными соответствует множество решений, т.е. множество состоящее из всех пар чисел (a; b), при подстановке которых в уравнение получается истинное равенство. При этом, конечно, если заранее указаны множества X и У, которые могут принимать неизвестные x и y, то надо брать лишь такие пары (a; b), для которых a X и b У.

Пару чисел (a; b) можно изобразить на плоскости точкой M, имеющей координаты a и b, M = M (a; b). Рассматривая изображения всех точек множества решений уравнения с двумя неизвестными, получим некоторое подмножество плоскости. Его называют *графиком уравнения***.**

Обычно уравнение с двумя переменными имеет бесконечное множество решений, а потому его график содержит бесконечно много точек. Построить их, отмечая одну за другой, невозможно – даже за миллион лет мы отметим лишь конечное число точек. Поэтому прибегают к геометрическому способу описания.

Т е о р е м а 1. Если выражение f (x, y) определено для всех значений x и y, то уравнения F (x, y) = Ф (x, y) и F (x, y) + f (x, y) = Ф (x, y) + f (x, y) равносильны.

Т е о р е м а 2. Если выражение f (x, y) определено для всех значений x и y и ни при каких значениях x и y не обращается в нуль, то уравнения F (x, y) = Ф (x, y) и F(x, y) · f (x, y) = Ф (x, y) · f (x, y) равносильны.

Уравнение окружности. Графиком уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R$ (1) является окружность с центром A (a, b) и радиусом R.

В самом деле, если точка M (x; y) лежит на этой окружности, то | AM | = R. Но

| AM | = $(x - a)^2 + (y - b)^2$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R$. Значит, все точки окружности принадлежат графику уравнения (1). Обратно, точка M (x, y) принадлежит графику уравнения (1). Так как $(x - a)^2 + (y - b)^2$ - расстояние от M(x, y) до A (a, b), то расстояние |MA| равно R, и потому точка M (x; y) лежит на окружности.

Очевидно, что уравнение (1) равносильно уравнению

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R$$

В этом виде обычно и записывают уравнение окружности.

Графики неравенств. Если каждой паре чисел (x; y) из множества решений неравенства поставить в соответствие точку M (x; y), получим множество точек на плоскости, задаваемое этим неравенством. Его называют *графиком данного неравенства.* График неравенства обычно является областью на плоскости.

Чтобы изобразить множество решений неравенства F(x, y) > 0, поступают, как правило, следующим образом. Сначала заменяют знак неравенства знаком равенства и находят линию, имеющую уравнение F (x, y) > 0. Если оно выполняется в этой точке, то оно будет выполнятся и во всей части, где лежит эта точка. Объединяя такие части, получаем множество решений заданного неравенства.

П р и м е р. Построим график неравенства y > x.

Мы уже знаем, что уравнение y = x изображает прямую линию, проходящую через начало координат и наклоненную к оси абсцисс под углом 45°. Эта прямая делит всю плоскость на две полуплоскости. Возьмем в верхней полуплоскости точку M (0; 3). Подставляя ее координаты в наше неравенство, получим истинное неравенство

3 > 0. Значит, эта точка, а тем самым и вся верхняя полуплоскость, принадлежит графику неравенства. Точно также проверяем, что точки нижней полуплоскости на принадлежат этому графику. Наконец, точки самой прямой y = x не принадлежат графику, так как на этой прямой y = x, а не y > x. Итак, графиком неравенства y > x является множество точек плоскости, лежащих выше прямой y = x.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом. Рассмотрим прямую, проходящую через начало координат. Выберем на этой прямой точку A (x_1; y_1), отличную от точки O и лежащую в первой четверти. Покажем, что частное $\frac{Y1}{X1}$ не зависит от выбора точки A прямой.

