

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI
QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI
MATEMATIKA KAFEDRASI

Fayzullayev Miraziz Alimurodovichning
”5130100 – Matematika” ta’lim yo`nalishi bo`yicha bakalavr
darajasini olish uchun

Garmonik funksiyalar va Puasson integrali
mavzusida yozgan

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:

katta o’qit. M.Rustamova

“Himoyaga tavsiya etilsin”

Fizika-matematika fakulteti

dekani _____ prof. A. Tashatov

«_____» _____ 2015 yil

Qarshi 2015

MUNDARIJA:

Mundarija.....	5
Kirish	6
I Bob. Garmonik funksiyalar	10
§1.1. Golomorf funksiyalar va ularning xossalari	10
§1.2. Garmonik funksiyalar va ularning xossalari.....	19
§1.3. Qo'shma garmonik funksiyalar va ularni topish	23
II Bob. Puasson integrali	27
§2.1 Maksimum va minimum haqidagi teorema.....	27
§2.2. Dirixle masalasi. Puasson integrali	29
§ 2.3. Shvarts formulasi	35
§ 2.4. Yarim tekislik uchun Dirixle masalasi.....	36
Xulosa	38
Adabiyotlar ro'yxati	39

KIRISH

Bu bitiruv malakaviy ish garmonik funksiyalar nazariyasining muhim o'rin tutadigan Puasson integrali o'rganishga bag'ishlangan. Bitiruv malakaviy ishida garmonik funksiyalar, golomorf funksiya bilan garmonik funksiyalar orasidagi bog'lanish, qo'shma garmonik funksiyalar o'rganiladi. Garmonik va qo'shma funksiyalarga misollar qaraladi, garmonik funksiyalar uchun ekstrimum haqidagi teoremlar, Dirixle masalasi va uning yechimi bo'lgan Puasson integrali o'rganilgan. Kompleks analiz kursida asosiy masalalardan biri berilgan sohada analitik funksiyani qurish hisoblanadi. Bu bitiruv malakaviy ishida o'rganilgan mavzu qarayotgan soha berilgan R radiusli doiradan iborat bo'lganda analitik funksiyani topish masalasini qidirilayotgan funksiyaning haqiqiy qismining doira chegarasidagi qiymatlari ma'lum bo'lgan holda topish imkonini beradi. Bundan tashqari fizik masalalardan issiqlik maydonining temperaturasi (vaqtga bog'liq bo'lmagan holda) va biror sohada berilgan temperaturada elektrostatik maydonning potensialini topish kabi masalalarni yechish Dirixle masalasiga keladi. Puasson integrali esa Dirixle masalasining yechimi hisoblanadi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi kirish, 2 ta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

Bitiruv malakaviy ishning maqsadi : garmonik funksiyalar va ularning xossalari, Puasson integralini o'rganish.

Bitiruv malakaviy ishning vazifalari:

- Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar, ularning golomorfligi o'rganiladi.
- Garmonik funksiyalar va ularning xossalari o'rganiladi.
- Qo'shma garmonik funksiyalar va ularga misollar keltiriladi.
- Garmonik funksiyalar uchun minimum va maksimum haqidagi teoremlar o'rganilgan.
- Dirixle masalasini yechish o'rganilgan.
- Puasson integrali o'rganilgan.

Tadqiqot obyekti: garmonik funksiyalar va Dirixle masalasi.

Tadqiqot predmeti: kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining usullari.

Birinchi bobda kompleks o'zgaruvchili funksiyalar, ularning golomorfliigi, garmonik va qo'shma garmonik funksiyalar, ularga misollar, golomorf va garmonik funksiyalar orasidagi bog'lanish o'rganilgan.

Ta'rif . Agar $f(z)$ funksiya z_0 ($z_0 \in E$) nuqtaning biror $U(x_0, \varepsilon)$ atrofida ($U(z_0, \varepsilon) \subset D$) $\square$ -differensiallanuvchi bo'lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada golomorf (yoki analitik) deb ataladi.

Ta'rif . Agar $f(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida golomorf bo'lsa, funksiya D sohada golomorf deyiladi.

Faraz qilaylik,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

funksiya G sohada golomorf funksiya bo'lsin.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5)$$

$u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalarning ikkalasi ham (1.5) tenglamani qanoatlantirsin. Bu tenglamalar xususiy hosilali ikkinchi tartibli differensial tenglama bo'lib, Laplas tenglamasi, Δ ni esa Laplasning differensial operatori deb ataladi.

Ta'rif . Agar haqiqiy $u(x, y)$ funksiya G sohada birinchi va ikkinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lib, (1.5) Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, $u(x, y)$ funksiya G sohada garmonik funksiya deyiladi.

Golomorf va garmonik funksiyalar orasidagi munosabat quyidagi teoremda ifodalanadi.

Teorema . Berilgan G sohada analitik bo'lgan $f(x) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari shu sohada garmonik funksiyalardir.

$u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalar G sohada garmonik bo'lsa ham, $u(x,y) + iv(x,y)$ funksiya G sohada analitik bo'lmay qolishi mumkin. Agar $u(x,y)$ funksiya shu sohada garmonik bo'lsa, $u+iv$ funksiyaning analitik funksiyaga aylantiradigan $v(x,y)$ garmonik funksiyasini topish uchun quyidagi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Koshi-Riman (D'alamber – Eyler) shartlaridan foydalanish kerak. Mana shu shartlar bilan bog'langan $u(x,y)$ va $v(x,y)$ lar o'zaro qo'shma garmonik funksiyalar deyiladi.

Ikkinchi bobda garmonik funksiyalar uchun minimum va maksimum haqidagi teorema, Dirixle masalasi va Puasson integrali o'rganilgan. Shuningdek bu bobda doirada berilgan analitik funksiyaning aylanadagi qiymatlari orqali ifodalash masalasi va Shvarts formulasi o'rganilgan.

Teorema 2.1. (maksimum va minimum haqida). Agar $u(x,y)$ funksiya G sohada garmonik bo'lib, aynan o'zgarmas songa teng bo'lmasa, u holda bu funksiya G ning ichki nuqtalarida maksimumga ham, minimumga ham ega bo'lmaydi.

Dirixle masalasini qaraymiz:

G soha chegarasida aniqlangan va uzluksiz $\varphi(\alpha)$ funksiya berilgan bo'lsin. G sohada garmonik va yopiq $\bar{G}$ sohada uzluksiz bo'lgan shunday $u(z)$ funksiya topilsinki, bu funksiya G ning barcha chegaraviy nuqtalarida berilgan $\varphi(\alpha)$ qiymatlarni qabul qilsin.

