

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA‘LIM VAZIRLIGI
NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA
UNIVERSITETI**

Qo‘lyozma huquqida

UDK (378:517:371.3)

Qo‘chqorova Hilola Atamuratovnaning

**«Oliy ta‘lim muassasalarida topologik fazolarning kardinal
xossalarini o‘rganish»**

Mutaxassislik: 5A110101-Matematika o‘qitish metodikasi

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Himoyga tavsiya etaman

Magistratura bo‘limi boshlig‘i

_____M.Esanov

2014 y «____»iyun

“Matematika va uni o‘qitish metodikasi”

kafedrası mudiri, f.-m.f.d., professor

_____ R.B. Beshimov

Ilmiy rahbar: f.-m.f.d., professor

_____ R.B. Beshimov

Toshkent-2014 yil

MUNDARIJA

Kirish.....	3
I bob.Topologik fazolarning xossalari.....	7
1. To‘plamlar va ular ustida amallar.....	7
2. Topologik fazolar va ularning berilish usullari	15
3. Topologik fazolarning berilish usullari, ularning chegarasi, zichligi va hech qayerda zich bo‘lmagan to‘plamlar.....	26
I bob bo‘yicha xulosa.....	30
II bob.Kompakt fazolar.....	31
1. Uzluksiz akslantirishlar.....	31
2. Ajrimlilik aksiomalari.....	37
3. Kompakt fazolar va ular ustida amallar.....	50
II bob bo‘yicha xulosa.....	60
III bob. Topologik fazolarning ba’zi kardinal xossalari.....	61
1. Topologik fazolarning uzluksiz akslantirishdagi holati.....	61
2. Topologik fazolarning absolyuti va shanin sonlari.....	68
3. Topologik fazo kardinal xossalarini OTMda o‘rganish.....	71
III bob bo‘yicha xulosa.....	78
Xulosa.....	79
Adabiyotlar ro‘yxati.....	81
GLOSSARIY	

Kirish

Magistrlik dissertatsiyasining dolzarbligi: Yurtimizda ta'lim sohasida oqilona va izchil siyosat olib borilayotgani bugun hech kimga sir emas. Ma'lumotlarga ko'ra, O'zbekiston ta'lim holati bo'yicha jahonning kuchli uchligi safida turadi. Ta'limning boshqa bosqichlari qatori oliy ta'lim tizimini ham tubdan o'zgartirish mustaqillik davridagi ta'lim islohotlarining eng muhim biridir. O'zbekiston Respublikasining ***“Ta'lim to'g'risida”*** gi qonuni **(1997 yil 29 avgust)** va Kadrlar tayyorlash milliy dasturi xalqaro ta'lim standartlarini mamlakatimiz oliy ta'lim tizimiga joriy qilish, yuksak malakali zamonaviy kadrlar tayyorlashda milliy tajriba va an'analarimiz bilan birga ilg'or jahon tajribasidan ham keng foydalanish borasida yangi ufq va imkoniyatlar ochdi. Aynan ana shu hujjatlar asosida oliy ta'lim muassasalari moddiy-texnik bazasini mustahkamlash va rivojlantirish, ularni zamonaviy o'quv laboratoriya uskunalari va kompyuter texnikasi bilan jihozlash, darslik va o'quv-uslubiy materiallar, pedagog kadrlar bilan ta'minlash, yangicha fikrlaydigan o'qituvchilarni tayyorlash, malakasini oshirish, ularning mehnatini rag'batlantirishni kuchaytirish tadbirlari aniq belgilab olindi¹.

Oliy ta'limda bakalavriat va magistratura tizimi joriy qilindi. Jahon standartlariga mos bu tizim oliy ta'lim sifatini oshirishga xizmat qilmoqda. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Karimov bu haqda to'xtalib, shunday degan edi: “Bilimdon, professional jihatdan savodli hamda g'ayrat-shijoatli shaxslarni, o'z mamlakatimizning chinakam vatanparvarlarini tarbiyalay oladigan, ularni buyuk milliy madaniyatning ulkan ma'naviy merosi bilan boyita oladigan, jahon fani va madaniyati durdonalaridan bahramand eta oladigan mamlakatgina, millatgina buyuk kelajakka erishishi mumkin”. Bugungi kunda O'zbekistonda ta'lim

¹ O'zbekiston Respublikasi “Ta'lim to'g'risidagi” qonuni. 464-I-son, 1997 yil 29 avgust.

sohasida amalga oshirilayotgan islohotlar ko'p jihatdan mamlakatimizni modernizatsiya qilish jarayonlari bilan hamohang tarzda olib borilmoqda. Bunda asosiy yo'nalishlar sifatida oliy va o'rta maxsus ta'lim tizimida o'quv, o'quv-uslubiy va ilmiy faoliyatni modernizatsiya qilish, ta'lim va tadqiqot jarayonlaridagi innovatsion yo'nalishlarni kuchaytirish tadbirlari izchil amalga oshirilmoqda. Mazkur tadbirlardan kutilayotgan asosiy maqsad yuqori darajadagi intellektual salohiyatga ega bo'lgan milliy mutaxassislar kadrlarni tayyorlash texnologiyasi hamda ta'limning mazmunini yangicha bosqichga ko'tarishdan iboratdir. Bu o'rinda Prezidentimizning quyidagi fikrlari ushbu jarayonlarning ahamiyatini belgilab beruvchi va maqsad sari yo'naltiruvchi dasturiy amal bo'lib hisoblanadi: Bugun hech kimga sir emaski, biz yashayotgan **XXI asr** – intellektual boylik hukmronlik qiladigan asr. Kimki bu haqiqatni o'z vaqtida anglab olmasa, intellektual boylikka intilish har qaysi millat va davlat uchun kundalik hayot mazmuniga aylanmasa – bunday davlat jahon taraqqiyoti yulidan chetda qolib ketishi muqarrar”¹.

Ta'lim – inson bilim faoliyatining eng murakkab turlaridan biri hisoblanadi. U yosh avlodning rivojlanib barkamol insonga aylanishida katta ahamiyat kasb etadi. Tabiatdagi har qanday jarayon-harakat, moddiy dunyodagi narsalar yoki hodisalarning asta – sekin o'zgarish jarayonidir. Ta'lim berish ya'ni o'qitish jarayoni ham yosh avlodda aqliy kuchlarni rivojlantirish va ahloqiy sifatlarni shakllantirishga qaratilgan maqsadli harakat hisoblanadi. Hozirgi zamon pedagogikasining asosiy maqsadi uzluksiz ta'limdagi uzviylikni ta'minlashdan iborat bo'lib, uning bosh masalalaridan biri yosh avlodga har tomonlama chuqur va puxta bilim berishning samarali metodika va metodlarni ishlab chiqishdan iborat. Bu esa o'z navbatida uzluksiz ta'lim va uning muassasalari oldiga bo'lajak kadrlarni tayyorlashda

¹O'zbekiston Respublikasi “Ta'lim to'g'risidagi” qonuni. 464-I-son, 1997 yil 29 avgust.

ularga o'qitiladigan fanlarning uzluksiz ta'lim tizimining turli bosqichlarida o'qitilish uzviyligi va uzluksizligini ta'minlashni muhim vazifalardan biri qilib qo'yadi¹.

Ana shunday vazifa uzluksiz ta'lim tizimida o'qitiladigan matematika fanining oldiga ham qo'yiladi. Shuning uchun ushbu magistrlik dissertatsiyasi oliy ta'lim muassasalarida topologik fazolarning kardinal xossalarini o'rganish nazariyasiga bag'ishlanadi.

Ko'pgina matematik tushunchalar, ba'zida butun bir matematik nazariyalar vujudga kelishi bilan matematikadan tashqarida bir qancha vaqt davomida o'z tatbig'ini topmaydi. Jumboqli kompleks sonlar tarixi bunga yaqqol misol bo'la oladi.

Shunga o'xshash sohalardan yana biri Evklid geometriyasi, Lobachevskiy geometriyasi, zamonamiz geometriyasi, qolaversa, zamonaviy matematikaning bir bo'limi, hosilasi bo'lgan topologiya fanidir. Topologiya – matematikaning yosh va muhim bo'limlaridan biridir. Topologiya fani geometriya va matematik analiz fanlarining qator fundamental faktlarini (tushunchalarini) umumiy nuqtai nazardan qayta ko'rib chiqish natijasida paydo bo'ldi.

Hozirgi zamon fanlarining rivojlanishida topologiyaning fizika, biologiya, ximiya va binibarin, geografiya fanlaridagi tatbig'i qo'llanilmoqda.

Topologiya shunday fanki, u geometrik figuralarning sifatiy xossalarini faqat uch o'lchovli fazoda emas, balki undan yuqori o'lchamli fazolarda ham o'rganishga yordam beradi.

Hozirgi kunga kelib topologiya matematik tadqiqotlarning mustahkam quroliga aylandi. Topologiyaning fizikada, mexanikada va boshqa fanlarda kompleks qo'llanilishi fakt bo'lib qoldi. Fizikada ba'zi real holatlarni topologiyasiz hal etib bo'lmaydi. Teskari holat ham uchrab turadi, ya'ni fizikadagi ba'zi muammolar topologiyaning rivojlanishiga

¹O'zbekiston Respublikasi "Ta'lim to'g'risidagi" qonuni. 464-I-son, 1997 yil 29 avgust.

ta'sir etmoqda.

Topologik fazolarning bazasi, zichligi, quvvati va boshqa kardinal sonlar topologiya va geometriya fanida asosiy tushunchalar hisoblanadi. Bu kardinal sonlar uzluksiz akslantirishda, Tixonov yoki Dekart ko'paytmada saqlanishi yoki saqlanmasligi mumkin.

Yuqoridagi omillarni hisobga olib topologiya fani va uning kardinal xossalarini o'rganishga bag'ishlangan ilmiy-tadqiqot ishi, jumladan ushbu bayon etilayotgan magistrlik dissertatsiyasi ishi mavzusining dolzarbligini aytish mumkin.

Tadqiqot ob'ekti: Oliy ta'lim muassasalarida topologiya kursini o'qitish jarayoni.

Tadqiqot predmeti: Oliy ta'lim muassasalarida topologiya kursida o'rganiladigan topologik fazolarning ba'zi kardinal invariantlari.

Magistrlik dissertatsiyasining maqsadi: Topologik fazolarning ba'zi kardinal xossalarini, bu xossalarning uzluksiz akslantirishda, Tixonov va Dekart ko'paytmada, proobrazlarda saqlanish yoki saqlanmasligini o'rganish.

Magistrlik dissertatsiyasining vazifalari: Tadqiqot maqsadidan kelib chiqqan holda quyidagi vazifalar belgilandi:

- To'plamlar va ular ustidagi amallarni o'rganish;
- To'plamlarning chegarasi, zichligi va hech qayerda zich bo'liagan to'plamlarni o'rganish;
- Topologik fazolarni va ularning berilish usullarini o'rganish;
- Uzluksiz akslantirishlarni va ajrimlilik aksiomalarini o'rganib chiqish;
- Kompakt fazolar va ular ustidagi amallarni o'rganish;
- Topologik fazolarning bazasi, zichligini o'rganish;
- Topologik fazolarning uzluksiz akslantirishdagi holatini ko'rib chiqish;
- Topologik fazolarning kardinal xossalarini ko'paytmadagi holatini o'rganish.

Mavzuning o'rganilganlik darajasi: Respublikamiz olimlaridan Sh. Ayupov, R. Beshimov, D. Davletov, A. Xo'jayev, A. Zaitovlar tomonidan olib borilgan bir qancha ilmiy ishlarda topologik fazolarning kardinal invariantlari, ularning uzluksiz akslantirishdagi va ko'paytmadagi holatlari o'rganilgan.

Tadqiqotning nazariy asoslari: O'zbekiston Respublikasi "Ta'lim to'g'risida"gi qonuni, "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi", O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A. Karimovning kadrlar tayyorlash tizimini takomillashtirishga bag'ishlangan asarlari, farmonlari, O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi tomonidan ta'limga oid, kadrlar tayyorlash muammolariga, kasb – hunar ta'limini takomillashtirish bo'yicha chiqarilgan qarorlari tashkil etadi.

Tadqiqotning ilmiy va amaliy ahamiyati: Dissertatsiya bo'yicha olingan natijalar nazariy ahamiyatga ega bo'lib, ular topologiya fanini o'rganish jarayonida qo'llanilishi mumkin.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi:

1. Topologik fazolar va ularni kiritish usullari, xossalari jamlanadi.
2. Topologik fazolarning invariantlari topiladi va klassifikatsiya qilinadi.
3. Topologik fazolarning kardinal invariantlarini uzluksiz akslantirishdagi, ko'paytmadagi holatlari o'rganiladi.

Magistrlik dissertatsiyasining strukturaviy tuzilishi:

Kirish, uch bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan tashkil topgan.