В самом деле, возьмем другую точку B (x_2; y_2) той же прямой. Треугольники OAA\`и OBB\` подобны (по теореме об угле, пересеченном параллельными прямыми). Поэтому $\frac{AA}{OA} = \frac{BB}{OB}$ |AA\`| = $y_1$, |OA\`| = x_1, |BB\`| = $y_2$, |OB\`| = x_2, отсюда

$\frac{y1}{x1} = \frac{y2}{x2}$. Эта пропорция и показывает, что значение отношение y не зависит

от выбора точки М (x, y) на прямой линии, $\frac{y = k}{x}$. Тот же результат получится, если

взять точку в третьей четверти – в этом случае обе координаты x и y отрицательны, но их отношение равно тому же числу k. Число k характеризует наклон прямой к положительному направлению оси абсцисс, и его называют *угловым коэффициентом* этой прямой. Оно равно тангенсу угла между осью абсцисс и прямой ОА, k = tg α.

Итак, для любой точки М (x, y), лежащей на прямой, за исключением точки

О (0; 0), выполняется равенство $\frac{y}{x}$ = k. Умножив лбе части этого равенства на x,

получим: y = kx. Это соотношение справедливо и для точки О (0;0), так как 0 = k 0.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 12

Тема	**Уравнение и неравенства.**
План	**Введение.** **а) Уравнение с одной переменной. Теоремы о равносильности уравнений.** **б) Неравенства с одной переменной. Графики неравенств.**

	в) Уравнения с двумя переменными. Уравнение окружности. **г) Линейные уравнения.**
Цели, **Задачи**	
Содержание **учебного** **процесса**	
Технология **организации** **учебного** **процесса**	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль** **Оценка**
Ожидаемый **результат**	**Студент:**

	Преподаватель:
Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

ТЕМА 13: АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Координаты на прямой. В этом пункте мы покажем, как задать положение точек прямой с помощью чисел. Возьмем прямую l и на ней точки O и E. Назовем точку O *началом координат* , а E – *единичной точкой*. Примем длину отрезка OE за *единицу измерения длин,* а направление l от точки O к точке E – за *положительное направление.* Поставим каждой точке M прямой l в соответствие ее *координату*, т.е. такое число x, что:

а) модуль числа x равен расстоянию от O до M: | x | = | OM |;

б) если M = O, то число x положительно, когда точка M лежит на луче OE, и отрицательно, когда M лежит на противоположном луче.

Условие б) можно сформулировать по-другому, сказав, что координата x точки M положительна, если направление от точки O к точке M положительно, и отрицательна, если это направление отрицательно. Из данного выше определения следует, что координата точки O равна нулю (расстояние | OO | равно нулю), а координата точки E равна единице.

Прямую с заданной на ней системой координат назовем *координатной прямой* . Если точка M имеет координату x, то будем писать M (x). Каждой точке M координатной прямой соответствует определенное число x – координата этой точки, а каждому числу x – одна точка M, имеющая это число своей координатой. Таким образом, *соответствие* x → M *между множеством действительных чисел и множеством точек прямой взаимно – однозначно.*

Построенное соответствие между точками прямой и числами позволяет геометрически изображать соотношения между числами и, наоборот, сводить решение геометрических вопросов на прямой к операциям над числами. В первую очередь выясним, как изображаются на прямой некоторые числовые множества, т.е. множества, состоящие из действительных чисел.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \le x$, называется *числовым лучом* и обозначается $[a; +\infty[$. На координатной прямой это множество изображается лучом AX, идущим в положительном направлении от точки A (a), причем сама точка A принадлежит лучу. Числовой луч $]-\infty; a]$ состоит из чисел, удовлетворяющих неравенству $x \le a$. Он изображается лучом, идущим от точки A в отрицательном направлении.

Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x$, называется *открытым числовым лучом* и обозначается $]a; +\infty[$. Оно изображается *открытым лучом* на координатной прямой, т.е. лучом AM с отброшенной точкой A. Чтобы отличать на рисунках луч от открытого луча, мы будем обозначать начало луча черной точкой, а начало открытого луча – кружком.

Числовым отрезком называют множество чисел, которые удовлетворяют двойному неравенству $a \le x \le b$. Его обозначают $[a; b]$. На координатной прямой числовой отрезок изображается *отрезком* с концами A (a) и B (b). Неравенство

$a < x < b$ задает *числовой промежуток*, обозначаемый $]a; b[$. Он изображается *открытым отрезком* AB, т.е. отрезком AB с отброшенными концами A и B.

Преобразование координат на прямой линии. Преобразования системы координат на прямой.

