ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ТАФАККУР ВА ТАЛҚИН

(Магистрантларнинг илмий мақолалар тўплами)

5

Бухоро- 2016 йил

Foydalanilgan adabiyotlar:
1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. –М. Наука, 1987. 736 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 742 с.
3. Роуч Г. Вычислительная гидродинамика. М.: Наука, 1987. 587 с.

ОБ ОДНОЙ ВЕСОВОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО ПОРЯДКУ СХОДИМОСТИ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p^{(m)}(K_n)$.

АБДУЛЛАЕВ БЕХЗОД РАЖАБОВИЧ (*магистр БухГУ*)

Ушбу ишда бир вазнли кубатур формуланинг $L_p^{(m)}(K_n)$ фазосида асимптотик оптималлиги муҳокама қилинган.

В настоящей работе обсуждается асимптотическая оптимальность одной весовой кубатурной формулы в пространстве $L_p^{(m)}(K_n)$.

In this paper in the space $L_p^{(m)}(K_n)$ asymptotic optimality of one weight cubature formula is discussed.

Рассмотрим кубатурную формулу вида

$$\int_{K_n} p(x)f(x)dx \approx \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right) \tag{1}$$

над пространством Соболева $L_p^{(m)}(K_n)$, где K_n – n-мерный единичный куб.

Обобщённая функция

$$\ell_N(x) = p(x)\varepsilon_{K_n}(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right) \tag{2}$$

называется функционалом погрешности кубатурной формулы (1),

$$<\ell_N(x), f(x)> = \int_{K_n} p(x)f(x)dx - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right)$$

является погрешностью кубатурной формулы (1), $p(x) \in L_p(K_n)$ весовая функция, $\varepsilon_{K_n}(x)$ - характеристическая функция K_n, c_λ и $x^{(\lambda)}$ - коэффициенты и узлы кубатурной формулы (1) и $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Определение. Пространство $L_p^{(m)}(K_n)$ - определяется как пространство функций заданных на n-мерном единичном кубе K_n и имеющие все обобщённые производные порядка m, суммируемые со степенью p в норме (см. [1])

$$\left\| f(x)/L_p^{(m)}(K_n) \right\| = \left\{ \int_{K_n} \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left[D^{|\alpha|} f(x) \right]^2 \right\}^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{3}$$

где $D^{|\alpha|} = \dfrac{\partial^m}{dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \dots dx_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$.

Справедлива следующая

Лемма. Если для функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) выполняется условие Декартовых произведений, т.е.

$$\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \otimes \ell_{N_2}(x_2) \otimes \dots \otimes \ell_{N_n}(x_n)$$

и

$$\left\| \ell_{N_i}(x_i)/L_p^{(m_i)^*}(0,1) \right\| \le d_i \frac{1}{N_i^{m_i}}, \quad d_i \text{ - константы,} \tag{4}$$

т.е.

$$\left\| \ell_{N_i}(x_i)/L_p^{(m_i)^*}(0,1) \right\| \le d_i\, O\left(h^{m_i}\right), \quad d_i \text{ - константы, } \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{5}$$

то

$$\left\| \ell_N(x)/L_p^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \cdot \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} N_i^{m_i}}, \quad d \text{ - константа,} \tag{6}$$

или

$$\left\| \ell_N(x)/L_p^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \cdot O\left(h^m\right),$$

где $\ell_{N_i}(x_i) = p(x_i)\varepsilon_{k_i}(x_i) - \sum_{\lambda_i=1}^{N_i} c_{\lambda_i} \delta\left(x_i - x_i^{(\lambda_i)}\right), d = \prod_{i=1}^{n} d_i$ и $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

Доказательство ведем методом математической индукции.

Пусть $n = 2$, тогда $x = (x_1, x_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $m = m_1 + m_2$, $dx = dx_1 dx_2$, $f(x) = f(x_1, x_2)$, $p(x) = p(x_1, x_2)$ и $\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \otimes \ell_{N_2}(x_2)$.