Masalan, issiqlik maydonining temperaturasini (vaqtga bog'liq bo'lmagan holda) yoki biror sohada berilgan temperaturada elektrostatik maydonning potensialini topish va shunga o'xshash bir qancha masalalar Dirixle masalasiga keladi.

Agar Dirixle masalasidagi berilgan $\varphi(\alpha)$ funksiya doirada izlanayotgan biror $u(r,\theta)$ garmonik funksiyaning aylanadagi $u(R,\alpha)$ qiymatiga teng bo'lsa,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha$$

formula Dirixle masalasining yechimidan iborat bo'ladi, bu formulaning o'ng tomonidagi integralni **P u a s s o n** i n t e g r a l i deyiladi.

Koshi tipidagi integral haqidagi teoremaga asosan $|z| < R$ doirada analitik funksiya bo'lgan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{\xi + z}{\xi - z} d\alpha + Ai$$

bundagi A – haqiqiy o'zgarmas, funksiyaning haqiqiy qismi tuzilishi bo'yicha **P u a s s o n** integralidan iborat. Bu formulani Shvarts formulasi yoki i n t e g r a l i deyiladi.

I BOB. GARMONIK FUNKSIYALAR

§1.1. Kompleks o'zgaruvchili funksiya va uning golomorfligi

Kompleks sonlar tekisligi $\mathbb{C}$ da biror E to'plam berilgan bo'lsin: $E \subset \mathbb{C}$.

Ta'rif 1.1. Agar E to'plamdan olingan har bir z kompleks songa biror f qoidaga yoki qonunga ko'ra bitta w kompleks son mos qo'yilgan bo'lsa, E to'plamda funksiya berilgan deb ataladi va u

$$f : z \rightarrow w \quad \text{yoki} \quad w = f(z)$$

kabi belgilanadi. Bunda E funksiyaning aniqlanish to'plami, z -erkli o'zgaruvchi yoki funksiya argumenti, w esa z o'zgaruvchining funksiyasi deyiladi.

Aytaylik, har bir

$$z = x + iy \in E$$

kompleks songa bitta

$$w = u + iv \quad (u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R})$$

kompleks son mos qo'yilgan bo'lsin. Demak,

$$w = u + iv = f(x + iy)$$

Keyingi tenglikdan

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, E to'plamda $w = f(z)$ funksiyaning berilishi shu to'plamda x va y haqiqiy o'zgaruvchilarning

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

funksiyalarining berilishidek ekan.

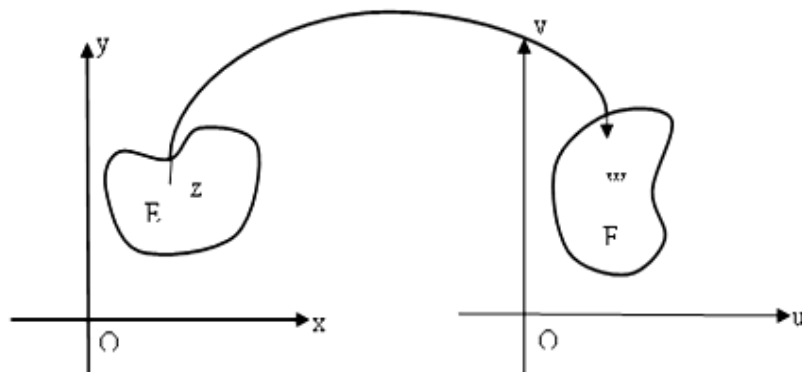
Odatda $u = u(x, y)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning haqiqiy qismi, $v = v(x, y)$ esa $f(z)$ ning mavhum qismi deyiladi:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z),$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

Erkli z o'zgaruvchi E to'plamda o'zgarganda $w = f(z)$ funksiyaning mos qiymatlaridan iborat to'plam $F = \{f(z) = u + iv : z = x + iy \in E\}$ bo'lsin. Odatda bu to'plam funksiya qiymatlari to'plami deyiladi.

Demak, E to'plamda $E \subset \square$ $w = f(z)$ funksiyaning berilish oxy - kompleks tekislikdagi E to'plamni (to'plam nuqtalarini) ouv - kompleks tekislikdagi F to'plamga (to'plam nuqtalariga) aks ettirishdan iborat.



Shu sababli $w = f(z)$ funksiya E to'plamning F to'plamga akslantirish deb ham yuritiladi.

Ta'rif 1.2. Agar argument z ning E to'plamdan olingan turli qiymatlarida $f(z)$ funksiyaning mos qiymatlari ham turlicha bo'lsa, boshqacha aytganda $f(z_1) = f(z_2)$ tenglikdan $z_1 = z_2$ tenglik ($z_1, z_2 \in E$) kelib chiqsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda bir yaproqli (yoki bir varaqli) funksiya deyiladi.

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya $E (E \subset \square)$ to'plamda berilgan bo'lib, z_0 nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif 1.3. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, argument z ning $0 < |z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A kompleks son $f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow z_0$ dagi limiti deb ataladi va

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

kabi belgilanadi.

Ta'rif 1.4. Agar $\forall M > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, argument z ning $0 < |z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z)| > M$$

tengsizlik bajarilsa, $z \rightarrow z_0$ dagi $f(z)$ funksiyaning limiti ∞ deyiladi.

Aytaylik $z = \infty$ nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif 1.5. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $p = p(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, argument z ning $|z| > p$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A kompleks son $f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$$

kabi belgilanadi.

Endi z, z_0 hamda A kompleks sonlarni

$$z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0, A = \alpha + i\beta$$

deb, so'ng

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ekanligini e'tiborga olib, $z \rightarrow z_0$ da $f(z)$ funksiyaning A limitga ega bo'lishi $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ da $u = u(x, y)$ hamda $v = v(x, y)$ funksiyalarning mos ravishda α va β limitlarga ega bo'lishiga ekvivalent ekanligini ifodalovchi teoremani keltiramiz.

Teorema 1.1. $w = f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow z_0$ da A limitga,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

ega bo'lish uchun

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta$$

bo'lishi zarur va etarli.

Isbot. Zarurligi. Aytaylik,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, z argumentning $0 < |z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Ravshanki,

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$
$$f(z) - A = [u(x, y) - \alpha] + i[v(x, y) - \beta]$$

bo'lib,

$$|z - z_0| < \delta$$

bo'lishidan

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan quyidagi

$$|u(x, y) - \alpha| = \operatorname{Re}(f(z) - A) \leq |f(z) - A| < \varepsilon,$$
$$|v(x, y) - \beta| = \operatorname{Im}(f(z) - A) \leq |f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki $|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$ bo'lganda

$$|u(x, y) - \alpha| < \varepsilon, \quad |v(x, y) - \beta| < \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi. Bu esa

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta$$

ekanligini bildiradi.

Yetarliligi. Aytaylik,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta$$

bo'lsin.