Tajriba-sinov maydonchasi (KHK, AL va pedagogika oliy o'quv yurtlari)

Nizomiy nomidagi TDPU ning fizika-matematika fakulteti.

I bob. Topologik fazolarning xossalari

1. To‘plamlar ustida amallar

To‘plam eng muhim matematik tushunchalardan biridir. Bu tushuncha matematika faniga to‘plamlar nazariyasining asoschisi bo‘lgan nemis matematigi Georg Kantor (1845 – 1918) tomonidan kiritilgan. Georg Kantorning g‘oyalari matematiklar orasida dastlab ishonchsizlikka uchragan bo‘lsada, keyinchalik keng taraqqiy qildi va XX asrda butun matematika to‘plamlar nazariyasi nuqtai nazaridan qaytadan qurildi.

To‘plam ta’riflanmaydigan matematik tushuncha bo‘lib, ba’zi bir narsalar, buyumlar, ob’ektlarni birgalikda qarash natijasida vujudga keladi. Masalan, barcha natural sonlarni birgalikda qarash natural sonlar to‘plamini, to‘g‘ri chiziqda yotuvchi nuqtalarni birgalikda qarash shu to‘g‘ri chiziq nuqtalarini birgalikda qarash shu to‘g‘ri chiziq nuqtalarini to‘plamini beradi¹.

1.1.1.Ta’rif. To‘plamni tashkil etuvchi *ob’ektlar* shu *to‘plamning elementlari* deyiladi.

Shuni aytib o‘tish kerakki, to‘plamda bir xil (bir – biridan farq qilib bo‘lmaydigan) elementlar bo‘lmaydi. Masalan,

$$(x-1)^2(x+1)^3=0$$

tenglamaning barcha ildizlari to‘plami $1, 1, -1, -1, -1$ elementlardan iborat bo‘lmasdan, ba’lki 1 va -1 elementlardan iborat.

1.1.2.Ta’rif. Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam bo‘sh to‘plam deb ataladi va u $\emptyset$ orqali belgilanadi.

To‘plamlar odatda lotin yoki grek alifbosining bosh harflari bilan, ularning elementlari esa shu alifboning kichik harflari bilan belgilanadi. Agar A to‘plam $a, b, c, \dots$ elementlardan tuzilgan bo‘lsa, u $A=\{a, b, c, \dots\}$ ko‘rinishida yoziladi. To‘plamni tashkil etuvchi elementlar chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Bu munosabat bilan to‘plamlar chekli to‘plam yoki cheksiz to‘plam

¹ Жўраев Т.Ф.Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиклар. -Т.: 2012. -187 б.

bo‘ladi. a ob‘ekt A to‘plamning elementi ekanligi $a \in A$ shaklda, a ob‘ekt A to‘plamga tegishli emasligini esa $a \notin A$ ko‘rinishida ifodalanadi¹.

1.1.3.Ta’rif. Agar A to‘plamning har bir elementi B to‘plamning ham elementi bo‘lsa, A to‘plam B to‘plamning qismi, ba’zan *qism to‘plami* deyiladi va

$$A \subset B$$

ko‘rinishida belgilanadi.

Ta’rifdan har qanday A to‘plamning o‘zi o‘zining qismi, ya’ni

$$A \subset A$$

ekanligi bevosita ko‘rinadi.

Bo‘sh to‘plam har qanday to‘plamning qismidir. A va $\emptyset$ to‘plamlar A to‘plamning *xosmas qismlari*, boshqa hamma qismlari esa uning *xos qismlari* deyiladi.

1.1.4.Ta’rif. Agar A to‘plam B to‘plamning qismi va B to‘plam A to‘plamning qismi bo‘lsa, A to‘plam B to‘plamga teng deyiladi va

$$A = B$$

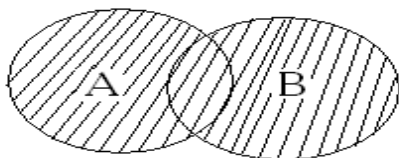
ko‘rinishida ifodalanadi.

A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamlardan yangi to‘plam hosil qilish uchun to‘plamlar ustida bajariladigan quyidagi amallarni kiritamiz:

1.1.5.Ta’rif. A va B to‘plamlarning kamida bittasiga tegishli bo‘lgan barcha elementlardan tuzilgan C to‘plam shu to‘plamlarning *birlashmasi* deyiladi va

$$A \cup B$$

ko‘rinishida belgilanadi.



¹ Р.Н. Назаров, Б.Т.Тошпўлатов, А.Д. Дўсумбетов. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Ўқитувчи. 1995. – 271 б.

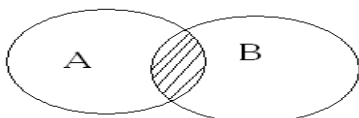
Yuqoridagi ta'rifga ko'ra C to'plamni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$C = A \cup B = \{x | x \in A \text{ yoki } x \in B\}.$$

1.1.6.Ta'rif. A va B to'plamlarning barcha umumiy elementlardan tuzilgan C to'plam shu to'plamlarning *kesishmasi* deyiladi va

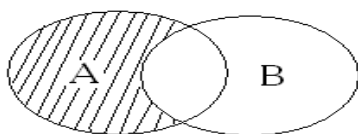
$$A \cap B$$

ko'rinishida belgilanadi.



1.1.1.Misol. $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bo'lsa, u holda $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ va $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ bo'ladi.

1.1.7.Ta'rif. A to'plamdan B to'plamlarning ayirmasi deb A ga tegishli, lekin B ga tegishli bo'lmagan barcha elementlardan tuzilgan to'plamga aytiladi va u $A \setminus B$ ko'rinishida belgilanadi.



1.1.2.Misol. $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bo'lsa, u holda $A \setminus B = \{7\}$ bo'ladi.

1.1.8.Ta'rif. B to'plam A ning qism to'plami bo'lganda $A \setminus B$ to'plam B ni A gacha to'ldiruvchi to'plam deyiladi va u $C_A B$ orqali belgilanadi.

1.1.9.Ta'rif. Har qanday to'plamning xos qism to'plami deb qaralmagan to'plam universal to'plam deyiladi va u U orqali belgilanadi.

U universal to'plamning barcha qism to'plamlari orasida ikkita xosmas qism to'plam mavjud bo'lib, ulardan biri U ning o'zi, ikkinchisi esa bo'sh to'plam, qolganlari esa xos qism to'plamlar bo'ladi.

U universal to'plam chekli bo'lsa, uning barcha qism to'plamlari ham

¹ Р.Н. Назаров, Б.Т.Тошпўлатов, А.Д. Дўсумбетов. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Ўқитувчи. 1995. – 271 б.

chekli bo‘ladi, U cheksiz bo‘lganda esa uning qism to‘plamlari chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin¹.

Biror U universal to‘plamning qism to‘plamlari uchun quyidagi tengliklar o‘rinli:

1. Istalgan ikkita A va B to‘plamlarning kesishma va ayirmasi kommutativ bo‘ladi, ya’ni

$$A \cap B = B \cap A \quad (1)$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (2)$$

2. Birlashma va kesishma amallari assotsiativdir:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (3)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (4)$$

(3) va (4) tengliklarni istalgan chekli sondagi to‘plamlar uchun ham yozish mumkin.

3. Uchta A , B va C to‘plamlar ustida kesishma va birlashma amallari uchun distributivlik qonuni bajariladi:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (5)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (6)$$

Oxirgi munosabatlar istalgan chekli sondagi to‘plamlar uchun ham bajariladi, ya’ni

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^k B_i \right) = \bigcap_{i=1}^k (A \cup B_i) \quad (7)$$

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^k B_i \right) = \bigcup_{i=1}^k (A \cap B_i) \quad (8)$$

Bitta universal to‘plamning barcha qism to‘plamlari uchun quyidagi ayniyatlar ham o‘rinli bo‘ladi:

4. Idempotentlik qonunlari:

$$A \cup A = A \quad (9)$$

$$A \cap A = A \quad (10)$$

5. Yutilish qonunlari:

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (11)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (12)$$

6. De – Morgan qonunlari:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (13)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (14)$$

1.1.10.Ta’rif. Ikkiti X va Y to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Agar ma’lum bir qoida bo‘yicha X to‘plamning har bir elementiga Y to‘plamning birgina elementi mos qo‘yilgan bo‘lsa, X to‘plam Y ga aks ettirilgan deyiladi va bu munosabat

$$f : X \rightarrow Y$$

ko‘rinishida yoziladi. Bu aks ettirishni X to‘plamda aniqlangan va qiymatlari Y da bo‘lgan funksiya (yoki moslik) deb ham ataladi. Jumladan, Y deb haqiqiy sonlar to‘plamini olsak, u holda $f : X \rightarrow Y$ aks ettirishni X to‘plamdagi haqiqiy funksiya (ba’zan funksional) deyiladi.

1.1.3.Misollar. 1. Agar R haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsa, u holda

$$y = f(x) = x^3$$

funksiya R ni R ga aks ettiradi.

2. Dirixle funksiyasi

$$y = \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x - \text{ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x - \text{irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

haqiqiy sonlar to‘plamini 0 va 1 sonlardan iborat to‘plamga aks ettiradi.

3. Agar $X = R^2$ ikki o‘lchamli fazo va $Y = R$ bir o‘lchamli fazo bo‘lsa, u holda R^2 fazoni R fazoga har qanday aks ettirish bu, ikki argumentli funksiyadir. Masalan,

$$f(x, y) = x^3 + y^3.$$

4. Agar $X = R$ bir o'lchamli fazo va $Y = R^2$ ikki o'lchamli fazo bo'lsa, u holda R fazoni R^2 fazoga har qanday aks ettirish bu ikkita bir argumentli funksiyadir. Masalan, ushbu $\psi(x) = (f(x), g(x)) = (x^3, 2x)$ juftlik.

5. Agar $C[a, b]$ orqali $[a, b]$ segmentdagi barcha uzluksiz funksiyalar to'plamini belgilasak, u holda

$$f(x) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

moslik $C[a, b]$ ni R ga aks ettiradi.

X to'plamning Y to'plamga barcha aks ettirishlarining o'zi to'plam hosil qiladi. Bu to'plam Y^X bilan belgilanadi.

Endi ikkita chekli A va B to'plamlar berilgan bo'lib, ularni son jihatdan solishtirish kerak bo'lsin. Bu masalani quyidagi ikki usul bilan hal qilish mumkin:

1) Bu to'plamlar elementlarining sonini hisoblab chiqib, chiqqan sonlarni solishtirish;

2) Agar shunday bir qoida mavjud bo'lsaki, bu qoidaga muvofiq A to'plamning har bir elementiga B to'plamdan birgina elementi mos keltirilganda B to'plamning har bir elementiga A to'plamda ham birgina element mos kelsa, ya'ni A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lsa, u holda bu to'plamlar elementlarining soni jihatidan bir xil bo'ladi.

1.1.11.Ta'rif. Agar A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lsa, u holda bu to'plamlar *ekivalent* yoki *teng quvvatli* to'plamlar deyiladi va

$$A \sim B$$

ko'rinishida yoziladi.

Odatda A to'plamga ekvivalent bo'lgan to'plamlar sinfi $\overline{\overline{A}}$ bilan belgilanadi va $\overline{\overline{A}}$ ni A to'plamning quvvati yoki kardinal soni deb ataladi. Chekli to'plamning quvvati (kardinal soni) sifatida odatda bu to'plam elementlarining soni olinadi.

1.1.12.Ta'rif. $[0, 1]$ segmentdagi nuqtalar to'plamiga ekvivalent bo'lgan to'plamlarni *kontinuum quvvatli to'plamlar* deyiladi.

Tabiiyki, kontinuum quvvatga ega bo'lgan har qanday to'plam sanoqsiz to'plamdir.

Endi ixtiyoriy to'plamlar sistemasi uchun Dekart ko'paytmasining ta'rifini beramiz. $H = \{A_x\}$, $x \in X$ to'plamlar sistemasining *Dekart ko'paytmasi* $\prod_{x \in X} A_x$ deb, aniqlanish sohasi X to'plamdan iborat shunday f funksiyalar to'plamiga aytiladiki, har bir $x \in X$ uchun $f(x) \in A_x$ munosabat bajariladi.

2. Topologik fazolar va ularning berilish usullari

Bizga bo'sh bo'lmagan X to'plam berilgan bo'lsin.

1.2.1.Ta'rif. X to'plamdagi topologiya deb X ning qism to'plamlaridan iborat va quyidagi aksiomalarni qanoatlantiruvchi O oilaga aytiladi:

$$(01) \quad \emptyset \in O \text{ va } X \in O$$

$$(02) \quad \text{Agar } U_1 \in O \text{ va } U_2 \in O \text{ bo'lsa, u holda } U_1 \cap U_2 \in O$$

$$(03) \quad \text{Agar } A \subset O \text{ bo'lsa, u holda } \bigcup A \in O$$

(X, O) juftlik *topologik fazo* deb ataladi.