а) **Перенос начала координат.** При этом преобразовании начало координат O переносится в другую точку O′, а длина единичного отрезка и направление на прямой остаются неизменными (т.е. рассматривается новая система координат (O′E′), где $|OE| = |O'E'|$, а направления от O к E и от O′ к E′ совпадают.

Обозначим через a координату точки O′ в старой системе. Пусть точка M имела координату x. Найдем ее новую координату x′. Если точка M лежит справа от O, а точка O′ расположена между O и M, то $|OM| = x$, $|OO'| = a$, $|O'M| = x - a$. Можно доказать, что равенство $x' = x - a$ выполняется при любом расположении точек O, O′ и M.

б) **Изменение направления оси.** Оставим теперь точку O неподвижной, а точку E заменим точкой E′, симметричной E относительно O. При этом преобразовании единица измерения длин отрезков не меняется, но положительное направление становится отрицательным, и наоборот. Поэтому координаты всех точек меняют знак. Например, новая координата точки A (4) равна -4, а точки B (-5) равна 5. Только координата точки 0 остается неизменной. Итак, в этом случае новая координата x′ зависит от старой следующим образом :

$$x' = -x.$$

в) **Изменение масштаба.** При этом преобразовании точка O остается неподвижной, а точка E заменяется точкой E′, находящейся по ту же сторону от O, что и точка E. Пусть координата точки E′ равна $a > 0$. Возьмем точку M, старая координата которой равна x, а новая равна x′. Предположим для простоты, что эта точка лежит справа от начала координат. Тогда число x показывает, во сколько раз отрезок OM длиннее отрезка OE, a – во сколько раз [OE′] длиннее [OE], x′ - во сколько раз [OM] длиннее [OE′]. Иными словами, если выбрать за единицу измерения длин отрезок OE, то |OM| = x, |OE′| = a и $x' = \frac{|OM|}{|OE'|} = \frac{x}{a}$. Итак $x' = \frac{x}{a}$. Так же доказывается,

что $x' = \frac{x}{a}$, если точка M лежит слева от O. Значит, *если длина единичного отрезка увеличивается в a раз, координаты всех точек прямой уменьшаются в a раз.*

Например, если длина единичного отрезка удвоится, то новая координата точки A (8) станет 4, а новая координата точки B (-5) станет равна - $\frac{5}{2}$. Если же длина единичного отрезка уменьшится в 3 раза, то новая координата точки C (7) станет равна 7 : $\frac{1}{3}$ = 21

Некоторые задачи аналитической геометрии на прямой линии. Покажем теперь, как с помощью координат решаются геометрические задачи.

Решим неравенство $| x – 4 | \le 7$

Геометрический смысл этого неравенства таков: найти координаты таких точек B, что расстояние от B до A (4) не больше чем 7. Геометрически ясно, что все такие точки лежат между точками с координатами 4 – 7 = -3 и 4 + 7 = 11. Значит, $-3 \le x \le 11$.

З а д а ч а. *Говорят, что точка C отрезка AB делит его в отношении m:n, если |AC| : |CB| = m : n. Найдем координату x точки C отрезка с концами A (x_1) и B (x_2), которая делит его в отношении m : n.* Для простоты будем считать, что $x_1 < x_2$ (формула, которую мы выведем, верна и при $x_1 > x_2$). Так как точка C (x) лежит между точками A (x_1) и B (x_2), то $x_1 < x < x_2$. Поэтому $x - x_1 > 0$, и поэтому $|CB| = x_2 – x$. Поэтому условия $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$. Из этого уравнения находим n (x - x_1)= m (x_2 – x), и потому x = $\frac{nx1 + mx2}{m + n.}$

Итак, *координата точки С, делящей отрезок АВ в отношении m:n, выражается формулой*

$$x = \frac{nx1 + mx2}{m + n.,}$$

где x_1 – координата точки А, а x_2 – координата точки В.

В частности, середина отрезка делит его в отношении 1 : 1. Значит, *координата середины отрезка выражается формулой*

$$x_{\text{сер}} = \frac{x1 + x2}{2}$$

Координаты на плоскости.

