

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ**  
**ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**  
**БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

**ТАФАККУР ВА ТАЛҚИН**

*(Магистрантларнинг илмий мақолалар тўплами)*

**5**

**Бухоро- 2016 йил**

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. –М. Наука, 1987. 736 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 742 с.
3. Роуч Г. Вычислительная гидродинамика. М.: Наука, 1987. 587 с.

### ОБ ОДНОЙ ВЕСОВОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО ПОРЯДКУ СХОДИМОСТИ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p^{(m)}(K_n)$ .

АБДУЛЛАЕВ БЕХЗОД РАЖАБОВИЧ (магистр БухГУ)

Ушбу ишда бир вазнли кубатур формуланинг  $L_p^{(m)}(K_n)$  фазосида асимптотик оптималлиги муҳокама қилинган.

В настоящей работе обсуждается асимптотическая оптимальность одной весовой кубатурной формулы в пространстве  $L_p^{(m)}(K_n)$ .

In this paper in the space  $L_p^{(m)}(K_n)$  asymptotic optimality of one weight cubature formula is discussed.

Рассмотрим кубатурную формулу вида

$$\int_{K_n} p(x) f(x) dx \approx \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} f(x^{(\lambda)}) \quad (1)$$

над пространством Соболева  $L_p^{(m)}(K_n)$ , где  $K_n$  –  $n$ -мерный единичный куб.

Обобщённая функция

$$\ell_N(x) = p(x) \varepsilon_{K_n}(x) - \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} \delta(x - x^{(\lambda)}) \quad (2)$$

называется функционалом погрешности кубатурной формулы (1),

$$\langle \ell_N(x), f(x) \rangle = \int_{K_n} p(x) f(x) dx - \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} f(x^{(\lambda)})$$

является погрешностью кубатурной формулы (1),  $p(x) \in L_p(K_n)$  весовая функция,  $\varepsilon_{K_n}(x)$  – характеристическая функция  $K_n$ ,  $c_{\lambda}$  и  $x^{(\lambda)}$  – коэффициенты и узлы кубатурной формулы (1) и  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака.

**Определение.** Пространство  $L_p^{(m)}(K_n)$  – определяется как пространство функций заданных на  $n$ -мерном единичном кубе  $K_n$  и имеющие все обобщённые производные порядка  $m$ , суммируемые со степенью  $p$  в норме (см. [1])

$$\|f(x)/L_p^{(m)}(K_n)\| = \left\{ \int_{K_n} \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} [D^{|\alpha|} f(x)]^2 \right\}^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (3)$$

где  $D^{|\alpha|} = \frac{\partial^m}{dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \dots dx_n^{\alpha_n}}$ ,  $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ ,  $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$ .

Справедлива следующая

**Лемма.** Если для функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) выполняется условие Декартовых произведений, т.е.

$$\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \otimes \ell_{N_2}(x_2) \otimes \dots \otimes \ell_{N_n}(x_n)$$

и

$$\|\ell_{N_i}(x_i)/L_p^{(m_i)*}(0,1)\| \leq d_i \frac{1}{N_i^{m_i}}, \quad d_i - \text{константы}, \quad (4)$$

т.е.

$$\|\ell_{N_i}(x_i)/L_p^{(m_i)*}(0,1)\| \leq d_i O(h^{m_i}), \quad d_i - \text{константы}, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (5)$$

то

$$\|\ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_n)\| \leq d \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^n N_i^{m_i}}, \quad d - \text{константа}, \quad (6)$$

или

$$\|\ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_n)\| \leq d \cdot O(h^m),$$

где  $\ell_{N_i}(x_i) = p(x_i) \varepsilon_{k_i}(x_i) - \sum_{\lambda_i=1}^{N_i} c_{\lambda_i} \delta(x_i - x_i^{(\lambda_i)})$ ,  $d = \prod_{i=1}^n d_i$  и

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

**Доказательство** ведем методом математической индукции.

Пусть  $n = 2$ , тогда  $x = (x_1, x_2)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $m = m_1 + m_2$ ,