X ning O oilaga tegishli berilgan qism to'plamlari ochiq to'plamlar deb ataladi. Topologik fazoni berish – bu biror X to'plamni olib, unda O topologiyani kiritish, ya'ni X ning ochiq to'plam deyiladigan qism to'plamlarini aniqlash demakdir. Topologik fazoning elementlari uning nuqtalari deb ataladi¹.

Ochiq to'plamlar oilasining (01)-(03) xossalarini quyidagicha ham ifodalash mumkin:

(01) bo'sh to'plam va butun fazo ochiq to'plamdir;

(02) ikkita ochiq to'plamning kesishmasi ochiq to'plam;

(03) ixtiyoriy ochiq to'plamlarning birlashmasi ochiq to'plam.

(02) dan ixtiyoriy cheklita ochiq to'plamlarning kesishmasi ochiq to'plam bo'lishi kelib chiqadi.

Agar biror $x \in X$ va qandaydir $U \subset X$ ochiq to'plam uchun $x \in U$ bo'lsa, U ga x nuqtaning atrofi deyiladi. Agar har bir $x \in V$ nuqta uchun x nuqtaning V da yotuvchi U_x atrofi mavjud bo'lsa va faqat shu holdagina $V \subset X$ to'plam ochiq bo'ladi. Bu shart bajarilsa, u holda (03) ga asosan $V = \bigcup_{x \in V} U_x$ ochiq to'plam bo'ladi. Agar X fazoning har qanday bo'sh bo'lmagan ochiq to'plamostisini biror B oilaga tegishli to'plamlarning birlashmasi shaklida yozish mumkin bo'lsa, u holda $B \subset O$ oila (X, O) topologik fazoning bazasi deyiladi.

¹ Энгелькинг Р. Общая топология. М. Наука. : 1986. -752 с.

Har bir $x \in X$ nuqta va bu nuqtaning har qanday V atrofi uchun $x \in U \subset V$ shartni qanoatlantiruvchi $U \in B$ mavjud bo'lsa va faqar shu holdagina B oila (X, O) topologik fazoning bazasi deyiladi.

Topologik fazo bir nechta bazalarga ega bo'lishi mumkin. Har qanday baza quyidagi hossalarga ega:

(V1) ixtiyoriy $U_1, U_2 \in B$ va ixtiyoriy $x \in U_1 \cap U_2$ nuqta uchun $x \in U \subset U_1 \cap U_2$ shartni qanoatlantiruvchi $U \in B$ element mavjud.

(V2) har qanday $x \in X$ uchun $x \in U$ bo'ladigan $U \in B$ element mavjud.

$B - (X, O)$ topologik fazoning bazasi bo'lganda $|B|$ ko'rinishdagi kardinal sonlar to'plami eng kichik elementga ega. Bu kichik kardinal son (X, O) topologik fazoning salmog'i deyiladi va $W(X, O)$ ko'rinishida belgilanadi.

$P \subset O$ oila elementlarining $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k, U_i \in P, i = 1, 2, 3, \dots, k$ chekli kesishmalari baza hosil qilsa, u holda R oila (X, O) fazoning bazaoldi deyiladi.

Agar (X, O) topologik fazoning x nuqtasini har qanday V atrofi uchun shunday $U \in B(x)$ element topilib, $x \in U \subset V$ bo'lsa, u holda x ning atroflari oilasi berilgan $B(x)$ ga, x nuqtadagi baza deyiladi.

Agar $B - (X, O)$ topologik fazoning bazasi bo'lsa, u holda x ni o'z ichiga oluvchi B ning elementlaridan tuzilgan $B(x)$ oila fazoning x nuqtadagi bazasi deyiladi. Ikkinchi tomondan agar $B(x), (X, O)$ fazoning x nuqtadagi bazasi bo'lsa, u holda $B = \bigcup_{x \in X} B(x)$ birlashma (X, O) fazoning bazasi bo'ladi¹.

(X, O) topologik fazoning x nuqtadagi $V(x)$ bazalari quvvatlarining eng kichik quvvatiga x nuqtaning xarakteri deyiladi va $\chi(x, (X, O))$ ko'rinishida belgilanadi, demak

$$\chi(x, (X, O)) = \min \{|B(x)| : B(x) - (X, O) \text{ fazoning } x \text{ nuqtadagi bazasi}\}.$$

$\chi(x, (X, O))$ kardinal sonlarning eng kattasiga (X, O) topologik fazoning harakteri deyiladi va $\chi(X, O)$ ko'rinishida belgilanadi.

Agar $\chi(x, (X, O)) \leq \aleph_0$ bo'lsa, u holda (X, O) fazo birinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantiradi deyiladi, bu esa har bir $x \in X$ nuqtada sanoqli baza mavjudligini anglatadi.

Agar $W((X, O)) \leq \aleph_0$ bo'lsa, u holda (X, O) fazo ikkinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantiradi deyiladi, ya'ni (X, O) fazo sanoqli bazaga ega.

(X, O) – topologik fazo va har bir $x \in X$ uchun (X, O) fazoning $B(x)$ bazasi berilgan bo'lsin. $\{B(x)\}_{x \in X}$ oilaga (X, O) topologik fazoning atroflar sistemasi deyiladi.

Har bir $\{B(x)\}_{x \in X}$ atroflar sistemasi quyidagi hossalarga ega:

(VR1). Har qanday $B(x) \neq \emptyset$ va ixtiyoriy $U \in B(x)$ uchun $x \in U$.

(VR2). Agar $x \in B(y)$ bo'lsa, u holda shunday $V \in B(x)$ topiladiki, $V \subset U$ bo'ladi.

(VR3). Ixtiyoriy $U_1, U_2 \in B(x)$ uchun shunday $U \in B(x)$ topiladiki $U \subset U_1 \cap U_2$ o'rinli bo'ladi.

(X, O) topologik fazoda $F \subset X$ to'plamning to'ldiruvchisi $X \setminus F$ ochiq to'plam bo'lsa, u holda F to'plam yopiq to'plam deyiladi. De – Morgan qonunlari va ochiq to'plamning (01)-(03) xossalaridan, yopiq to'plamlar oilasi E ning quyidagi xossalarini yozishimiz mumkin:

(S1) $X \in E$ va $\emptyset \in E$

(S2) Agar $A_1 \in E$ va $F_2 \in E$ bo'lsa, $F_1 \cup F_2 \in E$

(S3) Agar $A \subset E$ bo'lsa u holda $\bigcap A \in E$.

Bu xossalardan, masalan (S3) ni isbotlaymiz.

$\{F_s\}_{s \in S}$ - yopiq top'lamlar oilasi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra, to'ldiruvchi $U_s = X \setminus F_s$ to'plam har bir $s \in S$ uchun ochiq to'plam bo'ladi.

$\bigcap_{s \in S} F_s = \bigcap_{s \in S} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s \in S} U_s$ munosabat va $\bigcup_{s \in S} U_s$ birlashmaning ochiqligidan

(03) ga ko'ra kesishma yopiq ekanligi kelib chiqadi.

Bir vaqtda ochiq va yopiq bo'lgan to'plam ochiq-yopiq to'plam deyiladi.

$A \subset X$ to'plamni o'z ichiga oluvchi yopiq to'plamlar oilasini E_A orqali belgilaymiz, u holda $E \neq \emptyset$. (S3) dan $\bar{A} = \bigcap E_A$ kesishmaning yopiq ekanligi kelib chiqadi.

$\bar{A}$ to'plam A ni o'z ichiga oluvchi eng kichik yopiq to'plam bo'ladi, $\bar{A}$ ga A to'plamning yopilmasi deyiladi. Ravshanki, to'plamning yopiq bo'lishi uchun uning o'z yopilmasi bilan ustma-ust tushishi zarur va yetarli.

X fazoning ikkita A, B to'plamastilari uchun, agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda $\bar{A} \subset \bar{B}$ bo'ladi. Haqiqatdan ham $A \subset B$ munosabatdan $E_B \subset E_A$ munosabat kelib chiqadi, bu esa $\bar{A} \subset \bar{B}$.

1.2.1. Teorema. Yopilma operatori quyidagi hossalarga ega:

$$(S01) \quad \overline{\emptyset} = \emptyset$$

$$(S02) \quad A \subset \bar{A}$$

$$(S03) \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$(S04) \quad \overline{(\bar{A})} = A$$

Isbot: (S01) va (S02) xossalar bevosita ta'rifdan kelib chiqadi, (S04) dan esa $\bar{A}$ to'plamning yopiq ekanligi kelib chiqadi.

$A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$ dan $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ va $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ kelib chiqadi. Demak,

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B} \quad (1)$$

(S02) dan $A \subset \bar{A}$, $B \subset \bar{B}$ bo'lib, bunga ko'ra $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.

Oxirgi birlashma ikkita yopiq to'plamlarning birlashmasi uchun yopiq bo'ladi.

Bundan to'plam yopilmasi ta'rifiga ko'ra

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B} \quad (2)$$

ga ega bo'lamiz.

(1) va (2) dan (S03) munosabat kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

$A \subset X$ to'plamning ichki qismi deb, A ga tegishli bo'lgan barcha ochiq to'plamlarning birlashmasiga aytiladi. Ya'ni A ga tegishli bo'lgan eng katta

¹ Энгелькинг Р. Общая топология. М. Наука. : 1986. -752 с.

ochiq to'plamdir. A to'plamning ichki qismi $\text{Int}A$ orqali belgilanadi. Ravshanki, to'plam ochiq bo'lsa, u holda o'zining ichki qismi bilan ustma-ust tushadi¹.

1.2.2.Teorema. Ixtiyoriy $A \subset X$ to'plam uchun $\text{Int}A = X \setminus \overline{X \setminus A}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. (S02) dan $X \setminus A \subset \overline{X \setminus A}$ ga ega bo'lamiz. U holda $X \setminus \overline{X \setminus A} \subset X \setminus (X \setminus A) = A$.

$X \setminus \overline{X \setminus A}$ to'plam ochiq bo'lgani uchun

$$X \setminus \overline{X \setminus A} \subset \text{Int}A \quad (3)$$

munosabat o'rinli.

A ga tegishli bo'lgan ixtiyoriy ochiq to'plam uchun $X \setminus A \subset X \setminus U = \overline{X \setminus U}$ bo'ladi.

U holda $\overline{X \setminus A} \subset X \setminus U$ yoki $U \subset X \setminus \overline{X \setminus A}$.

Xususan, $\text{Int}A \subset X \setminus \overline{X \setminus A}$ bo'lib, bundan va (3) dan $\text{Int}A = X \setminus \overline{X \setminus A}$ kelib chiqadi, isbotlandi.

1.2.3.Teorema. Int operatori quyidagi hossalarga ega:

$$(I01) \text{Int}X = X$$

$$(I02) \text{Int}A \subset A$$

$$(I03) \text{Int}(A \cap B) = \text{Int}A \cap \text{Int}B$$

$$(I04) \text{Int}(\text{Int}A) = \text{Int}A.$$

1.2.1.Misol. X – ixtiyoriy to'plam va O – X to'plamning barcha qism to'plamlari to'plami. Ravshanki (X, O) topologik fazo bo'ladi, har bir $A \subset X$ to'plam – yopiq. X ni o'z ichiga oluvchi har qanday to'plam uning atrofi bo'ladi. X to'plamning barcha bir nuqtali qism to'plamlari oilasi (X, O) fazoning bazasi bo'ladi. Bu baza (X, O) fazoning barcha bazalari ichida eng quvvatlisidir. Shuning uchun (X, O) fazoning salmog'i X to'plamning quvvatiga tengdir.

Ixtiyoriy $x \in X$ nuqta uchun bitta $\{x\}$ to'plamdan iborat oila (X, O) fazoning

¹ Энгелькинг Р. Общая топология. М. Наука. : 1986. -752 с.

x nuqtadagi bazasi bo'ladi. Bu esa (X,O) fazo sanoqlilik aksiomalaridan birinchisini qanoatlantirishini ko'rsatadi¹.

Har bir $A \subset X$ to'plam o'zining yopilmasi va ichki qismi bilan ustma-ust tushadi. Bu topologik fazo diskret fazo, O ga esa diskret topologiya deyiladi.

1.2.2.Misol. X – ixtiyoriy cheksiz to'plam, x_0 - X dagi biror nuqta, $O - x_0$ ni o'z ichiga olmagan barcha qism to'plam va chelki to'ldiruvchiga ega bo'lgan qism to'plamlar oilasi. (X,O) – topologik fazo bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. X to'plamning x_0 dan tashqari barcha bir nuqtali to'plamlaro ochiq-yopiq to'plam bo'ladi.