Так как в дальнейшем мы будем использовать норму функции в одномерном случае то (3) при $n = 1$ принимает следующий вид.

$$\left\| f(x_i)/L_p^{(m_i)^*}(0,1) \right\| = \left\{ \int_0^1 \left[\frac{d^{m_i}}{dx_i^{m_i}} f(x_i) \right]^p dx_i \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{7}$$

Таким образом, имеем

$$\left| < \ell_N(x_1,x_2), f(x_1,x_2) > \right| = \left| < \ell_{N_2}(x_2), < \ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2) >> \right| \le$$
$$\le \left\| \ell_{N_2}(x_2) / L_p^{(m_2)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| < \ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2) > / L_p^{(m_2)}(0,1) \right\|, \quad (8)$$

Вычислим следующую норму

$$\left\| < \ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2) > / L_p^{(m_2)}(0,1) \right\| =$$

$$= \left\{ \int_0^1 \left| \frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}} < \ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2) > \right|^p dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{ \int_0^1 \left| < \ell_{N_1}(x_1), \frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}} f(x_1,x_2) \right|^p dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left\{ \int_0^1 \left[\left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}} f(x_1,x_2) \Big/ L_p^{(m_1)}(0,1) \right\| \right]^p dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\{ \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} f(x_1,x_2) \right]^p dx_1 \right\} dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= d' \left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x) / L_p^{(m)}(K_2) \right\|, \quad (9)$$

где d' - константа.

Таким образом, из (8) и (9) получим:

$$\left| < \ell_N(x_1,x_2), f(x_1,x_2) > \right| \le$$
$$\le d' \left\| \ell_{N_2}(x_2) / L_p^{(m_2)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x) / L_p^{(m)}(K_2) \right\|, \quad (10)$$

Из (10), пользуясь определением нормы, получим

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)^*}(K_2) \right\| \le d' \left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_2}(x_2) / L_p^{(m_2)*}(0,1) \right\|, \quad (11)$$

Учитывая (4), на основании (11), имеем

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)^*}(K_2) \right\| \le d' \cdot d_1 \cdot d_2 \frac{1}{N_1^{m_1} N_2^{m_2}}$$

т.е.

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)^*}(K_2) \right\| \le d_3 O(h^{m_1}) O(h^{m_2}), \quad (12)$$

где $d_3 = d' \cdot d_1 \cdot d_2$.

Пусть теперь неравенство (6) справедливо при $n=k$, тогда на основании приведенных выше вычислений, получим

$$|<\ell_N(x), f(x)>| = |<\ell_N(x_1,x_2,...,x_k), f(x_1,x_2,...,x_k)>| =$$

$$= |<\ell_{N_k}(x_k), <\ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}),...,<\ell_{N_2}(x_2), <\ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2,..,x_k)>>...>>| \le$$

$$\le \left\|\ell_{N_k}^{(x_k)} / L_p^{(m_k)*}(0,1)\right\| \cdot \left\|\ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}) / L_p^{(m_{k-1})*}(0,1)\right\| \cdot ...$$

$$... \left\| <\ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2,...,x_k)> / L_p^{(m_1)}(0,1)\right\| \le$$

$$\le d''\left\|\ell_{N_k}(x_k) / L_p^{(m_k)*}(0,1)\right\| \cdot ... \cdot \left\|\ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(x_1)\right\| \cdot \left\|f(x) / L_p^{(m)}(K_k)\right\|, \quad (13)$$

где d'' - константа.

Из (13), используя определение нормы функционала, будем иметь

$$\left\|\ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_k)\right\| \le d''\left\|\ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1)\right\| \cdot ... \cdot \left\|\ell_{N_k}(x_k) / L_p^{(m_k)*}(0,1)\right\|.$$

Тогда, с помощью (4) неравенство (14) приводим к виду (14)

$$\left\|\ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_k)\right\| \le d'' \cdot d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} ... N_k^{m_k}}$$

или

$$\left\|\ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_k)\right\| \le d'' \cdot d\, O(h^{m_1}) ... O(h^{m_k}),$$

где $d = \prod_{i=1}^{k} d_i$.