Limit ta'rifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ ga ko'ra shunday $\delta_0 > 0$ son topiladiki

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x, y da

$$|u(x, y) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |v(x, y) - \beta| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

tengsizliklar bajariladi. Bu tengsizliklardan foydalanib, topamiz:

$$\begin{aligned} |f(z) - A| &= |u(x, y) + iv(x, y) - (\alpha + i\beta)| = |(u(x, y) - \alpha) + i(v(x, y) - \beta)| = \\ &= \sqrt{(u(x, y) - \alpha)^2 + (v(x, y) - \beta)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon \end{aligned}$$

Demak, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$. Teorema isbotlandi.

Aytaylik, $f(z)$ hamda $g(z)$ funksiyalar E to'plamda berilgan bo'lib, z_0 nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$$

bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) &= A \pm B, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) &= A \cdot B, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0) \end{aligned}$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya E to'plamda $E \subset \mathbb{C}$ berilgan bo'lib, z_0 nuqta ($z_0 \in E$) shu E to'plamning nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif 1.6. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, argument z ning $|z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

(Ravshanki, bu holda

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

bo'ladi).

Odatda, $z - z_0$ ayirma funksiya argumentining orttirmasi deyilib, uni Δz kabi belgilanadi:

$$\Delta z = z - z_0.$$

Ushbu

$$f(z) - f(z_0)$$

ayirma esa, funksiya orttirmasi deyiladi. Uni Δf kabi belgilanadi:

$$\Delta f = f(z) - f(z_0).$$

Shu tushunchalardan foydalanib, funksiyaning z_0 nuqtada uzluksizligini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

Ta'rif 1.7. Agar $\Delta z \rightarrow 0$ da Δf ham nolga intilsa,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

$f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Ta'rif 1.8. Agar $f(z)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda uzluksiz deb ataladi.

Aytaylik, $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

va

$$z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0,$$

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

deylik.

Teorema 1.1.ga ko'ra

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

munosabat

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0)$$

munosabatlarga ekvivalent bo'ladi. Bundan esa quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema 1.2. $w = f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$$

funksiyalarning (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

Demak, kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi, ikkita haqiqiy o'zgaruvchili

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$$

funksiyalarning (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'lishiga ekvivalent bo'lar ekan.

Bundan, haqiqiy o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalar haqidagi tasdiqlar kompleks o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalarda ham o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik $w = f(z)$ funksiya E to'plamda $E \subset \mathbb{C}$ berilgan bo'lib, $z_0 + \Delta z \in E$ bo'lsin. Natijada $f(z)$ funksiya ham z_0 nuqtada

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

orttirmaga ega bo'ladi.

Ta'rif 1.9. Agar $\Delta z \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (1.1)$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi va $f'(z_0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Ta'rif 1.10. Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in E$ nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsa, funksiya z_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Agar $f(z)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, funksiya E to'plamda differensiallanuvchi deyiladi.

Biz yuqorida kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosila hamda differensiyallanuvchi bo'lishi tushunchalarining kiritilishi haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning hosila hamda differensiallanuvchi bo'lishi tushunchalarining kiritilishi kabi ekanini ko'rdik.

Demak, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilalarini hisoblashda haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning hosilalarini hisoblashdagi ma'lum qoida va jadvallardan foydalanish mumkin.

Garchi kompleks hamda haqiqiy o'zgaruvchili funksiya hosilalari tushunchalarining kiritilishi bir xil bo'lsa ham kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasiga ega bo'lsin deyilishi (binobarin, differensiallanuvchi bo'lsin deyilishi) talabi ancha og'ir talab hisoblanadi. Bitta sodda misol qaraylik.

Ushbu

$$f(z) = x$$

funksiyani qaraylik. Agar bu funksiya haqiqiy o'qda joylashgan E to'plamda ($E \subset \mathbb{R}$) qaralsa, ravshanki, u hosilaga ega bo'lib, $f'(z) = 1$ bo'ladi.

Endi $f(z) = x$ funksiyaning kompleks tekislik $\mathbb{C}$ da qaraylik. Ravshanki, bu funksiya uchun

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

bo'ladi. Bu nisbat $z \rightarrow z_0$ da limitga ega emas, chunki, $x = x_0, y \neq y_0$ da nisbat 0 ga teng, $x \neq x_0, y = y_0$ da esa 1 ga teng. Demak, $f(z) = x$ funksiya differensiallanuvchi emas.

Faraz qilaylik,

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

funksiya biror D sohada ($D \subset \mathbb{C}$) berilgan bo'lib, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ bo'lsin.

Teorema 1.3. $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lishi uchun $u = u(x, y)$ va $v = v(x, y)$ funksiyalarning (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi va shu nuqtada ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.2)$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Teoremada keltirilgan (1.2) shartlar Koshi-Riman shartlari deyiladi.

Kompleks analizda hosilaga ega bo'lgan funksiyalar C- differensiallanuvchi funksiyalar deyiladi.

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya biror D sohada $(D \text{ MJ})$ berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1.11. Agar $f(z)$ funksiya z_0 ($z_0 \in E$) nuqtaning biror $U(x_0, \varepsilon)$ atrofida $(U(z_0, \varepsilon) \subset D)$ $\square$ -differensiallanuvchi bo'lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada golomorf (yoki analitik) deb ataladi.

Ta'rif 1.12. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida golomorf bo'lsa, funksiya D sohada golomorf deyiladi. Odatda D sohada golomorf bo'lgan funksiyalar sinfi $\mathcal{G}(D)$ kabi belgilanadi.

Ta'rif 1.13. Agar $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ funksiya $z=0$ nuqtada golomorf bo'lsa,

$f(z)$ funksiya « ∞ » nuqtada golomorf deyiladi.

§1.2. Garmonik funksiyalar va ularning xossalari .

Faraz qilaylik,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

funksiya G sohada analitik bo'lsin. U holda hosila olish formulasiga asosan:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.3)$$

G sohada analitik bo'lgan $f(z)$ funksiya barcha yuqori tartibli uzluksiz hosilalarga ega. (1.3) dan yana bir marta hosila olinsa,

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (1.4)$$

kelib chiqadi. Shu bilan birga hamma tartibli

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$$

xususiylar ham mavjud va uzluksizdir. (1.4) ning ikki tomonidagi kompleks miqdorlar o'zaro teng bo'lgani uchun ularning haqiqiy qismlari o'zaro va mavhum qismlari o'zaro teng bo'ladi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{va} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Bundan esa quyidagiga kelimiz:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5)$$

Bularning ikkalasi ham bir tipdagi differensial tenglamalardan iborat bo'lgani uchun bittasini, masalan, (1.5) ni olsak kifoya. Demak, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalarning ikkalasi ham (1.5) tenglamani qanoatlantiradi. Yuqoridagi (1.5) xususiylar ikkinchi tartibli differensial tenglama bo'lib, **L a p l a s t e n g l a m a s i**, Δ ni esa **L a p l a s n i n g d i f f e r e n s i a l o p e r a t o r i** deb ataladi. Endi bu fikrlarimizdan garmonik funksiya tushunchasi kelib chiqadi.