$\{x_0\}$ to'plam ochiq ham emas, yopiq ham emas. Bir nuqtali $\{x_0 : x \neq x_0\}$ to'plamlardan va $X \setminus F$, bunda F chekli to'plam ko'rinishidagi to'plamlardan tuzilgan oila (X,O) fazoning bazasini hosil qiladi. Bu baza eng kichik quvvatga ega.

Shuning uchun (X,O) fazoning salmog'i X to'plamning quvvatiga teng. Barcha bir nuqtali $\{x\}, x \neq x_0$ to'plamlardan va $X \setminus \{x\}$ ko'rinishidagi to'plamlardan tuzilgan oila (X,O) fazoning oldbazasi bo'ladi. Har bir $A \subset X$ uchun quyidagilarga egamiz:

$$\overline{A} = \begin{cases} A, & \text{agar } A \text{ chakli bo'lsa} \\ A \cup \{x_0\}, & \text{agar } A \text{ cheksiz bo'lsa} \end{cases}$$

$$\text{int } A = \begin{cases} A, & \text{agar } X \setminus A \text{ chekli bo'lsa} \\ A \setminus \{x_0\}, & \text{agar } X \setminus A \text{ cheksiz bo'lsa} \end{cases}$$

Bu esa X to'plamning ixtiyoriy yopiq cheksiz to'plamostisi bo'sh bo'lmagan kesishmaga ega ekanligini ko'rsatadi.

1.2.3.Misol. R – haqiqiy sonlar to'plami, barcha $x \in U$ lar uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'lib $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$ bo'ladigan $U \subset R$ to'plam oilasini 0 bilan belgilaymiz.

Ravshanki 0 oila (01)-(03) shartlarini qanoatlantiradi. Ketma-ketlik limitining aniqlanishiga ko'ra, agar $A \subset R$ to'plamga har qanday yaqinlashuvchi

ketma-ketlik bilan bir vaqtda uning limiti ham tegishli bo'lsa, bu to'plam yopiq bo'ladi. Chegaralari ratsional sonlar bo'lgan barcha ochiq intervallar oilasi (R, O) fazoning bazasini hosil qiladi. Bu baza eng kichik quvvatga ega bo'lgan baza bo'ladi, shuning uchun (R, O) fazo ikkinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantiradi, demak birinchi sanoqlilik aksiomasini ham qanoatlantiradi.

Yuqorida kiritilgan O topologiya R haqiqiy sonlar to'plamidagi **tabiiy topologiya** deyiladi.

1.2.4.Misol. $I = [0,1]$ - yopiq birlik kesma $O - I \cap U$ ko'rinishidagi to'plamlar oilasi bo'lib, bu yerda $U \subset R$ to'plam R dagi tabiiy topologiyada ochiq. Demak, (I, O) topologik fazo. $(r_1, r_2), [0, r_2)$ ni $(r_1, 1]$ ko'rinishidagi intervallar oilasi (I, O) fazoning bazasini hosil qiladi, bu yerda r_1, r_2 ratsional sonlar va $0 < r_1 < r_2 < 1$, oxirgi ikkita ko'rinishdagi intervallar bazaoldi hosil qiladi.

(I, O) fazo birinchi va ikkinchi sanoqlilik aksiomalarini qanoatlantiradi. $A \subset I$ to'plamning I da yopiq bo'lishi uchun A ning R da yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir. Yuqorida keltirilgan O topologiya I ning tabiiy topologiyasi deyiladi.

Yuqoridagi misollardan ko'rinadiki, berilgan X to'plam uchun (X, O) topologik fazo bo'ladigan O oilani turli usullar bilan tanlash mumkin ekan. O_1 va O_2 lar X dagi topologiyalar bo'lsin. Agar $O_2 \subset O_1$ munosabat o'rinli bo'lsa, O_1 topologiya O_2 topologiyaga nisbatan kuchliroq deyiladi. X dagi eng kuchsiz topologiya bu X va $\emptyset$ dan tuzilgan topologiyalardir. X ceksiz top'lam, x_0 va x' X dagi turli nuqtalar, 2 – misoldagi topologiya va $O' - x'_0$ nuqta uchun xuddi shunday aniqlangan topologiya bo'lsin. Bu holda O va O' o'zaro taqqoslab bo'lmaydigan topologiyalar bo'ladi.

Topologik fazoning U qism to'plami uchun $U = \overline{Int U}$ munosabat o'rinli bo'lsa, u topologik ochiq to'plam deyiladi.

Topologik fazoning $A = \overline{Int A}$ shartni qanoatlantiruvchi A qism to'plami kanonik yopiq top'lam deyiladi.

Topologiya kiritish usullari

X – ixtiyoriy to'plam bo'lsin. X to'plamda topologiya kiritish deganda X to'plamning (01) – (03) shartlarini qanoatlantiruvchi qism to'plamlarining O oilaning tanlanishi tushunamiz. Topologiyalar ochiq to'plamlarni bevosita ko'rsatish bilan, baza orqali, atroflar sistemasi bilan, yopiq to'plamlar sistemasi bilan, yoki yopilma operatori, ikki qismini olish shartlari orqali kiritilishi mumkin.

1.2.4.Teorema. X to'plam va (V1) – (V2) shartlarni qanoatlantiruvchi uning qism to'plamlarining B oilasi berilgan bo'lsin. O to'plam B oilaning qism oilalarining birlashmasidan iborat bo'lgan, qism to'plamlari (X ning) oilasi bo'lsin. Ya'ni $U \in O \Leftrightarrow U = \bigcup B_0, B_0 \subset B$.

O oila (01) – (03) shartlarni qanoatlantiradi.

V oila (X, O) topologik fazoning bazasi bo'ladi.

O topologiyaga V baza orqali hosil qilingan topologiya deyiladi.

Isbot. (01) shart bajariladi, chunki $B_0 = \emptyset$ da

$$\emptyset = \bigcup B_0 \text{ va } B_0 = B \text{ da } X = \bigcup B_0. \quad U_1, U_2 \in O$$

Bo'lsin. U holda

$$U_1 = \bigcup_{s \in S} U_s \text{ va } U_2 = \bigcup_{t \in T} U_t, \text{ bunda } U_s, U_t \in B, \quad s \in S \text{ va } t \in T.$$

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{s \in S, t \in T} U_s \cap U_t \text{ bo'lgani uchun (02) shart bajarilishini isbotlash uchun,}$$

$U_s \cap U_t$ ning V ga tegishli qism to'plamlarning birlashmasidan iborat ekanligini ko'rsatish yetarli.

(V1) ga ko'ra har bir $x \in U_s \cap U_t$ uchun shunday $U(x) \in B$ topiladiki, $x \in U(x) \subset U_s \cap U_t$ bajariladi. Bundan $U_s \cap U_t = \bigcup B_0$, bundan $B_0 = \{U(x) : x \in U_s \cap U_t\}$.

(03) shart O oilaning aniqlanishiga ko'ra bajariladi. Demak, $V = (X, O)$ fazoning bazasi bo'ladi.

1.2.5.Misol. K – birga haqiqiy sonlar to'plami, V - $[x,r)$ ko'rinishidagi intervallar oilasi bo'lib, bu yerda $x,r \in K$, $x < r$ va r - ratsional son V oila (V1)-(V2) shartlarni qanoatlantiradi.

V oilaning elementlari V baza hosil qilgan topologiyaga nisbatan ochiq-yopiq to'plamlar bo'ladi, ravshanki $|B|=c$. $W(K)=c$ ekanligini ko'rsatamiz.

$\mathfrak{R} - |\mathfrak{R}| < C$ bo'lgan K dagi ochiq to'plamlar oilasi bo'lsin. U holda shunday $x_0 \in K$ nuqta topiladiki, bu nuqta $\mathfrak{R}$ oilaning har qanday elementining quyi chegarasi bo'la olmaydi. Ochiq $[x_0, x_0 + 1)$ to'plamni $\mathfrak{R}$ oilaga tegishli qism oilalarning birlashmasi ko'rinishida yozib bo'lmaydi. Demak, $\mathfrak{R}$ oila K to'plam uchun baza bo'la olmaydi.

Yuqoridagi K fazo Sorgenfrey to'g'ri chizig'i deyiladi.

1.2.5.Teorema. X to'plam va uning (VR1) – (VR3) shartlarni qanoatlantiruvchi qism to'plamlar oilasi $\{B(x)\}_{x \in X}$ berilgan bo'lsin. O oila $\bigcup_{x \in X} B(x)$ oilaning qism oilalarining birlashmasidan iborat oila bo'lsin. U holda O oila (O1)-(O3) shartlarni qanoatlantiradi.

$\{B(x)\}_{x \in X}$ ga (X,O) topologik fazoning atroflar sistemasi deyiladi.

O topologiyaga $\{B(x)\}_{x \in X}$ atroflar sistemasi orqali hosil qilingan topologiya deyiladi.

1.2.6.Misol. L - tekislikning, $y \geq 0$ shartni, qanoatlantiruvchi qism, ya'ni yuqoridan yopiq yarim tekislik. $y=0$ to'g'ri chiziqni L_1 bilan belgilaymiz va $L_2 = L \setminus L_1$ belgilash kiritamiz. Har bir $x \in L_1$ va $r > 0$ uchun $U(x,r)$ orqali L to'plamning, L_1 ga x nuqtada urinuvchi, radiusi r ga teng doira ichida yotuvchi nuqtalar to'plamini belgilaymiz. $U_i(x) = U\left(x, \frac{1}{i}\right) \cup \{x\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ deb olamiz. Har bir $x \in L_2$ va $r > 0$ uchun $U(x,r)$ orqali L to'plamning markazi x nuqtada bo'lib, radiusi r ga teng doira ichida yotuvchi nuqtalar to'plamini belgilaymiz.

Bunda $U_i(x) = U\left(x, \frac{1}{i}\right) \cup \{x\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ $B(x) = \{U_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ oila (VR1)-(VR3)

shartlarni qanoatlantiradi.

$\{B(x)\}_{x \in X}$ atroflar oilasi hosil qilgan topologiyaga nisbatan L_1 to'plam yopiq bo'ladi.

L fazo Nemitskiy tekisligi deyiladi.

1.2.6.Teorema. X to'plam va uning (S1) - (S3) shartlarni qanoatlantiruvchi yopiq to'plamlar oilasi E berilgan bo'lsin. U holda $O = \{X \setminus F : F \in E\}$ oila (01) - (03) shartlarni qanoatlantiradi.

Bundan O topologiyaga E - yopiq to'plamlar oilasi bilan hosil qilingan topologiya deyiladi.

1.2.7.Misol. X - ixtiyoriy cheksiz to'plam va E - X to'plamning barcha chekli to'plam ostilaridan va X ning o'zidan tuzilgan oila bo'lsin.

E oila (S1) - (S3) shartlarni qanoatlantiradi.

E - yopiq to'plamlar oilasi hosil qilgan topologiyaga nisbatan X da, chekli to'plamlarning to'ldiruvchilari va bo'sh to'plam ochiq bo'ladi.

1.2.7.Teorema. X to'plam va har bir $A \subset X$ to'plamga (S01) - (S04) shartni qanoatlantiruvchi $\bar{A} \subset X$ to'plamni mos qo'yuvchi biror operator berilgan bo'lsin. U holda $O = \{X \setminus A : A = \bar{A}\}$ oila (01) - (03) shartlarni qanoatlantiradi.

Har bir $A \subset X$ uchun $\bar{A}$ uning (X, O) fazodagi yopilmasi bo'lsin.

Bunday O topologiya yopilma operatori bilan hosil qilingan topologiya deyiladi.

Isbot. Teoremaning birinchi qismini isbotlash uchun $\varepsilon = \{A : A = \bar{A}\}$ oilaning (S1) - (S3) shartlarni qanoatlantirishini ko'rsatish yetarli. Har bir $A \subset X$ uchun $\bar{A} \subset X$ bo'lgani uchun va xususan $\bar{X} \subset X$ ekanligidan (S02) ga ko'ra $\bar{\emptyset} = \emptyset$.

Shunday qilib ε oila (S1) shartni qanoatlantiradi. ε ga tegishli F_1 va F_2 larni tanlaymiz. U holda $F_1 = \bar{F_1}$ va $F_2 = \bar{F_2}$ bo'lib, (S03) ga asosan $\overline{F_1 \cup F_2} = \bar{F_1} \cup \bar{F_2} = F_1 \cup F_2$ bo'ladi. Shuning uchun $F_1 \cup F_2 \in \varepsilon$. Demak, ε oila uchun (S2) shart bajariladi. (S03) ga ko'ra, agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda $A \cup B = B$ va $\bar{A} \cup \bar{B} = \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$. ε ga tegishli $\{F_s\}_{s \in S}$ oilani qaraymiz. U holda $\bigcap_{s \in S} F_s \subset F_s$

munosabat o'rinli ekanligidan $\overline{\bigcap_{s \in S} F_s} \subset \overline{F_s} = F_s \Rightarrow \overline{\bigcap_{s \in S} F_s} \subset \bigcap_{s \in S} F_s$. Oxirgi munosabat va (S02) dan $\overline{\bigcap_{s \in S} F_s} \subset \bigcap_{s \in S} F_s$. Demak, ε uchun (S3) bajariladi¹.

