

Қарши Давлат университети
Амалий математика ва информатика кафедраси
“5A130202 – Амалий математика ва ахборот
технологиялари” мутахассислиги 2-курс магистранти
Тошмуродова Гулмира Тўлқиновнанинг

**«Ғовак изотроп муҳитда SH тўлқин
тарқалиш жараёнини математик
моделлаштириш»
мавзусидаги магистрлик диссертацияси**

Қарши-2016

МУНДАРИЖА

КИРИШ

I. ҒОВАК ИЗОТРОП МУҲИТДА ТЎЛҚИН ЖАРАЁНИНИНГ МАТЕМАТИК МОДЕЛИ

- 1.1. Эластик-ғовак муҳит ҳаракатининг чизиклаштирилган тенгламалари
- 1.2. Эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тенгламаси

II. ҒОВАК ИЗОТРОП МУҲИТДА SH ТЎЛҚИН УЧУН МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ ВА ЕЧИЛИШИ

- 2.1. Масаланинг қўйилиши ва сингуляр ечимлар
- 2.2. Масалани гиперболик системага келтириш
- 2.3. Гиперболик система ечимининг сингулярлиги

III. SH ТЎЛҚИН ТЕНГЛАМАЛАРИ УЧУН СОНЛИ УСУЛ

- 3.1. Масаланинг сонли ечиш усули
- 3.2. Ҳисоблаш схемасининг тавсифи

ХУЛОСА

АДАБИЁТЛАР

КИРИШ

Мавзунинг долзарблиги. Ўтказувчан ғовак, ёриқ муҳитлардаги суюқликларни фильтрация жараёнини текшириш гидромеханикада назарий ва амалий аҳамиятга эга ҳамда бундай тадқиқотлар кўчиш жараёнларини тавсифловчи дифференциал тенгламаларнинг математик моделини қуришда бирмунча қийинчиликларга дуч келинади.

Бундай масалалар ер қимирлашларини башорат (прогноз) қилишда ва нефть пластларидан нефть олишни жадаллаштириш технологияларини ишлаб чиқишда долзарб масалалардан биридир.

Математик физикада одатда қуйидаги кўринишдаги масалалар қаралади. Дифференциал тенглама ва унинг ечими қаноатлантириши керак бўлган шартлар берилади. Одатда бу қўшимча шартлар дифференциал тенглама ечимлар мажмуасидан биттасини ажратади. Математик физикадаги коррект бошланғич чегаравий масалаларни тўғри масала деб аташ қабул қилинган.

Ҳар қандай тўғри масалани қўйиш учун, бир қанча маълумотларни (функцияларни) бериш лозим, уларнинг бир қисми дифференциал тенгламани (чизиқли тенглама коэффициентлари), қолган қисми эса бошланғич ёки чегаравий шартларни аниқлайди. Тўғри масалани ечиш натижасида берилган функцияларга янги функция қаралаётган масала ечими мос келтирилади. Шундай қилиб, тўғри масаланинг маълумотларида (берилган функцияларида) аниқланган оператор ҳосил бўлади.

Ғовак муҳитлар учун қўйилган динамик масалаларда сейсмик тўлқинларнинг тарқалиши тезлиги ва зичлигидан ташқари, яна муҳитнинг ғоваклиги, ўтказувчанлиги ҳамда бошқа кинетик

параметрлари ҳам аниқланадики, улар эластик муҳит учун қўйилган динамик масалалардан ўлароқ энергиянинг ютилишини аниқлайди.

Шунинг учун ҳам бу масалалар математик моделлаштиришнинг муҳим долзарб муаммолари ҳисобланади.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Гиперболик тенгламалар ва системалар учун динамик масалалар биринчи марта Лаврентьев, В.Г. Романов, А.С. Благовещенский ва А.С. Алексеевлар томонидан қўйилган ва ўрганилган. Масалани ўрганишнинг турли усул ва йўллари М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, А.С. Благовещенский, А.И. Прилепко, Ю.Е. Аниконов, А.Л. Бухгейм, Х.Х. Имомназаров, А. Хайдаров, Д.К. Дурдиев ва бошқаларнинг ишларида таклиф этилган ва ривожлантирилган.

Илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Магистрлик диссертация ишининг «Ғовак изотроп муҳитда SH тўлқин тарқалиш жараёнини математик моделлаштириш» мавзуси Қарши давлат университетининг Илмий кенгашида тасдиқланган, “Амалий математика ва информатика” кафедрасининг тематик режасига, ҳамда тадқиқотчи изланувчи сифатида иштирок этаётган А-13-18-“ Икки фазали муҳит нозизиқли тўлқин динамикаси учун тўғри ва тесқари масалаларни назарий ва сонли тадқиқ қилиш” грантининг ишлари режалари билан боғлиқ.

Тадқиқотнинг мақсади. Ғовак изотроп муҳитда SH тўлқин тарқалиш жараёнини математик моделлаштириш, бунда ҳосил бўлувчи масалаларнинг ечимларини мавжудлик ва ягоналикка текшириш, бу масалаларнинг сонли ечиш методларини топиш ҳамда мос дастурларини тузиш.

Тадқиқот объекти ва предмети: Тадқиқот объекти – мураккаб тузилишдаги ғовак муҳитдаги тўлқинлар. Тадқиқот предмети – ғовак

муҳитда SH тўлқин тарқалиш жараёнларини математик моделлаштириш ҳамда бунда ҳосил бўлувчи масалалар.

Мавзу бўйича режалаштирилаётган ишлар. Қўйилган мақсадга эришиш учун қуйидаги ишлар режалаштирилган:

- эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тарқалиш жараёнининг математик моделини қуриш;
- эластик-ғовак муҳитда бир ўлчовли SH тўлқин тенгламасининг сингуляр ечимини қуриш;
- эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тарқалиш жараёнининг сонли ечиш алгоритминини ишлаб чиқиш.

Тадқиқот методлари: Математик моделлаштириш, гиперболик системалар учун характеристикалар усули, интеграл тенгламалар ва чекли айирмалар усуллари ҳамда дастурлаш технологияси

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: Қуйидаги натижалар янги:

- эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тарқалишининг математик модели;
- эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тенгламасининг сингуляр ечими;
- эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тарқалиш жараёнининг сонли ечиш усули ва унга мос дастур.

Олинган илмий натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқотнинг илмий аҳамияти: олинган натижалар турли табиий ва технолгик жараёнларни назарий текширишда қўлланилиши мумкин.

Диссертация ишининг амалий аҳамияти шундан иборатки, тадқиқ этилган математик модел ва яратилган алгоритм сейсмик соҳада илмий

тадқиқот олиб боровчи илмий-текшириш институтларида, нефт ва газ конларини аниқлаш ва ундан фойдаланиш учун тавсия этилиши мумкин.

Диссертация тадқиқотининг натижаларидан фойдаланиш бўйича тавсиялар. Диссертация иши назарий характерга эга. Диссертацияда қўлланилган усуллар ва унга ҳосил қилган натижалар сейсмологияда, нефть ва газ захираларини аниқлаш ва ундан фойдаланишда қўлланилиши мумкин. Қўлланилган сонли усуллар амалий жиҳатдан муҳим бўлган бошқа илмий-техник масалаларни ечишда фойдаланилиши мумкин.

Диссертация иши апробацияси. Диссертация иши натижалари “Сибирь электрон математика хабарномаси (SEMI)” журналида (Новосибирск, 2016) ва “Анализнинг долзарб масалалари” Республика илмий конференцияси (Қарши, 2016)да нашр этилган.

Диссертация иши натижалари. Диссертация мавзуси бўйича иккита илмий иш, шундан биттаси илмий журналда чоп этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация 62 саҳифадан иборат бўлиб, кириш, учта боб, хулоса, 26 расм ва адабиётлар рўйхатидан ташкил топган.

Киришда мавзунинг долзарблиги, илмий янгилиги, олинган натижаларнинг илмий ва амалий аҳамияти ва диссертация ишининг ҳажми қаралган.

Биринчи бобнинг биринчи параграфида эластик-ғовак муҳит ҳаракатининг чизиқлаштирилган тенгламалари, иккинчи параграфда эса эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тенгламаси муҳокама қилинади.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида SH тўлқин учун масаланинг қўйилиши ва сингуляр ечимлари, иккинчи ва учинчи

параграфларда эса масалани гиперболик системага келтириб, гиперболик системанинг сингуляр ечими қурилган ва таҳлил қилинган.

Охирги бобнинг биринчи ва иккинчи параграфларида эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тенгламалари учун сонли ечиш усуллари характеристикалар методига таянган ҳолда интеграл тенгламалар системасини ечиш усули ишлаб чиқилган.

Хулоса қисмида диссертация иши бўйича хулосалар ёзилган.

Адабиётлар рўйхатида фойдаланган манбалар рўйхати келтирилган. Диссертация ишининг асосий натижалари [28,29] ишларда эълон қилинган.

I. ҒОВАК ИЗОТРОП МУҲИТДА ТЎЛҚИН ЖАРАЁНИНИНГ МАТЕМАТИК МОДЕЛИ

1.1. Эластик-ғовак муҳит ҳаракатининг чизиқлаштирилган тенгламалари

Фараз қилайлик, эластик муҳит(*solid-s*) ғовакларга эга, ғоваклар эса суюқлик(*liquid-l*) билан тўлдирилган бўлсин. Бу муҳитда товуш тўлқинларининг тарқалишини ўрганамиз.

Тезликлар

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \text{ (эластик-ғовак жисмда),}$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \text{ (суюқликда)}$$

ва термодинамик катталиқлар фазонинг ҳар бир нуқтасида бирор термодинамик турғун ғолатга нисбатан кичик тебрансин. Бунда тўлқин ҳаракати ҳосил бўлади. [13] ишда ночизиқли континуал фильтрация математик модели тенгламалари тузилган. Бу муҳитдаги товуш тўлқинларини ўрганиш учун диссипатив жараёнларни ҳисобга олмасдан, ғовак-эластик муҳит ҳаракати тенгламаларини текшириш лозим [13,14]. Ҳаракат тенгламаларини келтирайлик.

Массанинг сақланиш қонуни:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

$$\rho = \rho_s + \rho_l, \text{ (муҳит зичлиги)}$$

Энтропиянинг сақланиш қонуни:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{S}{\rho} \vec{j} \right) = 0,$$

$$\vec{j} = \rho_s \vec{u} + \rho_l \vec{v}, \text{ (импульс зичлиги)}$$

Импульснинг сақланиш қонуни

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \Pi_{ik} = 0, \quad (1.1.1)$$

$$\Pi_{ik} = \rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k - \sigma_{ik} \text{ (импульс оқими)}$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} - h_{ik} g_{kj}, \text{ (кучланишлар тензори)}$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + g_{kj} \partial_i u_j + g_{ij} \partial_k u_j + u_j \partial_j g_{ik} = 0,$$

$$\rho_s = \rho_{s,0} \sqrt{\det(g_{ik})},$$

суюқлик ҳаракати тенгламаси

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\rho_s}{2\rho} \nabla (\vec{u} - \vec{v})^2 - \frac{h_{ik}}{2\rho} \nabla g_{ik},$$

муҳитнинг ҳолат тенгламаси

$$e_0 = e_0(\rho, S, \vec{j}_0, g_{ik}).$$

Охирги бу функционал боғланиш маълум бир эркинликни ўз ичига олади.

Энергиянинг сақланиш қонуни

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \partial_k \left(\left(\tilde{\mu} + \frac{v^2}{2} \right) j_k + \frac{TS}{\rho} j_k + (\vec{u}, \vec{j}_0) u_k + u_i h_{km} g_{mi} \right) = 0,$$

ва эластик муҳит учун массанинг сақланиш қонуни

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \text{div } \rho_s \vec{u} = 0,$$

тўла тенгламалар системасига кирмайди, чунки бу тенгламалар тўла тенгламалар системасининг натижасидир.

(1.1.1) системада e -, T -, S -, $\tilde{\mu}$ - бир ҳажм бирлигидаги мос равишда ички энергия, температура, энтропия, кимёвий потенциал, ρ - зичлик, σ_{ik} – кучланишлар тензори, g_{ik} – деформация метрик тензори, p –

суюқлик босим, $\vec{j}_0 = \rho_s(u - v)$ – нисбий импульс зичлиги, ρ_s ва ρ_l – эластик ва суюқ муҳитдаги парциал зичликлар.

Тўла система (1.1.1)ни ушбу

$$u = 0,$$

$$v = 0,$$

$$T = T_0,$$

$$h_{ik} = 0,$$

$$p = p_0.$$

$$\rho = \rho_0$$

термодинамик мувозанат ҳолати яқинида чизиқлилаштирамиз. Бунда қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{0,s} \operatorname{div} \vec{u} + \rho_{0,l} \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \partial_i p + \frac{1}{\rho_{0,s}} \partial_k h_{ik} = 0, \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + \partial_i u_k + \partial_k u_i = 0,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \partial_i p = 0,$$

бу ерда $\rho_{0,s}$ ва $\rho_{0,l}$ – эластик ғовак жисм ва суюқликнинг термодинамик мувозанат ҳолатидаги парциал зичликлар.

s билан бир масса бирлигига мос келган энтропияни белгилайлик:

$$s = \frac{S}{\rho}$$

Термодинамик мувозанат ҳолатдан кичик четланишларда муҳитнинг ҳолат тенгламасини қуйидаги кўринишга келтириш мумкин [14]:

$$p = -\frac{K}{2} g_{ll} + \left(\rho_0^2 \alpha_3 + \frac{K}{\rho_0} \right) \rho + \rho_0^2 \alpha_1 s + const ,$$

$$h_{ik} = \mu g_{ik} + \frac{\lambda}{2} g_{ll} \delta_{ik} - K \frac{\rho}{\rho_0} \delta_{ik} + const , \quad (1.1.3)$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu ,$$

λ, μ, α_3 – ҳолат тенгламасининг коэффицентлари [17],

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

– Кронекер символи.

(1.1.2) системадаги биринчи тенгламадан қуйидаги скаляр тенглик келиб чиқади

$$\frac{\partial g_{ii}}{\partial t} + 2 \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

(1.1.2) системадан термодинамик катталикларни йўқотамиз. Бунинг учун учинчи ва охирги тенгламаларни вақт бўйича дифференциаллаймиз.

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_i} + \frac{1}{\rho_{0,s}} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial t \partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_i} = 0.$$

Бундан ташқари (1.1.3) ифодани ҳам дифференциаллаймиз ва олинган ифодани охирги икки тенгламага қўямиз. Натижада тезликлар ҳосилаларидан ташқари ушбу g_{ik}, g_{ll}, s, ρ , катталиклар пайдо бўлади.

Бу ҳосилаларни (1.1.2) система ёрдамида йўқотамиз. Оддий шакл алмаштиришлардан сўнг, \vec{u}, \vec{v} тезликларга нисбатан қуйидаги ёпиқ тенгламалар ситемасига келамиз:

$$\begin{aligned} & \ddot{\vec{u}} + \left(\frac{2K}{\rho_0} - \rho_0 \left(\rho_0 \alpha_3 + \frac{K}{\rho_0^2} \right) - \frac{\lambda + \mu}{\rho_{0,s}} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{u} - \\ & - \frac{\mu}{\rho_{0,s}} \Delta \vec{u} + \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} \left(\frac{K}{\rho_{0,s}} - \left(\rho_0^2 \alpha_3 + \frac{K}{\rho_0} \right) \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ & \ddot{\vec{v}} + \left(\frac{K}{\rho_0} - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} \left(\rho_0^2 \alpha_3 + \frac{K}{\rho_0} \right) \right) \nabla \operatorname{div} \vec{u} - \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} \left(\frac{K}{\rho_0} + \rho_0^2 \alpha_3 \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v} = 0. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

1.2. Эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тенгламаси

Фараз қилайлик, компоненталар орасида ишқаланиш мавжуд бўлсин. Биржинсли бўлмаган ғовак-эластик изотроп муҳитда (1.1.2) ҳаракат тенгламалар системасининг коэффицентлари фақат z га боғлиқ бўлсин деб фараз қилайлик. У система қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{0,s} \operatorname{div} \vec{u} + \rho_{0,l} \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \partial_i p + \frac{1}{\rho_{0,s}} \partial_k \sigma_{ik} + \chi(z) \frac{\rho_{0,l}^2(z)}{\rho_{0,s}(z)} (u_i - v_i) = 0, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + \partial_i u_k + \partial_k u_i = 0,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \partial_i p - \chi(z) \rho_{0,l}(z) (u_i - v_i) = 0,$$

$\chi(z)$ -ишқаланиш коэффициентлари.

Айталик, тезлик векторлари қуйидаги кўринишда ифодалансин

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (0, u_y(x, z, t), 0), \\ \vec{v} &= (0, v_y(x, z, t), 0). \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Бундай ҳолда, (1.1.2) ва (1.1.3) тенгламаларга биноан

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

булардан тенгламалардан қуйидагилар топилади

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{xy} &= \mu(z) \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \dot{\sigma}_{yz} &= \mu(z) \frac{\partial u_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial \dot{\sigma}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\sigma}_{yz}}{\partial z} - \chi(z) \rho_{0,l}^2(z) \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{\partial v_y}{\partial t} \right) &= \rho_{0,s}(z) \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} - \chi(z) \rho_{0,l}(z) (u_y - v_y) &= 0, \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

(1.2.4) системадаги биринчи ва иккинчи тенгламаларни учинчисига қўйиб қуйидаги тенгликни оламиз

$$\mu(z) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu(z) \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) - \chi(z) \rho_{0,t}^2(z) \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{\partial v_y}{\partial t} \right) = \rho_{0,s}(z) \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (1.2.5)$$

бундан кўринадики, ғовак-эластик муҳитда (1.2.1) фараз бажарилганда $y = const$ текислик бўйлаб тўлқин тарқалади

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho_{0,s}(z)}}$$

Бунга ўхшаш тўлқин соф эластик муҳитда ҳам тарқалади ва SH тўлқин дейилади.

II. ҒОВАК ИЗОТРОП МУҲИТДА SH ТҮЛҚИН УЧУН МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ ВА ЕЧИЛИШИ

2.1. Масаланинг қўйилиши ва сингуляр ечимлар

Тезлик векторлари фақат t ва z ларга боғлиқ бўлган ҳолни қарайлик. Белгилаймиз: $U = u_y(z, t)$, $V = v_y(z, t)$. (1.2.5) тенгламадан эга бўламиз:

$$\rho_s(z)U_{tt} = (\mu(z)U_z)_z - \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t), \quad (2.1.1)$$

(1.2.4) тенгламани t бўйича дифференциаллаб қуйидагини оламиз:

$$\rho_l(z)V_{tt} = \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t), \quad (2.1.2)$$

(2.1.1), (2.1.2) тенгламалар қаралаётган ютувчи муҳитда SH тўлқин тарқалишини тавсифлайди [13, 14, 17].

Эслатайликки, эластик жисмнинг тезлик вектори U , ғовак жисмнинг тезлик вектори V , ҳамда $\rho_s(z)$ ва $\rho_l(z)$ лар эластик ва ғовак (суюқлик билан тўлдирилган) жисмларнинг парциал зичликлари, $\chi(z)$ - ишқаланиш коэффициенти. Бу ерда ва бундан кейин қулайлик учун индексдаги нолни ёзмаймиз.

Муҳит $z > 0$ ярим фазони эгалласин. Унда (2.1.1), (2.1.2) системалар $z > 0$ қаралади. Фараз қилайлик, ғовак-эластик муҳит $t < 0$ пайтларда тинч ҳолатда бўлсин:

$$\begin{aligned} U|_{t<0} &= 0, \\ U_t|_{t<0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

$$\begin{aligned} V|_{t<0} &= 0, \\ V_t|_{t<0} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

$z = 0$ чегарада импульс куч қўйилган бўлсин [23]:

$$\mu U_z \Big|_{z=0} = F(t), \quad (2.1.5)$$

бу ерда

$$F(t) = \delta(t) + f(0)\varepsilon(t) + \dots, \quad (2.1.6)$$

$\delta(t)$ – Диракнинг дельта функцияси, $\varepsilon(t)$ – Хевисайд функцияси.