$dx = dx_1 dx_2$ ,  $f(x) = f(x_1, x_2)$ ,  $p(x) = p(x_1, x_2)$  и

$$\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \otimes \ell_{N_2}(x_2).$$

Так как в дальнейшем мы будем использовать норму функции в одномерном случае то (3) при  $n = 1$  принимает следующий вид.

$$\|f(x_i)/L_p^{(m_i)*}(0,1)\| = \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{d^{m_i}}{dx_i^{m_i}} f(x_i) \right]^p dx_i \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} |\langle \ell_N(x_1, x_2), f(x_1, x_2) \rangle| &= |\langle \ell_{N_2}(x_2), \langle \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2) \rangle \rangle| \leq \\ &\leq \left\| \ell_{N_2}(x_2) / L_p^{(m_2)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \langle \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2) \rangle / L_p^{(m_2)}(0,1) \right\|, \end{aligned} \quad (8)$$

Вычислим следующую норму

$$\begin{aligned} &\left\| \langle \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2) \rangle / L_p^{(m_2)}(0,1) \right\| = \\ &= \left\{ \int_0^1 \left| \frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}} \langle \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2) \rangle \right|^p dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left\{ \int_0^1 \left| \langle \ell_{N_1}(x_1), \frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}} f(x_1, x_2) \rangle \right|^p dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^1 \left[ \left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}} f(x_1, x_2) / L_p^{(m_1)}(0,1) \right\| \right]^p dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\{ \int_0^1 \left[ \int_0^1 \left| \frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} f(x_1, x_2) \right|^p dx_1 \right] dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ &= d' \left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x) / L_p^{(m)}(K_2) \right\|, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $d'$  - константа.

Таким образом, из (8) и (9) получим:

$$\begin{aligned} |\langle \ell_N(x_1, x_2), f(x_1, x_2) \rangle| &\leq \\ &\leq d' \left\| \ell_{N_2}(x_2) / L_p^{(m_2)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x) / L_p^{(m)}(K_2) \right\|, \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10), пользуясь определением нормы, получим

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_2) \right\| \leq d' \left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_2}(x_2) / L_p^{(m_2)*}(0,1) \right\|, \quad (11)$$

Учитывая (4), на основании (11), имеем

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_2) \right\| \leq d' \cdot d_1 \cdot d_2 \frac{1}{N_1^{m_1} N_2^{m_2}}$$

т.е.

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_2) \right\| \leq d_3 O(h^{m_1}) O(h^{m_2}), \quad (12)$$

где  $d_3 = d' \cdot d_1 \cdot d_2$ .

Пусть теперь неравенство (6) справедливо при  $n = k$ , тогда на основании приведенных выше вычислений, получим

$$\begin{aligned}
 & \left| \langle \ell_N(x), f(x) \rangle \right| = \left| \langle \ell_N(x_1, x_2, \dots, x_k), f(x_1, x_2, \dots, x_k) \rangle \right| = \\
 & = \left| \langle \ell_{N_k}(x_k), \langle \ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}), \dots, \langle \ell_{N_2}(x_2), \langle \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2, \dots, x_k) \rangle \rangle \dots \rangle \rangle \right| \leq \\
 & \leq \left\| \ell_{N_k}^{(x_k)} / L_p^{(m_k)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}) / L_p^{(m_{k-1})*}(0,1) \right\| \cdot \dots \\
 & \dots \cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2, \dots, x_k) \right\rangle / L_p^{(m_1)}(0,1) \right\| \leq \\
 & \leq d'' \left\| \ell_{N_k}(x_k) / L_p^{(m_k)*}(0,1) \right\| \cdot \dots \cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(x_1) \right\| \cdot \left\| f(x) / L_p^{(m)}(K_k) \right\|, \quad (13)
 \end{aligned}$$

где  $d''$  - константа.