Декартова прямоугольная система координат на плоскости. Чтобы поставить в соответствие каждой точке прямой ее координату, мы задали на прямой систему координат, т.е. пару точек (О; Е). Положение точки на плоскости задается двумя числами – абсциссой и ординатой. Чтобы определить эти числа, построим сначала систему координат на плоскости. Для этого выберем на плоскости упорядоченную тройку точек (О; Е; E_1), такую, что прямые ОЕ и OE_1 перпендикулярны, а длины отрезков ОЕ и OE_1 равны единице: | ОЕ | = | OE_1 | = 1. Тогда каждая из прямых ОЕ и OE_1 станет координатной прямой с началом отсчета О. Первую из них называют *осью абсцисс* и обозначают Ох, а вторую – *осью ординат* и обозначают Оу. Совокупность обеих осей называют *декартовой прямоугольной системой координат хОу.* Чаще всего ось абсцисс располагают на рисунке горизонтально и выбирают положительное направление на ней слева направо, а ось ординат – вертикально и выбирают положительное направление на ней снизу вверх. Плоскость, на которой задана прямоугольная декартова система координат, называют *координатной плоскостью*. Оси координат делят координатную плоскость на 4 части, называемые *четвертями.*

Назовем абсциссой точки М координату точки А (на координатной прямой Ох), а ординатой этой точки – координату точки В 9на координатной прямой Оу). Числа х и у называют *декартовыми прямоугольными координатами* точки М. Если точка М имеет координаты х и у, то пишут М (х; у).

Знаки координат видны из следующей таблицы:

Четверть	Абсцисса	Ордината
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

Ординаты всех точек оси абсцисс равны нулю, так же и абсциссы всех точек оси ординат. У начала координат O обе координаты равны нулю.

Преобразования координат на плоскости. На одной и той же плоскости можно по-разному выбирать системы прямоугольных декартовых координат.

а) Перенос начала координат. Возьмем систему координат xOy и выберем на координатной плоскости точку O' (a; b). Через эту точку проведем прямые, параллельные осям координат, и выберем на них направления, совпадающие с направлениями осей абсцисс и ординат системы xOy. Если выбрать тот же единичный отрезок, что и для системы xOy, то получим вторую систему координат $x'O'y'$. Говорят, что она получена из системы xOy *переносом начала координат* в точку O'.

Возьмем на координатной плоскости какую-нибудь точку M. Пусть ее координаты в исходной системе координат равны x и y, а вновой системе координат они равны x'и y' через x и y. Для этого опустим из точек O' и M перпендикулярны на оси абсцисс и ординат. На оси абсцисс получаем точки O_1 и M_1, имеющие абсциссы a и x. По формуле переноса начала координат на координатной прямой получаем: $x' = x - a$. Точно так же доказывается, что $y' = y - b$. Итак, *формулы, выражающие x' и y' через x и y, имеют вид:*

$$x' = x - a$$

$$y' = y - b$$

где a и b – координаты нового начала координат.

б) Изменение направления осей. Пусть начало координат остается неподвижным, а направления осей изменяются на противоположные. Ясно, что при этом обе координаты меняют свой знак, т.е.

$$x' = -x$$

$$y' = -y$$

в) Изменение масштаба. Наконец, посмотрим, как преобразуются координаты, если, оставляя неизменными положение начала координат и направления осей, изменить в k раз длину единичного отрезка. Так же как и в случае системы координат на прямой, выводим, что в этом случае

$$x' = \frac{x}{k}$$

$$y' = \frac{y}{k}$$

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 13

Тема	**Аналитическая геометрия.**
План	**Введение.** **а) Координаты на прямой.** **б) Координаты на плоскости.**
Цели, Задачи	
Содержание учебного процесса	

Технология организации учебного процесса	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль** **Оценка**
Ожидаемый Результат	**Студент:** **Преподаватель:**
Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

ТЕМА 14: ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Скалярные и векторные величины. При изучении различных разделов физики, механики и технических дисциплин встречаются величины, которые в выбранной системе единиц вполне характеризуются заданием их численных значений. Такие величины называются *скалярными (числовыми)*. Так, например, длина, площадь, объем, масса, температура являются скалярными величинами. Существуют, однако, и такие величины, для определения которых задания лишь численных значений недостаточно. Необходимо знать также их направление в пространстве. Такие величины называются *векторными*. Например, сила, скорость, ускорение, напряженность магнитного поля являются векторными величинами.