Берилган бу маълумотларга, узлуксиз дифференциалланувчи $\rho_s(z)$ ва $\mu(z)$, узлуксиз $\rho_l(z), \chi(z)$ функцияларга кўра $U(t, z), V(t, z)$ тўлқин майдонларини аниқлаш керак

Қўйилган (2.1.1)-(2.1.5) масалани ечайлик. Ечимни қуйидаги кўринишда излаймиз ([9]):

$$U(t, z) = \alpha^s(z)\varepsilon(t - \tau(z)) + \beta^s(z)(t - \tau(z))_+ + \frac{1}{2}\gamma^s(z)(t - \tau(z))_+^2 + \dots \quad (2.1.7)$$

$$V(t, z) = \alpha^l(z)\varepsilon(t - \tau(z)) + \beta^l(z)(t - \tau(z))_+ + \frac{1}{2}\gamma^l(z)(t - \tau(z))_+^2 + \dots, \quad (2.1.8)$$

бу ерда $\alpha^s(z), \beta^s(z), \dots, \alpha^l(z), \beta^l(z), \dots$ ва $\tau(z)$ коэффициентлар- ҳозирча номаълум функциялар. $\tau(0) = 0$ деб ҳисоблаймиз.

(2.1.7) ва (2.1.8) формулаларда уч нукта $t = \tau(z)$ да олдинги ҳадларга караганда силлиқроқ ҳадларни белгилайди ҳамда

$$x_+^n = \begin{cases} x^n, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Ушбу

$$\varepsilon'(t) = \delta(t), \quad (t_+)' = \varepsilon(t), \quad (t_+^2)' = 2t_+,$$

формулардан фойдаланиб, (2.1.7) ва (2.1.8) лардан дифференциаллаш йўли билан(кулайлик учун t ва z аргументларни ташлаб кетамиз) куйидаги системани оламиз:

$$U_t = \alpha^s \delta(t - \tau) + \beta^s \varepsilon(t - \tau) + \gamma^s (t - \tau)_+ + \dots$$

$$U_{tt} = \alpha^s \delta'(t - \tau) + \beta^s \delta(t - \tau) + \gamma^s \varepsilon(t - \tau) + \dots$$

$$U_z = (\alpha^s)' \varepsilon(t - \tau) + \alpha^s \delta(t - \tau) (-\tau') + (\beta^s)' (t - \tau)_+ + \beta^s \varepsilon(t - \tau) (-\tau)' + \gamma^s (t - \tau)_+ \tau' + \dots$$

$$\begin{aligned} (\mu U_z)_z &= (\mu(\alpha^s)')' \varepsilon(t - \tau) - \tau' \mu(\alpha^s)' \delta(t - \tau) - (\tau' \mu \alpha^s)' \delta(t - \tau) + \\ &+ (\tau')^2 \mu \alpha^s \delta'(t - \tau) + (\mu(\beta^s)')' (t - \tau)_+ - \tau' \mu(\beta^s)' \varepsilon(t - \tau) - \\ &- (\tau' \mu \beta^s)' \varepsilon(t - \tau) + (\tau')^2 \mu \beta^s \delta(t - \tau) + (\tau')^2 \mu \gamma^s \varepsilon(t - \tau) + \dots \end{aligned}$$

$$V_t = \alpha^l \delta(t - \tau) + \beta^l \varepsilon(t - \tau) + \gamma^l (t - \tau)_+ + \dots$$

$$V_{tt} = \alpha^l \delta'(t - \tau) + \beta^l \delta(t - \tau) + \gamma^l \varepsilon(t - \tau) + \dots$$

Бу ёйилмаларни (2.1.1), (2.1.2) тенгламаларга кўямиз, $\delta'(t - \tau)$, $\delta(t - \tau)$ ва $\varepsilon(t - \tau)$ лар олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, куйидагиларга келамиз

$$\delta'(t - \tau): \begin{cases} \rho_s \alpha^s = (\tau')^2 \mu \alpha^s & (2.1.9) \\ \rho_l \alpha^l = 0 & (2.1.10) \end{cases}$$

$$\delta(t - \tau): \begin{cases} \rho_s \beta^s = (\tau')^2 \mu \beta^s - (\tau' \mu \alpha^s)' - \tau' \mu(\alpha^s)' - \chi \rho_l^2 (\alpha^s - \alpha^l) & (2.1.11) \\ \rho_l \beta^l = \chi \rho_l^2 (\alpha^s - \alpha^l) & (2.1.12) \end{cases}$$

$$\varepsilon(t-\tau): \begin{cases} \rho_s \gamma^s = (\mu \alpha^s)' - \mu \beta^s \tau' - (\tau' \mu \beta^s)' - \chi \rho_i^2 (\beta^s - \beta^l) + (\tau')^2 \mu \gamma^s & (2.1.13) \\ \rho_l \gamma^l = \chi \rho_i^2 (\beta^s - \beta^l) & (2.1.14) \end{cases}$$

(2.1.5) чегаравий шарт, (2.1.6)ни ҳисобга олсак, куйидаги кўринишда ёзилади

$$\begin{aligned} & -\tau'(0)\mu(0)\alpha^s(0)\delta(t) + \left(\mu(0)(\alpha^s)' \Big|_{z=0} - \tau'(0)\mu(0)\beta^s(0) \right) \varepsilon(t) + \dots = \\ & = \delta(t) + f(0)\varepsilon(t) + \dots \end{aligned}$$

бундан

$$-\tau'(0)\mu(0)\alpha^s(0) = 1, \quad \mu(0)(\alpha^s)' \Big|_{z=0} - \tau'(0)\mu(0)\beta^s(0) = f(0)$$

ёки

$$\alpha^s(0) = -\frac{1}{\tau'(0)\mu(0)} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_s(0)}{\mu(0)}} \mu(0)} = -\frac{1}{\sqrt{\rho_s(0)\mu(0)}}, \quad (2.1.15)$$

$$\beta^s(0) = \frac{\mu(0)(\alpha^s)' \Big|_{z=0} - f(0)}{\tau'(0)\mu(0)}. \quad (2.1.16)$$

(2.1.9) тенгламадан $\tau(z)$ учун Эйконал тенгламасини оламиз ва уни ечамиз:

$$(\tau')^2 = \frac{\rho_s}{\mu}, \quad \tau' = \sqrt{\frac{\rho_s}{\mu}}, \quad \tau'(z) = \frac{1}{c_t(z)}, \quad \tau(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{c_t(\xi)}, \quad (2.1.17)$$

бу ерда $c_t(z) = \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho_s(z)}}$ ғовак-эластик муҳитда SH тўлқин тарқалиши

тезлиги.

(2.1.10) тенгламада $\alpha^l(z) = 0$.

Энди (2.1.11) тенгламадан

$$(\mu \alpha^s \tau')' + \mu (\alpha^s)' \tau' + \chi \rho_i^2 \alpha^s = 0.$$

(2.1.17) тенгламани ҳисобга олиб, бу тенгламани қуйидаги кўринишга олиб келамиз

$$(\sigma \alpha^s)' + \sigma (\alpha^s)' + \chi \rho_l^2 \alpha^s = 0, \quad (2.1.18)$$

бу ерда

$$\sigma = \sigma(z) = \sqrt{\mu(z) \rho_s(z)}. \quad (2.1.19)$$

(2.1.18) тенглама $\sqrt{\sigma} \alpha^s$ ноъмалум функцияга нисбатан биринчи тартибли оддий чизиқли дифференциал тенглама бўлади:

$$2\sqrt{\sigma} (\sqrt{\sigma} \alpha^s)' + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \chi \rho_l^2 \sqrt{\sigma} \alpha^s = 0,$$

бу тенгламанинг ечими квадратураларда осонгина топилади

$$\sqrt{\sigma(z)} \alpha^s(z) = c_1 \exp\left(-\int_0^z \frac{\chi(\xi) \rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)} d\xi\right) \quad (c_1 - \text{const}).$$

(2.1.15) бошланғич шартларни ҳисобга олиб, c_1 ўзгармасни топамиз:

$$c_1 = -\frac{1}{\sigma(0)}.$$

Шундай қилиб,

$$\alpha^s(z) = -\frac{1}{\sqrt{\sigma(z)\sigma(0)}} \exp\left(-\int_0^z \frac{\chi(\xi) \rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)} d\xi\right) \quad (2.1.20)$$

(2.1.12) тенгламадан $\alpha^s(z)$ маълум функцияга кўра $\beta^l(z)$ ни топамиз:

$$\beta^l(z) = \chi(z) \rho_l(z) \alpha^s(z). \quad (2.1.21)$$

(2.1.11) тенгламадан $\beta^s(z)$ аниқлаш учун қуйидаги тенгламага келамиз:

$$(\mu(\alpha^s)'_z)'_z - (\mu\beta^s\tau'_z)'_z - \mu(\beta^s)'_z\tau'_z - \chi(z)\rho_l^2(z)(\beta^s(z) - \beta^l(z)) = 0,$$

Уни қуйидаги кўринишга келтирамиз

$$2\sqrt{\sigma} (\sqrt{\sigma} \beta^s)' + \frac{\chi \rho_l^2}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{\sigma} \beta^s = g,$$

бу ерда

$$g = g(z) = (\mu(\alpha^s)')' + \chi \rho_l^2 \beta^l$$

ва тенгламадаги барча коэффициентлар z нинг маълум функциялари.

Бу биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламани ечиб, топамиз:

$$\beta^s(z) = \frac{1}{\sqrt{\sigma(z)}} \exp\left(-\int_0^z \frac{\chi(\xi) \rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)} d\xi\right) \times \\ \times \left(c_2 + \int_0^z \frac{g(\eta)}{2\sqrt{\sigma(\eta)}} \exp\left(\int_0^\eta \frac{\chi(\xi) \rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)} d\xi\right) d\eta \right). \quad (2.1.22)$$

(2.1.16) бошланғич шартдан ҳамда (2.1.17), (2.1.19) формулалардан фойдаланиб, c_2 ўзгармасни аниқлаймиз:

$$c_2 = \frac{\sigma'(0) + \chi(0) \rho_l^2(0)}{2\rho_s(0)\mu(0)}. \quad (2.1.23)$$

(2.1.23) ни (2.1.22) га қўйиб, $\beta^s(z)$ топамиз:

Шундай қилиб, $\tau(z), \alpha^l(z), \alpha^s(z), \beta^l(z), \beta^s(z)$ номаълум функцияларни аниқладик.

$U(t, z)$ ва $V(t, z)$ тўлқинлар майдони ёйилмасидаги ҳадларни $\sigma(z)$ силлиқлигидан келиб чиқиб, қанча лозим бўлса шунчасини топиш мумкин.

Хусусий ҳолда, агар

$$\sigma(z) = 1,$$

яъни

$$\mu(z) \rho_s(z) = 1$$

бўлса, $\alpha^s(z), \beta^s(z)$ учун ифодалар анча соддалашади:

$$\alpha^s(z) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^z \chi(\xi) \rho_l^2(\xi) d\xi\right)$$

$$\beta^s(z) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^z \chi(\xi) \rho_i^2(\xi) d\xi\right) \times$$

$$\times \left(\chi(0) \rho_i^2(0) + \int_0^z g(\eta) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^\eta \chi(\xi) \rho_i^2(\xi) d\xi\right) d\eta \right)$$

Агар ρ_s ва ρ_i парциал зичликлар мос равишда ρ_s^f ва 0 га интилса, ғоваклик йўқолади [13,14,17]. ρ_s^f -эластик муҳит зичлиги. (2.1.20), (2.1.22) тенгламаларда лимитга ўтиб, [9] келтирилган тўла эластик муҳит учун тўлқин майдонидаги ёйилмалар коэффициентларини оламиз.

Шундай қилиб, компоненталар орасидаги ишқаланишни ҳисобга олган ҳолда, эластик-ғовак муҳит учун бир ўлчамли SH тўлқин тенгласининг сингуляр ечимини топдик.

2.2. Масалани гиперболик системага келтириш

Энди z ўрнига x координатани қуйидаги формула орқали киритамиз:

$$x = \int_0^z \frac{d\xi}{c_i(\xi)} \quad (2.2.1)$$

x координатага ўтганимиздан сўнг, эластик-ғовак муҳитда тўлқин тарқалиш тезлиги бирга тенг бўлади. (2.2.1) формуладан

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{c_i} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Шунинг учун (2.1.1) ва (2.1.2) тенгламалар қуйидаги кўринишни олади

$$U_{tt} - U_{xx} = \frac{\sigma'}{\sigma} U_x - \chi \frac{\rho_l^2}{\rho_s} (U_t - V_t) \quad (2.2.2)$$

$$V_{tt} = \chi \rho_l (U_t - V_t) \quad (2.2.3)$$

(2.1.5) чегаравий шарт алмаштиришдан кейин қуйидагича бўлади:

$$\sigma U_x|_{x=0} = F(t) \quad (2.2.4)$$

(2.2.2) ва (2.2.4) формулалардаги σ функция юқоридаги (2.1.19) формулада аниқланган .

Қуйидаги функцияларни киритайлик

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_1 = U_t - U_x, \\ \tilde{\Psi}_2 = U_t + U_x, \\ \Phi = V_t \end{cases} \quad (2.2.5)$$

У ҳолда

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial t} = U_{tt} - U_{xt} \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial x} = U_{tx} - U_{xx} \quad , \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}_2}{\partial t} = U_{tt} + U_{xt} \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\Psi}_2}{\partial x} = U_{tx} + U_{xx} \quad . \quad (2.2.7)$$

Фараз қилайлик, U функция силлиқ бўлсин. У ҳолда $U_{xt} = U_{tx}$ аралаш ҳосилалар тенглигидан фойдаланиб, (2.2.6) ва (2.2.7) тенгламаларни ҳадма-ҳад айириб, топамиз:

$$U_{tt} - U_{xx} = \frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial x} \quad ,$$

$$U_{tt} - U_{xx} = \frac{\partial \tilde{\Psi}_2}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\Psi}_2}{\partial x} \quad . \quad (2.2.8)$$

(2.2.8)ни (2.2.2) тенгламага қўйиб, (2.2.5) белгилашдан фойдаланиб, ҳамда (2.2.3) тенгламада шакл алмаштириб қуйидаги системага келамиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_1}{\partial x} = \frac{\sigma'}{2\sigma} (\tilde{\Psi}_2 - \tilde{\Psi}_1) - \frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} (\tilde{\Psi}_2 + \tilde{\Psi}_1) + \chi \frac{\rho_l^2}{\rho_s} \Phi, \\ \frac{\partial \tilde{\Psi}_2}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\Psi}_2}{\partial x} = \frac{\sigma'}{2\sigma} (\tilde{\Psi}_2 - \tilde{\Psi}_1) - \frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} (\tilde{\Psi}_2 + \tilde{\Psi}_1) + \chi \frac{\rho_l^2}{\rho_s} \Phi, \\ \frac{\partial \hat{O}}{\partial t} = \frac{\chi}{2} \rho_l (\tilde{\Psi}_1 + \tilde{\Psi}_2) - \chi \rho_l \hat{O}. \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Ψ вектор-функцияни қуйидаги формула ёрдамида киритамиз:

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \tilde{\Psi}_2 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \Psi$$

ёки

$$\tilde{\Psi}_1 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \Psi_1, \quad \tilde{\Psi}_2 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \Psi_2$$

(2.2.9) системани оддий шакл алмаштиришлардан сўнг Ψ, Φ ларга нисбатан тенгламалар системасини ҳосил қиламиз

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} & -\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} + q \\ -\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} - q & -\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} \end{pmatrix} \Psi + \chi \sqrt{\sigma} \frac{\rho_l^2}{\rho_s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Phi, \quad (2.2.10)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\chi}{2\sqrt{\sigma}} \rho_l (\Psi_1 + \Psi_2) - \chi \rho_l \Phi, \quad (2.2.11)$$

бу ерда

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad q(x) = \frac{\sigma'_x}{2\sigma}.$$

Бошланғич шартлар қуйидаги кўринишни олади

$$\Psi|_{t<0} = 0, \quad (2.2.12)$$

$$\Phi|_{t<0} = 0. \quad (2.2.13)$$

(2.1.5), (2.1.6) чегаравий шартлар эса қуйидаги кўринишда ёзилади

$$\Psi|_{x=0} = s(t). \quad (2.2.14)$$

(2.2.14) формулаларда

$$s(t) = (s_1(t), s_2(t)) = \left(\sqrt{\sigma(0)} \dot{G}(t) - \frac{1}{\sqrt{\sigma(0)}} F(t), \sqrt{\sigma(0)} \dot{G}(t) + \frac{1}{\sqrt{\sigma(0)}} F(t) \right),$$

бу ерда $G(t)$ орқали U функциянинг $z=0$ даги қиймати белгиланган: $U(z, t)|_{z=0} = G(t)$; бу ерда ва бундан кейин ўзгарувчи устидаги нукта вақт бўйича ҳосилани билдиради.

Фараз қилайлик, тўлқинни ҳосил қилувчи манба шундай бўлсинки, (2.2.10), (2.2.11) системанинг мос ечими қуйидаги кўринишга эга бўлсин:

$$\Psi(t, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t-x) + \begin{pmatrix} \psi_1(t, x) \\ \psi_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad (2.2.15)$$

$$\Phi(t, x) = \psi_3(t, x), \quad (2.2.16)$$

бу ерда ψ_i ($i=1, 2, 3$) $t \geq x$ да соҳада узлуксиз, $\text{supp } \psi_i(t, x) \subseteq \{t \geq x\}$; улар $t = x$ узилишга эга бўлиши мумкин.

Айтайлик, $\Psi_1(t, x), \Psi_2(t, x)$ функциялар $x=0$ да ушбу

$$\Psi_1(t, 0) = \alpha \Psi_2(t, 0) + M(t), \quad (2.2.17)$$

муносабат билан боғланган бўлсин,

бу ерда $\alpha = \text{const}$, $M(t)$ - берилган функция ва

$$M(t) = \delta(t) + m(t).$$

(2.2.17) шарт $s_1(t)$ ва $s_2(t)$ функциялар орасида боғланиш мавжудлигини англатади. Бу боғланиш $F(t)$ ва $G(t)$ функциялар орқали қуйидагича ёзилади:

$$\sqrt{\sigma(0)} \dot{G}(t) - \frac{F(t)}{\sqrt{\sigma(0)}} = \alpha \left(\sqrt{\sigma(0)} \dot{G}(t) + \frac{F(t)}{\sqrt{\sigma(0)}} \right) + M(t).$$

(2.2.10), (2.2.11) масаланинг ечимини (2.2.15), (2.2.16) кўринишда излаймиз. Тушунарлики, бу масала ечими $t = x$ характеристика остида нолга тенг:

$$\Psi(t, x) \Big|_{t < x} \equiv 0,$$

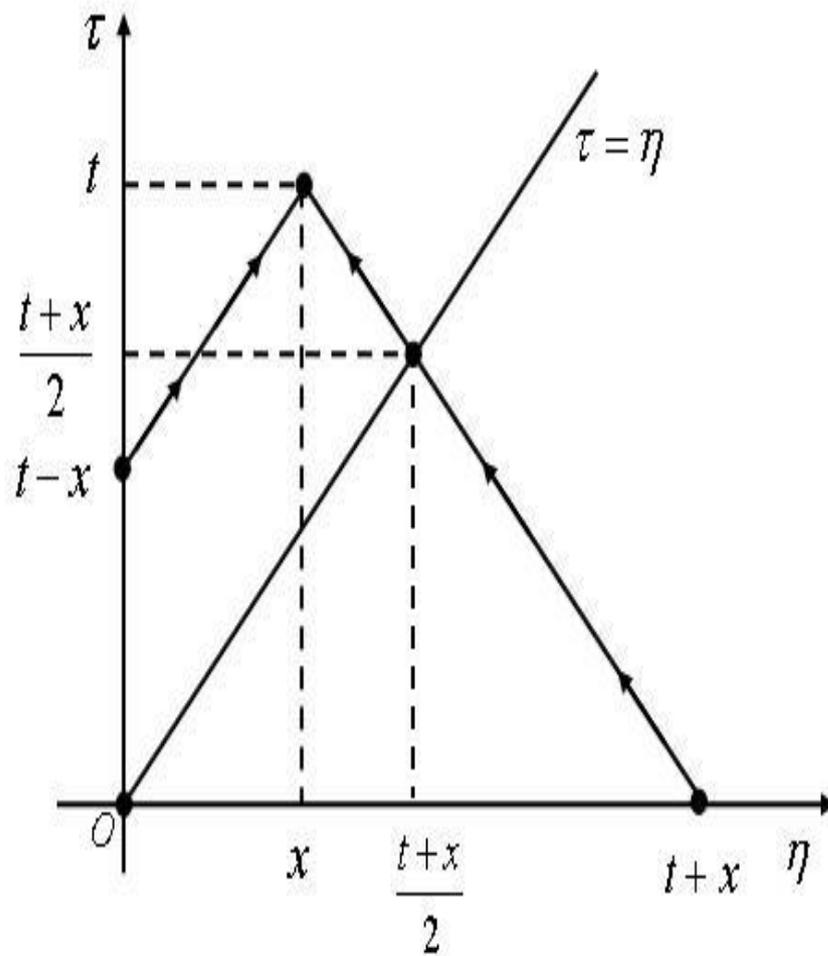
$$\Phi(t, x) \Big|_{t < x} \equiv 0.$$

Қулайлик учун t, x эркин ўзгарувчиларни τ, η билан белгилайлик.