T a ‘ r i f 1.14. Agar haqiqiy $u(x,y)$ funksiya G sohada birinchi va ikkinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo‘lib, (1.5) Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, $u(x,y)$ funksiya G sohada g a r m o n i k f u n k s i y a deyiladi.

Mana shu ta’rifdan va yuqoridagi mulohazalarimizdan(Koshi – Riman shartlaridan) ko’rinadiki, biz quyidagi teoremani isbot qildik.

Teorema 1.4. Berilgan G sohada analitik bo‘lgan $f(x) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari shu sohada garmonik funksiyalardir.

Endi garmonik funksiyalar va ularni topishga doir misollar qaraymiz.

1-m i s o l. $u = \varphi(ax + by)$ ko‘rinishga ega bo‘lgan garmonik funksiya mavjudmi, agar mavjud bo‘lsa, o‘sha topilsin (a, b – haqiqiy o‘zgarmas sonlar).

Dastlab $z = (ax + by)$ deb belgilab olamiz. U holda:

$$u = \varphi(z); \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'_z(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = a\varphi'(z);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a\varphi''(z) \frac{\partial z}{\partial x} = a^2 \varphi''(z); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = b\varphi'(z);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b\varphi''(z) = b^2 \varphi''(z),$$

chunki $\varphi(z)$ — bir argumentli murakkab funksiya va

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(ax + by) = a, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ax + by) = b.$$

Endi yuqoridagi ikkinchi tartibli hususiy hosilalarning qiymatlarni (1.5) Laplas tenglamasiga qo‘yamiz. U holda

$$\Delta u \equiv (a^2 + b^2)\varphi''(z) = 0$$

bo‘lib, a, b lar noldan farqli bo‘lgani uchun $\varphi''(z) = 0$ bo‘ladi. So‘nggi tenglamani yechsak,

$$\varphi'(z) = C, \quad \varphi(z) = Cz + B.$$

Endi, z o‘rniga qiymati qo‘yilsa,

$$\varphi(ax + by) = C(ax + by) + B$$

hosil bo'ladi. Demak, izlangan garmonik funksiyaning ko'rinishi shundan iborat bo'lar ekan.

2-m i s o l. $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ko'rinishga ega bo'lgan garmonik funksiya

mavjud bo'lsa, o'sha topilsin.

$z = \frac{y}{x}$ bo'lsin, u holda $u = \varphi(z)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(z) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2} \varphi'(z)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^4} \varphi''(z) + \frac{2y}{x^3} \varphi'(z);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(z) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x} \varphi'(z), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} \varphi''(z)$$

Bularni (1.5) ga qo'yamiz, u holda ba'zi soddalashtirishlardan keyin ushbu

$$(x^2 + y^2) \varphi''(z) + 2xy \varphi'(z) = 0$$

oddiy differensial tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamani yechish uchun $\varphi'(z) = \psi(z)$ deb belgilash kiritib olamiz. Demak,

$$(x^2 + y^2) \psi'(z) + 2xy \psi(z) = 0$$

yoki

$$\frac{\psi'}{\psi} = -\frac{2xy}{x^2 + y^2} = -\frac{2\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$z = \frac{y}{x}$ bo'lgani sababli

$$\frac{d\psi}{\psi} = -2 \frac{z dz}{1 + z^2}.$$

Bundan

$$\ln \psi = -\ln(1+z^2) + \ln C = \ln \frac{C}{1+z^2},$$

ya'ni

$$\psi = \frac{C}{1+z^2}.$$

Endi,

$$\psi = \varphi'(z) = \frac{C}{1+z^2}$$

tenglamadan

$$\varphi(z) = C \int \frac{dz}{1+z^2} + B = C \operatorname{arctg} z + B$$

hosil bo'ladi.

Shunday qilib, izlanayotgan garmonik funksiya ushbu

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + B$$

ko'rinishga ega ekan, bunda C, B – ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy sonlardir.

§1.3. Qo'shma garmonik funksiyalar.

Aytaylik,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

funksiya G sohada aniqlangan bo'lsin.

$u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar G sohada garmonik bo'lsa ham, $u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya G sohada analitik bo'lmay qolishi mumkin. Agar $u(x, y)$ funksiya shu sohada garmonik bo'lsa, $u + iv$ funksiyaning analitik funksiyaga aylantiradigan $v(x, y)$ garmonik funksiyasini topish uchun quyidagi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Koshi-Riman (D'alamber – Eyler) shartlaridan foydalanish kerak. Mana shu shartlar bilan bog'langan $u(x, y)$ va $v(x, y)$ lar o'zaro qo'shma garmonik funksiyalar deyiladi.

Quyida golomorf funksiya bilan garmonik funksiyalar orasidagi munosabatni ifodalaydigan teoremani keltiramiz.

Teorema 1.6. D sohada ($D \subset \mathbb{C}$) golomorf bo'lgan har qanday $f(z)$ funksiyaning haqiqiy hamda mavhum qismlari $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar shu sohada garmonik bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $f(z) = u + iv$ $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya D sohada golomorf bo'lsin. Unda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

tengliklar bajariladi.

Bu tengliklardan foydalanib topamiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Agar

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, undan keyingi tengliklardan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $u(x, y)$ funksiyaning garmonik funksiya ekanligini bildiradi. Xuddi shunga o'xshash $v(x, y)$ funksiyaning garmonik funksiya bo'lishi ko'rsatiladi. Teorema isbot bo'ldi.

Endi yuqoridagi funksiyalarga doir misollar qaraymiz.

1-m i s o l. $f(z) = e^z$ funksiya har qanday G sohada analitik ekanligi ma'lum. Bu funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari G sohada garmonik ekanligini tekshirish qiyin emas. Haqiqatan ham,

$$f(z) = u + iv = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

bo'lib,

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Bulardan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y (e^x)'_x = e^x \cos y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos y (e^x)'_x = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x (\cos y)'_y = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y.$$

Mana shularni (1.6) ga qo'yilsa, tenglamani qanoatlantiradi. Xuddi shu usulda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -e^x \sin y$$

larni o'zaro qo'shsak, (1.6) ni qanoatlantirganini ko'ramiz.

2- m i s o l. Shunday $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik funksiya topilsinki, uning mavhum qismi

$$v(x, y) = x^4 - 8x^3y - 6x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$$

dan iborat va $f(0)=0$ bo'lsin.