Векторная величина геометрически изображается с помощью направленного отрезка.

О п р е д е л е н и е 1. *Геометрическим* вектором или просто вектором называется направленный отрезок прямой, т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а другая – за конец.

О п р е д е л е н и е 2. *Длиной или модулем* вектора AB называется длина отрезка AB и обозначается |AB|. Если вектор AB обозначается через a, то его модуль обозначается |a|.

О п р е д е л е н и е 3. Вектор, начало и конец некоторого совпадают, называется *нулевым вектором.* Нулевой вектор обозначается **0**. Модуль нулевого вектора равен нулю: |**0**| = 0.

О п р е д е л е н и е 4. *Направлением* вектора AB называется направление, определяемое полупрямой AB. Нулевой вектор направления не имеет.

О п р е д е л е н и е 5. Векторы AB и CD называются одинаково (противоположно) направленными, если одинаково (противоположно) направлены лучи AB и CD.

О п р е д е л е н и е 6. Два нулевых вектора называются *коллинеарными* , если они одинаково или противоположно направлены. Нулевой вектор считается коллинеарными любому вектору.

Говорим, что нулевой вектор AB параллелен плоскости, если прямая AB параллельна этой плоскости.

О п р е д е л е н и е 7. Ненулевые векторы называются *компланарными,* если они параллельны одной и той же плоскости.

О п р е д е л е н и е 8. Углом между двумя ненулевыми векторами a и b называется угол между направлениями этих векторов. Это угол обозначается (a, b).

О п р е д е л е н и е 9. Два вектора называют *равными,* если они одинаково направлены и имеют одну и ту же длину. Если два вектора a и b равны, то пишут

a = b.

Линейные операции над векторами. Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число.

1. **Сложение векторов.** Пусть даны векторы a и b. Из произвольной точки O построим вектор OA = a, а затем из точки A построим вектор AB = b. Вектор c = OB, соединяющий начало вектора a с концом вектора b, называется *суммой векторов* a и b и обозначается a + b. Таким образом, c = a + b, или OB = OA + AB. Это равенство называется *правилом треугольника сложения векторов.*

Сложение векторов обладает следующими свойствами:

1) Свойство коммутативности: **a + b = b + a.**

2) Свойство ассоциативности: **(a + b) + c = a + (b + c).**

3) Свойство существования вектора, нейтрального относительно операции сложения: **a + o = a.**

Для нахождения суммы трех и большего числа векторов применяют *правило многоугольника: суммой нескольких векторов* называется вектор, по величине и направлению равный направленному отрезку, замыкающему пространственную ломаную линию, построенную на данных векторах, т.е. начало вектор -суммы совпадает с началом первого вектора, а его конец – с концом последнего.

2. Вычитание векторов. Для любого вектора AB *противоположным* ему называется вектор BA. Вектор, противоположный вектору a, обозначается – **a**. Из определения следует, что противоположные векторы имеют одинаковую длину и противоположные направления.

Пусть **a** = AB, тогда **–a** = BA. Так как AB + BA = AA = o, то **a + (-a) = o.**

Вектор **c = a + (-b)** называется *разностью векторов a и b и обозначается* ***c = a-b.*** Итак, по определению

a – b = a + (-b).

Отсюда следует: *чтобы вычесть из вектора* ***a*** *вектор* **b**, *нужно к вектору* ***a*** *прибавить вектор –* **b**, *противоположный вектору* ***b*****.** Если на векторах **а** и **b**, приведенных к общему началу, построить параллелограмм и провести диагонали, то одна из его диагоналей равна их сумме **а + b**, а другая – их разности **а – b**. Такой способ нахождения суммы векторов называется *правилом параллелограмма.*

2. Умножение вектора на число. О п р е д е л е н и е. *Произведением вектора* ***a*** *на число* λ называется вектор, длина которого равна | λ | | **а** |, а направление совпадает с направлением вектора **а**, если λ > 0, и противоположно направлению вектора **а**, если λ < 0. Произведение вектора **а** на число λ обозначается λ**а**. По определению λ**о** = **о** для любого λ и 0 •**а** = **о** для любого **а**.