(2.2.10) системанинг биринчи тенгламасини

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta} = & - \frac{\chi(\eta)}{2} \frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)} \Psi_1(\tau, \eta) - \\ & - \left(\frac{\chi(\eta)}{2} \frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)} - q(\eta) \right) \Psi_2(\tau, \eta) + \\ & + \chi(\eta) \sqrt{\sigma(\eta)} \frac{\rho_l^2(\eta)}{\rho_s(\eta)} \Phi(\tau, \eta), \end{aligned}$$

t, x нуқта орқали ўтувчи $\tau - \eta = t - x$, характеристика бўйлаб интеграллаймиз (расм.2.2.1):



Расм. 2.2.1.

$$\Psi_1(t, x) = - \int_{t-x}^t \frac{\chi(\tau - t + x)}{2} \frac{\rho_l^2(\tau - t + x)}{\rho_s(\tau - t + x)} \Psi_1(\tau, \tau - t + x) d\tau -$$

$$- \int_{t-x}^t \left(\frac{\chi(\tau - t + x)}{2} \frac{\rho_l^2(\tau - t + x)}{\rho_s(\tau - t + x)} - q(\tau - t + x) \right) \Psi_2(\tau, \tau - t + x) d\tau + \quad (2.2.18)$$

$$+ \int_{t-x}^t \chi(\tau - t + x) \sqrt{\sigma(\tau - t + x)} \frac{\rho_l^2(\tau - t + x)}{\rho_s(\tau - t + x)} \Phi(\tau, \tau - t + x) d\tau + s_1(t - x),$$

бу ерда $s_1(t - x) = \Psi_1(t - x, 0)$ чегаравий шартлар ва (2.2.17) фаразимизга кўра бир қийматли аниқланган.

(2.2.10) иккинчи тенгламасини

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \tau} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \eta} = \left(\frac{\chi(\eta) \rho_i^2(\eta)}{2 \rho_s(\eta)} + q(\eta) \right) \Psi_1(\tau, \eta) - \frac{\chi(\eta) \rho_i^2(\eta)}{\rho_s(\eta)} \Psi_2(\tau, \eta) + \\ + \chi(\eta) \sqrt{\sigma(\eta)} \frac{\rho_i^2(\eta)}{\rho_s(\eta)} \Phi(\tau, \eta),$$

$\tau + \eta = t + x$ характеристика бўйлаб интеграллаймиз (расм.1.4.1):

$$\Psi_2(t, x) = - \int_0^t \left(q(t - \tau + x) + \frac{\chi(t - \tau + x) \rho_i^2(t - \tau + x)}{2 \rho_s(t - \tau + x)} \right) \Psi_1(\tau, t - \tau + x) d\tau - \\ - \int_0^t \frac{\chi(t - \tau + x) \rho_i^2(t - \tau + x)}{2 \rho_s(t - \tau + x)} \Psi_2(\tau, t - \tau + x) d\tau + \\ + \int_0^t \chi(t - \tau + x) \sqrt{\sigma(t - \tau + x)} \frac{\rho_i^2(t - \tau + x)}{\rho_s(t - \tau + x)} \Phi(\tau, t - \tau + x) d\tau. \quad (2.2.19)$$

Бу ерда биз $\Psi_2(0, x) = 0$ шартдан фойдаландик.

(2.2.11) тенгламани 0 дан t гача интеграллаймиз ва (2.2.13) ни ҳисобга олиб топамиз

$$\Phi(t, x) = \frac{\chi(x)}{2\sqrt{\sigma(x)}} \rho_i(x) \int_0^t (\Psi_1(\tau, x) + \Psi_2(\tau, x)) d\tau - \\ - \chi(x) \rho_i(x) \int_0^t \Phi(\tau, x) d\tau \quad (2.2.20)$$

Ушбу

1) $\Psi|_{t < 0} = 0,$

2) Ψ_1 функция $t = x$ да δ -функцияга ўхшаш махсусликка эга.

3) $t > x$ $\Psi_i(t, x) = \psi_i(t, x) (i = 1, 2), \Phi(t, x) = \psi_3(t, x),$

шартларни ҳисобга олиб, (2.2.18)-(2.2.20) дан $t > x$ да қуйидагиларни ҳосил қиламиз

$$\begin{aligned}
\psi_1(t, x) = & -\int_{t-x}^t \frac{\chi(\tau-t+x)}{2} \frac{\rho_l^2(\tau-t+x)}{\rho_s(\tau-t+x)} \psi_1(\tau, \tau-t+x) d\tau - \\
& -\int_{t-x}^t \left(\frac{\chi(\tau-t+x)}{2} \frac{\rho_l^2(\tau-t+x)}{\rho_s(\tau-t+x)} - q(\tau-t+x) \right) \psi_2(\tau, \tau-t+x) d\tau + \\
& + \int_{t-x}^t \chi(\tau-t+x) \sqrt{\sigma(\tau-t+x)} \frac{\rho_l^2(\tau-t+x)}{\rho_s(\tau-t+x)} \times \\
& \times \psi_3(\tau, \tau-t+x) d\tau + \psi_1(t-x, 0)
\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2(t, x) = & -\int_{(t+x)/2}^t \left(q(t-\tau+x) + \frac{\chi(t-\tau+x)}{2} \frac{\rho_l^2(t-\tau+x)}{\rho_s(t-\tau+x)} \right) \times \\
& \times \psi_1(\tau, t-\tau+x) d\tau - \int_{(t+x)/2}^t \frac{\chi(t-\tau+x)}{2} \frac{\rho_l^2(t-\tau+x)}{\rho_s(t-\tau+x)} \times \\
& \times \psi_2(\tau, t-\tau+x) d\tau + \int_{(t+x)/2}^t \chi(\tau-t+x) \sqrt{\sigma(\tau-t+x)} \frac{\rho_l^2(\tau-t+x)}{\rho_s(\tau-t+x)} \times \\
& \times \psi_3(\tau, \tau-t+x) d\tau + \frac{1}{2} q\left(\frac{t+x}{2}\right) - \frac{\chi\left(\frac{t+x}{2}\right)}{4} \frac{\rho_l^2\left(\frac{t+x}{2}\right)}{\rho_s\left(\frac{t+x}{2}\right)}.
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3(t, x) = & \frac{\chi(x)}{2\sqrt{\sigma(x)}} \rho_l(x) \int_0^t (\psi_1(\tau, x) + \psi_2(\tau, x)) d\tau - \\
& - \chi(x) \rho_l(x) \int_0^t \psi_3(\tau, x) d\tau
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

(2.2.21) даги $\psi_1(t-x, 0)$ ўрнига (2.2.17) чегаравий шартдан топилган қийматини қўйиб, (2.2.22) га кўра топамиз:

$$\psi_1(t, x) = -\int_{t-x}^t \frac{\chi(\tau-t+x)}{2} \frac{\rho_l^2(\tau-t+x)}{\rho_s(\tau-t+x)} \psi_1(\tau, \tau-t+x) d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t-x}^t \left(\frac{\chi(\tau-t+x)}{2} \frac{\rho_l^2(\tau-t+x)}{\rho_s(\tau-t+x)} - q(\tau-t+x) \right) \psi_2(\tau, \tau-t+x) d\tau + \\
& + \int_{t-x}^t \chi(\tau-t+x) \sqrt{\sigma(\tau-t+x)} \frac{\rho_l^2(\tau-t+x)}{\rho_s(\tau-t+x)} \psi_3(\tau, \tau-t+x) d\tau - \\
& - \alpha \int_{(t-x)/2}^{t-x} \left(q(t-\tau-x) + \frac{\chi(t-\tau-x)}{2} \frac{\rho_l^2(t-\tau-x)}{\rho_s(t-\tau-x)} \right) \psi_1(\tau, t-\tau-x) d\tau - \\
& - \alpha \int_{(t-x)/2}^{t-x} \frac{\chi(t-\tau-x)}{2} \frac{\rho_l^2(t-\tau-x)}{\rho_s(t-\tau-x)} \psi_2(\tau, t-\tau-x) d\tau + \\
& + \alpha \int_{(t-x)/2}^{t-x} \chi(t-\tau-x) \sqrt{\sigma(t-\tau-x)} \frac{\rho_l^2(t-\tau-x)}{\rho_s(t-\tau-x)} \psi_3(\tau, t-\tau-x) d\tau + \\
& + \frac{\alpha}{2} q\left(\frac{t-x}{2}\right) - \alpha \frac{\chi\left(\frac{t-x}{2}\right) \rho_l^2\left(\frac{t-x}{2}\right)}{4 \rho_s\left(\frac{t-x}{2}\right)} + m(t-x). \tag{2.2.24}
\end{aligned}$$

Таъриф. (2.2.10), (2.2.11) системанинг ноли бошланғич ва чегаравий (2.2.17) шартли ечими деб (2.2.15) кўринишдаги t нинг шундай $\psi_1(t, x), \psi_2(t, x), \psi_3(t, x)$ умумлашган функцияларига айтиладики, улар $t \geq x$ да (2.2.22)-(2.2.24) интеграл тенгламалар системасини қаноатлантиради.

(2.2.22)-(2.2.24) муносабатлар $q, m, \rho_l, \rho_s, \chi$ ва α маълум бўлганда $\psi_j, (j=1,2,3)$ ларга нисбатан чизиқли иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламалар системасини ташкил этади.

Маълумки [25], бундай система локал(кичик соҳада) ягона ечимга эга. Ечим (t, x) нинг узлуксиз функцияларидан иборат бўлади.

2.3. Гиперболик система ечимининг сингулярлиги

Етарлича силлиқ $\sigma(x), m(t), \chi(t), \rho_1(x), \rho_s(x)$ функциялар учун (2.2.10), (2.2.11) системанинг (2.2.17) чегаравий шартни каноатлантирувчи ечими куйидаги кўринишга эга.

$$\Psi(t, x) = \begin{pmatrix} a(x) \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t-x) + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \end{pmatrix} \varepsilon(t-x) + \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} (t-x)_+ + \dots, \quad (2.3.1)$$

$$\Phi(t, x) = d_1(x) \varepsilon(t-x) + d_2(x) (t-x)_+ + \dots, \quad (2.3.2)$$

(2.3.1) ва (2.3.2) формулаларида уч нукта билан $t = \tau(z)$, да ёзилган хадларга караганда силлиқроқ функциялар белгиланган. Аввалгидек

$$x_+^n = \begin{cases} x^n, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$a(x), b_1(x), b_2(x), c_1(x), c_2(x), d_1(x), d_2(x)$ коэффициентларни топайлик.

Бунинг учун (2.3.1), (2.3.2) ёйилмаларни (2.2.10), (2.2.11) тенгламаларга кўямиз ва бир хил сингулярлик олдидаги коэффициентларни тенглаштирамиз.

Бунда ушбу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) k(t-x) = 0, \quad (k - \text{ихтиёрий функция})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \varepsilon(t-x) = 2\delta(t-x),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)(t-x)_+ = 2\varepsilon(t-x).$$

муносабатларни ҳисобга олиб, қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a' \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t-x) + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} \delta(t-x) + \begin{pmatrix} b'_1 \\ -b'_2 \end{pmatrix} \varepsilon(t-x) + \\ & + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix} \varepsilon(t-x) + \begin{pmatrix} c'_1 \\ -c'_2 \end{pmatrix} (t-x)_+ + \dots = \\ & = a \begin{pmatrix} -\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} \\ -\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} - q \end{pmatrix} \delta(t-x) - \begin{pmatrix} \frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} b_1 + \left(\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} + q\right) b_2 \\ \left(\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} - q\right) b_1 + \frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} b_2 \end{pmatrix} \varepsilon(t-x) - \\ & - \begin{pmatrix} \frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} c_1 + \left(\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} - q\right) c_2 \\ \left(\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} - q\right) c_1 + \frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} c_2 \end{pmatrix} (t-x)_+ + \\ & + \chi \frac{\rho_l^2}{\rho_s} d_1 \sqrt{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon(t-x) + \chi \frac{\rho_l^2}{\rho_s} d_2 \sqrt{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (t-x)_+ + \dots, \\ & d_1 \delta(t-x) + d_2 \varepsilon(t-x) + \dots = \frac{\chi}{2\sqrt{\sigma}} \rho_l (a \delta(t-x) + \\ & + (b_1 + b_2) \varepsilon(t-x) + (c_1 + c_2) (t-x)_+ + \dots) - \\ & - \chi \rho_l d_1 \varepsilon(t-x) - \chi \rho_l d_2 (t-x)_+ + \dots, \end{aligned}$$

Бу тенгликлардан:

$$a' = -\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} a,$$

$$b'_1 = -\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} b_1 + \frac{a}{2} \left(\frac{\chi^2 \rho_l^3 \rho_l + 4 \rho_s}{\rho_s} - q^2 \right),$$

$$b_2 = -\frac{a}{2} \left(\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} + q \right),$$

$$c_2 = \frac{b_1}{2} \left(\frac{\rho_l^2 \chi}{\rho_s} + q \right) + \frac{a \chi \rho_l^2}{2 \rho_s} \left(\chi \rho_l \frac{2\rho_s - \rho_l}{2\rho_s} - q \right) + \frac{b'_2}{2},$$

$$d_1 = \frac{\chi \rho_l}{2\sqrt{\sigma}} a,$$

$$d_2 = \frac{\chi}{2\sqrt{\sigma}} (b_1 + b_2) \rho_l - \chi \rho_l d_1.$$

Бу система осонгина ечилади:

$$a = a_0 \exp \left(- \int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right),$$

$$\begin{aligned} b_1 = & b_1^0 \exp \left(- \int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right) + \exp \left(- \int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right) \times \\ & \times \int_0^x \frac{a(\xi)}{2} \left(\frac{\chi^2 \xi \rho_l^3(\xi)}{4 \rho_s^2(\xi)} (\rho_l(\xi) + 4\rho_s(\xi)) - q^2(\xi) \right) \times \\ & \times \exp \left(\int_0^\xi \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right) d\xi \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$\sigma, \chi, \rho_s, \rho_l$ коэффициентларнинг силлиқлигидан келиб чиқиб, $\psi(t, x), \Phi(t, x)$, учун ёйилмаларнинг мумкин бўлганича ҳадларини аниқлаш мумкин.

(2.2.15) ёйилмани (2.2.17) чегаравий шартга кўйиб, a_0 ва b_1^0 , коэффициентларни топамиз :

$$\begin{aligned} a_0 \delta(t) + (b_1 - \alpha b_2) \Big|_{x=0} \varepsilon(t) + (c_1 - \alpha c_2) \Big|_{x=0} t_+ + \dots = \\ = \delta(t) + m(0) \varepsilon(t) + m'(0) t_+ + \dots \end{aligned}$$

Бундан

$$a_0 = 1,$$

$$b_1^0 = m(0) - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\chi(0) \rho_l^2(0)}{2 \rho_s(0)} + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \right). \quad (2.3.4)$$

Шундай қилиб, $\Psi(t, x)$ ва $\Phi(t, x)$ функциялар учун ёйилманинг дастлабки иккита ҳади топилди:

$$\begin{aligned} \Psi_1(t, x) = & \left[\exp \left(- \int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right) \right] \delta(t-x) + \\ & + \exp \left(- \int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right) \left[m(0) - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\chi(0) \rho_l^2(0)}{2 \rho_s(0)} + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \right) + \right. \\ & \left. + \int_0^x \frac{a(\xi)}{2} \left(\frac{\chi^2 \xi \rho_l^3(\xi)}{4 \rho_s^2(\xi)} (\rho_l(\xi) + 4 \rho_s(\xi)) - q^2(\xi) \right) \exp \left(\int_0^\xi \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right) d\xi \right] \varepsilon(t-x), \end{aligned}$$

$$\Psi_2(t, x) = - \frac{1}{2} \left(\frac{\chi(x) \rho_l^2(x)}{2 \rho_s(x)} + q(x) \right) \left[\exp \left(- \int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right) \right] \varepsilon(t-x) \quad (2.3.5)$$

$$\Phi(t, x) = \frac{\chi(y) \rho_l(x)}{2 \sqrt{\sigma(x)}} \exp \left(- \int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right) \varepsilon(t-x). \quad (2.3.6)$$

Бу ердан қуйидагини топамиз:

$$\Psi_2(t, x) = - \left(\frac{\chi(x) \rho_l^2(x)}{2 \rho_s(x)} + q(x) \right) \frac{\sqrt{\sigma(x)}}{\chi(x) \rho_l(x)} \Phi(t, x).$$

Хусусан, (2.3.5), (2.3.6) муносабатлардан ушбу

$$\Psi_2(x+0, x) = -\left(\frac{\chi(x) \rho_l^2(x)}{4 \rho_s(x)} + \frac{1}{4} \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}\right) \exp\left(-\int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy\right), \quad (2.3.7)$$

$$\Phi(x+0, x) = \frac{\chi(x) \rho_l(x)}{2\sqrt{\sigma(x)}} \exp\left(-\int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy\right).$$

формулалар келиб чиқади.

(2.3.7) дан ғоваклик йўқолганда маълум ([14,26]) муносабатлар ҳосил бўлади:

$$\Psi_2(x+0, x) = -\frac{1}{4} \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}.$$

III. SH TЎLҚИН ТЕНГЛАМАЛАРИ УЧУН СОНЛИ УСУЛ

3.1. Масаланинг сонли ечиш усули

2.1 параграфда (2.1.1) тўлқин тенгламаси (x, t) ўзгарувчиларда (2.2.2) кўринишга келтирилган эди:

$$U_{tt} = \frac{[\sigma(x)U_x]_x}{\sigma(x)} - \tilde{q}(x)(U_t - V_t) \quad (3.1.1)$$

бу ерда

$$\tilde{q}(x) = \chi(x) \frac{\rho_t^2(x)}{\rho_s(x)}$$

- маълум функция, $\sigma(x)$ функция (2.1.19) формула ёрдамида аниқланаган.

Бу параграфда қулайлик учун $\tilde{q}(x)$ ўрнига $q(x)$ ни ёзамиз.