1.2.8.Misol. X – bittadan ko'p nuqtaga ega bo'lgan to'plam va x_0 nuqta X ga tegishli biror nuqta bo'lsin. Har bir bo'sh bo'lmagan $A \subset X$ uchun $\bar{A} = A \cup \{x_0\}$ va $\bar{\emptyset} = \emptyset$ deb olamiz. Yuqoridagidek aniqlangan yopilma operatori (S01) – (S04) shartlarni qanoatlantiradi.

Yopilma operatori bilan hosil qilingan bu topologiyaga nisbatan X da yopiq bo'lgan bir nuqtali to'plam faqatgina $\{x_0\}$ bo'ladi. Qolgan bir nuqtali to'plamlar bu topologiyaga nisbatan ochiq bo'ladi, ammo yopiq emas¹.

1.2.8.Teorema. X to'plam va har bir $A \subset X$ to'plamga (I01) – (I04) shartlarni qanoatlantiruvchi $\text{Int}A \subset X$ to'plamni mos qo'yuvchi biror operator berilgan bo'lsin. $O = \{A : A = \text{Int}A\}$ oila (01) – (03) shartlarni qanoatlantiradi. Har bir $A \subset X$ uchun $\text{Int}A$ to'plam A to'plamning (X, O) topologik fazodagi ichki qismi bo'ladi.

Bunday hosil qilingan O topologiyaga Int ichki qismini olish operatori bilan hosil qilingan topologiya deyiladi.

1.2.9.Misol. X – bittadan ko'p nuqtaga ega bo'lgan to'plam, $X_0 \subset X$ - shunday to'plamostiki, bunda $|X \setminus X_0| > 1$. X ning har qanday hos qism to'plami $A \subset X$ uchun $\text{Int}A = A \cap X_0$ deb olamiz va $\text{Int}X = X$. Bu usulda aniqlangan ichki qismini olish operatori (I01) – (I04) shartlarni qanoatlantiradi. Bu topologiyada X_0 to'plamning barcha qism to'plamostilari va butun fazo – X fazoning yagona qism to'plami, ochiq bo'ladi. Agar X_0 bo'sh to'plam bo'lsa, X antidiskret fazo bo'ladi.

¹Жўраев Т.Ф.Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиклар. -Т.: 2012. -187 б.

3. To'plamlarning chegarasi, zichligi va hech qayerda zich bo'lmagan to'plamlar

X topologik fazoning ixtiyoriy A qism to'plami uchun A to'plamning chegarasini quyidagicha aniqlaymiz.

$$FrA = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)} = \overline{A} \setminus IntA$$

X to'plamning FrA chegaraga tegishli bo'lishi uchun x nuqtadagi biror $B(x)$ bazaning har bir U elementi uchun $U \cap A \neq \emptyset \neq U \setminus A$ munosabat o'rinli bo'lishi kerak¹.

1.3.1. Teorema. To'plam chegarasi (FrA) quyidagi xossalarga ega:

- (i) $\overline{A} = A \cup FrA;$
- (ii) $Fr(A \cup B) \subset FrA \cup FrB;$
- (iii) $Fr(A \cap B) \subset FrA \cup FrB;$
- (iv) $Fr(X \setminus A) = FrA;$
- (v) $X = IntA \cup FrA \cup Int(X \setminus A);$
- (vi) $Fr\overline{A} \subset FrA;$
- (vii) $FrIntA \subset FrA;$

- (i) A ochiq bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki, $FrA = \overline{A} \setminus A$ bo'lsa;
- (ii) A yopiq bo'ladi, qachonki $FrA = A \setminus IntA$ bo'lsa;
- (iii) A ochiq-yopiq bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, qachonki $FrA = \emptyset$ bo'lsa.

Isbot. Keltirilgan (i) – (xi) xossalardan (i) va (iii) larni isbotlaymiz. Qolganlari ham shularga o'xshab isbotlanadi.

$$A \setminus FrA = A \setminus (\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}) = (A \setminus \overline{A}) \cup (Z \setminus \overline{X \setminus A}) = A \setminus \overline{X \setminus A} = A \cap IntA = IntA;$$

$$\begin{aligned} FrA(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{(X \setminus (A \cup B))} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus B}) \subset \\ &\subset (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus B} \subset (\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{X \setminus B}) = FrA \cup FrB \end{aligned}$$

¹Жўраев Т.Ф.Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиклар. -Т.: 2012. -187 б .

Teorema isbotlandi.

X topologik fazoning x nuqtasi $A \subset X$ to'plami uchun $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ bo'lsa, x nuqta A to'plamning quyuqlanish nuqtasi (limit nuqtasi) deyiladi.

A to'plamning quyuqlanish nuqtalari to'plami A to'plamning hosilaviy to'plami deyiladi va A^d ko'rinishida belgilanadi.

Agar x nuqtadagi $B(x)$ bazaning har bir U elementi A to'plamning x dan farqli kamida bitta elementini o'z ichida saqlasa va faqat shu holdagina x nuqta A^d ga tegishli bo'ladi.

$A \setminus A^d$ to'plamning nuqtalari A to'plamning yakkalangan nuqtalari deyiladi. Agar bir nuqtali $\{x\}$ to'plam ochiq bo'lsa va faqat shu holdagina x nuqta X fazoning yakkalangan nuqtasi bo'ladi.

Haqiqatdan $\{x\}$ to'plam $\{x\} = X \setminus \overline{X \setminus \{x\}}$ bo'lganda, ya'ni $x \notin \overline{X \setminus \{x\}}$ dagina ochiq bo'ladi.

1.3.2.Teorema. Hosilaviy to'plam quyidagi xossalarga ega:

- (i) $\overline{A} = A \cup A^d$;
- (ii) agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda $A^d \subset B^d$ bo'ladi;
- (iii) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;
- (iv) $\bigcup_{s \in S} A_s^d = \left(\bigcup_{s \in S} A_s \right)^d$.

Agar $\overline{A} = X$ tenglik o'rinli bo'lsa $A \subset X$ to'plam X ning hamma yerida zich deyiladi.

Agar $X \setminus A$ to'plam X ning hamma yerida zich bo'lsa, $A \subset X$ to'plam X da kozich deyiladi.

Agar $\overline{A}$ kozich bo'lsa $A \subset X$ to'plam X da hech qayerda zich emas deyiladi.

Agar $A \subset A^d$ bo'lsa, $A \subset X$ to'plam o'zida zich deyiladi.

1.3.3.Teorema. Agar X to'plamning ixtiyoriy ochiq qism to'plami A to'plam nuqtalarini o'zida saqlasa va faqat shu holdagina A to'plam X ning hamma yerida zich bo'ladi.

1.3.4.Teorema. Agar A to'plam X ning hamma yerida zich bo'lsa, u holda ixtiyoriy $U \subset X$ ochiq to'plam uchun $\overline{U} = \overline{U \cap A}$ o'rinli bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $x \in \overline{U}$ nuqta va uning har qanday W atrofi uchun $W \cap U$ kesishma ochiq va bo'sh emas. U holda oldingi Teoremaga asosan $W \cap U \cap A \neq \emptyset$.

Bundan $x \in \overline{U \cap A}$. Shunday qilib $\overline{U} \subset \overline{U \cap A}$ munosabat o'rinli. Ravshanki $\overline{U \cap A} \subset \overline{U}$. Demak $\overline{U} = \overline{U \cap A}$.

X fazoning zichligi deb $|A|$ ko'rinishidagi kardinal sonlarning eng kichigiga aytiladi, bundan A – X ning hamma yerida zich qism to'plami. X fazoning zichligi $d(X)$ orqali belgilanadi. Agar $d(X) \leq \aleph_0$ bo'lsa, X fazoga *separabel fazo* deyiladi.

1.3.5.Teorema. Har bir X topologik fazo uchun $d(X) \leq w(X)$ tengsizlik o'rinli.

Isbot. $B = \{U_s\}_{s \in S}$ - X fazoning bo'sh bo'lmagan to'plamlardan tuzilgan va $|S| = w(X)$ bo'lgan bazasi bo'lsin. Har bir $s \in S$ uchun biror $a_s \in U_s$ nuqtani tanlaymiz. $A = \{a_s : s \in S\}$ to'plamning X da hamma yerda zich ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatdan ham X ning bir bo'sh bo'lmagan ochiq to'plami biror $U_s \in B$ ni o'zida saqlaydi. Demak $u a_s \in A$ nuqtani ham o'z ichida saqlaydi. $|A| \leq |S| = m$ ekanligidan $d(X) \leq w(X)$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Teorema isbotlandi.

Natija. Ikkinchi sanoqlilik aksiomasini qanoatlantiruvchi har qanday topologik fazo separabel bo'ladi.

1.3.1.Misol. Diskret fazodagi ixtiyoriy to'plamning chegarasi va urinish nuqtalari to'plami bo'sh bo'ladi, hamda bu fazodagi hamma yerda zich to'plam faqat shu fazoning o'zi bo'ladi. Ratsional sonlar to'plami va irratsional sonlar to'plami haqiqiy sonlar to'g'ri chizig'ida va Sorgenfrey to'g'ri chizig'ida hamma yerda zich bo'ladi. L_2 to'plam Nemitskiy tekisligida hamma yerda zich bo'ladi, L_1 to'plam esa L da hech qayerda zich emas. L_1 to'plamning urinish

nuqtalari to'plami bo'sh to'plam, to'plam o'zida zich. 2-misolda x_0 nuqta X fazoning yagona quyuqlanish nuqtasi bo'ladi, fazoning boshqa nuqtalari esa yakkalangan nuqta bo'ladi. Haqiqiy sonlar to'g'ri chizig'i R , interval I , Sorgenfrey to'g'ri chizig'i K va Nemistkiy tekisligi L lar hammasi separabel bo'ladi. Diskret fazo faqat $|X| \leq \aleph_0$ shartdagina separabel bo'ladi¹.

¹ Жўраев Т.Ф. Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиклар. -Т.: 2012. -187 б.

I bob bo'yicha xulosa

Bu bobda topologiyaning asosiy obyektlari va topologik fazo ta'rifi berildi, topologik fazoning asosiy tushunchalarining mohiyati yoritildi. Topologiya asosini to'plamlar tashkil qilgani uchun birinchi paragrafi to'plamlar nazariyasiga bag'ishlandi. Bunda to'plam, uning elementlari, ikkita to'plamning birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, qism to'plam, to'plam to'ldiruvchisi tushunchalariga ta'riflar berilib misollar ko'rsatilgan, teoremlar keltirilgan. Shu bilan birga to'plamlarning quvvati, ixtiyori to'plamlar sistemasi uchun Dekart ko'paytma va funksiya tushunchalari keltirib o'tilgan.

Ikkinchi paragrafda topologik fazoning tarifi keltirilda va misollar ko'rsatildi. Topologik fazoning asosiy tushunchalari: ochiq to'plam, yopiq to'plam, topologik fazo bazasi, salmog'i, harakteriga ta'rif berilib misollar orqali tushuntirilgan, ularga oid teoremlar ko'rsatilib isbotlangan. Topologiya kiritishning ochiq to'plamlarini bevosita ko'rsatish orqali, baza orqali, atroflar sistemasi bilan, yopiq to'plamlar sistemasi bilan, yoki yopilma operatori, ikki qismini olish shartlari orqali kiritish usullari ko'rsatildi.

Qisqasi, bu bobda topologiya va topologik fazolarning asosiy tushunchalari o'rganildi.

II bob. Kompakt fazolar

1. Uzluksiz akslantirishlar

(X, O) va (Y, O') topologik fazolar berilgan bo'lsin.

2.1.1.Ta'rif. Agar har qanday $U \in O'$ uchun $f^{-1}(U) \in O$ bo'lsa, u holda X fazoni Y fazoga akslantiruvchi f akslantirish uzluksiz deyiladi va $f: X \rightarrow Y$ ko'rinishida belgilanadi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, agar Y ning ixtiyoriy ochiq to'plamostisining asli X ning ochiq to'plamostisi bo'lsa f - uzluksiz akslantirish bo'ladi.

2.1.1.Teorema. X va Y topologik fazolar, f esa X ni Y ga akslantirish bo'lsin. Quyidagi shartlar teng kuchlidir;

(i) f akslantirish uzluksiz;

(ii) Y da P oldbazaning ixtiyoriy elementining asli X da ochiq.