Отметим, что векторы λ**а** и **а** коллинеарны и | λ**а** |= |λ| |**а**|**.**

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами.

1) *Свойство ассоциативности относительно числовых множителей: ά(β****a****) = (άβ)****a****.*

2) *Свойство дистрибутивности векторного множителя относительно операции сложения чисел*: (ά + β)**а** = ά **а** + β **а**.

3) *Свойство дистрибутивности числового множителя относительно операции сложения векторов*: ά (**а + b)** = ά **а +** ά **b.**

Прямоугольные системы координат. Пусть О – произвольная фиксированная точка некоторой плоскости, а (i; J) – один из ортонормированных базисов той же плоскости.

О п р е д е л е н и е 1. Совокупность фиксированной точки О и ортонормированного базиса (i; J) называется *прямоугольной декартовой* (или просто прямоугольной) *системой координат* на плоскости. Точка О называется началом координат; прямые Ох и Оу, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов **i и J**, называются *осями координат:* Ох – ось абсцисс, Оу – ось ординат. Систему координат будем обозначать OiJ или Oxy, а плоскость с соответствующей системой координат будем называть плоскостью Oxy.

Легко видеть, ч то декартова прямоугольная система координат на плоскости задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми – осями, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан отрезок единичной длины. Оси координат делят плоскость на четыре области – четверти или квадраты.

Рассмотрим произвольную точку М плоскости Оху. *Радиус – вектором* точки М по отношению к точке О называется вектор ОМ. *Координатами точки М* в системе координат OiJ называются координаты радиус – вектора ОМ в базисе (i;

J). Если OM = (x; y), то координаты точки M записывают так: M (x; y); число x называется *абсциссой точки M, y – ординатой точки M.* Обратно: если M (x; y), то OM = (x; y).

О п р е д е л е н и е 2. Совокупность фиксированной точки O и ортонормированного базиса (i; J; k) называется прямоугольной декартовой системой координат в пространстве.

Как и в случае плоскости, точка O называется началом координат. Прямые Ox, Oy и Oz, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов i; J; k называются осями координат: Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат. Плоскости, проходящие через оси координат, называются координатными плоскостями. Они делят пространство на восемь областей – октантов. Координатами точек M называются координаты радис – вектора OM в базисе (i; J; k); при этом если OM = (x; y; z), то пишут M (x; y; z), где x – абсцисса, y – ордината, z – аппликата точки M. Обратно: если M (x; y; z), то OM = (x; y; z).

Прямоугольная система координат в пространстве дает возможность установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками чисел (их координатами), а на плоскости – между точками плоскости и упорядоченными парами чисел.

Например, тройке чисел (2; 3; 3) соответствует в пространстве точка A и обратно, точке A пространства соответствует упорядоченная тройка чисел (2; 3;3).

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 14

Тема	**Векторные пространства и линейные отображения.**
План	**Введение.** **а) Понятие вектора. Проекции вектора.** **б) Линейные операции над векторами. Произведение векторов.** **в) Преобразование прямоугольных координат.**
Цели, Задачи	
Содержание учебного процесса	

Технология организации учебного процесса	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль** **Оценка**
Ожидаемый результат	**Студент:** **Преподаватель:**
Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие величины называются скалярными, а какие векторными?
2. Какой вектор называется нулевым вектором?
3. Чему равен модуль нулевого вектора?
4. В каком случае два вектора считаются противоположно направленными?
5. Какие векторы и в каком случае называют компланарными?
6. В каком случае два вектора называют равными?
7. Какие операции называют линейными операциями над векторами?
8. Какими свойствами обладает операция сложения векторов?