(3.1.1) тенгламадаги $\sigma(x)$ ни константага кўпайтирилганда тенглама ўзгапмайди. Шунинг учун умумийликни чегараламасдан $\sigma(0) = 1$ деб ҳисоблаймиз.

Эътироф этайликки, $\sigma(x)$ ни бундай аниқланишида $\mu(x)$ Ламэ коэффициентини ҳисоблаш $\rho_s(x)$ га кўра $\sigma(x)$ ни ҳисоблашга тенг кучли.

Янги ноъмалумларни киритайлик:

$$w = U_t,$$

$$p = -\sigma(x)U_x$$

$$r = V_t.$$

У ҳолда (3.1.1) иккинчи тартибли тўлқин тенгламаси қуйидаги гиперболик системага келтирилади.

$$\begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix}_t + A(x) \begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix}_x = - \begin{bmatrix} 0 \\ q(x)(w-r) \end{bmatrix}, \quad (3.1.2)$$

бу ерда

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & \sigma(x) \\ \sigma^{-1}(x) & 0 \end{bmatrix}.$$

Чегаравий шартлар куйидаги кўринишда ёзилади:

$$p(0,t) = -\sigma(0)U_x(0,t) = f(t) \quad (3.1.3)$$

(3.1.2) система қатъий гиперболик типдаги системадир. У бурчак коэффициентлари +1 ва -1 га тенг бўлган тўғри чизиклар оиласидан иборат бўлган характеристикаларга эга.

Куйидаги матрицани аниқлайлик:

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & \sigma(x) \\ 1 & -\sigma(x) \end{bmatrix},$$

у холда

$$T(x)A(x)T^{-1}(x) = \Lambda$$

(3.1.2) системани чапдан $T(x)$ матрицага кўпайтириб, $\sigma(x)$ ни силлиқ деб фараз қилиб, (3.1.2) системанинг каноник кўринишини ҳосил қиламиз:

$$(Tv)_t + \Lambda(Tv)_x = \Lambda T_x v - T \begin{bmatrix} 0 \\ q(x)(w-r) \end{bmatrix}$$

бу ерда $v = (p \quad w)^T$. Бу системанинг скаляр кўриниши

$$(p + \sigma w)_x + (p + \sigma w)_t = \sigma' w - \sigma(x)q(x)(w-r) \quad (3.1.4)$$

$$(p - \sigma w)_x - (p - \sigma w)_t = -\sigma' w - \sigma(x)q(x)(w-r) \quad (3.1.5)$$

бу ерда $\sigma'(x)$ - $\sigma(x)$ нинг ҳосиласи.

(3.1.4), (3.1.5) тенгнамаларни интеграл кўринишда ҳам ёзиш мумкин. $t > x$ соҳанинг ихтиёрий (x, t) нуктаси ва $\tilde{x} < x$ учун (3.1.4)

тенгнамани $\frac{dt}{dx} = 1$ характеристика бўйлаб $(\tilde{x}, t - x + \tilde{x})$ дан (x, t) гача

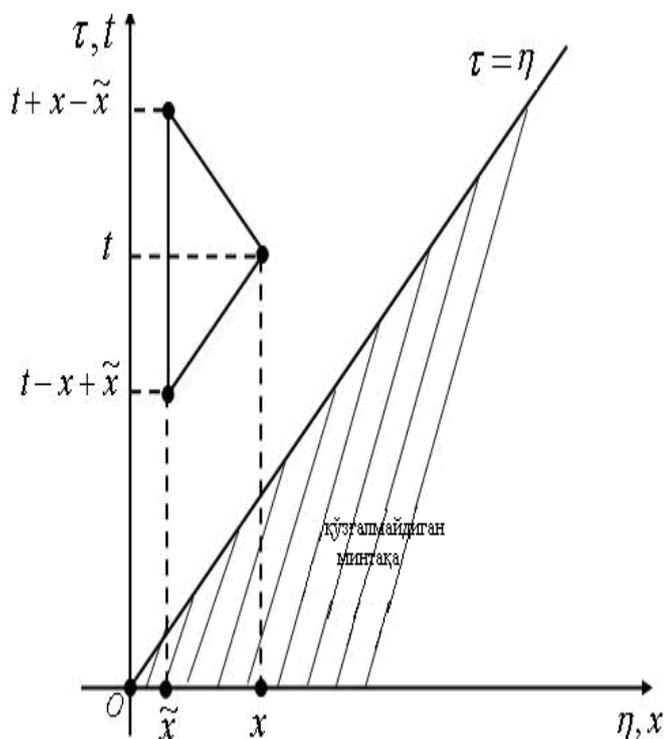
интегроаллаймиз (расм 1.6.1). Натижада қуйидаги муносабатни топамиз:

$$p(x, t) + \sigma(x) w(x, t) - [p(\tilde{x}, t - x + \tilde{x}) + \sigma(\tilde{x}) w(\tilde{x}, t - x + \tilde{x})] = \\ = \int_{\tilde{x}}^x [\sigma'(s) w(s, t - x + s) - \sigma(s) q(s) (w(s, t - x + s) - r(s, t - x + s))] ds. \quad (3.1.6)$$

Худди шунга ўхшаш (3.1.5) тенгнамани ушбу $\frac{dt}{dx} = -1$ характеристика

бўйлаб $(\tilde{x}, t + x - \tilde{x})$ дан (x, t) гача интеграллаймиз ва иккинчи муносабатни ҳосил қиламиз (расм. 1.6.1):

$$p(x, t) - \sigma(x) w(x, t) - [p(\tilde{x}, t + x - \tilde{x}) - \sigma(\tilde{x}) w(\tilde{x}, t + x - \tilde{x})] = \\ = - \int_{\tilde{x}}^x [\sigma'(s) w(s, t + x - s) + \sigma(s) q(s) (w(s, t + x - s) - r(s, t + x - s))] ds \quad (3.1.7)$$



Расм. 3.1.1. (x, t) нуктадан ўтувчи характеристикалар.

(3.1.6) ва (3.1.7) муносабатлар масалани сонли ечиш учун хизмат қилади.

$$h = x - \tilde{x} \text{ дейлик,}$$

$h > 0$ етарлича кичик бўлсин. У ҳолда интеграл остидаги $\sigma'(s)$ ни

$$\sigma'(s) \approx \frac{\sigma(x) - \sigma(\tilde{x})}{h}, \quad (3.1.8)$$

билан алмаштириш мумкин. Бу ерда s нукта x ва \tilde{x} орасида ётган ихтиёрий нукта.

(3.1.6) ва (3.1.7) даги интеграл ифодаларни трапециялар усули билан яқинлаштириб, тақрибий формулани топамиз:

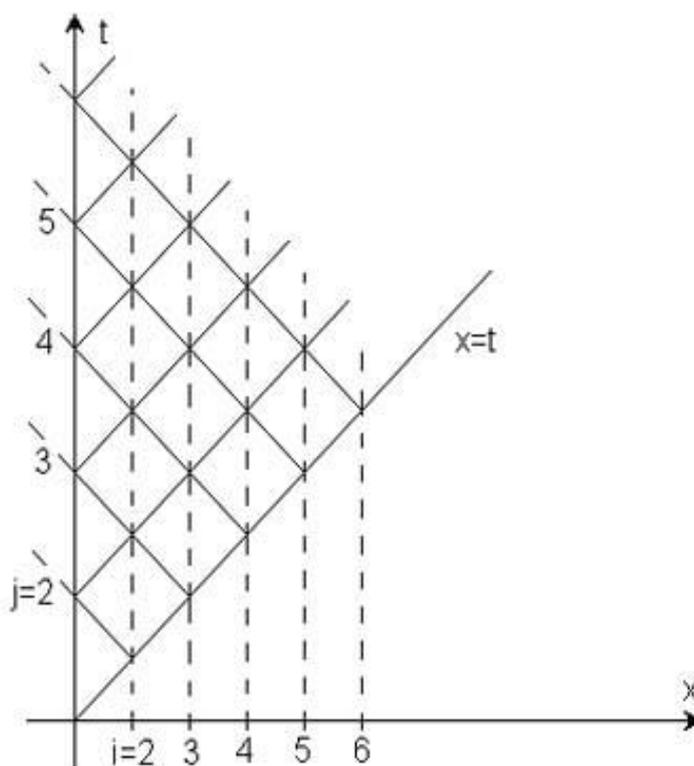
$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{x}}^x [\sigma'(s)w(s, t-x+s) - \sigma(s)q(s)(w(s, t-x+s) - r(s, t-x+s))] ds \approx \\ & \approx \frac{1}{2} [\sigma(x) - \sigma(\tilde{x})] [w(x, t) + w(\tilde{x}, t-x+\tilde{x})] - \\ & - \frac{h}{2} [\sigma(x)q(x)(w(x, t) - r(x, t)) + \sigma(\tilde{x})q(\tilde{x})(w(\tilde{x}, t-x+\tilde{x}) - r(\tilde{x}, t-x+\tilde{x}))], \quad (3.1.9) \end{aligned}$$

ва

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{x}}^x [\sigma'(s)w(s, t+x-s) + \sigma(s)q(s)(w(s, t+x-s) - r(s, t+x-s))] ds \approx \\ & \approx \frac{1}{2} [\sigma(x) - \sigma(\tilde{x})] [w(x, t) + w(\tilde{x}, t+x-\tilde{x})] + \\ & + \frac{h}{2} [\sigma(x)q(x)(w(x, t) - r(x, t)) + \sigma(\tilde{x})q(\tilde{x})(w(\tilde{x}, t+x-\tilde{x}) - r(\tilde{x}, t+x-\tilde{x}))], \quad (3.1.10) \end{aligned}$$

Агар $\sigma(x)$ функция $s = x_0, \tilde{x} < x_0 < x$, нуктада узилишга эга бўлса, лекин w узлуксиз бўлса, (3.1.9) ва (3.1.10) тенгламалар h етарлича кичик бўлганда кўйилган масаланинг яхши аппроксимацияси бўлади.

p, w, r ва σ функцияларнинг 3.1.2-расмда кўрсатилган тўрдаги қийматларини қарайлик (тўр характеристикаларнинг кесишишидан ҳосил бўлган).



3.1.2-расм. Характеристикалар бўйлаб интеграллаш методида ишлатиладиган тўр. Қалин чизиқлар (3.1.2) гиперболик системанинг характеристикалари, $x = t$ чизиқ— тўлқин fronti.

Тўр функциялари σ , q , p , w ва r учун қуйидагича аниқланади:

$$\sigma_i = \sigma[(i-1)h], \quad \sigma_1 = 1$$

$$q_i = q[(i-1)h],$$

$$i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$p_{ij} = p[(i-1)h, (2j-i-1)h],$$

$$w_{ij} = w[(i-1)h, (2j-i-1)h]$$

ва

$$r_{ij} = r[(i-1)h, (2j-i-1)h],$$

бу ерда $i = 1, 2, 3, \dots$, ва $j \geq i$. Бошланғич шартлардан

$$p_{ii} = w_{ii} = r_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.1.11)$$

чегаравий шартлардан эса

$$\begin{aligned}
p_{1j} &= f_j = f[t = (j-1)h] \\
w_{1j} &= g'_j = g'[t = (j-1)h],
\end{aligned}
\tag{3.1.12}$$

(3.1.6) ва (3.1.7) тенгламалар (3.1.9) ва (3.1.10) аппроксимациялар билан биргаликда масалани сонли ечиш учун етарли. Фараз қилайлик, σ_i лар $i=1,2,\dots,I$ лар учун аниқланган, p_{ij} ва w_{ij} лар эса $i < I$ ва $j > i$ лар учун ҳисобланган бўлсин. У ҳолда $p_{i,j}$ ва $w_{i,j}$ ларни (1.6.6 ва (3.1.7) тенгламаларни тўрға проекциялаб ҳамда (3.1.9) ва (3.1.10) муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned}
p_{I,j} + \sigma_I w_{I,j} &= p_{I-1,j-1} + \sigma_{I-1} w_{I-1,j-1} + \frac{1}{2} [\sigma_I - \sigma_{I-1}] [w_{I,j} + w_{I-1,j-1}] - \\
&\quad - \frac{h}{2} [\sigma_I q_I (w_{I,j} - r_{I,j}) + \sigma_{I-1} q_{I-1} (w_{I-1,j-1} - r_{I-1,j-1})]
\end{aligned}
\tag{3.1.13}$$

$$\begin{aligned}
p_{I,j} - \sigma_I w_{I,j} &= p_{I-1,j} - \sigma_{I-1} w_{I-1,j} - \frac{1}{2} [\sigma_I - \sigma_{I-1}] [w_{I,j} + w_{I-1,j}] - \\
&\quad - \frac{h}{2} [\sigma_I q_I (w_{I,j} - r_{I,j}) + \sigma_{I-1} q_{I-1} (w_{I-1,j} - r_{I-1,j-1})]
\end{aligned}
\tag{3.1.14}$$

бу ерда $j = I+1, I+2, \dots$.

Бу тенгламаларни н $p_{I,j}$ ва $w_{I,j}$ нисбатан ечайлик. $\sigma(x) > 0$ ва $\sigma_{I-1} + \sigma_I > 0$ бўлганлиги учун қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned}
p_{I,j} &= \frac{1}{2} (p_{I-1,j-1} + p_{I-1,j}) + \frac{1}{4} (\sigma_{I-1} + \sigma_I) (w_{I-1,j-1} - w_{I-1,j}) - \\
&\quad - \frac{h}{2} \sigma_I q_I (w_{I,j} - r_{I,j}) - \frac{h}{4} \sigma_{I-1} q_{I-1} [(w_{I-1,j-1} - r_{I-1,j-1}) + (w_{I-1,j} - r_{I-1,j})]
\end{aligned}
\tag{3.1.15}$$

$$w_{I,j} = \frac{(p_{I-1,j-1} - p_{I-1,j})}{\sigma_{I-1} + \sigma_I} + \frac{1}{2}(w_{I-1,j-1} + w_{I-1,j}) - \frac{h \sigma_{I-1} q_{I-1} [(w_{I-1,j-1} - r_{I-1,j-1}) - (w_{I-1,j} - r_{I-1,j})]}{2(\sigma_{I-1} + \sigma_I)} \quad (3.1.16)$$

Хусусан, $p_{I,I+1}$ ва $w_{I,I+1}$ ҳисобланади.

(2.1.2) тенгламага қайтайлик. Уни $\rho_l(z)$ га бўлиб, t вақт бўйича интеграллаймиз. (2.1.3) ва (2.1.4) бошланғич шартларни ҳисобга олиб топамиз:

$$V_t = \chi(x) \rho_l(x) (U - V). \quad (3.1.17)$$

Бу тенгламани яна ўша тўрға (1.6.2 расм) проекциялаймиз, вақт бўйича ҳосилани

$$V_t(t, x) \approx \frac{V(t + 2h, x) - V(t, x)}{2h},$$

айирма билан алмаштирамиз. Натижада қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= (\chi \rho_l)_i (U_{ij} - V_{ij}), \\ r_{ij+1} &= (\chi \rho_l)_i (U_{ij+1} - V_{ij+1}) \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Биринчи тенгламани иккинчисидан айириб топамиз:

$$r_{ij+1} - r_{ij} = (\chi \rho_l)_i ((U_{ij+1} - U_{ij}) - (V_{ij+1} - V_{ij})).$$

Худди шунга ўхшаш U_t ни

$$w_{ij} = (U_t)_{ij} = \frac{U_{ij+1} - U_{ij}}{2h},$$

биринчи айирма орқали алмаштириб топамиз:

$$r_{ij+1} = r_{ij} + 2h(\chi \rho_l)_i (w_{ij} - r_{ij}) \quad (3.1.19)$$

(3.1.14) тенгламада I ўрнига $i+1$ ни, (3.1.13) тенгламада I ўрнига i ни қўямиз ва ҳосил бўлган муносабатларни w_{ij} ва p_{ij} нисбатан ечамиз:

$$w_{ij} = \frac{1}{\Delta} \left\{ 2(p_{i-1,j-1} - p_{i-1,j}) + (\sigma_i + \sigma_{i-1})w_{i-1,j-1} + (\sigma_{i+1} + \sigma_i)w_{i+1,j} \right\} - \frac{1}{\Delta} \left\{ h[\sigma_{i+1}q_{i+1}(w_{i+1,j} - r_{i+1,j}) - 2\sigma_i q_i r_{ij} + \sigma_{i-1}q_{i-1}(w_{i-1,j-1} - r_{i-1,j-1})] \right\} \quad (3.1.20)$$

$$p_{ij} = p_{i-1,j-1} - \frac{1}{2}[\sigma_i + \sigma_{i-1}]w_{i,j} + \frac{1}{2}[\sigma_i + \sigma_{i-1}]w_{i-1,j-1} - \frac{h}{2}[\sigma_i q_i (w_{i,j} - r_{i,j}) + \sigma_{i-1} q_{i-1} (w_{i-1,j-1} - r_{i-1,j-1})] \quad (3.1.21)$$

бу ерда

$$\Delta = \sigma_{i+1} + 2\sigma_i + \sigma_{i-1} + 2h\sigma_i q_i.$$

(3.1.15) ва (3.1.16) тенгламаларда $I = 2$ қўйиб, ва $p_{1,j-1}, w_{1,j-1}$ ва $r_{1,j-1}$ йўқотиб, ҳамда $\sigma_1 = 1$ эканлигини ҳисобга олиб, топамиз:

$$w_{1,j} = w_{2,j} \frac{1 + \sigma_2 - h\sigma_2 q_2}{1 + \sigma_2 + hq_1} + \frac{2(p_{1,j} - p_{2,j}) + hq_1 r_{1,j} + h\sigma_2 q_2 r_{2,j}}{1 + \sigma_2 + hq_1} \quad (3.1.22)$$

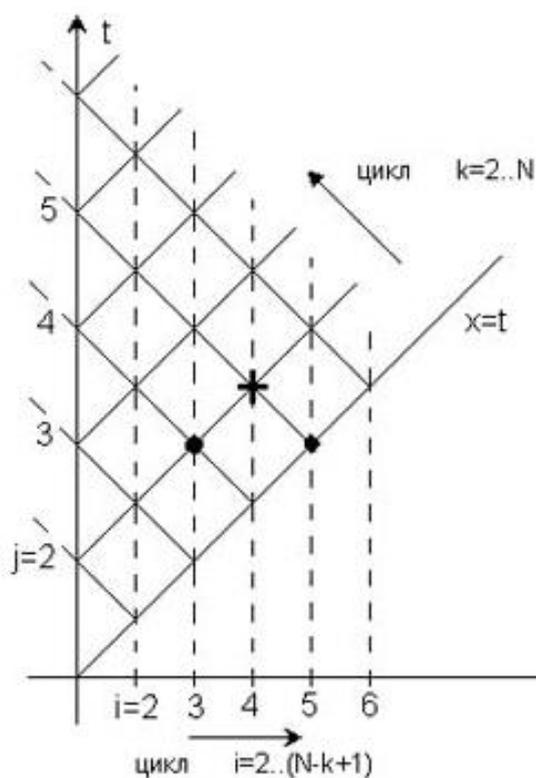
бу ва (3.1.18) муносабат (2.1.1)-(2.1.5) масаланинг сонли ечиш схемасидир.

$p_{0,j} = w_{0,j} = r_{0,j} = 0$ деймиз. (3.1.16) формуладан $w_{1,2} = 0$, (3.1.11) ва (3.1.19) формулалардан $r_{1,2} = 0$ келиб чиқади. Шунга ўхшаш $j = 3, 4, \dots$ бўлганда $w_{1,j} = 0$ ва $r_{1,j} = 0$. Энди $i = 2, 3, 4, \dots$ да $p_{i,j}, w_{i,j}, r_{i,j}$ тўр функциялари қийматларини ҳисоблаймиз.