Из (13), используя определение нормы функционала, будем иметь

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_k) \right\| \leq d'' \left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \dots \cdot \left\| \ell_{N_k}(x_k) / L_p^{(m_k)*}(0,1) \right\|. \quad (14)$$

Тогда, с помощью (4) неравенство (14) приводим к виду

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_k) \right\| \leq d'' \cdot d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \dots N_k^{m_k}}$$

или

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_k) \right\| \leq d'' \cdot d O(h^{m_1}) \dots O(h^{m_k}),$$

где  $d = \prod_{i=1}^k d_i$ .

Используя справедливость утверждения леммы при  $n = k$  докажем, что утверждение выполняется при  $n = k + 1$ . Учитывая (13) при  $n = k + 1$  оценим погрешность кубатурной формулы вида (1)

$$\begin{aligned}
 & \left| \langle \ell_{N_{k+1}}(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}), f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \rangle \right| = \\
 & \left| \langle \ell_{N_1}(x_1), \langle \ell_{N_2}(x_2), \dots, \langle \ell_{N_k}(x_k), \langle \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}), f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \rangle \rangle \dots \rangle \rangle \right| \leq \\
 & \leq \left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \dots \cdot \left\| \ell_{N_k}(x_k) / L_p^{(m_k)*}(0,1) \right\| \times \\
 & \times \left\| \langle \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}), f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \rangle / L_p^{(m_{k+1})}(0,1) \right\|. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Отсюда, как и выше, пользуясь определением нормы функционала, получим

$$\begin{aligned}
 & \left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_{k+1}) \right\| \leq d'' \left\| \ell_{N_1}(x_1) / L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \dots \\
 & \dots \cdot \left\| \ell_{N_k}(x_k) / L_p^{(m_k)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}) / L_p^{(m_{k+1})*}(0,1) \right\|. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Из неравенств (4) и (16) имеем:

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_{k+1}) \right\| \leq d'' \cdot d \cdot \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \dots N_{k+1}^{m_{k+1}}} \quad (17)$$

или

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_{k+1}) \right\| \leq d^m \cdot d \cdot O(h^{m_1}) \dots O(h^{m_{k+1}}),$$

где  $d = \prod_{i=1}^{k+1} d_i$ .

Обобщая полученные результаты, в заключение отметим, что

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \leq d \cdot \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \dots N_n^{m_n}} \quad (18)$$

или учитывая (5), из (17) будем иметь

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \leq C \cdot O(h^{m_1}) \dots O(h^{m_n}),$$

т.е.  $\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \leq C \cdot O(h^m)$ , где  $C = d^m \cdot d \cdot \prod_{i=1}^n d_i$ .

Лемма доказана.

С помощью этой леммы легко доказывается следующая теорема.

**Теорема.** Весовая кубатурная формула (1) с функционалом погрешности (2)

при  $N_1 = N_2 = \dots = N_n$ ,  $\prod_{i=1}^n N_i = N$  и  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$  является

оптимальной по порядку сходимости над пространством  $L_p^{(m)}(K_n)$ , т.е. для нормы функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) имеет место равенство

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| = O\left(N^{-\frac{m}{n}}\right).$$

**Доказательство.**

На основе леммы при  $N_1 = N_2 = \dots = N_n$  имеем  $N_i = \sqrt[n]{N}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Итак,

$$\prod_{i=1}^n N_i^{m_i} = N_1^{m_1+m_2+\dots+m_n} = N^{\frac{m}{n}}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в неравенство (18) получим

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \leq C \cdot N^{-\frac{m}{n}}, \quad (20)$$

Из теоремы Н.С.Бахвалова[3] и неравенство (20) следует доказательство сформулированной теоремы.

#### Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974 – 808с.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Наука. 1988, - 333с.
3. Бахвалов Н.С.С Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной, Мат. заметки, 1972, т.2. №6, -С.655 – 664.

modellashtirish .....	
<b>AMIROV SH.Y.</b> Quyosh quritgichlarining yangi modeli va uning qisqacha tavsifi ...	71
<b>БОЛТАЕВ С.А., РЎЗИЕВ Т.Р.</b> Кўп мақсадли қуёш мева қуритгич қурилмасининг синов натижалари .....	72
<b>АНМАДОВ Х.С., НАЗАРОВ Е.С.</b> Iste'molda ishlatiladigan moylarning spektral xarakteristikalari .....	76
<b>МИРЗАЕВ.Ш.М, АХМАТОВА С.Р.</b> Касб-хунар коллежларида физика фанини ўқитишдаги намунавий ўқув дастурни янада такомиллаштириш тўғрисида мулоҳазалар	80
<b>АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА ВА АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ</b>	
<b>JUMAYEV J.,QOBILOV K.H.</b> Turbulentlik tushunchasi va uni matematik modellashtirish .....	82
<b>АБДУЛЛАЕВ Б.Р.</b> Об одной весовой оптимальной по порядку сходимости кубатурной формуле в пространстве $L_p^{(m)}(K_n)$ .....	86
<b>БОБОРАХИМОВА М.И.</b> Верхняя оценка норма функционала погрешности кубатурных формул в пространстве $\bar{L}_2^m(K_n)$ .....	91
<b>KARIMOV R.</b> « MOODLE » tizimi va unda statistik ma'lumotlarni boshqarish .....	96
<b>МАВЛЯНОВ А.З.</b> О проекте программной системы морфологического анализа узбекского языка .....	99
<b>ЖИСМОНИЙ МАДАНИЯТ</b>	
<b>КАДИРОВ Р.Х., УЗОҚОВ Ф.,ТОШЕВ М.</b> Жисмоний тарбия педагогикасида математик таҳлил модели .....	102
<b>МУНИРОВ Н.</b> Касб-хунар коллежларида жисмоний таълимнинг услубий принциплари .....	107
<b>БОШЛАНГИЧ ТАЪЛИМ</b>	
<b>ЮСУФЗОДА Ш., ҚОСИМОВ Ф.Ф.</b> Масаланинг турли ечимини излаш .....	109
<b>ХАЛИЛОВА Г.</b> Бошланғич синф она тили таълимида мустақил ишларни ташкил этиш .....	114
<b>RAJABOVA N.</b> Boshlang'ich sinf "o'qish" darsliklarida istiqlol davri bolalar she'riyati ifodasi .....	117
<b>ИСРОИЛОВА Р.С.</b> Она тили таълимида нутқ ва тил мутаносиблиги .....	119
<b>LUQMONOVA S.G.</b> Boshlang'ich sinf o'qish darslarida vatanparvarlik tuyg'ularini shakllantirish .....	122
<b>ОМОНОВА Д.</b> Адабий тил таълимида баркамол шахсни тарбиялаш муаммолари .....	124
<b>SAIDOVA U.J., HASANOVA M.</b> Boshlang'ich sinflarda miqdorlarni o'rgatishning umumiy masalalari .....	126
<b>ПЕДАГОГИКА НАЗАРИЯСИ ВА ТАРИХИ</b>	
<b>ОЛИМОВ Ш.Ш., РАХИМОВА Н.А.</b> Малака ошириш жараёнида семинар-тренинглари ташкил этиш – педагогик технологияларни ўрганиш ва тадбиқ қилишнинг муҳим воситаси .....	129
<b>ИЗБУЛЛАЕВА Г.В., ЖЎРАЕВ Б.Т.</b> Маънавий тарбиянинг илмий-назарий асослари .....	133
<b>НУСРАТОВ А.Н., БАХРОНОВА М.</b> Ўзбекистонда ривожланган осие давлатларидаги педагогик технологияларнинг психо-дидактик асослари .....	137

Бухоро давлат университети магистрантларнинг илмий мақолалар тўплами



2016

# ТАФАККУР ВА ТАЛҚИН

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ МАГИСТРАНТОВ \* COLLECTION OF SCIENTIFIC ARTICLES OF BUKHARA STATE UNIVERSITY POST-GRADUATE STUDENTS