(iii) X va Y da shunday $\{B(x)\}_{x \in X}$ va $\{D(y)\}_{y \in Y}$ atroflar sistemasi mavjudki, har bir $x \in X$ va har bir $V \in D(f(x))$ uchun $f(U) \subset V$ ni qanoatlantiruvchi $U \in B(x)$ mavjud.

(iv) Y fazoning ixtiyoriy yopiq to'plamostisining asli X da yopiq.

(v) Ixtiyoriy $A \subset X$ uchun $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

(vi) Ixtiyoriy $B \subset Y$ uchun $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$

(vii) Ixtiyoriy $B \subset Y$ uchun $f^{-1}(\text{int } B) \subset \text{int } f^{-1}(\overline{B})$

Isbot. (i) $\Rightarrow$ (ii) ekanligi ravshan.

(ii) $\Rightarrow$ (ii') ni isbotlaymiz. $P - Y$ fazoning shunday bazaoldisi bo'lsinki, har bir $V \in P$ uchun $f^{-1}(V)$ X da ochiq bo'lsin. P bazaoldi elementlarining barcha $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_k$ kesishmalaridan tuzilgan B bazani qaraymiz.

$f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_k) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \dots \cap f^{-1}(V_k)$ ekanligidan B oilaning barcha elementlari X da ochiq.

Endi (ii') $\Rightarrow$ (iii) ekanligini ko'rsatamiz. Har qanday $V \in D(f(x))$ uchun shunday $W \in B$ mavjudki $f(x) \in W \subset V$ o'rinli bo'ladi.

$f^{-1}(W)$ X da ochiq bo'lganligidan va $x \in f^{-1}(W)$ bo'lgani uchun $U \subset f^{-1}(W)$ shartni qanoatlantiruvchi $U \in B(x)$ mavjud.

U holda $f(U) \subset f f^{-1}(W) \subset W \subset V$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) ni isbotlaymiz. $B = \bar{B}$ - Y da yopiq to'plamosti bo'lsin. $f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus B)$ ekanligidan $Y \setminus B$ to'plamning asli X da ochiq ekanligini ko'rsatish yetarli. Buning uchun har bir $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ nuqta $f^{-1}(Y \setminus B)$ da yotuvchi U atrofga ega ekanligini ko'rsatamiz.

$\forall x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ uchun $f(x) \in Y \setminus B$. Demak, shunday $V \in D(f(x))$ mavjudki, $V \subset Y \setminus B$ bo'ladi.

(iii) ga ko'ra $f(U) \subset V$ shartni qanoatlantiruvchi $U \in B(x)$ topiladiki, u holda $x \in U \subset f^{-1} f(U) \subset f^{-1}(V) \subset f^{-1}(Y \setminus B)$. (iv) $\Rightarrow$ (v) ni isbotlaymiz.

$f^{-1}(\overline{f(x)})$ to'plam A ni o'z ichiga oluvchi yopiq to'plam bo'ladi. Demak, $\bar{A} \in f^{-1}(\overline{f(A)})$. Bundan $f(\bar{A}) \subset f f^{-1}(\overline{f(A)}) = \overline{f(A)}$.

(v) $\Rightarrow$ (v') ni isbotlash uchun (v) shartni $A = f^{-1}(B)$ tenglikka tadbiiq qilib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f f^{-1}(B)} \subset \bar{B}. \text{ Bundan } \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B}).$$

(v') $\Rightarrow$ (vi) ni isbotlash uchun (v') shartni $Y \setminus B$ to'plamga tadbiiq qilib $\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subset f^{-1}(\overline{Y \setminus B})$ munosabatga ega bo'lamiz. Bundan:
 $f^{-1}(\text{Int} B) = f^{-1}(Y \setminus \overline{Y \setminus B}) = X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \subset X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} = X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \text{Int } f^{-1}(B).$

Isbotni yakunlash uchun (vi) $\Rightarrow$ (i) ni ko'rsatamiz. Har bir $U \subset Y$ ochiq to'plam uchun $U = \text{Int} U$. (vi) ga ko'ra $f^{-1}(U) \subset \text{Int } f^{-1}(U)$. Shunday qilib $f^{-1}(U) = \text{Int } f^{-1}(U)$, ya'ni $f^{-1}(u)$ X da ochiq. Teorema isbotlandi.

Uzliksizlikning (iii) shartdagi xossasi bizga nuqtadagi uzliksizlikni aniqlash imkonini beradi. Agar $f(x)$ nuqtaning har bir $V \subset Y$ atrofi uchun x nuqtani shunday $U \subset X$ atrofi topilsaki $f(U) \subset V$ bo'lsa, u holda $f : X \rightarrow Y$ akslantirish x nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar f akslantirish X fazoning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, f uzliksiz akslantirish deyiladi.

2.1.1.Misol. Agar X diskret fazo bo'lsa, uni ixtiyoriy Y topologik fazoga akslantirish uzluksiz bo'ladi¹.

2.1.2.Misol. X to'plamda ikkita O_1 va O_2 topologiyalar aniqlangan bo'lsin. O_1 topologiya O_2 topologiyadan kuchli bo'lganda va faqat shu holdagina (X_1, O_1) fazoni $(X_1 O_2)$ fazoga o'tkazuvchi $f = id_x$ akslantirish uzliksiz bo'ladi.

X – topologik fazo, R – tabiiy topologiyaga kiritilgan haqiqiy sonlar o'qi, I – tabiiy topologiya bilan berilgan yopiq birlik interval.

(i) va (iii) shartlarning teng kuchliligidan (yoki $f : X \rightarrow I$) akslantirish, har bir $x \in X$ va $\forall \varepsilon > 0$ uchun x ning shunday U atrofi topilsaki, har bir $x' \in U$ uchun $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa va faqat shu holda uzliksiz bo'ladi. Xususan $f : R \rightarrow R$ akslantirish uzluksiz deyiladi, qachonki $\forall x \in R$ va $\forall \varepsilon > 0$ uchun $\exists \delta > 0$ topilsaki $|x - x'| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x' lar uchun $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa.

Uzluksiz $f : X \rightarrow R$ (yoki $f : X \rightarrow I$) akslantirish uzliksiz funksiya deyiladi.

Ixtiyoriy $f : X \rightarrow R$ uchun $|f|$ funksiya uzliksiz bo'ladi, haqiqatdan ham $|f|$ ni, f funksiya va absolyut qiymat funksiyalarning kompozitsiyasi sifatida qarash mumkin. Xuddi shunday $f, g : X \rightarrow R$ lar uchun quyidagi funksiyalar uzluksiz;

$$\begin{aligned}(f \pm g)_x &= f(x) \pm f(g), & (f \cdot g)_x &= f(x) \cdot f(g), \\ [\min(f, g)](x) &= \min(f(x), f(g)), & [\max(f, g)](x) &= \max(f(x), f(g))\end{aligned}$$

Agar $f : X \rightarrow R$ funksiya X fazoning hech qanday nuqtasi nolga aylanmasa, u holda $\frac{1}{f}$ funksiya uzliksiz bo'ladi.

2.1.3.Misol. K – Sorgenfrey to'g'ri chizig'i bo'lsin. Bu fazodagi B bazaning biror elementi $[x, r)$ bo'lsin. $[x, r)$ to'plamlar X da ochiq yopiq bo'lgani uchun

¹Жўраев Т.Ф.Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиклар. -Т.: 2012. -187 б .

$$f(y) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq y < r \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{qolgan hollarda} \end{cases}$$

formula uzluksiz $f: K \rightarrow I$ funksiyani aniqlaydi¹.

2.1.4.Misol. L – Nemitskiy tekisligi. $U_i(x)$ esa $x \in L$ nuqtadagi $B(x)$ bazaning ixtiyoriy elementi bo'lsin. Har bir $y \in U_i \setminus \{x\}$ nuqta uchun y' orqali x dan chiqib y dan o'tuvchi nurning $U_i(x)$ ni chegaralovchi aylana bilan

kesishgannuqtasini belgilaymiz. U holda $f(y) = \begin{cases} 0, & \text{agar } y = x \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } y \in L \setminus U_i(x) \text{ bo'lsa,} \\ \frac{|xy|}{|xy'|}, & \text{agar } y \in U_i(x) \setminus \{x\} \end{cases}$

(bu yerda $|ab|$ - a va b nuqtalarni tutashtiruvchi segment uzunligi) fo'rmla uzluksiz funksiyani aniqlaydi¹.

X topologik fazo, $\{f_i\}$ X ni R yoki I ga akslantiruvchi funksiyalar ketma-ketligi bo'lsin.

Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\exists k$ topilsaki, har bir $x \in X$ va har qanday $i \geq k$ uchun $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\{f_i\}$ funksiyalar ketma-ketligi f funksiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi va $f = \lim f_i$ ko'rinishida belgilanadi.

2.1.2.Teorema. Agar X ni R ga yoki I ga akslantiruvchi $\{f_i\}$ funksiyalar ketma-ketligi, haqiqiy f funksiyaga tekis yaqinlashsa, u holda $f - X$ ni R ga akslantiruvchi uzluksiz funksiya bo'ladi.

Isbot. Har qanday $x_0 \in X$ va $\forall \varepsilon > 0$ son uchun x_0 nuqtaning shunday U atrofi mavjudki, barcha $x' \in U$ lar uchun $|f(x_0) - f_i(x)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz.

k butun sonni shunday topamizki:

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in X \quad \text{va} \quad i \geq k \quad (1)$$

¹Жўраев Т.Ф.Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиклар. -Т.: 2012. -187 б .

f_k uzluksiz funksiya bo'lgani uchun x_0 nuqtaning shunday U atrofi topiladiki

$$|f_k(x_0) - f_k(x')| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x' \in U \quad (2)$$

U atrof talab qilinayotgan xossalarni qanoatlantirishini ko'rsatamiz. $x' \in U$ bo'lsin. (1) va (2) dan

$$|f(x_0) - f(x')| \leq |f(x_0) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f_k(x')| + |f_k(x') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

2.1.3. Teorema. X to'plam, topologik fazolarning $\{Y_s\}_{s \in S}$ oilasi, $\{f_s\}_{s \in S}$ - akslantirishlar oilasi, bunda $f_s : X \rightarrow Y_s$, berilgan bo'lsin. Barcha f_s funksiyalar uzluksiz bo'lgan X dagi topologiyalar sinfida eng kuchsiz topologiya mavjud bo'ladi.

Bu O topologiya, $\bigcap_{i=1}^k f_{s_i}^{-1}(V_i)$ ko'rinishidagi to'plamlardan tuzilgan baza orqali hosil qilingan topologiya bo'ladi, bunda $s_1, s_2, s_3, \dots, s_k \in S$ va $V_i \subset Y_{s_i}$ fazoning ixtiyoriy ochiq qism to'plami, $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Bunday O topologiya $\{f_s\}_{s \in S}$ akslantirishlar oilasi bilan hosil qilingan topologiya deyiladi¹.

$\bigcap_{i=1}^k f_{s_i}^{-1}(V_i)$ ko'rinishidagi to'plamlardan tuzilgan B oila (B1) - (B2) shartlarni qanoatlantiradi.

Barcha f_s akslantirishlar B baza orqali hosil qilingan O topologiyaga nisbatan uzluksiz. Agar barcha f_s akslantirishlar X dagi biror O' topologiyaga nisbatan uzluksiz bo'lsa, u holda $B \subset O'$ bo'ladi. Bundan $O \subset O'$ munosabat O ning O' ga nisbatan kuchsizligini anglatadi.

2.1.4. Teorema. X topologik fazo, topologiyasi $\{f_s\}_{s \in S}$ (bunda f_s akslantirish Y ni Y_s ga yoki $f_s : Y \rightarrow Y_s$) akslantirishlar oilasi bilan hosil qilingan

¹ Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. -М.: Физматлит, 2006. -252 с.

Y fazoga akslantiruvchi f akslantirish, agar $f_s f$ kompozitsiya har bir $s \in S$ da uzluksiz bo'lsa va faqat shu holdagina uzluksiz bo'ladi.

Isbot. Agar $f: X \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish bo'lsa, u holda $f_s f$ akslantirish ikkita uzluksiz akslantirishning kompozitsiyasi bo'lgani uchun uzluksiz bo'ladi. $f_s f: X \rightarrow Y$ bo'lsin. Y fazoning $f_s^{-1}(V_s)$ ko'rinishidagi to'plamlardan tuzilgan bazaoldini P bilan belgilaymiz, bu yerda $V_s - Y_s$ dagi ochiq to'plam.

Teoreмага ko'ra P dagi elementlarning asllari X da ochiq ekanligini ko'rsatish yetarli. Bu esa $f^{-1} f_s^{-1}(V_s) = (f_s f)^{-1}(V_s)$ tenglikdan kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

2.1.5. Teorema. Agar har bir $B \subset Y$ va $f^{-1}(B)$ ni o'z ichiga oluvchi har bir ochiq (yopiq) $A \subset X$ to'plam uchun B ni o'z ichiga oluvchi ochiq (yopiq) to'plam $C \subset Y$ mavjud bo'lib, $f^{-1}(C) \subset A$ bo'lsa, u holda $f: X \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish yopiq (ochiq) bo'ladi.