3.2. Ҳисоблаш схемасининг тавсифи

Қаралган масалаларни ечиш учун ишлаб чиқилган алгоритмларнинг ишлаш схемаси C++ тилида ёзилган бўлиб қуйидагича:

Ҳисоблаш схемаси учун тўр пастдаги 3.2.1 расмда кўрсатилгандек танланган. Тўрнинг тугунлари характеристикаларнинг кесишиш нуқталаридан иборат.



Расм. 3.2.1. Сонли ечиш учун ишлатиладиган тўр.

Масалани сонли ечиш учун 3.1-параграфда ҳосил қилинган рекуррент формулалардан фойдаланилади:

$$r_{i,j+1} = r_{i,j} + 2h(\chi \rho_l)_i (w_{i,j} - r_{i,j})$$

$$w_{i,j} = \frac{1}{\Delta} \left\{ 2(p_{i-1,j-1} - p_{i-1,j}) + (\sigma_i + \sigma_{i-1})w_{i-1,j-1} + (\sigma_{i+1} + \sigma_i)w_{i+1,j} \right\} - \frac{1}{\Delta} \left\{ h[\sigma_{i+1}q_{i+1}(w_{i+1,j} - r_{i+1,j}) - 2\sigma_i q_i r_{i,j} + \sigma_{i-1}q_{i-1}(w_{i-1,j-1} - r_{i-1,j-1})] \right\}$$

$$p_{ij} = p_{i-1,j-1} - \frac{1}{2}[\sigma_i + \sigma_{i-1}]w_{i,j} + \frac{1}{2}[\sigma_i + \sigma_{i-1}]w_{i-1,j-1} - \\ - \frac{h}{2}[\sigma_i q_i (w_{i,j} - r_{i,j}) + \sigma_{i-1} q_{i-1} (w_{i-1,j-1} - r_{i-1,j-1})]$$

бу ерда

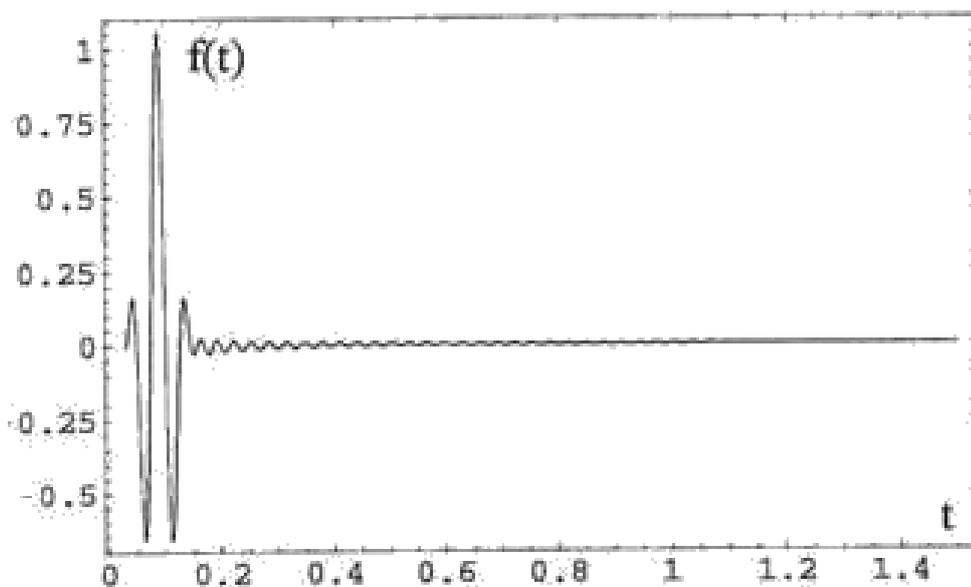
$$\Delta = \sigma_{i+1} + 2\sigma_i + \sigma_{i-1} + 2h\sigma_i q_i$$

$$w_{1,j} = w_{2,j} \frac{1 + \sigma_2 - h\sigma_2 q_2}{1 + \sigma_2 + hq_1} + \\ + \frac{2(p_{1,j} - p_{2,j}) + hq_1 r_{1,j} + h\sigma_2 q_2 r_{2,j}}{1 + \sigma_2 + hq_1}$$

Бундан ташқари, бошланғич ва чегаравий шартлар ҳам дискретлаштирилади.

Келтирилган схема тўрнинг x ўқи бўйича қадами h га нисбатан биринчи тартибли аниқликка эга бўлади. Ҳисоблаш жараёнида $O(N^2)$ та амал бажарилади.

Ҳисоблаш ишлари вақт частотасининг 2 дан 40 Гц бўлган диапазонда ўтказилди.



Расм. 3.2.2.

Биринчи ҳолатда оддий модель танланди- 4 тенгқучли қатлам яъни яримфазода жойлашган (таянч ғовакликнинг тақсимланиши Расм. 3.2.3да кўрсатилган).

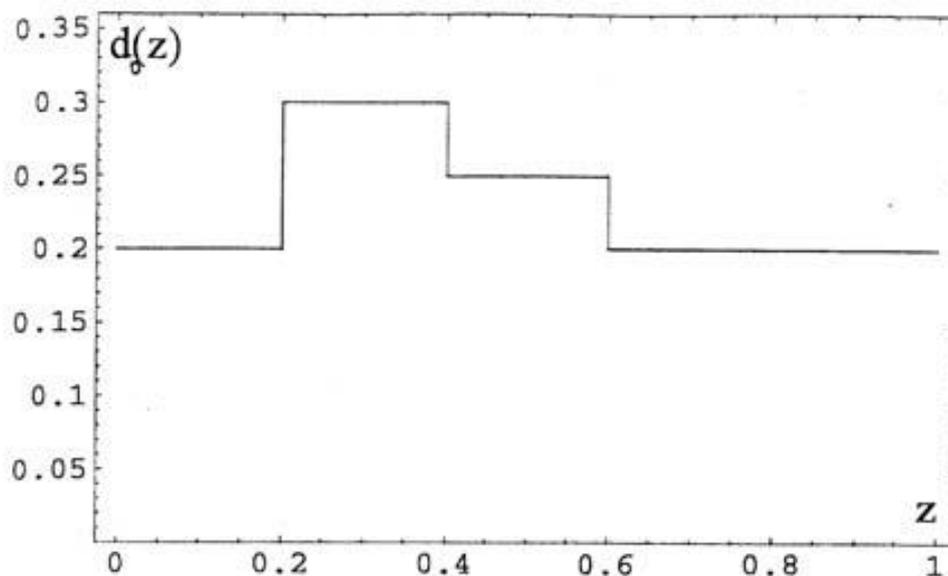


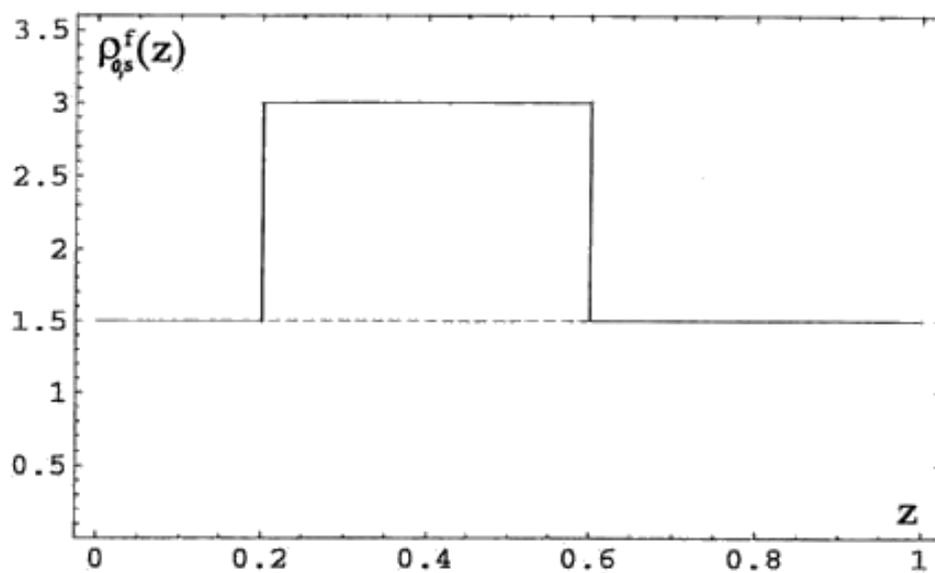
Рис. 3.2.3.

Фараз қилайлик, барча моделларда суюқликнинг жисмоний зичлиги 1 г/см^3 , $\mu = 10^{11} \text{ дин/см}^2$ тенг бўлсин. Бундан ташқари қатлам қисмининг чегараларида қуйидаги шартларни қўйайлик

$$[u]_{z=z_k} = [u_z]_{z=z_k} = 0,$$

$$[E]_{z=z_k} = [\sigma^{-1} E_z]_{z=z_k} = 0.$$

Эластик-ғовак жисмда бошланғич яқинлашиш $\rho_{0,s}^f(z)$ жисмоний зичлик, расм 3.2.4 да нуқтали чизиқ чизиқли функция кўринишида танлаб олинган.



Расм. 3.2.4.

Эластик-говак мухитда бошланғич яқинлашиш учун суюқликнинг ўтказувчанлиги 3.2.5 ва 3.2.6 расмларда кўрсатилган

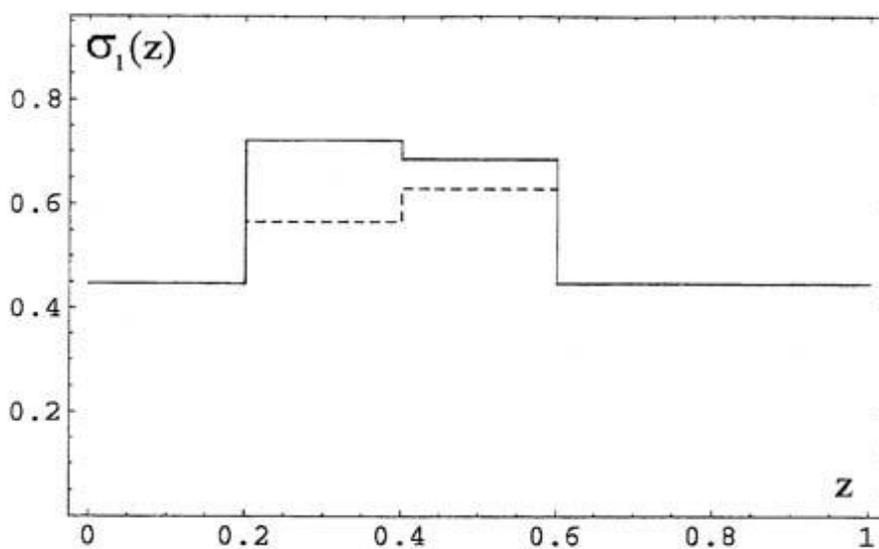


Рис. 3.2.5.

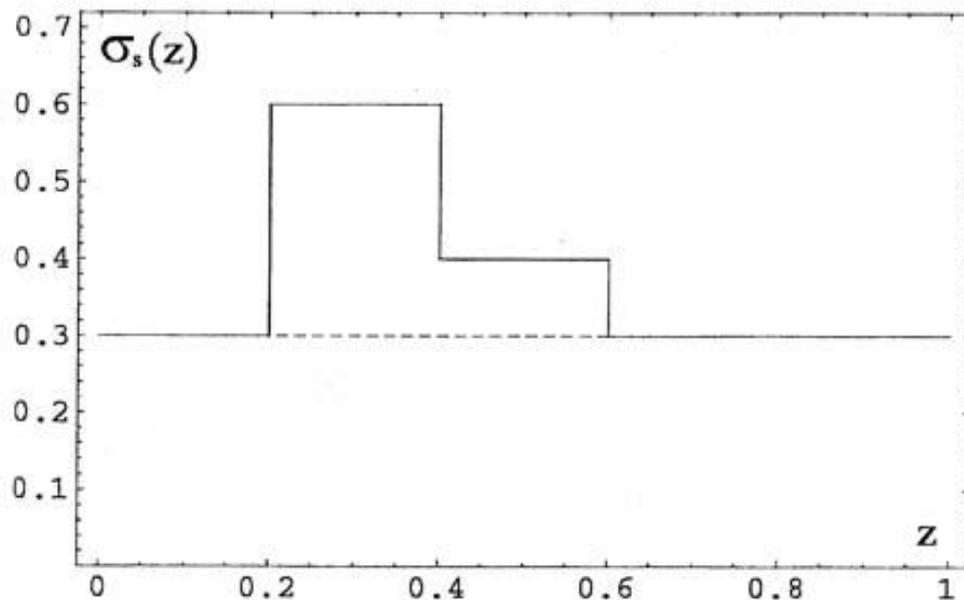
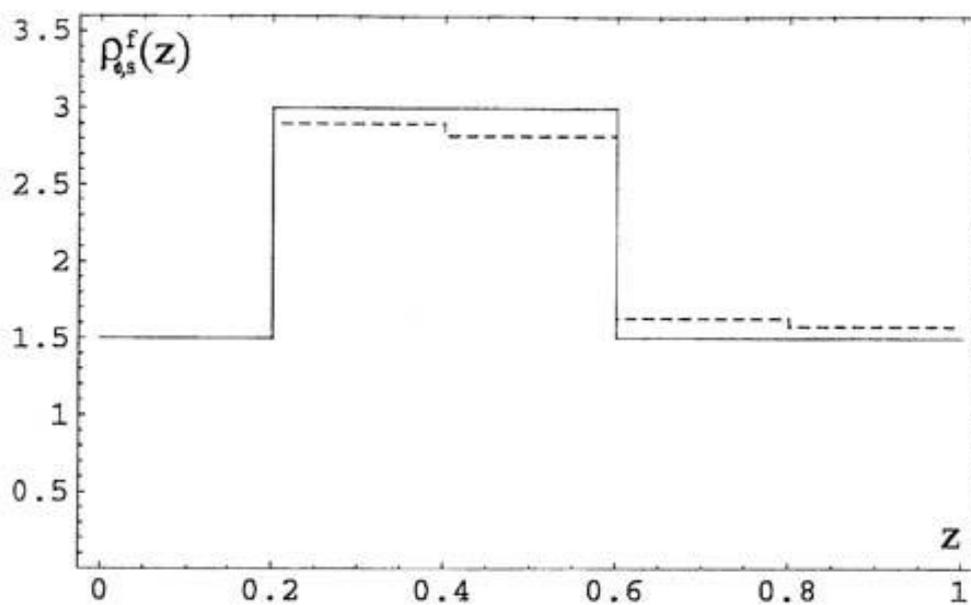


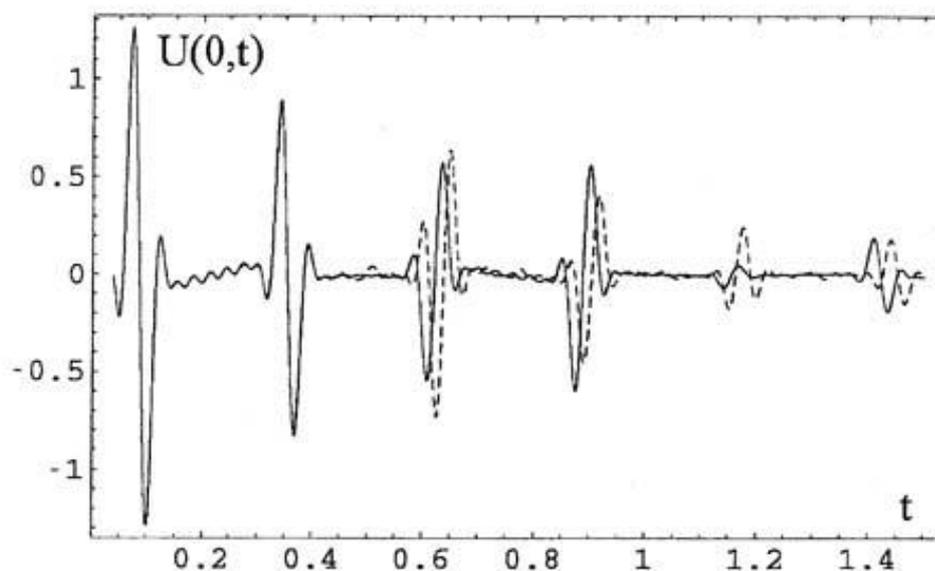
Рис. 3.2.6.

Биринчи этапда эластик-ғовак муҳитда $\rho_{0,s}^f(z)$ жисмоний зичлик тикланиши амалга оширилди. Олинган натижалар 3.2.7 расмда келтирилган.

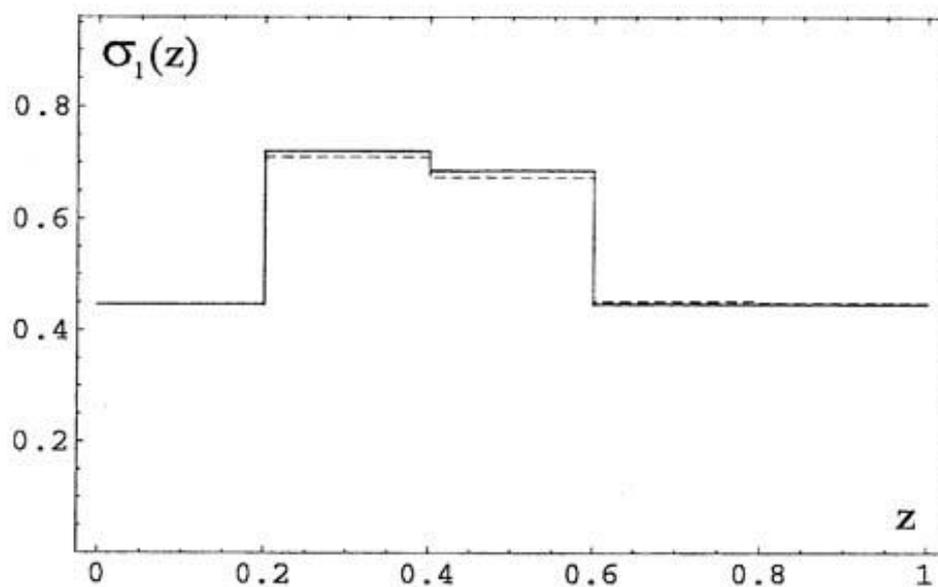


Расм. 3.2.7.

Эластик-ғовак мухитда тўлқин майдони $u(t,0)$ ҳисобланиши 3.2.8 расмда келтирилган.



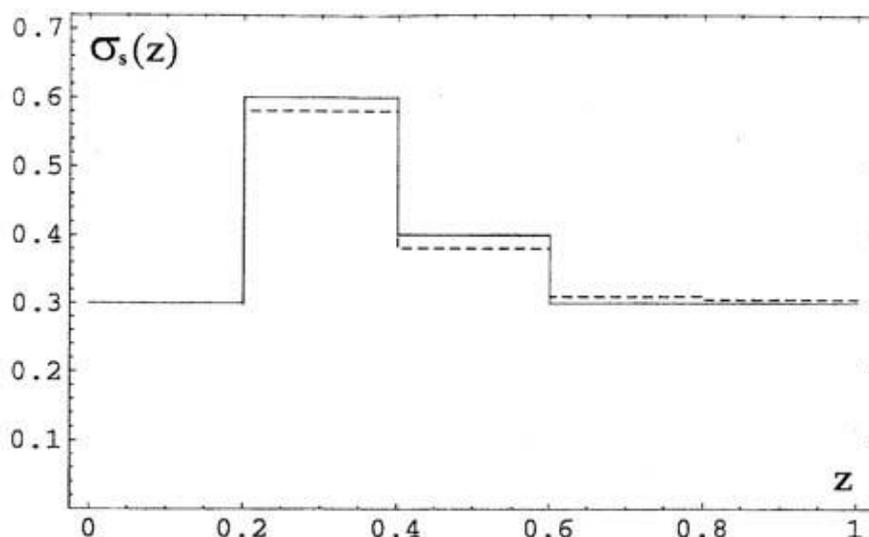
Расм. 3.2.8.