ТЕМА 16: ПОНЯТИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

Понятие величины и ее измерения. Понятие величины. Длина, площадь, масса, скорость, стоимость – величины. Величины – это особые свойства реальных объектов и явлений. Например, свойство предметов иметь протяженность называется длинной. Это же слово мы употребляем, когда говорим о протяженности конкретных объектов. Поэтому про длины конкретных объектов говорят, что это величины одного рода. Вообще однородные величины выражают одно и тоже свойство объектов некоторого множества. Разнородные величины выражают различные свойства объектов. Так, длина и площадь – это разнородные величины.

Величины – длина, площадь, масса и другие обладают рядом свойств:

1. Любые две величины одного рода сравнимы: они либо равны, либо одна меньше другой. Иными словами, для величин одного рода имеют место отношения «равно», «меньше» и «больше» и для любых величин a и b справедливо одно и только одно из отношений: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

2. Величины одного рода можно складывать, в результате сложения получится величина того же рода. Другими словами, для любых двух величин a и b однозначно определяется величина $a + b$, ее называют суммой величин a и b.

3. Величину умножают на действительное число, получая в результате величину того же рода. Другими словами, для любой величины a и любого неотрицательного действительного числа x существует единственная

величина b = x a; величину b называют произведением величины a на число x.

4. Величины одного рода вычитают, определяя разность величин через сумму: разностью величин a и b называется такая величина c, что a = b + c.

5. Величины одного рода делят, определяя частное через произведение величины на число: частным величин a и b называется такое неотрицательное действительное число x, что a = x b. Чаще это число x называют отношением величин a и b и записывают в таком виде: $\frac{a}{b}$ = x.

Понятие измерения величины. Сравнивая величины непосредственно, мы можем установить их равенство или неравенство. Чтобы получить более точный результат сравнения, например узнать, на сколько масса одного тела больше массы другого, необходимо величины измерить. Измерение заключается в сравнении данной величины с некоторой величиной того же рода, принятой за единицу. Процесс сравнения зависит от рода рассматриваемых величин: для длин один, для площадей другой, для масс – третий и т.д. Но каким бы ни был этот процесс, в результате измерения величина получает определенное численное значение при выбранной единице.

Вообще *если дана величина a и выбрана единица величины e, то в результате измерения величины a находят такое действительное число x, что a = x e. Это число x называют численным значением величины a при единице величины e.*

Последнее предложение можно записать в символической форме: $x = m_e(a)$.

Согласно определению, любую величину можно представит в виде произведения некоторого числа и единицы этой величины. Например, 7 кг = 7 •1кг.

Используя это, а также определение умножения величины на число, можно обосновать процесс перехода от одной единицы величины к другой.

Величины, которые вполне определяются одним численным значением, называются **скалярными величинами.** Такими, к примеру, являются длина, площадь, объем, масса.

Кроме скалярных величин, в математике рассматривают еще векторные величины. Для определения векторной величины необходимо указать не только ее численное значение, но и направление. Векторными величинами являются сила, ускорение, напряженность электрического поля и др.

Измерение величин позволяет свести сравнение их к сравнению чисел, операции над величинами к соответствующим операциям над числами.

1. Если величины a и b измерены при помощи единицы величины e, то отношения между их численными значениями, и наоборот:

$$a = b \iff m_e(a) = m_e(b),$$

$$a < b \iff m_e(a) < m_e(b),$$

$$a > b \iff m_e(a) > m_e(b).$$

2. Если величины a и b измерены при помощи единицы величины e, то, чтобы найти численное значение суммы a + b, достаточно сложить численные значения величин a и b:

$$a + b = c \iff m_e(a + b) = m_e(a) + m_e(b).$$

Длина отрезка и ее измерение. *Длиной отрезка называется положительная величина, определенная для каждого отрезка так, что*

1.*равные отрезки имеют равные длины;*

2.*если отрезок состоит из конечного числа отрезков, то его длина равна сумме длин этих отрезков.*

Рассмотрим процесс измерения длин отрезков. Из множества отрезков выбирают какой – нибудь отрезок e и принимают его за единицу длины. На отрезке a от одного из его концов откладывают последовательно отрезки, равные e, до тех пор, пока это возможно. Если отрезки, равные e, отложились n раз и конец последнего совпал с концом отрезка a, то говорят, что значение длины отрезка a есть натуральное число n, и пишут: a = ne. Если же отрезки, равные e, отложились n раз и остался еще остаток, меньший e, то на нем откладывают отрезки равные $e_1 = 1$ e. Если они отложились точно n_1 раз, то тогда $a = n, n_1e$ 10

и значение длины отрезка a есть конечная десятичная дробь. Если же отрезок e_1 отложился n_1 раз и остался еще остаток, меньший e_1, то на нем откладывают отрезки, равные $e_2 = 1$ e. Если представить этот процесс бесконечно 100

продолженным, то получим, что значение длины отрезка a есть бесконечная десятичная дробь.