Используя справедливость утверждения леммы при $n=k$ докажем, что утверждение выполняется при $n=k+1$. Учитывая (13) при $n=k+1$ оценим погрешность кубатурной формулы вида (1)

$$|<\ell_{N_{k+1}}(x_1,x_2,...,x_{k+1}), f(x_1,x_2,...,x_{k+1})>| =$$

$$|<\ell_{N_1}(x_1), <\ell_{N_2}(x_2), <...<\ell_{N_k}(x_k), <\ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}), f(x_1,x_2,...,x_{k+1})>> ...>>>| \le$$

$$\le \left\|\ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1)\right\| \cdot ... \cdot \left\|\ell_{N_k}(x) / L_p^{(m_k)*}(0,1)\right\| \times$$

$$\times \left\| <\ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}), f(x_1,x_2,...,x_{k+1})> / L_p^{(m_{k+1})}(0,1)\right\|. \quad (15)$$

Отсюда, как и выше, пользуясь определением нормы функционала, получим

$$\left\|\ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_{k+1})\right\| \le d''\left\|\ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1)\right\| ...$$

$$... \left\|\ell_{N_k}(x_k) / L_p^{(m_k)*}(0,1)\right\| \cdot \left\|\ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}) / L_p^{(m_{k+1})*}(0,1)\right\|. \quad (16)$$

Из неравенств (4) и (16) имеем:

$$\left\|\ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_{k+1})\right\| \le d''' \cdot d \cdot \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} ... N_{k+1}^{m_{k+1}}} \quad (17)$$

или

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_{k+1}) \right\| \le d'''\cdot d \cdot O\left(h^{m_1}\right) \ldots O\left(h^{m_{k+1}}\right),$$

где $\quad d = \prod_{i=1}^{k+1} d_i$.

Обобщая полученные результаты, в заключение отметим, что

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \le d \cdot \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \ldots N_n^{m_n}} \tag{18}$$

или учитывая (5), из (17) будем иметь

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \le C \cdot O\left(h^{m_1}\right) \ldots O\left(h^{m_n}\right),$$

т.е. $\quad \left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \le C \cdot O\left(h^{m}\right)$, где $\quad C = d' \cdot d'' \cdot d''' \cdot \prod_{i=1}^{n} d_i$.

Лемма доказана.

С помощью этой леммы легко доказывается следующая теорема.

Теорема. Весовая кубатурная формула (1) с функционалом погрешности (2) при $N_1 = N_2 = \ldots = N_n$, $\quad \prod_{i=1}^{n} N_i = N$ и $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$ является оптимальной по порядку сходимости над пространством $L_p^{(m)}(K_n)$, т.е. для нормы функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) имеет место равенство

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| = O\left(N^{-\frac{m}{n}} \right).$$

Доказательство.

На основе леммы при $N_1 = N_2 = \ldots = N_n$ имеем $N_i = \sqrt[n]{N}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Итак,

$$\prod_{i=1}^{n} N_i^{m_i} = N_1^{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = N^{\frac{m}{n}}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в неравенство (18) получим

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \le C \cdot N^{-\frac{m}{n}}, \tag{20}$$

Из теоремы Н.С.Бахвалова[3] и неравенство (20) следует доказательство сформулированной теоремы.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974 – 808с.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Наука. 1988, - 333с.
3. Бахвалов Н.С.С Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной, Мат. заметки, 1972, т.2. №6, -С.655 – 664.

Бухоро давлат университети магистрантларининг илмий мақолалар тўплами

2016

ТАФАККУР ВА ТАЛҚИН

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ МАГИСТРАНТОВ * COLLECTION OF SCIENTIFIC ARTICLES OF BUKHARA STATE UNIVERSITY POST-GRADUATE STUDENTS