Расм . 3.2.9.

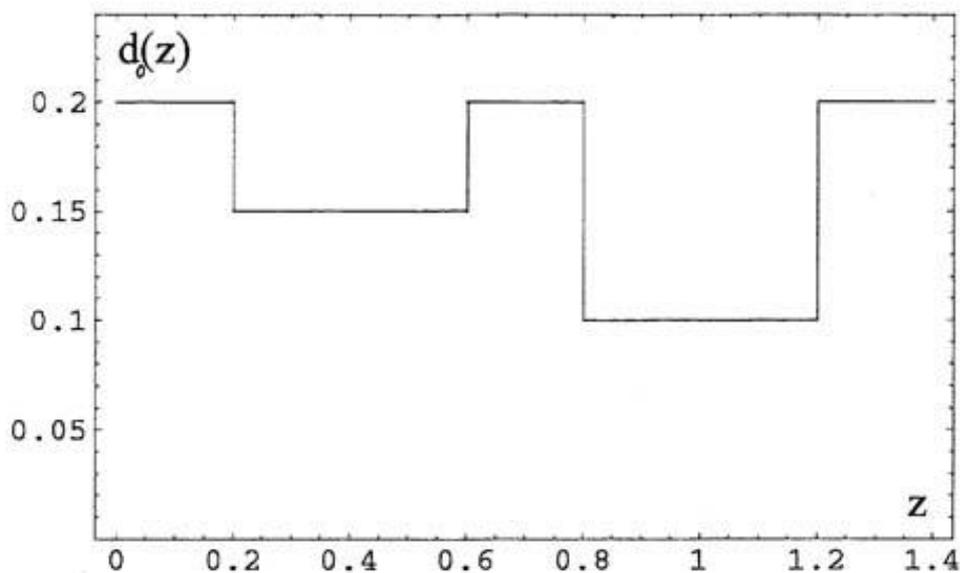
Сўнгра мухитнинг ўказувчанлиги $\sigma(z)$ тикланиши ўтказилди.

Арчи қонунидан[31] фойдаланиб $\frac{\sigma_l}{\sigma} = d_0^{0.5+\varepsilon_1}$, ε_1 –шунча қулай кичик мусбат сон ва ўтказувчанлик аниқланди. Эластик-ғовак муҳит суюқликнинг ўтказувчанлиги ҳисобланди(3.2.10 расм).



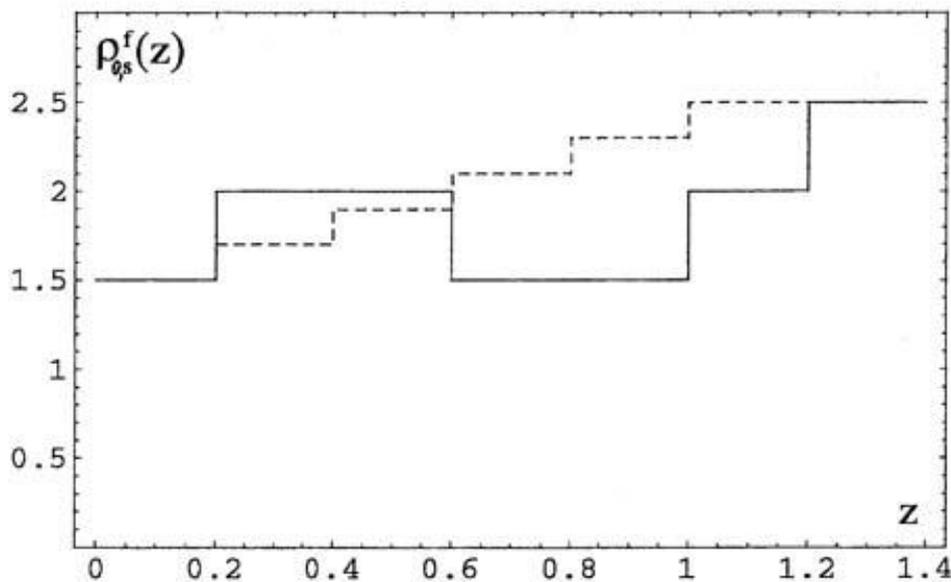
Расм. 3.2.10.

Иккинчи ҳолатда мураккаброқ модель танланди- 6 тенгқучли қатлам яъни яримфазода жойлашган (таянч ғовакликнинг тақсимланиши 3.2.11 расмда кўрсатилган).



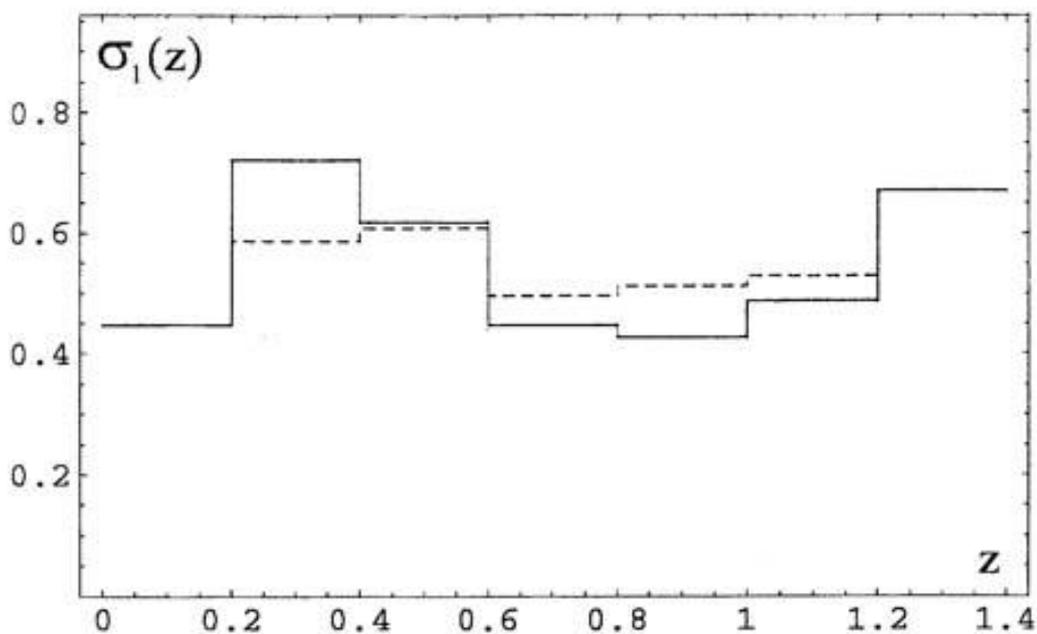
Расм. 3.2.11.

Бу моделда жисмоний зичликнинг тақсимланиши эластик-ғовак жисмда экранлашган қатламни олди, муҳит тузилиши характеристикасини тикланишини қийинлаштириш керак эди

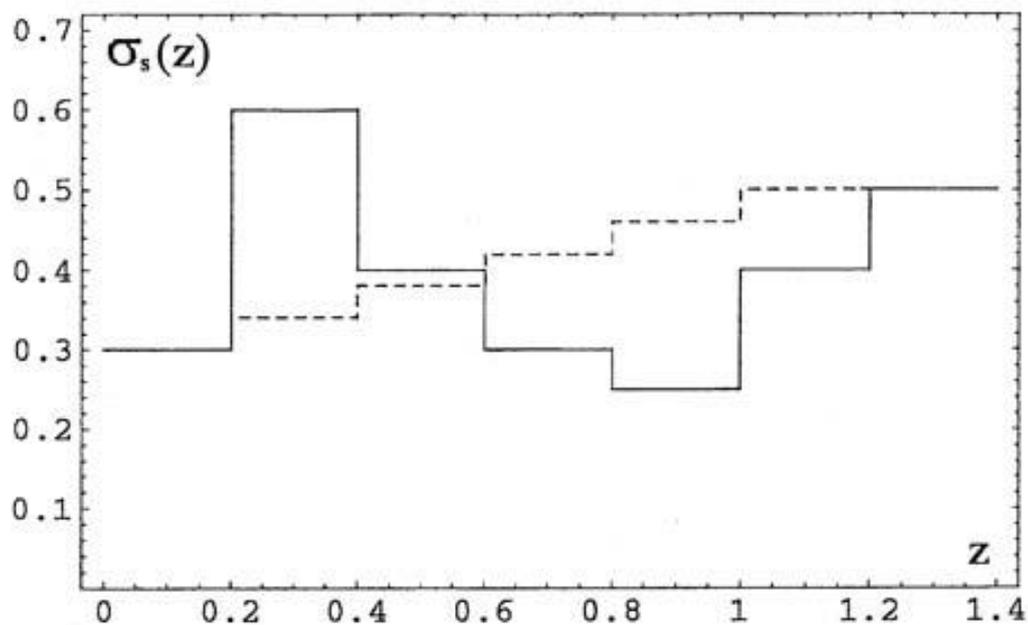


Расм. 3.2.12.

Эластик-ғовак жисмдан тақсимланган суюқликнинг ўтиши ҳам қийинлашди(3.2.13 ва 3.2.1.4 расмлар).

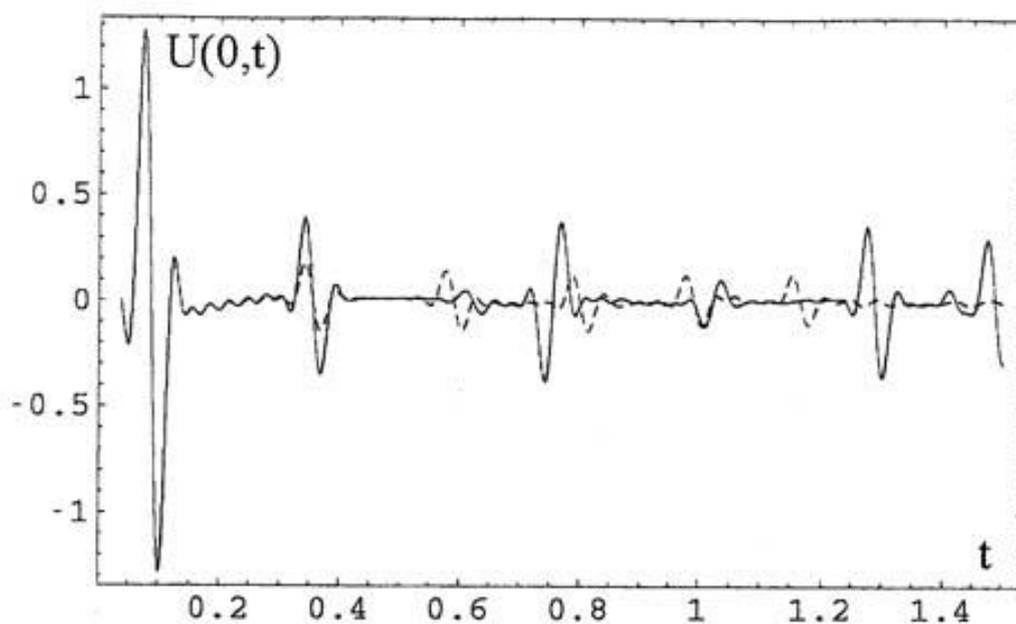


Расм. 3.2.13.

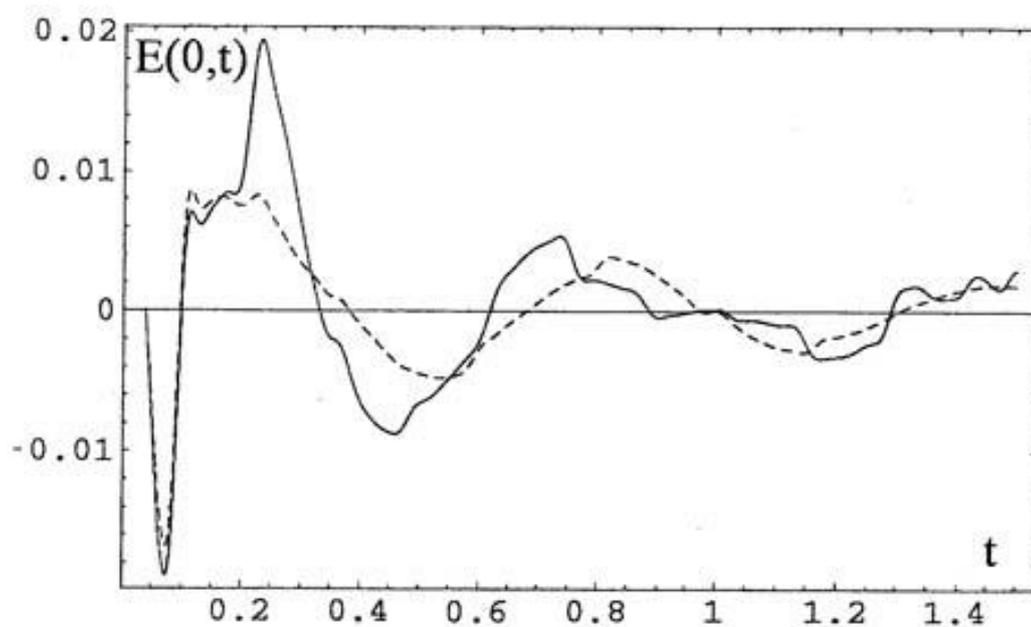


Расм. 3.2.14.

Тўлқин майдони ва электр майдони кучланиши сиртда ҳисобланиши 3.2.15 ва 3.2.16 расмларда келтирилган.

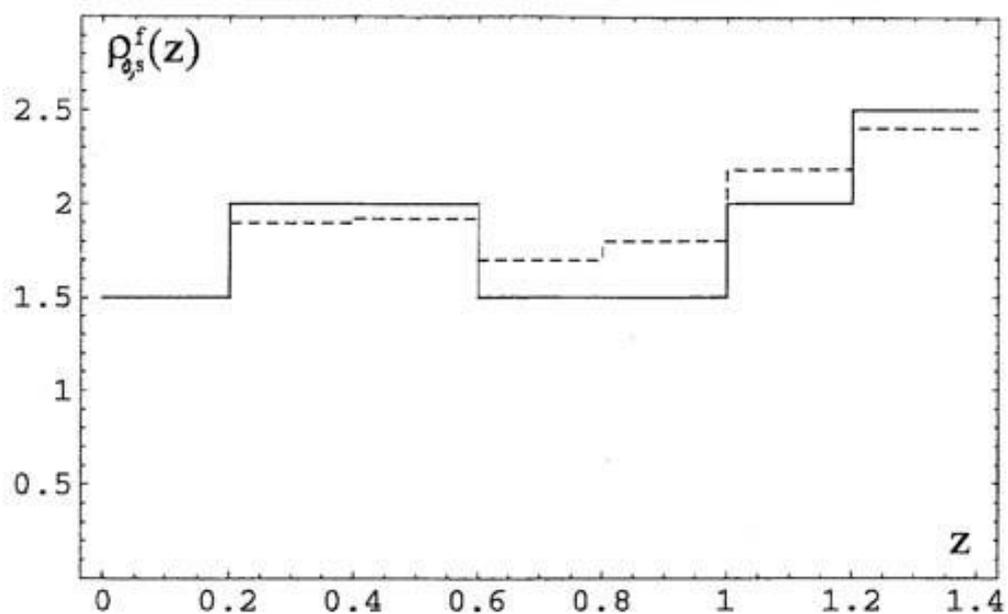


Расм. 3.2.15.

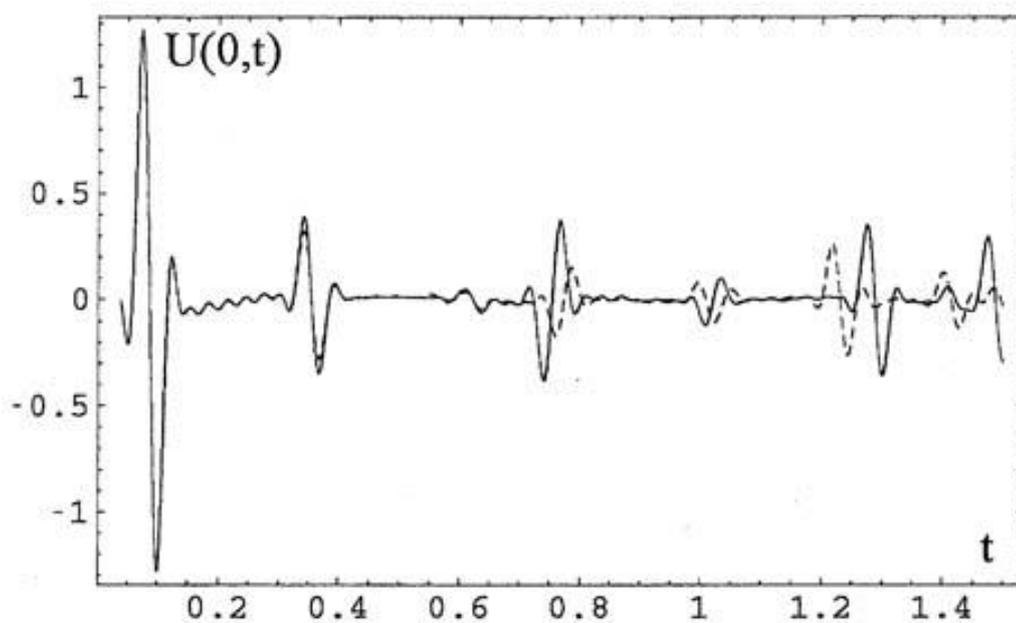


Расм. 3.2.16.

Биринчи этап ва биринчи моделда эластик-ғовак жисмда $\rho_{0,s}^f(z)$ жисмоний зичликнинг тақсимланишининг тикланиши келтирилган эди. Олинган тақсимланиш қуйидагича:

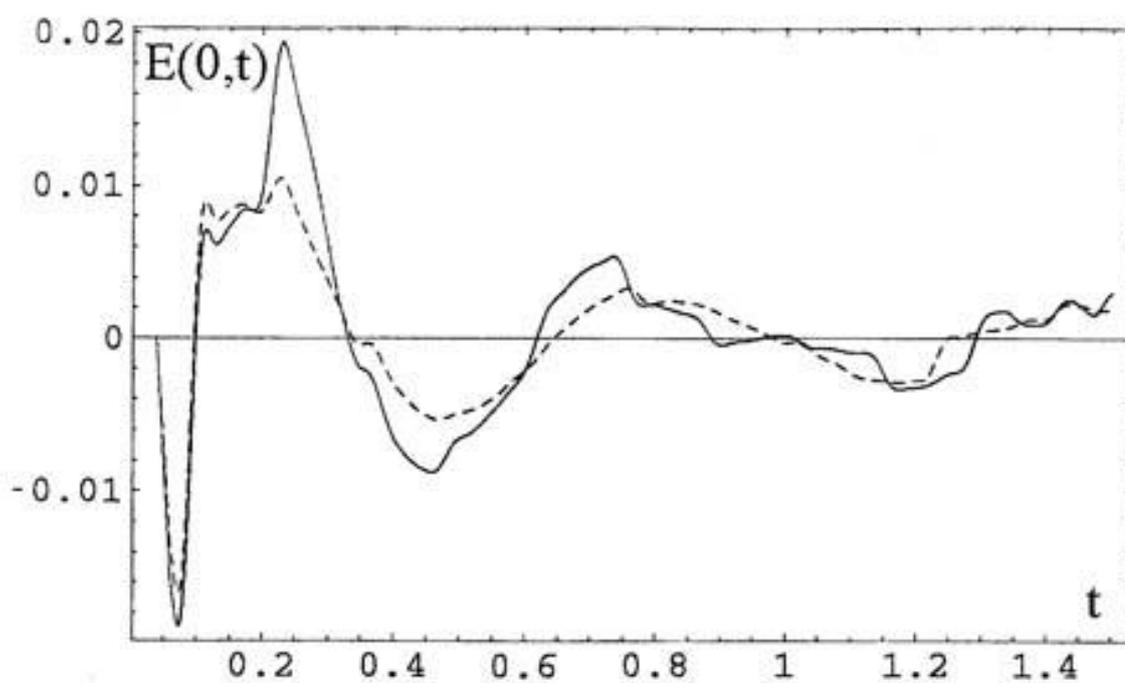


Расм. 3.2.16.