Buning uchun (1.10) formuladan foydalanamiz:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x^3 - 24x^2y - 12xy^2 + 8y^3$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -8x^3 - 12x^2y + 24xy^2 + 4y^3$$

$$\begin{aligned} du(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy = \\ &= -(8x^3 + 12x^2y - 24xy^2 - 4y^3)dx - (4x^3 - 24x^2y - 12xy^2 + 8y^3)dy = \\ &= M(x, y)dx + N(x, y)dy. \end{aligned}$$

Bundagi:

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Endi $u(x, y)$ ni quyidagicha izlaymiz:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int M dx + \varphi(y) = - \int (8x^3 + 12x^2y - 24xy^2 - 4y^3) dx + \varphi(y) = \\ &= -(2x^4 + 4x^3y - 12x^2y^2 - 4xy^3) + \varphi(y) \end{aligned}$$

Hozircha bizga $\varphi(y)$ noma'lum funksiyadir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -(4x^3 - 24x^2y - 12xy^2) + \varphi'(y) = N = \\ &= -(4x^3 - 24x^2y - 12xy^2 + 8y^3). \end{aligned}$$

Ikki tomondagi o'xshash hadlar o'zaro yo'qolib,

$$\varphi'(y) = -8y^3 \quad \text{ya'ni} \quad d\varphi(y) = -8y^3 dy$$

hosil bo'ladi. bundan esa

$$\varphi(y) = -8 \int y^3 dy = -2y^4 + C$$

kelib chiqadi. Demak,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -(2x^4 + 4x^3y - 12x^2y^2 - 4xy^3 + 2y^4) + C, \\ f(z) = u + iv &= -2(x^4 + 2x^3y - 6x^2y^2 - 2xy^3 + y^4) + \\ &+ i(x^4 - 8x^3y - 6x^2y^2 + 8xy^3 + y^4) + C \end{aligned}$$

Buni z orqali ifoda qilish maqsadida o'xshash hadlarni quyidagicha yig'ishtiramiz:

$$f(z) = x^4(-2+i) + 4x^3y(-1-2i) - 6x^2y^2(-2+i) - 4xy^3(-1-2i) + y^4(-2+i) + C$$

Ammo

$$-1-2i = i^2 - 2i = i(-2+i)$$

bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} f(z) &= (-2+i) \left[x^2 + 4x^3(iy) + 6x^2(iy)^2 + 4x(iy)^3 + y^4 \right] + C = \\ &= (-2+i)(x+iy)^4 + C = (-2+i)z^4 + C. \end{aligned}$$

Berilgan masaladagi $f(0)=0$ shartdan foydalansak,

$$0 = f(0) = (-2+i) \cdot 0^4 + C.$$

ya'ni $C=0$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$f(z) = (-2+i)z^4.$$

3 – m i s o l. $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$ ga asosan $f(z)$ analitik funksiya topilsin.

Buning uchun

$$v'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2; \quad v(x; 0) = 2 \ln x + x, \quad v'_y(x, 0) = -2.$$

dan foydalanamiz. U holda

$$\begin{aligned} f(x) &= \int v'_y(x, 0) dx + iv(x, 0) + C = -2x + i(x + 2 \ln x) + c = \\ &= 2i \ln x - (2-i)x + C. \end{aligned}$$

Endi x o'rniga z ni qo'ysak, biz izlagan analitik funksiya hosil bo'ladi:

$$f(z) = 2i \ln |z| - (2-i)z + C.$$

II BOB. PUASSON INTEGRALI

§2.1 Maksimum va minimum haqidagi teorema.

Garmonik funksiyaning xossalardan biri bo'lgan quyidagi teorema bilan tanishamiz.

Teorema 2.1. (maksimum va minimum haqida). Agar $u(x,y)$ funksiya G sohada garmonik bo'lib, aynan o'zgarmas songa teng bo'lmasa, u holda bu funksiya G ning ichki nuqtalarida maksimumga ham, minimumga ham ega bo'lmaydi.

Isbot. Teoremani maksimum uchun isbot qilinsa yetarli, chunki $u(x,y)$ garmonik funksiyaning minimum nuqtasi $-u(x,y)$ garmonik funksiya uchun maksimum nuqta bo'ladi.

Teorema shartlari bajarilganda $u(x,y)$ funksiya G sohaning biror $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtasida maksimum qiymatga erishsin, deylik. K – markazi z_0 nuqtada bo'lib, G sohada yotuvchi doira bo'lsin. K doirada $u(x,y)$ ga qo'shma bo'lgan $v(x,y)$ garmonik funksiya tuzamiz.

K doira bir bog'lamli soha bo'lgani uchun $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik funksiya K da bir qiymatli bo'ladi (buning uchun $v(x,y)$ ifodasiga kirgan o'zgarmas sonni aniq qilib tanlab olish kerak (masalan, $v(x_0, y_0) = 0$ shartning bajarilishini talab qilish mumkin). $e^{f(z)}$ funksiya ham K da bir qiymatli va analitik funksiya bo'ladi va uning moduli $|e^{u+iv}| = e^u$ farazimizga ko'ra ichki nuqtada maksimumga erishadi. Bu esa isbotlangan analitik funksiya modulining maksimum prinsipiga qarama-qarshidir. Shu bilan teorema isbotlandi.

Bu teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. G sohada garmonik va yopiq $\bar{G}$ sohada uzluksiz bo'lgan $u(x,y)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga sohaning chegaraviy nuqtalarida erishadi.

Bunga asosan, agar shunday funksiya G sohaning chegarasida o'z qiymatini o'zgartirmasa, u holda uning yopiq $\bar{G}$ sohadagi barcha eng katta

va eng kichik qiymatlari bir xil bo'lib ustma-ust tushadi demak, bu funksiya G sohada o'zgarmas bo'ladi.

2-natija. Agar ikki $u_1(x, y)$ va $u_2(x, y)$ funksiya G sohada garmonik va yopiq $\bar{G}$ sohada uzluksiz bo'lib, ularning G sohaning barcha chegara nuqtalaridagi qiymatlari bir-biriga teng bo'lsa, u holda bu funksiyalar G sohada o'zaro teng bo'ladi.

Haqiqatan, bu funksiyalarning ayirmasi $\bar{G}$ da uzluksiz hamda G da garmonik bo'lib, barcha chegara nuqtalarda nolga teng bo'ladi. Demak, 1-natijaga asosan, bu ayirma barcha G sohada nolga teng.

T e o r e m a 2.2. Agar $u(z)$ ¹ funksiya bir bog'lamli G sohada garmonik bo'lsa va qiymatlari G da yotuvchi $z = \varphi(\xi)$ funksiya biror D sohada analitik bo'lsa, u holda $u|\varphi(\xi)| = U(\xi)$ murakkab funksiya D da garmonik funksiya bo'ladi.