Isbot. $f: X \rightarrow Y$ yopiq akslantirish, $B \subset Y$ va $A - f^{-1}(B)$ ni o'z ichiga oluvchi X dagi ochiq to'plam bo'lsin. $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ to'plam B ni o'z ichiga oladi va Y da ochiq bo'ladi. Shuningdek:

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1} f(X \setminus A) \subset X \setminus (X \setminus A) = A$$

f yuqoridagi shartlarni qanoatlantirsin. $F \subset X$ yopiq to'plamni olamiz. $A = X \setminus F$ ochiq to'plam bo'ladi va har bir $B = Y \setminus f(F)$ uchun $f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1} f(F) \subset X \setminus F = A$.

Demak, shunday qilib $C \subset Y$ to'plamosti mavjudki, $Y \setminus f(F) \subset C$ va $f^{-1}(C) \subset A$, ya'ni $f^{-1}(C) \cap F = \emptyset$ munosabatlar o'rinli. Oxirgi tenglikdan $f(C) \cap F = \emptyset$, ya'ni $C \subset Y \setminus f(F)$ ni yozib olamiz. Bundan $f(F) = Y \setminus C$ kelib chiqadi, bu esa $f(F)$ ning yopiq ekanligini bildiradi.

2.1.6. Teorema. Agar har bir $y \in Y$ nuqta va $f^{-1}(y)$ ni o'z ichiga oluvchi ochiq to'plam uchun Y to'plamda $f^{-1}(V) \subset U$ shartni qanoatlantiruvchi y

nuqtaning V atrofi topilsa va faqat shu holdagina uzluksiz $f: X \rightarrow Y$ akslantirish yopiq bo'ladi.

Isbot. Teoremaga ko'ra agar f yuqoridagi shartlarni qanoatlantirsa, u holda f ni yopiq ekanligini ko'rsatish yetarli.

$B \subset Y$ biror to'plam va $A \subset X$, $f^{-1}(B) \subset A$ shartni qanoatlantiruvchi ochiq to'plam bo'lsin. Har bir $y \in B$ uchun y nuqtaning $f^{-1}(V_y) \subset A$ bo'ladigan $V_y \subset Y$ atrofni tanlaymiz. $C = \bigcup_{y \in B} V_y$ ochiq to'plam uchun $B \subset C$ va $f^{-1}(C) \subset A$. Demak

18. teoremaga ko'ra f yopiq. Teorema isbotlandi.

2.1.7. Teorema. Agar X fazoda shunday B baza mavjud bo'lsaki, har bir $U \in B$ uchun $f(U)$ Y da ochiq bo'lsa va faqat shundagina uzluksiz $f: X \rightarrow Y$ akslantirish ochiq bo'ladi.

2.1.5. Misol. $r: R \rightarrow I$ akslantirish

$$r(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0 \\ x, & \text{agar } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{agar } x \geq 1 \end{cases}$$

fo'rmla bilan aniqlansin. Bu akslantirish yopiq, ammo ochiq emas.

2.1.6. Misol. $f: L \rightarrow R$ akslantirish Nemitskiy tekisligidagi (x, y) nuqta uchun absissasi $x \in R$ ni mos qo'yuvchi akslantirish bo'lsa, bu akslantirish ochiq, ammo yopiq emas.

2.1.7. Misol. $g: K \rightarrow D$ akslantirish Zorgenfrey to'g'ri chizig'ini ikki nuqtali to'plam $D = \{0, 1\}$ ga

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \\ 1, & \text{agar } x \geq 0 \end{cases}$$

fo'rmla bilan akslantiradi, bu akslantirish ochiq-yopiq bo'ladi.

2.1.8. Misol. $X = R$ - haqiqiy sonlar to'g'ri chizig'i va $Y = (R \setminus N) \cup \{y_0\}$ bo'lsin. Bunda N - musbat butun sonlar to'plami va $y_0 \in R$. Har bir $x \in X$ nuqtaga

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{agar } x \in X \setminus N \\ y_0, & \text{agar } x \in N \end{cases}$$

nuqtani mos qo'yamiz.

Y to'plamda $\varepsilon = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \text{ to'plam } X \text{ da yopiq}\}$ yopiq to'plamlar oilasi bilan hosil qilingan topologiyani qaraymiz. Bunda $f : X \rightarrow Y$ yopiq bo'lib, y_0 ning Y dagi atrofi $(U \setminus N) \cup \{y_0\}$ ko'rinishida bo'ladi, bu yerda U to'plam X da ochiq va N o'z ichida saqlaydi.

$(U_1 \setminus N) \cup \{y_0\}, (U_2 \setminus N) \cup \{y_0\}, \dots$ - y_0 nuqtaning ixtoyoriy atroflari ketma-ketligi bo'lsin. Har bir $i = 1, 2, 3, \dots$ uchun $x_i > i$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan $x_i \in U_i \setminus N$ nuqtani tanlaymiz. $U = X \setminus \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ to'plam X da ochiq va N to'plamni o'z ichiga oladi. Shunday qilib, $V = (U \setminus N) \cup \{y_0\}$ to'plam y_0 nuqtaning atrofi bo'ladi. Yuqoridagi ketma-ketliklardan birontasi ham V ga tegishli bo'lmagani uchun Y fazo y_0 nuqtada sanoqli bazaga ega emas. Bulardan, $w(x) = \chi(x) = \aleph_0$ bo'lganda ham $\chi(y) > \aleph_0$ va $w(y) > \aleph_0$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar X ni Y ga akslantiruvchi f akslantirish uzluksiz, o'zaro bir qiymatli bo'lib, Y ni X ga akslantiruvchi f^{-1} akslantirish ham uzluksiz bo'lsa, u holda $f : X \rightarrow Y$ akslantirish gomeomorfizm deyiladi. Agar X ni Y ga gomeomorf akslantirish mavjud bo'lsa, u holda X va Y topologik fazolar gomeomorf deyiladi.

Har bir X fazo uchun ayniy akslantirish $id_X : X \rightarrow X$ gomeomorfizm bo'ladi. Agar f gomeomorfizm bo'lsa, u holda teskari akslantirish f^{-1} ham gomeomorfizm bo'ladi. Ikkita gomeomorfizmlar f va g ning kompozitsiyasi fg ham gomeomorfizm bo'ladi¹.

2.1.8. Teorema. f - X topologik fazoni Y topologik fazoga o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lsin. U holda quyidagi shartlar o'zaro tengkuchli:

¹ Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. -М.: Физматлит, 2006. -252 с.

- (i) f - gomeomorfizm;
- (ii) f - yopiq;
- (iii) f - ochiq;
- (iv) $f(A)$ to'plam, A to'plam X da yopiq bo'lganda va faqat shu holdagina Y da yopiq.
- (v) $f^{-1}(B)$ to'plam B to'plam Y da yopiq bo'lganda va faqat shu holdagina X da yopiq bo'ladi.
- (vi) $f(A)$ to'plam A to'plam X da ochiq bo'lganda va faqat shu holdagina Y da ochiq bo'ladi.
- (vii) $f(B)$ to'plam, B to'plam Y da ochiq bo'lganda va faqat shu holdagina X da ochiq bo'ladi.

Isbot. (i) va (ii) shuningdek (i) va (iii) ning teng kuchliligi $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ dan kelib chiqadi, bunda $A \subset X$.

(ii) va (iv) ning hamma (iii) va (v) ning teng kuchliligi $A = f^{-1} f(A)$ tenglikdan kelib chiqadi. (i) va (iv) ning, (i) va (v) ning teng kuchliligidan (iv'), hamda (v') shartlarning f^{-1} - gomeomorf ekanligiga teng kuchli ekanligi kelib chiqadi, bu esa (i) ga teng kuchlidir.

2.1.9.Misol. X to'plam quyidagi topologiyalardan biri kiritilgan haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin:

- 1) diskret topologiya;
- 2) tabiiy topologiya;
- 3) 2-misoldagi $x_0 = 0$ da aniqlangan topologiya;
- 4) Sorgenfrey to'g'ri chizig'i topologiyasi
- 5) 7-misolda aniqlangan topologiya;
- 6) 8-misolda $x_0 = 0$ bo'lganda aniqlangan topologiya;
- 7) Antidiskret topologiya.

Har bir $a > 0$ haqiqiy sonlar uchun $f_a(x) = ax$ formula bilan aniqlangan $f_a : X \rightarrow Y$ akslantirish homeomorfizm bo'ladi. $a < 0$ bo'lganda f_a akslantirish (d) topologiyaga nisbatan uzluksiz bo'lmaydi, ammo qolgan topologiyalarga nisbatan homeomorf bo'ladi.

2.1.10.Misol. X va Y lar bir hil quvvatga ega bo'lgan ikkita to'plam bo'lsin. Har bir to'plamda diskret topologiyani qaraymiz. Ravshanki X ni Y ga o'zaro bir qiymatli akslantirish homeomorfizm bo'ladi.

Boshqa tomondan agar X va Y diskret fazolar bir hil quvvatga ega bo'lsa, ular homeomorf bo'la olmaydi. Shunday qilib, diskret fazo X to'plamni tashkil qilgan nuqtalarning tabiatiga bog'liq bo'lmay, faqat X to'plamning quvvatiga bog'liq ekan. Quvvati m ga teng bo'lgan diskret fazoni $D(m)$ orqali belgilaymiz.

X va Y to'plamlar 2.1.10.-misoldagi topologiyaga kiritilgan cheksiz to'plamlar bo'lsin. Bu to'plamlar bir xil quvvatga ega bo'lgan holda, ular orasida homeomorfizm o'rnatish uchun fazoning x_0 nuqtasini Y fazoning quyuqlanish nuqtasi y ga o'tkazuvchi o'zaro bir qiymatli akslantirishni olish kerak¹.

¹Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. -М.: Физматлит, 2006. -252 с.

2. Ajrimlilik aksiomalari

2.2.1.Ta’rif. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ikki turli nuqtasi uchun kamida birining ikkinchisini o‘z ichiga olmaydigan atrofi mavjud bo‘lsa, T_0 fazo yoki *Kolmogorov fazosi* deyiladi.

Agar bu ta’rifda har ikkala ixtiyoriy nuqtalar birorta atrofga ega bo‘lib, biri ikkinchisini o‘zida saqlamasa, ma’lum bo‘ladiki, bunday fazolar sinfi nisbatan tordir.

Bu fazolar sinfi T_1 fazo yoki erishilgan, istilo qilingan yoki egallangan fazo deb ataladi. Ta’rifdan ko‘rinadiki, ixtiyoriy T_1 fazo X da ixtiyoriy bir nuqtali to‘plam yopiq to‘plamdir va buning teskarisi ham o‘rinlidir. Yana shuni isbot qilish mumkinki, agar x_0 nuqta birorta M to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsa, u holda x_0 nuqtaning ixtiyoriy atrofi M ning cheksiz ko‘p turli nuqtalarini o‘zida saqlaydi.

Haqiqatan ham, x_0 nuqtaning shunday U atrofi topilsa va u M ning $x_1, x_2, \dots, x_n$ chekli nuqtalarini o‘zida saqlasa, u holda X fazo X_1 bo‘lganligi sababli X_i ning shunday U_i atroflari topiladiki, ular x_i nuqtalardan boshqasini o‘z ichiga olmaydi.

Endi $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ to‘plamni ko‘raylik. Ma’lumki, U to‘plam x_0 nuqtaning atrofi bo‘ladi. Bu to‘plam M ning x_0 nuqtadan boshqa nuqtalarini o‘zida saqlamaydi. Bundan ko‘rinadiki, x_0 nuqta M ning limit nuqtasi emas. Bu ziddiyat ta’rifning o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

Kolmogorov fazosiga misol sifatida bog‘lamli “qo‘sh nuqtani” keltirish mumkin. Bu fazo erishilgan fazo bo‘la olmaydi. Kolmogorov fazosiga trivial topologiyali ixtiyoriy fazolar ham kiradi.

2.2.1.Misol. Haqiqiy sonlar to‘plami R^1 ni olaylik. Bu haqiqiy to‘g‘ri chiziqda topologiya bazasi sifatida $a < x < +\infty$ nurlarni olamiz. Bu ko‘rinishdagi nurlar bazaning shartlarini qanoatlantiradi. Bunday baza R^1 da topologiya tashkil qiladi. Bu topologik R^1 fazo T_0 fazo aksiomasini qanoatlantiradi, lekin T_1 fazo

bo'la olmaydi. Agar turli ikki $x_1, x_2 \in R^1$ haqiqiy sonlarni olsak, ravshanki, bir vaqtda ikkinchisini o'zida saqlamaydigan x_1 va x_2 nuqtalarning birorta atrofi topilmaydi. Demak, bunday topologiyali R^1 fazo Kolmogorov fazosi bo'ladi.