Итак, при выбранной единице длина любого отрезка выражается положительным действительным числом.

Таким образом, мы доказали одно из основных свойств длин отрезков:

1.При выбранной единице длины длина любого отрезка выражается положительным числом, и для каждого положительного действительного числа есть отрезок, длина которого выражается этим числом.

2. Если два отрезка равны, то численные значения их длин также равны и обратно: если численные значения длин двух отрезков равны, то равны и сами отрезки.

$$a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b).$$

3. Если данный отрезок есть сумма нескольких отрезков, то численное значение его длины равно сумме численных значений длин отрезков слагаемых, и обратно: если численное значение длины отрезка равно сумме численных значений нескольких отрезков, то и сам отрезок равен сумме этих отрезков.

$$c = a + b \Leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) + m_e(b).$$

4. Если длины отрезков a и b таковы, что b = xa, где x – положительное действительное число и длина a измерена при помощи единицы e, то, чтобы найти численное значение длины b при единице e, достаточно число x умножить на численное значение длины a при единице e.

$$b = xa \Leftrightarrow m_e(b) = x\, m_e(a).$$

5. При замене единице длины численное значение длины увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

Площадь фигуры и ее измерение. Понятие о площади фигуры имеет любой человек: мы говорим о площади комнаты, площади земельного участка, о площади поверхности, которую надо покрасить и т.д. При этом мы понимаем, что если земельные участки одинаковы, то площади их равны; что у большего участка площадь больше; что площадь квартиры слагается из площади комнат и площади других ее помещений.

О п р е д е л е н и е. **Площадью фигуры называется неотрицательная величина, определенная для каждой фигуры так, что:**

1) равные фигуры имеют равные площади;

2) если фигура составлена из конечного числа фигур, то ее площадь равна сумме их площадей.

Условимся площадь фигуры F обозначать S(F).

Чтобы измерить площадь фигуры, нужно иметь единицу площади. Как правило, за единицу площади принимают площадь квадрата со стороной, равной единичному отрезку e, т.е. отрезку, выбранному в качестве единицы длины. Площадь квадрата со стороной e обозначают e^2. Например, если длина стороны единичного квадрата m, то его площадь m^2.

Измерение площади состоит в сравнении площади данной фигуры с площадью единичного квадрата e^2. Результатом этого сравнения является такое число x, что $S(F) = xe^2$. Число x называют **численным значением площади** при выбранной единице площади.

Из определения площади и сути ее измерения вытекают известные правила сравнения площадей и действий над ними. Рассмотрим некоторые из них.

1. **Если фигуры равны, то равны численные значения их площадей (при одной и той же единице площади).**

   Фигуры, у которых площади равны, называют равновеликими.

2. **Если фигура F составлена из фигур F_1, F_2, ...,F_n, то численное значение площади фигуры F равно сумме численных значений площадей фигур F_1, F_2, ...,F_n (при одной и той же единице площади).**

3. **При замене единицы площади численное значение площади увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.**

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ЛЕКЦИИ 16

Тема	**Понятие величины и их измерение.**
План	**Введение.** **а) Измерения. Объект измерения. Область определения величины. Величины.** **б) Основные свойства скалярных величин. Измерение длин отрезков.** **в) Площади фигур и их измерение.**

	г) Объем тел и их измерения.
Цели, Задачи	
Содержание учебного процесса	
Технология организации учебного процесса	**Метод** **Форма** **Средство** **Прием** **Контроль** **Оценка**

Ожидаемый результат	**Студент:** **Преподаватель:**
Перспектива (анализ, корректировка)	**Студент:** **Преподаватель:**