Isbot qilish uchun haqiqiy qismi G da $u(z)$ ga teng bo'lgan $f(z)$ (ko'p qiymatli bo'lishi ham mumkin) funksiya tuzamiz, ya'ni $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$. Ravshanki $F(\xi) = f|\varphi(\xi)|$ funksiya D da analitik, demak, $U(\xi) = \operatorname{Re} f|\varphi(z)|$ D da garmonik funksiya bo'ladi.

§2.2. Dirixle masalasi va Puasson integrali.

Biz bu paragrafda avvalo garmonik funksiyalarning muhim tatbiqlardan iborat bo'lgan Dirixle masalasini qaraymiz:

G soha chegarasida aniqlangan va uzluksiz $\varphi(\xi)$ funksiya berilgan bo'lsin. G sohada garmonik va yopiq $\bar{G}$ sohada uzluksiz bo'lgan shunday $u(z)$ funksiya topilsinki, bu funksiya G ning barcha chegaraviy nuqtalarida berilgan $\varphi(\xi)$ qiymatlarni qabul qilsin.

Masalan, issiqlik maydonining temperaturasi (vaqtga bog'liq bo'lmagan holda) yoki biror sohada berilgan temperaturada elektrostatik maydonning potensialini topish va shunga o'xshash bir qancha masalalar Dirixle masalasiga keladi.

Avvalgi paragrafdagi 2-natijadan Dirixle masalasining yechimi yagonaligiga doir quydagi teorema kelib chiqadi.

T e o r e m a 2.3.. *Dirixle masalasi uchun bittadan ortiq yechim mavjud emas.*

Biz Dirixle masalasini G soha R radiusli doiradan iborat bo'lgan hol uchun yechamiz: yozishni soddalashtirish maqsadida doiraning markazi kordinatalar boshida joylashgan, deb faraz qilamiz. Doira aylanasi tenglamasi $|\xi| = R$ bo'ladi. Agar qutb kordinatalari sistemasiga o'tib, qutb burchakni α deb belgilasak, $\xi = Re^{i\alpha}$ bo'lib.

$$\varphi(\xi) = \varphi(Re^{i\alpha}) = \varphi(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

va $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ bo'ladi.

Bu masalani yechishdan oldin, garmonik funksiyaning qiymati doira aylanasi ma'lum bo'lsa, bu funksiyaning doiraning ichki nuqtalarida qanday aniqlash mumkinligini ko'rib chiqamiz. $f(z)$ funksiya R radiusli doirada va uning C – aylanasi analitik bo'lsin deylik. C ning ichida yotuvchi ixtiyoriy $z = re^{i\theta}$ nuqta uchun, Koshi formulasiga asosan, quydagini yoza olamiz:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) \frac{Re^{i\alpha}}{Re^{i\alpha} - re^{i\theta}} d\alpha \quad (2.1)$$

C aylanaga nisbatan z nuqtaga simmetrik bo'lgan z^* nuqtani olamiz:

$$|z^*| = \frac{R^2}{|z|} = \frac{R^2}{r}, \quad z^* = \frac{R^2}{r} e^{i\theta}$$

z^* nuqta C dan tashqarida yotganligi uchun $\frac{f(\xi)}{\xi - z^*}$ funksiya C aylanada va uning ichida analitik bo'ladi, shuning uchun Koshi teoremasiga asosan:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z^*} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\alpha}) Re^{i\alpha} d\alpha}{Re^{i\alpha} - \frac{R^2}{r} e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) \frac{re^{i\alpha}}{re^{i\alpha} - Re^{i\theta}} d\alpha \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.1) tenglikdan (2.2) tenglikni ayiramiz:

$$\begin{aligned} f(z) = f(re^{i\alpha}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) e^{i\alpha} \left(\frac{R}{Re^{i\alpha} - re^{i\theta}} - \frac{r}{re^{i\alpha} - Re^{i\theta}} \right) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) \frac{(R^2 - r^2)e^{i(\theta+\alpha)}}{(R^2 + r^2)e^{i(\theta+\alpha)} - Rr(e^{2i\theta} + e^{2i\alpha})} d\alpha. \end{aligned}$$

Oxirgi tenglikdagi integral ishorasi ostidagi kasrning surat va maxrajini $e^{i(\theta+\alpha)}$ ga bo'lib, ushbu

$$e^{i(\theta-\alpha)} + e^{-i(\theta-\alpha)} = 2\cos(\theta - \alpha)$$

tenglikka asosan quydagiga erishamiz:

$$f(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (2.3)$$

Bu formuladan

$$f(re^{i\alpha}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta), \quad f(Re^{i\alpha}) = u(R, \alpha) + iv(R, \alpha)$$

bo'lgani uchun chap va o'ng tomondagi haqiqiy qismlarni tenglab, quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (2.4)$$

Mavhum qism v uchun ham huddi shu ko'rinishdagi formula hosil bo'ladi. Analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari garmonik funksiyaning doira ichidagi qiymati aylanadigan qiymatlari orqali ifodalanadi. Bundan shunday hulosalar kelib chiqadiki, agar Dirixle masalasidagi berilgan $\varphi(\alpha)$ funksiya doirada izlanayotgan biror $u(r, \theta)$ garmonik funksiyaning aylanadagi $u(R, \alpha)$ qiymatiga teng bo'lsa, (2.4) formula Dirixle masalasining yechimidan iborat bo'ladi. (2.4) formulaning o'ng tomonidagi integralni **P u a s s o n i n t e g r a l i** deyiladi.

(2.3) formulada $r=0$ desak, va $u(r, \theta)$ funksiyaning $r=0$ dagi qiymatini $u(0)$ orqali belgilab olsak, ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \alpha) d\alpha \quad (2.5)$$

Bu esa o'rta qiymat haqidagi teoremdir, ya'ni garmonik funksiyaning doira markazidagi qiymati uning aylanadagi qiymatlarining o'rta arifmetik qiymatiga teng.