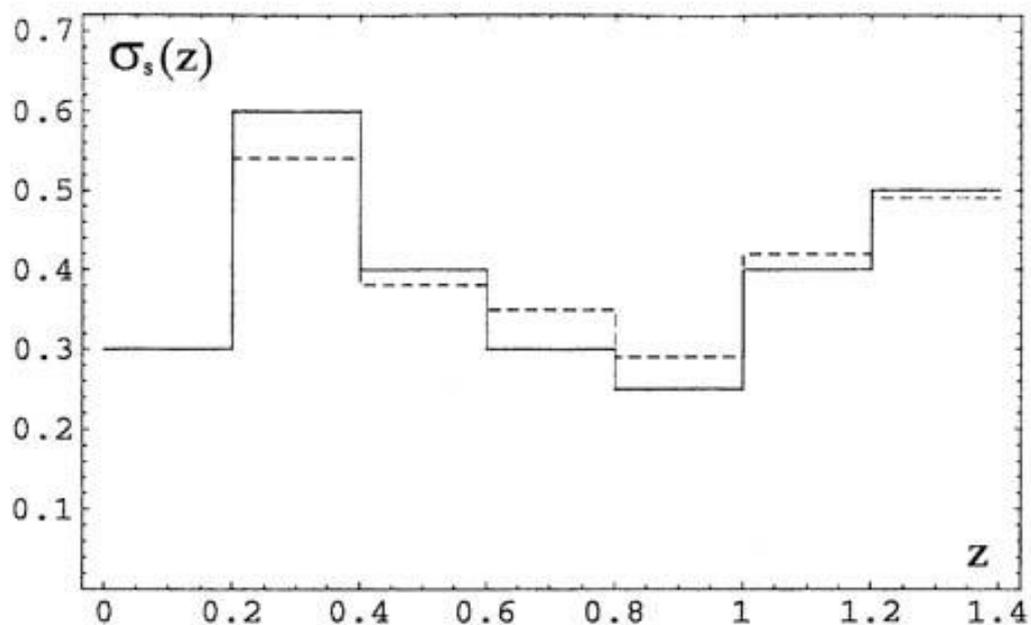
Расм. 3.2.17.

Сиртда ҳисобланган тўлқин майдони $u(t,0)$ 3.2.17 расмда ва электр майдони кучланиши $E(t,0)$ 3.2.18 расмда кўрсатилган.

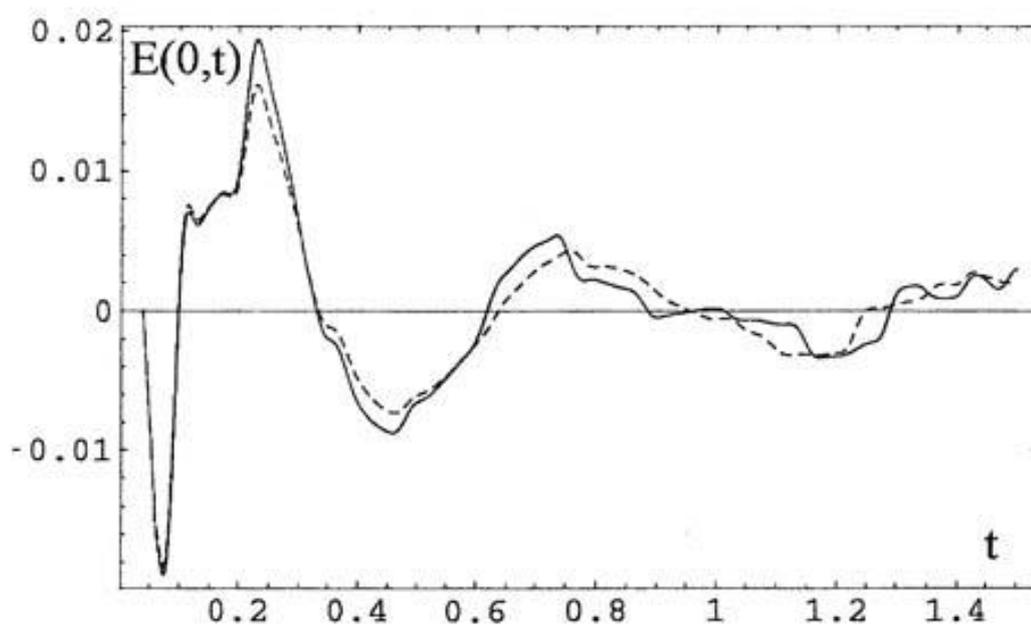


Расм. 3.2.18.

Сўнгра эса муҳитнинг ўтказувчанлиги тикланди. Сиртдаги суюқлик, эластик-ғовак жисм ва электр майдони кучланишининг ўтказувчанлиги бўйича олнган натижалар (3.2.19 ва 3.2.20) келтирилган

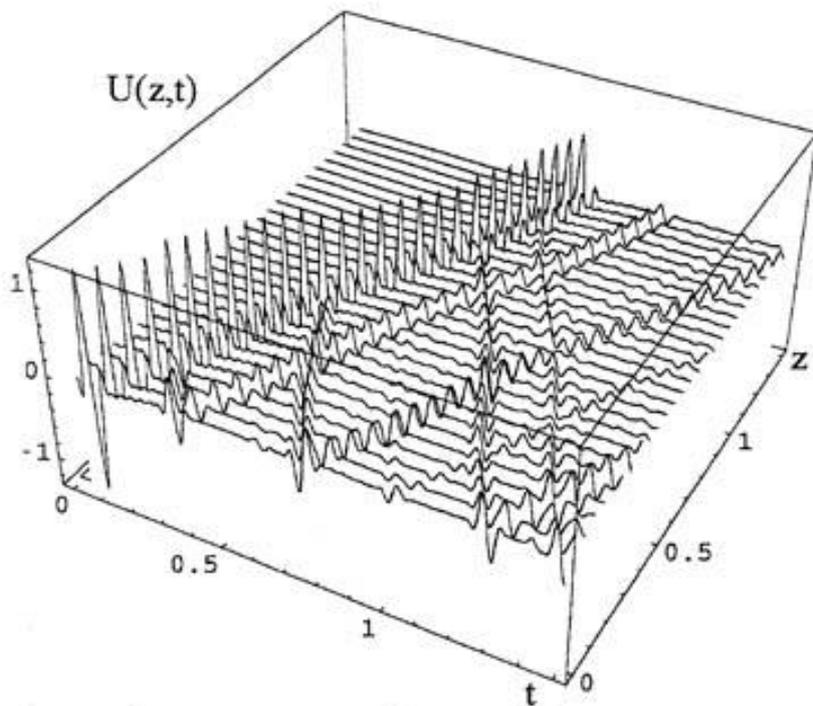


Расм. 3.2.19.

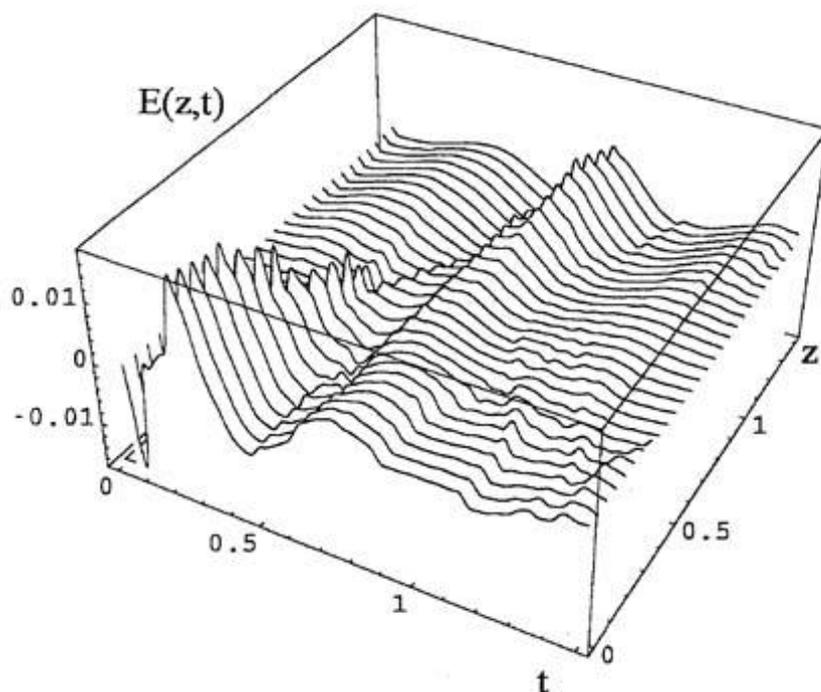


Расм. 3.2.20.

Учинчи ҳолда ишқаланиш коэффициенти $\chi(z)$ тикланиши муҳитнинг асосий параметрлари иккинчи модел учун ўтказилди. Бу моделнинг тўла тўлқин майдони (3.2.21 ва 3.2.22) келтирилган.

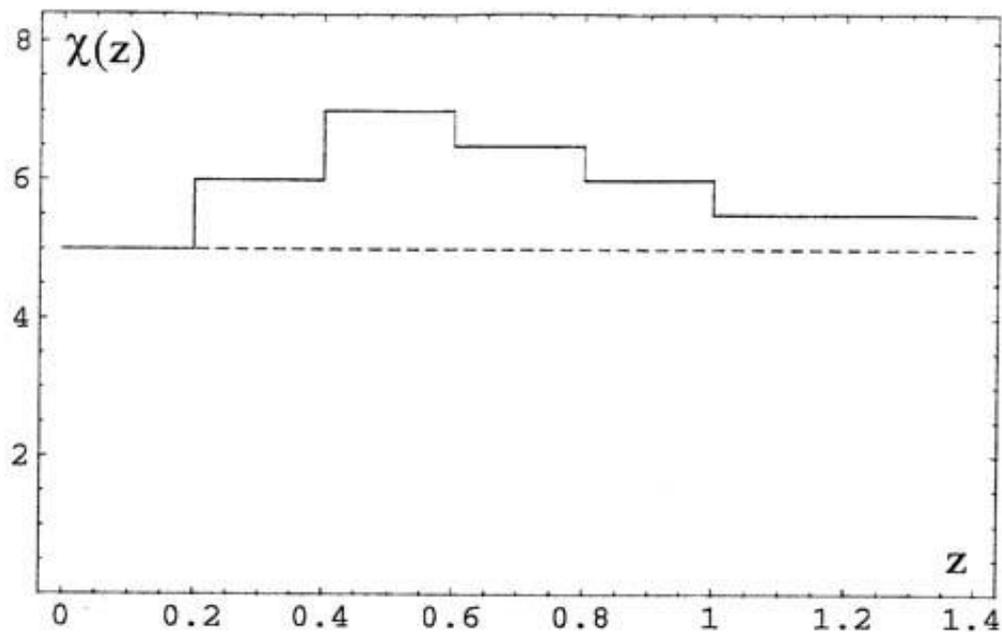


Расм. 3.2.21.

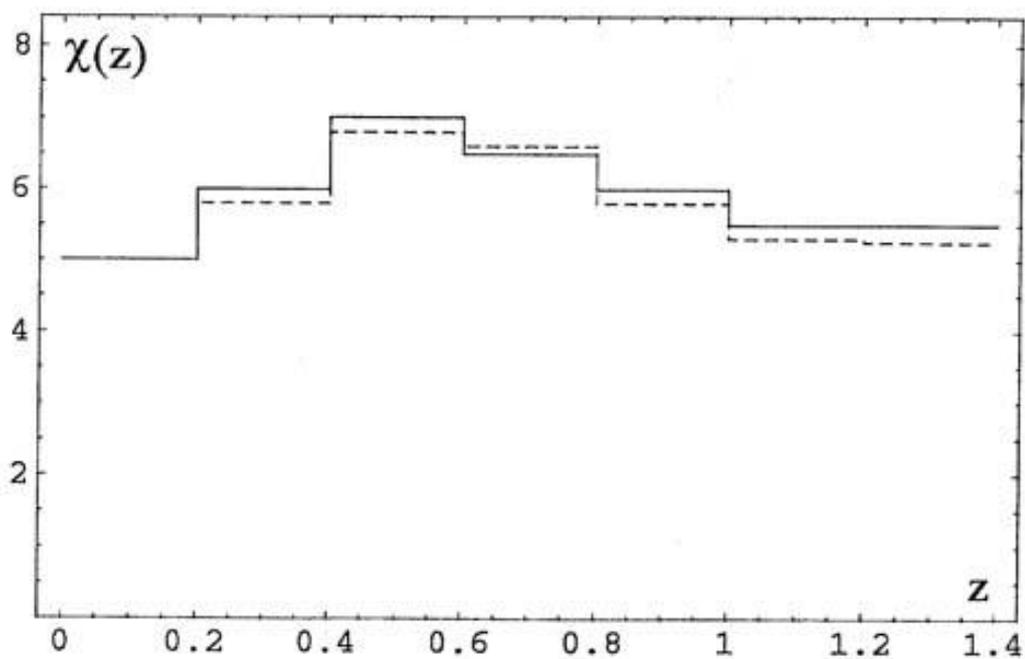


Расм. 3.2.22.

Ишқаланиш коэффициентинг тақсимланиши ва унинг тикланиш маъноси (3.2.23 ва 3.2.24 расмлар)да келтирилган.

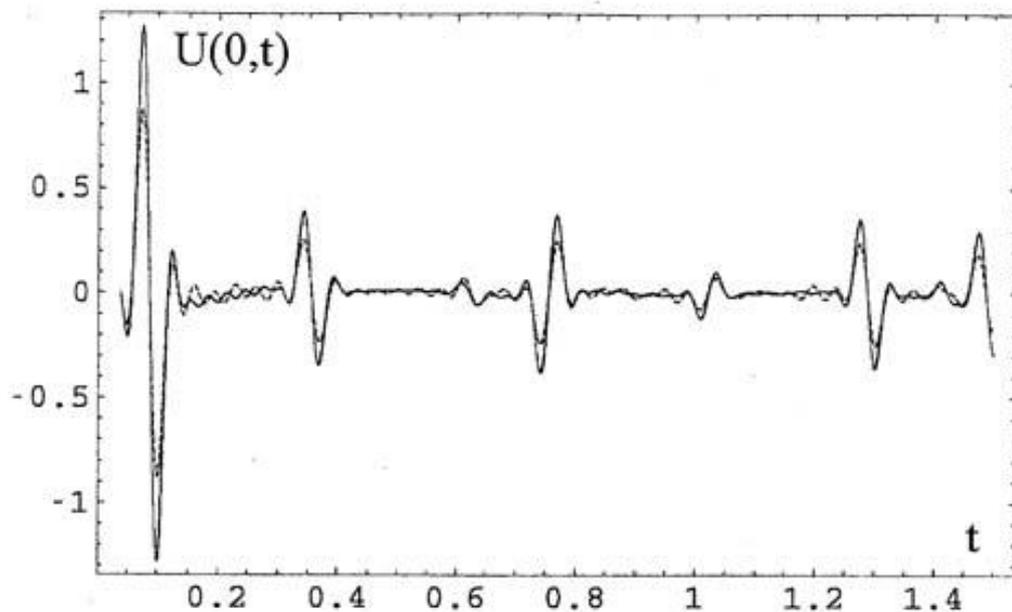


Расм. 3.2.23.

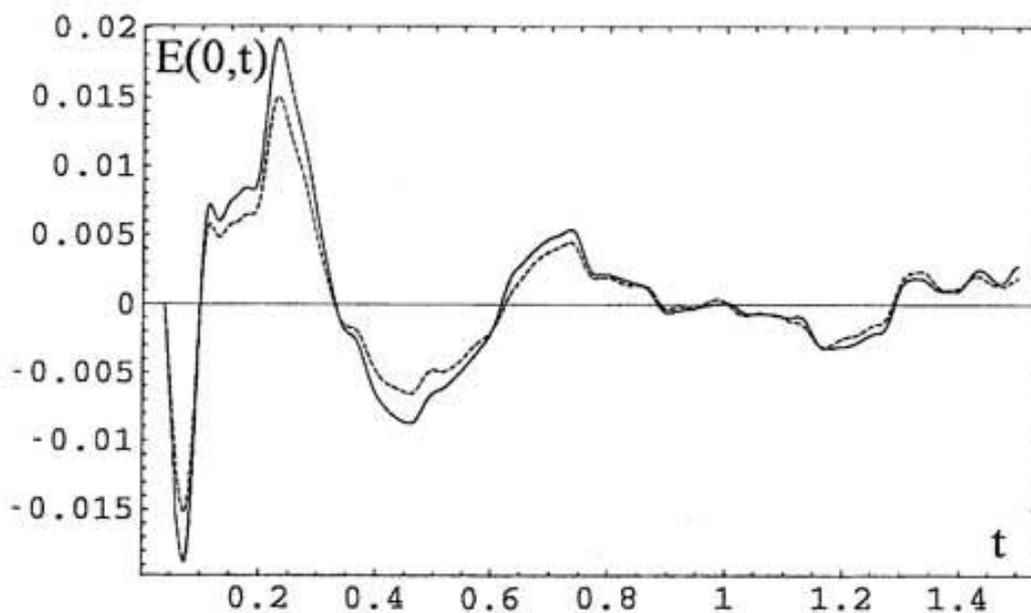


Расм. 3.2.24.

Иккинчи моделдаги сиртда(бутун чизик) тўлқин майдони ва электр майдони кучланишини ҳамда учинчи моделдаги(ишқаланиш коэффициентини киритиш билан) нуқтали чизиклар орқали ифодалаш мумкин.



Расм. 3.2.25



Расм. 3.2.26.

ХУЛОСА

Диссертация тадқиқи бўйича қисқача умумлашган хулосалар:

Эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тенгламалари билан ифодаланувчи динамик жараёнларнинг математик модели қурилди.

Эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тенгламаларининг сингуляр ечимлари топилди.

Эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тенгламалари учун қўйилган масала иккинчи тур чизиқли Вольterra интеграл тенгламалар системасига келтирилди. Бу системадан қаралаётган масала ечимининг мавжудлиги (локал) ва ягоналиги келиб чиқади.

Интеграл тенгламалар системасини сонли ечиш усули ишлаб чиқилган. Бу усул характеристикалар методига таянади.

АДАБИЁТЛАР

1. Авдеев А.В., Горюнов Э.В., Прийменко В.И. Численное решение обратной задачи электромагнитоупругости // Математическое моделирование, 1997, т. 9, № 10, с. 54–66.
2. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология.– Мир.1983.-830 с.
3. Алексеев А.С. Некоторые обратные задачи теории распространения волн // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1962. №11-12. с.1514-1531.
4. Алексеев А.С. Обратные динамические задачи сейсмоки // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. – М., 1967. – С. 9–84.
5. Алексеев А.С., Добринский В.И. Некоторые вопросы практического использования обратных задач сейсмоки // Математические проблемы геофизики. – Новосибирск, 1965. – Вып. 6, ч. 2. –С. 7-53.
6. Алексеев А.С., Имомназаров Х.Х., Грачев Е.В, Рахмонов Т.Т., Имомназаров Б.Х. Прямые и обратные динамические задачи для системы уравнений континуальной теории фильтрации // Сиб. ЖИМ. - 2004, т. VII, No 1(17), с. 3-8.
7. Аниконов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд–ние, 1978, –148 с.
8. Антоненко О.Ф. Обращение одной разностной схемы для решения одномерной динамической задачи сейсмоки // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. – М., 1967. – С. 92–98.
9. Белишев М.И., Благовещинский А.С. Динамические обратные задачи теории волн. СПб.: Изд-во СПб. Ун-та, 1999. – 268 с.

10. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
11. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1951. т. 15, № 4. с. 309-360.
12. Горюнов Э.В., Имомназаров Х.Х. Численное решение совмещенных одномерной обратной задачи для уравнения Максвелла и уравнений пористых сред // Сиб. ЖВМ, 2000, т. 3. № 2, с. 137–149.
13. Доровский В.Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика - 1989. - № 7. - С. 39-45.
14. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // ФГВ. 1993, №1. с. 100-111.
15. Дурдиев Д.К. Обратная задача для трехмерного волнового уравнения в среде с памятью // Математический анализ и дискретная математика. – Новосибирск: НГУ, 1989. – С. 19–26.
16. Дурдиев Д.К. К вопросу о корректности одной обратной задачи для гиперболического интегро-дифференциального уравнения // Сиб. мат. журнал, 1992. Т. 33, № 3, С. 69–77.
17. Имомназаров Х.Х. Несколько замечаний о системе уравнений Био // Доклады РАН. 2000, Т. 373, №4, с.536-537.
18. Имомназаров Х.Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб.ЖИМ, 2001, т.IV, №.2(8). С.154-165.
19. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Прямые и обратные динамические задачи для уравнения SH волн в пористой среде // Материалы XLII международной научной студенческой конференции. Новосибирск 2004г. 192-193 ст.

20. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Прямые и обратные динамические задачи для уравнения SH волн в пористой среде // Вестник НУУЗ, серия механика–математика, 2006, No. 2, с. 86–91.
21. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Алгоритмы численного решения одномерных прямой и обратной задач распространения SH волн в пористых средах// Вестник КарГУ, 2010, No. 3, с. 43–53.
22. Кабанихин С.И. О разрешимости обратной динамической задачи сейсмологии // Условно–корректные математические задачи и проблемы геофизики. – Новосибирск, 1979. – С. 43–51.
23. Imomnazarov Kh.Kh. Estimates of conditional stability of some combined inverse problems for Maxwell's equations and equations of porous media // Comp. Appl. Math., v. 20, 2001, pp. 20-34.
24. Крейн М.Г. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля // Доклады АН СССР, 1951. т. 76, No 1, с. 21-24.
25. Кабанихин С.И. О разрешимости обратной динамической задачи сейсмологии // Условно–корректные математические задачи и проблемы геофизики. – Новосибирск, 1979. – С. 43–51.
26. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. –263 с.
27. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.
28. Холмуродов А.Э., Тошмуродова Г. Т. Об особых решениях одномерного уравнения SH волн в пористых средах// Сибирские электронные математические известия., Новосибирск 2016г. Том 13 300-304 с.

29. Холмуродов А.Э. Тошмуродова Г.Т. Алгоритм численного решения одномерных прямых задач распространения SH волн в пористых средах// Материалы научной конференции. Карши, 2016г. 192-196 с.
30. Imomnazarov Kh.Kh. Combined One–Dimensional Inverse Problems for Maxwell’s equations and an Equations of the Continual Filtration Theory // Appl. Math. Lett, 1999, v. 12, No. 2, pp. 45-49.
31. Imomnazarov Kh.Kh. Archie’s Law for a Mathematical Model for the Movement of a Conducting Liquid Through a Conducting Porous Medium // Appl. Math. Lett, 1998, v. 11, No. 6, pp. 135-138.
32. Imomnazarov Kh.Kh. and Kholmurodov A.E. Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media // Mathematical and Computer Modelling, V. 45, Issues 3-4, 2007, pp. 270-280.

Дастур иловаси

```
#include <windows.h>
#include <windowsx.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <fstream.h>

#include "MyDiplom.h"

HINSTANCE hInst;
char      szAppName[] = "MyProgram";

/*
#define T 50 //промежуток времени
#define N 1000 //количество промежутков */
#define MAXPATH 256
#define N_max 1000

// const double h=(double)T/(double)N; //шаг сетки

double f(double); //исходные возмущения
double g(double); //принятые возмущения
double g_prime(double); //производная g
double a_real(double); //исходная функция a
double xi(double); //коэффициент межкомпонентного трения
double ro_s(double); //парциальная плотность упругого пористого тела
double ro_l(double); //парциальная плотность жидкости
double q_func(double); // q_func=xi*ro_l^2/ro_s
double mu_real(double); // коэффициент ламе
double a_real_por(double); //исходная функция a=sqrt(ro_s*mu_real) для пористой среды

LRESULT WINAPI WndFunc(HWND hwnd, UINT message, WPARAM wParam, LPARAM lParam);

BOOL CALLBACK MainFunction(HWND hwnd, UINT message,
    WPARAM wParam, LPARAM lParam);

////////////////////////////////////
int WINAPI WinMain(HINSTANCE hInstance, HINSTANCE hPrevInstance,
    LPSTR , int nCmdShow)
{
    HWND      hwnd ;
    MSG       msg ;
    WNDCLASS  wndclass ;

    hInst = hInstance;

    if(!hPrevInstance)
    {
        wndclass.style          = CS_HREDRAW | CS_VREDRAW;
        wndclass.lpfnWndProc    = WndFunc;
        wndclass.cbClsExtra     = 0;
        wndclass.cbWndExtra     = 0;
        wndclass.hInstance     = hInstance;
        wndclass.hIcon         = NULL;
        wndclass.hCursor       = LoadCursor(NULL, IDC_ARROW);
        wndclass.hbrBackground = (HBRUSH)GetStockObject(BLACK_BRUSH);
        wndclass.lpszMenuName  = szAppName;
        wndclass.lpszClassName = szAppName;

        RegisterClass(&wndclass);
    }

    hwnd = CreateWindow(szAppName, "MyDiplom",
        WS_OVERLAPPEDWINDOW | WS_VSCROLL | WS_HSCROLL,
        0, 0, 400, 500,
        NULL, NULL, hInstance, NULL);

    ShowWindow(hwnd, nCmdShow);
    UpdateWindow(hwnd);

    while(GetMessage(&msg, NULL, 0, 0))
    {
        TranslateMessage(&msg);
        DispatchMessage(&msg);
    }
    return msg.wParam;
}
////////////////////////////////////
```



```

SetFocus(hwnd);
return 1;
}

case WM_COMMAND:
{
switch(LOWORD(wParam))
{
case WM_DESTROY:
{
EndDialog(hwnd, 1);
SendMessage(GetParent(hwnd), WM_DESTROY, wParam, lParam);
return 0;
}
case IDC_BUTTON_ENTER_P://расчет задачи для упругой среды
{
/*static char cG0[10];
GetDlgItemText(hwnd, IDC_EDIT_G0, cG0, max_G0);
G0=(int)atoi(cG0);
for(int i=0; i<size_P; i++)
massiv_P[i]=f(25*i, G0);
InvalidateRect(hwnd, NULL, TRUE);
return 0;*/
a[1]=1;
for(int i=1; i<=N; i++){
p[i][i]=0;
w[i][i]=0;
p[1][i]=f((i-1)*h);
//w[1][i]=g_prime((i-1)*h);
}
for(i=2; i<=N; i++){
a[i]=2*p[i-1][i]/w[i-1][i]-a[i-1];
for(int j=i+1; j<=N; j++){
p[i][j]=0.5*(p[i-1][j-1]+p[i-1][j])+0.25*(a[i-1]+a[i])*(w[i-1][j-1]-w[i-1][j]);
w[i][j]=(p[i-1][j-1]-p[i-1][j])/(a[i-1]+a[i])+0.5*(w[i-1][j-1]+w[i-1][j]);
}
//a[i+1]=2*p[i][i+1]/w[i][i+1]-a[i];
}
InvalidateRect(hwnd, NULL, TRUE);

return 0;
}

case IDC_BUTTON_ENTER_G0://расчет задачи для упругой среды
{
/*static char cP[10];
GetDlgItemText(hwnd, IDC_EDIT_P, cP, max_P);
P=(int)atoi(cP);
for(int j=0; j<size_G0; j++)
massiv_G0[j]=f(P, Gmin+25*j);
InvalidateRect(hwnd, NULL, TRUE);
return 0;*/

for(int i=1; i<=N; i++){
p[i][i]=0;
w[i][i]=0;
p[1][i]=f((i-1)*h);
a[i]=a_real((i-1)*h);
}
int j;
for(int k=2; k<=N; k++){
w[1][k]=2*(p[1][k]-p[2][k])/(a[2]+1)+w[2][k];
for(int i=2; i<=N-k+1; i++){
j=i+k-1;
p[i][j]=((a[i]+a[i-1])*(p[i+1][j])+
(a[i+1]+a[i])*(p[i-1][j-1])+
0.5*(a[i+1]+a[i])*(a[i]+a[i-1])*(w[i-1][j-1]-w[i+1][j])))/(a[i+1]+2*(a[i])+a[i-1]);

w[i][j]=(2*(p[i-1][j-1]-p[i+1][j])+
(a[i]+a[i-1])*(w[i-1][j-1])+
(a[i+1]+a[i])*(w[i+1][j])))/(a[i+1]+2*(a[i])+a[i-1]);
}
}
InvalidateRect(hwnd, NULL, TRUE);
return 0;
}

case IDC_BUTTON_ENTER_INVERSE:

```

```

{
/*static char cG0[10];
GetDlgItemText(hwnd, IDC_EDIT_G0, cG0, max_G0);
G0=(int)atoi(cG0);
for(int i=0; i<size_P; i++)
    massiv_P[i]=f(25*i, G0);
InvalidateRect(hwnd, NULL, TRUE);
return 0;*/
a[1]=1; //присваиваем 1, т.к. так предположили в самом
// методе решения для определенности
for(int i=1; i<=N; i++){
    p[i][i]=0; //здесь присваиваются нулевые начальные данные
    w[i][i]=0; //для всех основных неизвестных величин p, w, r
    r[i][i]=0; //на линии x=t
}
double p1, p2, w1, w2, w3;
for(int j=2; j<=N; j++) //считаем r при z=0
    r[1][j]=r[1][j-1]+h*xi(0)*ro_l(0)*(w[1][j-1]-r[1][j-1]);
for(i=2; i<=N; i++){
    a[i]=2*p[i-1][i]/w[i-1][i]-a[i-1]-h*a[i-1]*q[i-1];
    for(int j=i+1; j<=N; j++){
        r[i][j]=r[i][j-1]+2*h*xi((i-1)*h)*ro_l((i-1)*h)*(w[i][j-1]-r[i][j-1]);
        p1=0.5*(p[i-1][j-1]+p[i-1][j])+0.25*(a[i-1]+a[i])*(w[i-1][j-1]-w[i-1][j]);
        p2=-0.5*h*a[i]*q[i]*(w[i][j]-r[i][j])-0.25*h*a[i-1]*q[i-1]*((w[i-1][j-1]-r[i-1]
[j-1])+(w[i-1][j]-r[i-1][j]));
        p[i][j]=p1+p2;
        w1=(p[i-1][j-1]-p[i-1][j])/(a[i-1]+a[i]);
        w2=0.5*(w[i-1][j-1]+w[i-1][j]);
        w3=0.5*h*a[i-1]*q[i-1]*((w[i-1][j-1]-r[i-1][j-1])-(w[i-1][j]-
-r[i-1][j]))/(a[i]+a[i-1]));
        w[i][j]=w1+w2-w3;
    }
    //a[i+1]=2*p[i][i+1]/w[i][i+1]-a[i];
}
InvalidateRect(hwnd, NULL, TRUE);

return 0;
}
case IDC_BUTTON_ENTER_FORWARD:
{
/*static char cG0[10];
GetDlgItemText(hwnd, IDC_EDIT_G0, cG0, max_G0);
G0=(int)atoi(cG0);
for(int i=0; i<size_P; i++)
    massiv_P[i]=f(25*i, G0);
InvalidateRect(hwnd, NULL, TRUE);
return 0;*/

for(int i=1; i<=N; i++){
    p[i][i]=0; //здесь присваиваются нулевые начальные данные
    w[i][i]=0; //для всех основных неизвестных величин p, w, r
    r[i][i]=0; //на линии x=t
}
int j;
double p1, p2, w1, w2;
for(int k=2; k<=N; k++){
    w[1][k]=(2*(p[1][k]-
p[2][k])+h*q[1]*r[1][k]+h*a[2]*q[2]*r[2][k])/(a[2]+1+h*q[1])+w[2][k]*(a[2]+1-
h*a[2]*q[2])/(a[2]+1+h*q[1]);
    for(int i=2; i<=N-k+1; i++){
        j=i+k-1;
        r[i][j]=r[i][j-1]+2*h*xi((i-1)*h)*ro_l((i-1)*h)*(w[i][j-1]-r[i][j-1]);
        w1=2*(p[i-1][j-1]-p[i+1][j])+(a[i]+a[i-1])*(w[i-1][j-1])+(a[i+1]+a[i])*(w[i+1][j]);
        w2=h*(a[i+1]*q[i+1]*(w[i+1][j]-r[i+1][j])-2*a[i]*q[i]*r[i][j]+a[i-1]*q[i-1]*(w[i-1]
[j-1]-r[i-1][j-1]));
        w[i][j]=(w1-w2)/(a[i+1]+2*(a[i])+a[i-1]+2*h*a[i]*q[i]);

        p1=p[i-1][j-1]-0.5*(a[i]+a[i-1])*w[i][j]+0.5*(a[i]+a[i-1])*w[i-1][j-1];
        p2=0.5*h*(a[i]*q[i]*(w[i][j]-r[i][j])+a[i-1]*q[i-1]*(w[i-1][j-1]-r[i-1][j-1]));
        p[i][j]=p1-p2;
    }
}
InvalidateRect(hwnd, NULL, TRUE);

return 0;
}
case IDC_BUTTON_READFILE_FORWARD:
{
    GetDlgItemText(hwnd, IDC_EDIT_INPUTFILE, fileName, MAXPATH);
    ifstream inFile;
}

```

```

inFile.open(fileName);
inFile>>T;
inFile>>N;
h=T/N;
for(int i=1;i<=N;i++){
    inFile>>_ro_s[i];
    inFile>>_ro_l[i];
    inFile>>_mu[i];
    inFile>>_Xi[i];
    inFile>>_f[i];
}
inFile.close();
for(i=1;i<=N-1;i++){
    q[i]=_Xi[i]*_ro_l[i]*_ro_l[i]/_ro_s[i];
    a[i]=sqrt(_ro_s[i]*_mu[i]);
    p[1][i]=_f[i];
}
return 0;
}
case IDC_BUTTON_READFILE_INVERSE:
{
    GetDlgItemText(hwnd, IDC_EDIT_INPUTFILE, fileName, MAXPATH);
    ifstream inFile;
    inFile.open(fileName);
    inFile>>T;
    inFile>>N;
    h=T/N;
    for(int i=1;i<=N;i++){
        inFile>>_ro_s[i];
        inFile>>_ro_l[i];
        inFile>>_Xi[i];
        inFile>>_f[i];
        inFile>>_g[i];
    }
    inFile.close();
    for(i=1;i<=N-1;i++){
        q[i]=_Xi[i]*_ro_l[i]*_ro_l[i]/_ro_s[i];
        p[1][i]=_f[i];
    }
    return 0;
}
case IDC_BUTTON_WRITEFILE_FORWARD:
{
    GetDlgItemText(hwnd, IDC_EDIT_OUTPUTFILE, fileName, MAXPATH);
    ofstream outFile;
    outFile.open(fileName);
    outFile<<T;
    outFile<<N;
    double g_temp;
    g_temp=0;
    outFile<<g_temp;
    for(int i=2;i<=N;i++){
        g_temp=g_temp+2*h*w[1][i-1];
        outFile<<g_temp;
    }
    outFile.close();
    return 0;
}
case IDC_BUTTON_WRITEFILE_INVERSE:
{
    GetDlgItemText(hwnd, IDC_EDIT_OUTPUTFILE, fileName, MAXPATH);
    ofstream outFile;
    outFile.open(fileName);
    outFile<<T;
    outFile<<N;
    for(int i=2;i<=N;i++){
        outFile<<(a[i]*a[i]/_ro_s[i]);
    }
    outFile.close();
    return 0;
}
break;
}
}
case WM_PAINT:
{
    PAINTSTRUCT ps;
    HDC hdc = BeginPaint(hwnd, &ps);

```

```

static height_P,width_P,height_G0,width_G0;
height_P=rc_P.bottom-rc_P.top-10;
height_G0=rc_G0.bottom-rc_G0.top-10;
width_P=rc_P.right-rc_P.left;
width_G0=rc_G0.right-rc_G0.left;

/*MoveToEx(hdc,rc_P.left-5,rc_P.bottom-height_P,(LPPOINT)NULL);
LineTo(hdc,rc_P.left+5,rc_P.bottom-height_P);
TextOut(hdc,rc_P.left-10,rc_P.bottom-height_P,"1",1);
MoveToEx(hdc,rc_G0.left-5,rc_G0.bottom-height_G0,(LPPOINT)NULL);
LineTo(hdc,rc_G0.left+5,rc_G0.bottom-height_G0);
TextOut(hdc,rc_G0.left-10,rc_G0.bottom-height_G0,"1",1);

TextOut(hdc,rc_P.left-5,rc_P.bottom+5,"0",1);
TextOut(hdc,rc_P.left+int(width_P*40/size_P)-15,rc_P.bottom+5,"1000",4);
TextOut(hdc,rc_P.left+width_P-10,rc_P.bottom-15,"P",1);*/
/*for(int k=0;k<size_P;k+=40){
MoveToEx(hdc,rc_P.left+int(width_P*k/size_P),rc_P.bottom-5,(LPPOINT)NULL);
LineTo(hdc,rc_P.left+int(width_P*k/size_P),rc_P.bottom+5);
}*/

/*TextOut(hdc,rc_G0.left-5,rc_G0.bottom+5,"900",3);
TextOut(hdc,rc_G0.left+int(width_G0*40/size_G0)-15,rc_G0.bottom+5,"1900",4);
TextOut(hdc,rc_G0.left+width_G0-20,rc_G0.bottom-15,"G0",2);*/
/*for(k=0;k<size_G0;k+=40){
MoveToEx(hdc,rc_G0.left+int(width_G0*k/size_G0),rc_G0.bottom-5,(LPPOINT)NULL);
LineTo(hdc,rc_G0.left+int(width_G0*k/size_G0),rc_G0.bottom+5);
}*/
MoveToEx(hdc,rc_P.left,rc_P.bottom-int(height_P*(w[1][1])-100),(LPPOINT)NULL);
for(int j=2;j<=N;j++)
LineTo(hdc,rc_P.left+int(width_P*j/N),rc_P.bottom-int(height_P*(w[1][j]))-100);

MoveToEx(hdc,rc_G0.left,rc_G0.bottom-int(height_G0*a[1]/2),(LPPOINT)NULL);
for(j=2;j<=N;j++)
LineTo(hdc,rc_G0.left+int(width_G0*j/N),rc_G0.bottom-int(height_G0*a[j]/2));

break;
}
}
return 0;
}
double f(double _x){
return sin(_x);
}
double g(double _x){
return f(_x)+1/10;
}
double g_prime(double _x, double h){
return (g(_x+h)-g(_x))/h;
}
double a_real(double _x){
return sqrt(1+0.5*sin(_x));
//1+0.5*sin(_x);
//if (_x>=10 & _x<=30) return 1.1-0.01*fabs(_x-20); else return 1;
}
double xi(double _x){
return 1;
}
double ro_s(double _x){
return 1+0.5*sin(_x);
return 1;
}
double ro_l(double _x){
return 0.3*ro_s(_x);
}
double q_func(double _x){
return xi(_x)*ro_l(_x)*ro_l(_x)/ro_s(_x);
}
double mu_real(double _x){
return 1;
//if (_x>=10 && _x<=30) return 1+0.03*fabs(_x-10); else return 1;
}
double a_real_por(double _x){
return sqrt(ro_s(_x)*mu_real(_x));
}
}

```