(2.4) formulada $u(R, \alpha) = 1$ bo'lsa, avvalgi nuqtadagi 1- natijaga asosan $u(r, \theta) = 1$ bo'ladi, ya'ni

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (2.6)$$

Endi $\varphi(\alpha)$ – oldindan berilgan, $[0, 2\pi]$ segmentda uzluksiz bo'lgan α haqiqiy o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsin. Bu funksiya uchun Puasson integralini yozamiz:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (2.7)$$

r va α ning garmonik funksiyasi bo'lishini va ikkinchidan doira ichidagi $z = re^{i\theta}$ nuqta aylanada yotuvchi ixtiyoriy $\xi = Re^{i\alpha}$ nuqtaga intilganda

$\varphi(\alpha)$ limitga intilishini ko'rsatamiz: R o'zgarmas bo'lgani uchun (2.7) integral r va θ parametrlarning funksiyasi bo'lib, θ ga ko'ra davriydir (davri 2π). Ushbu

$$R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha) \geq R^2 - 2Rr + r^2 = (R - r)^2$$

tengsizlikdan ravshanki, $0 \leq r \leq R$ bo'lganda

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} \quad (2.8)$$

ifodaning r va θ ga nisbatan ixtiyoriy tartibdagi hosilasi o'sha parametrlarning uzluksiz funksiyasi ekanligi kelib chiqadi. Shunga ko'ra (2.7) integralni r va θ bo'yicha integral ishorasi ostida differensiallash mumkin. Laplas operatorida qutb koordinatalariga o'tib, (2.8) funksiyaning tenglamasini qanoatlanlantirishini tekshirib ko'rish qiyin emas. Shunday qilib, (2.7) integral $r < R$ da garmonik funksiyadir, buni biz $u(r, \theta)$ orqali belgilab olamiz:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (2.9)$$

Endi $z = re^{i\theta}$ ($r < R$) nuqta C aylanada yotuvchi ixtiyoriy $\xi_0 = Re^{i\alpha_0}$ nuqtaga intilganda $u(r, \theta)$ funksiya $\varphi(\alpha_0)$ limitga intilishini ko'rsatish kerak. Umumiyatlikni chegaralamay, $\alpha_0 = 0$ deyish mumkin, chunki α qutb burchakning qiymati faqat qutb o'qi yo'nalishini tanlab olinishiga bog'liq bo'lgani uchun, qutb o'qni ixtiyoriy $\xi \in C$ nuqtadan o'tkazishimiz mumkin. Shunday qilib,

$$\lim_{r \rightarrow R, \theta \rightarrow 0} [u(r, 0) - \varphi(0)] = 0$$

tenglikni isbotlash kerak.

(2.6) formuladan foydalanib, $\varphi(0)$ ni bunday yozib olamiz:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(0) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (2.10)$$

(2.9) dan (2.10) ni ayiramiz:

$$u(r, \theta) - \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi(\alpha) - \varphi(0)] \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (2.11)$$

ε – ixtiyoriy musbat son bo'lsin. $\varphi(\alpha)$ funksiyaning $\alpha=0$ nuqtadagi uzluksizligidan foydalanib, $\delta(\varepsilon) > 0$ ni shunday tanlaymizki, $|\alpha| < 2\delta(\varepsilon)$ bo'lganda

$$|\varphi(\alpha) - \varphi(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajarilsin. So'ngra nuqtalari $|\alpha| < 2\delta(\varepsilon)$ tenglikni qanoatlantiruvchi C aylananing yoyini γ_ε bilan, qolgan qismini G_ε bilan belgilab olamiz. U holda (2.11) dan,

$$|u(r, \theta) - \varphi(0)| \left| \frac{1}{2\pi} \oint_C \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \right| \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \right| \quad (2.12)$$

(2.8) funksiyaning musbat ekanligini e'tiborga olib, (2.12) tengsizlikdagi γ_ε bo'yicha olingan integralni baholaymiz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \right| &< \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$\varphi(\alpha)$ funksiya $[0, 2\pi]$ segmentda uzluksiz bo'lgani uchun $\varphi(\alpha) - \varphi(0)$ ayirma shu segmentda chegaralangan bo'ladi:

$$\varphi(\alpha) - \varphi(0) < M.$$

(2.12) dagi Γ_ε bo'yicha olingan integralni ham yetarli kichik qilib olish mumkinligini ko'rsatish uchun $(r, 0)$ nuqtani $|\theta| < \delta(\varepsilon)$

shartni bajaradigan qilib olamiz (z nuqta ξ_0 ga yetarli yaqin qilib olinsa, bu shart bajariladi).

G_ε yoyning nuqtalarida qutb burchak $\alpha(2\delta(\varepsilon), 2\pi - 2\delta(\varepsilon))$ intervalga tegishli bo'lgani sababli, shu nuqtalar uchun $(\alpha - \theta)(\delta(\varepsilon), 2\pi - \delta(\varepsilon))$ intervalga tegishli bo'ladi. Shuning uchun quyidagi tengsizliklar bajariladi:

$$\cos(\theta - \alpha) < \cos\delta(\varepsilon); \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} < \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\delta(\varepsilon)}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \right| &< M \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\delta(\varepsilon)} \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\alpha < \\ &< M \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\delta(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Bu tengsizlikning o'ng tomoni $r \rightarrow R$ da nolga intiladi, demak, agar $R - r < \delta'(\varepsilon)$ bo'lsa,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demak, $|\theta| < \delta(\varepsilon)$ va $R - r < \delta'(\varepsilon)$ bo'lganda

$$|u(r, \theta) - \varphi(0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Shunday qilib, doira uchun Dirixle masalasining yechimi (2.9) formula orqali ifodalanar ekan.

§ 2.3. Shvarts integrali.

Agar $|z| < R$ doirada biror $f(z)$ analitik funksiyani topish talab qilinsa, bu masalani hal qilish uchun $f(z)$ haqiqiy qismiga doir aylanasiida berilgan $u(\xi)$ qiymatlarining ma'lum bo'lishi yetarlidir. haqiqatan,

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} = R \frac{\xi + z}{\xi - z}, \quad \xi = Re^{i\alpha}, \quad z = re^{i\theta}$$

tenglikni e'tiborga olib, ushbu funktsiyani tekshiramiz:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{\xi + z}{\xi - z} d\alpha + Ai \quad (2.13)$$

bundagi A – haqiqiy o'zgarmas. Bu funktsiya Koshi tipidagi integralga oid teoremaga asosan $|z| < R$ doirada analitik funktsiya bo'ladi. (2.13)

formulaning haqiqiy qismi tuzilishi bo'yicha P u a s s o n integralidan iborat. Bundan, darhol (2.13) formula yuqoridagi masalaning yechimi ekanligi kelib chiqadi.

(2.13) formulani S h v a r t s f o r m u l a s i yoki i n t e g r a l i deyiladi. Shvarts integralidagi o'zgarmas A ni topish uchun $z=0$ deb, ushbu ifodani hosil qilamiz:

$$f(0) = u(0) - iv(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) d\alpha + iA,$$

O'rta qiymat haqidagi teoremaga asosan o'ng tomondagi integral $u(0)$ ga teng, demak, $A = v(0)$ bo'lib, Shvars integrali quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{\xi + z}{\xi - z} d\alpha + iv(0) \quad (2.14)$$

§ 2.4. Yarim tekislik uchun Dirixle masalasi.

Haqiqiy o'qda uzluksiz $u(t)$ funktsiya berilgan bo'lsin. Yuqori yarim tekislikda garmonik bo'lgan va haqiqiy o'qda oldindan berilgan qiymatlarini qabul qiluvchi $u(\zeta)$ funktsiyaning z nuqtadagi qiymatini topish uchun yuqori yarim tekislik $\text{Im} z > 0$ ni $|\omega| < 1$ doiraga konform akslantiramiz:

$$\omega = \frac{\xi + z}{\xi - z} \quad \left(\xi = \frac{z - \overline{\omega z}}{1 - \omega} \right)$$

$u[\xi(\omega)] = U(\omega)$ deb boshlab olamiz. Yuqoridagi akslantirishda z nuqta $\omega = 0$ nuqtaga o'tgani uchun o'rta qiymati haqidagi teoremaga asosan:

$$U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\omega) d\alpha \quad (2.15)$$

bunda α – aylanadagi nuqtaning argumenti,

$$e^{i\alpha} = \frac{t - z}{t - \bar{z}}.$$

Oxirgi tenglikni differensiallab, quyidagini topamiz:

$$e^{i\alpha} d\alpha = \frac{2y}{(t-\bar{z})^2} dt, \text{ bundan: } d\alpha = \frac{2ydt}{(t-z)(t-\bar{z})} = \frac{2ydt}{(t-x)^2 + y^2}.$$

(2.15) formulada eski z va t o'zgaruvchilarga qaytib, yuqori yarim tekislikdagi Puasson integralini hosil qilamiz:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{ydt}{(t-x)^2 + y^2} \quad (2.16)$$

Ravshanki,

$$\frac{y}{(t-x)^2 + y^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{i(t-z)}.$$

Bundan foydalanib, yuqori yarim tekislik uchun quyidagi Shvars integralini ham yozish mumkin:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{dt}{t-z} + iA \quad (2.17)$$

bunda A – haqiqiy o'zgarmas. Shu narsani uqtirib o'tish kerakki, (2.16) integral chegaralangan $u(t)$ funksiyalar uchun ham yaqinlashuvchi bo'ladi, lekin (2.17) integralning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $u(t)$ ning chegaralanganligi yetarli bo'lmaydi (chunki (2.17) integral ishorasi ostidagi funksiyaning mavhum qismidan olingan integral (2.16) integralga nisbatan sust yaqinlashadi). Bu integralning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun, masalan,

$u(t)$ funksiyaning $|t| \rightarrow \infty$ da nolga $\frac{1}{|t|^\mu}$ funksiyaga nisbatan sekin intilmasligi yetarlidir, ya'ni $|u(t)| \leq \frac{\text{const}}{|t|^\mu}$, bundagi $\mu > 0$ – ixtiyoriy o'zgarmas son.

M i s o l. Yuqori yarim tekislikda garmonik bo'lgan hamda haqiqiy o'qning (α, β) kesmasida 1 ga, bu o'qning qolgan qismida esa 0 ga teng funksiya topilsin.

Izlanayotgan funksiyani (2.16) ga asosan darhol topa olamiz:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{y dt}{(t-x)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \left(\arctg \frac{\beta - x}{y} - \arctg \frac{\alpha - x}{y} \right).$$

Agar $z - \alpha$ va $z - \beta$ vektorlarning haqiqiy o'q bilan tashkil qilgan burchagini φ_α va φ_β orqali belgilasak, oxirgi formulani quydagicha yozish mumkin:

$$u(z) = \frac{\varphi_\beta - \varphi_\alpha}{\pi} = \frac{\omega}{\pi} \quad (2.18)$$

$$(\varphi_\beta = \varphi_\alpha + \omega)$$

Xulosa

“ Garmonik funksiyalar va Puasson integrali ” mavzusidagi ushbu bitiruv malakaviy ish kerakli adabiyotlar va kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining metodlaridan foydalanib yozilgan bo'lib, uning birinchi bobida garmonik funksiyalar, golomorf funksiya bilan garmonik funksiyalar orasidagi

bog'lanish, qo'shma garmonik funksiyalar o'rganilgan, garmonik va qo'shma garmonik funksiyalarga misollar keltirilgan. Ikkinchi bobda esa garmonik funksiyalar uchun ekstrimum haqidagi teoremlar, Dirixle masalasi va uning yechimi bo'lgan Puasson integrali, shuningdek, Shvarts integrali, yarim tekislik uchun Dirixle masalasi o'rganilgan. Kompleks analiz kursida asosiy masalalardan biri berilgan sohada analitik funksiyani qurish hisoblanadi. Bu bitiruv malakaviy ishida o'rganilgan mavzu qaralayotgan soha berilgan R radiusli doiradan iborat bo'lganda analitik funksiyani topish masalasini qidirilayotgan funksiyaning haqiqiy qismining doira chegarasidagi qiymatlari ma'lum bo'lgan holda topish imkonini beradi. Bundan tashqari fizik masalalardan issiqlik maydonining temperaturasi (vaqtga bog'liq bo'lmagan holda) va biror sohada berilgan temperaturada elektrostatik maydonning potensialini topish kabi masalalarni yechish Dirixle masalasiga keladi. Puasson integrali esa Dirixle masalasining yechimi hisoblanadi.

Mavzuga oid barcha adabiyotlardan foydalanib, bitiruv malakaviy ishga qo'yilgan mavzuni o'rganildi va misollar yordamida yoritildi

Bitiruv malakaviy ish qo'yilgan maqsadiga to'liq erishdi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Т.1, М. Наука, 1985.
2. Xudoyberganov G., Vorisov A.K., Mansurov X.T., Kompleks analiz. T. Universitet. 1998.

3. Sa'dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X.T., Vorisov A.K., Tuychiev T. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami (kompleks analiz). 3 qism. T. «O'zbekiston» 2000.
4. Волковыцкий Л.И., Лунц Г.А., Арамонович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., «Наука» 1975.
5. А. Саъдуллаев. Голоморфные функции многих переменных. Ургенч. Изд. отдел. УрГУ. 2005.
6. Sirojiddinov S.X., Saloxitdinov M.S., Maqsudov Sh. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi. T. «O'qituvchi» 1979.
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М. «Наука». 1977.
8. Сидоров Ю.В., Федорюк И.В., Шабунин М.И. Лекция по теории функций комплексной переменной. М. Наука. 1984.
9. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М. Наука. 1972.
10. Евграфов М.А., Сидоров Ю.В., Федорюк И.В., Шабунин М.И., Бежанов К.А. Сборник задач по теории аналитических функций. М. Наука. 1972
- . www.book.ru
12. www.ziyonet.ru
13. www.exponent.ru
14. www.studentbank.ru
15. www.mexmat.ru