2.2.2.Ta'rif. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ikki har xil nuqtasi o'zaro kesishmaydigan atroflarga ega bo'lsa, u T_2 fazo yoki **Xausdorf fazosi** (yoki Xausdorf topologiyali fazo) deyiladi.

Ma'lumki, ixtiyoriy Xausdorf fazosi T_1 fazo bo'ladi, lekin buning teskarisi doimo ham o'rinli emas. Ta'rifdan yana shuni ko'rsatish mumkinki, fazoning Xausdorf fazosi bo'lishi nasliy xususiyatga ega, ya'ni uning ixtiyoriy fazoostisi ham Xausdorof fazosi bo'lishidir. Xausdorf fazosining yana bir muhim xossasi — bu fazoda ixtiyoriy ketma-ketlikning limiti yagona bo'ladi. x_n ketma-ketlik limitining ikki x^1 va x^2 nuqtalari bo'lib, u^1 va u^2 ularning o'zaro kesishmaydigan atroflari deylik. Ketma-ketlik limitining ta'rifiga ko'ra, bu atroflarning biri ketma-ketlikning chekli elementlarini o'zida saqlaydi. Bu ta'rifning shartiga ziddir.

Xausdorf fazolariga misol sifatida ixtiyoriy metrik fazoni olish mumkin. Zariskiy topologiyasini olsak, bu topologiya ham T_1 fazo bo'ladi, lekin T_2 fazo bo'lolmaydi¹.

2.2.2.Misol. To'g'ri chiziqda $[0,1]$ kesmani olaylik. Bu to'plamda ochiq to'plam sifatida bo'sh to'plam, $[0,1]$ kesmaning o'zi va $[0,1]$ kesmadan sanoqlidan ko'p bo'lmagan nuqtalarni chiqarib tashlashdan hosil bo'lgan to'plamlarni qaraylik.

Agar hosil bo'lgan topologik fazoning ixtiyoriy ikki turli nuqtalarini olsak, bu nuqtalar ikkinchisini o'zida saqlamaydigan atrofga egadir. Bu fazoning erishilgan T_1 fazo ekanligini ko'rsatadi. Lekin ikki ixtiyoriy har xil nuqtalar o'zaro kesishmaydigan atroflarga ega emas. Bu fazoning Xausdorf fazosi emasligidan darak beradi.

¹Жўраев Т.Ф.Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиклар. -Т.: 2012. -187 б

2.2.3.Ta’rif. Agar X fazoning ixtiyoriy yopiq to‘plami A va ixtiyoriy $x_0 \in A$ nuqtasi X fazoda shunday ochiq o‘zaro kesishmaydigan atroflarga ega bo‘lsa, X topologik fazo T_3 topologik fazo deyiladi,

Agar X topologik fazo X bir vaqtda ham T_1 fazo, ham T_3 fazolar bo‘lsa, u holda u regulyar fazo deyiladi. Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, regulyar fazo Xausdorf fazosi bo‘lar.

ekan. Lekin buning aksi doimo o‘rinli emas.

Regulyar fazolarga ixtiyoriy metrik fazolar misol bo‘ladi, xususiyl holda R^n fazo ham regulyar fazodir.

2.2.3.Misol. Aytaylik, X barcha haqiqiy sonlar to‘plamidan iborat bo‘lib, τ topologiya atroflar natijasida aniqlangan bo‘lsin. Bu topologiyada nol nuqtadan boshqa barcha nuqtalarning atrofi, to‘g‘ri chiziqdagi nuqtaning interval ko‘rinishidagi atrofni olamiz. Nol nuqtaning atrofi deb uning to‘g‘ri chiziqdagi interval ko‘rinishidagi atrofidan sonlar o‘qining $\left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$ nuqtalari chiqarib tashlangan to‘plamlarini olamiz. Ya’ni, $u(0) = (a, b) \setminus \left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$ ixtiyoriy $0 \in (a, b) \subset R$.

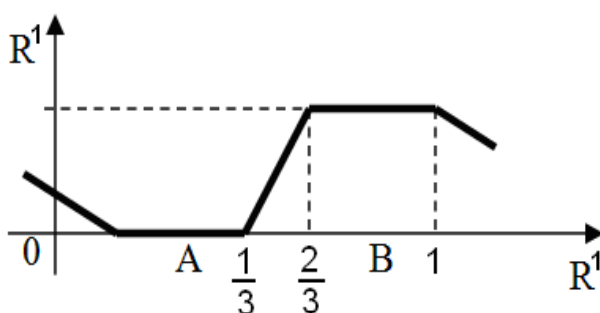
Agar $A = \left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$ to‘plamni olsak, A to‘plam sonlar o‘qida yopiq to‘plamlardir. Nol nuqta va A to‘plam bu yerda o‘zaro kesishmaydigan atroflarga ega bo‘lmaydi. Ya’ni, shunday aniq atroflar mavjud emas. Bu fazoning regulyar fazo emasligini ko‘rsatadi. Lekin bu fazoda ixtiyoriy ikki har xil nuqta o‘zaro kesishmaydigan atroflarga ega. Demak, bu topologik fazo Xausdorf fazosi ekan.

Endi elementlari soni ikkitadan ortiq to‘plamlardagi trivial topologiyani ko‘rsak, bu fazolar T_3 fazoga sodda misol bo‘la oladi, lekin ular regulyar fazo emas, chunki bunday fazolar T_1 fazo emas.

Regulyar fazolarning xossalriga keladigan bo'lsak, fazoning regulyarligi – bu nasliy xarakterga ega, ya'ni regulyar fazolarning ixtiyoriy to'plamostisi ham regulyar bo'ladi. Bundan xususiy holda kelib chiqadiki, regulyar fazolarning to'g'ri ko'paytmasi regulyar bo'lsa, uning har bir ko'paytuvchisi regulyar bo'ladi. Nihoyat, regulyar fazolar ixtiyoriy oilasining Tixonov ko'paytmasi ham regulyar fazo bo'ladi. Shuni aytish mumkinki, regulyar fazodagi faktor-topologiya doimo regulyar fazo bo'lavermaydi¹.

2.2.4.Ta'rif. Agar X topologik fazoning ikki A va B to'plamostilari uchun butun X fazoda aniqlangan shunday haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiya $f : X \rightarrow [0,1]$ mavjud

bo'lsa va u funksiya uchun barcha $x \in A$, $f(x)=0$ va $f(x)=1$ barcha $x \in B$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda ular X da funksional ayri deyiladi.



Ravshanki, A va V to'plamlarning X fazoda funksional ayri ekanligidan ularning shu X fazoda ayri ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar A va V lar X fazoda funksional ayri bo'lsa, $U = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right)$ va $f^{-1}\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) = V$ to'plamlar A va V to'plamlarning o'zaro kesishmaydigan atroflari bo'ladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, shunday Xausdorf, qolaversa, regulyar fazolar borki, bu fazolarda juft ikki nuqta funksional ayri emas. Bunga sabab shunday regulyar fazolar mavjudki, bu fazolarda aniqlangan konstant funksiya boshqa funksiya mavjud bo'lmaydi.

2.2.5.Ta’rif. Agar fazoning ixtiyoriy x_0 nuqtasi va bu nuqtani o‘zida saqlamaydigan bo‘sh bo‘lmagan F yopiq to‘plam funksional ayri bo‘lsa, X topologik fazo $T_{3/2}$ fazo deyiladi.

Agar X topologik fazo bir vaqtda ham T_1 fazo, ham $T_{3/2}$ fazo bo‘lsa, uni Tixonov fazosi yoki to‘kis regulyar (butkul regulyar) fazo deyiladi. Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, Tixonov fazosi regulyar fazo bo‘ladi.

Har bir metrik fazo, xususiyl holda R^n fazo ham, Tixonov fazosi bo‘ladi.

Tixonov fazolarining xossaligidan biri – bu fazo ham nasliy xususiyatga ega, ya’ni bu fazoning ixtiyoriy to‘plamostisi ham Tixonov fazosi bo‘lishidir¹.

Shuni ta’kidlash mumkinki, har bir egallangan (marraviy), fazo to‘la regulyar fazo bo‘lishi uchun ixtiyoriy $x_0 \in X$ nuqtasi va uning ixtiyoriy ochiq atrofi U uchun $f : X \rightarrow [0,1]$, $f(x_0)=0$, $f(X \setminus U)=1$ shartlarni qanoatlantiruvchi shunday uzluksiz funksiyaning mavjud bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Topologik fazolarning muhim sinflaridan yana biri normal topologik fazolardir.

2.2.6.Ta’rif. Agar X fazoning ixtiyoriy ikki bo‘sh bo‘lmagan kesishmaydigan yopiq F_1 va F_2 to‘plamlarining o‘zaro kesishmaydigan $U(F_1)$ va $U(F_2)$ ochiq atroflari mavjud bo‘lsa, X topologik fazo T_4 fazo deyiladi.

Agar X topologik fazo bir vaqtda ham T_1 , ham T_4 fazo bo‘lsa, bunday topologik fazolarga normal topologik fazolar deyiladi.

Ta’rifdan ma’lum bo‘ladiki, normal topologik fazolar regulyar va to‘la regulyar fazo bo‘ladi. Buning teskarisi o‘rinli bo‘lavermaydi. T_1 fazolar sinfi ichidagi $T_{3/2}$ fazolar sinfi T_3 fazolar sinfi bilan T_4 fazolar sinfi orasidagi oraliq sinfdir. Shu sababli belgilashlarda ham butkul regulyar fazolar sinfi $T_{3/2}$ bilan belgilanadi.

Yuqoridagi topologik fazolarga o‘xshab, normal fazolar sinfi nasliy xususiyatga ega emas, ya’ni bu fazolarning ixtiyoriy to‘plamostisi normal fazo bo‘lavermaydi. Normal fazolar sinfida uzluksiz akslantirishlarning bir oilasi

mavjud bo'lib, bu uzluksiz akslantirishlar o'lcham nazariyasi va topologiyani boshqa deyarli barcha jabhalarida figuralarning geometrik xossalari bilan bog'liq muammolarida va funksiyalarni davomlashtirish masalalarini yechishda, fazoning gomologik o'lchamini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. Bu masalaning asosini Urison Teoremasi (Urison lemmasi) tashkil qiladi¹.

Urison lemmasi. Ixtiyoriy normal X fazoning o'zaro kesishmaydigan yopiq A va B to'plamlari uchun shunday uzluksiz $f: X \rightarrow [0,1]$ funksiya mavjudki, uning uchun $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$ va har bir $x \in X$ uchun shartlar o'rinlidir.

Isbot. X normal fazo, A va B lar uning ixtiyoriy yopiq to'plamlari va $A \cap B = \emptyset$ bo'lsin. Har bir $r = k/2^n$, $k = 0, 1, \dots, 2^n$ ratsional songa shunday $G_{(r)}$ ochiq to'plamni mos qo'yamizki, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

- 1) $A \subset G(0)$, $X \setminus B = G(1)$;
- 2) Agar $r < r'$ bo'lsa, $\overline{G(r)} \subset \overline{G(r')}$.

Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi ochiq to'plamlar sistemasini n – ko'rsatkichga nisbatan induksiya metodi bilan ko'ramiz.

$n=0$ bo'lsin. Bu holda, X fazo normal bo'lganligi tufayli A va B larning $U(A)$ va $U(B)$ kesishmaydigan ochiq atroflari mavjud bo'ladi. Ularni $G(0)=U(A)$ va $G(1)=X \setminus B$ qilib belgilaymiz.

$k=n-1$ uchun $G_{(r)}$ ochiq to'plamlar sistemasi qurilgan bo'lsin.

Endi n uchun $G_{(n)}$ to'plamni qurishimiz kerak. $2m/2^n = m/2^{n-1}$ bo'lganligi sababli $G_{(r)}$ to'plamni $r = k/2^n$ n – toq son uchun ko'rishimiz yetarli bo'ladi. Aytaylik, $k=2m+1$ bo'lsin, u holda $(k+1)/2^n = (m+1)/2^{n-1}$, $(k-1)/2^n = m/2^{n-1}$ va induksiya shartiga ko'ra, $\overline{G(k-1/2^n)} \subset G(k+1/2^n)$ ifodaga egamiz. Ravshanki, $\overline{G(k-1/2^n)}$, $X - G(k+1/2^n)$ lar yopiq va kesishmaydi. X fazoning normalligi tufayli $\overline{G(k-1/2^n)}$ ning ochiq atrofi mavjudki, bu ochiq to'plam $X - G(k+1/2^n)$

¹Энгелькинг Р. Общая топология. М. Наука. : 1986. -752 с.

ning ochiq atrofi bilan kesishmaydi. $V = G(k/2^n)$ belgilashni kiritamiz. Aniqki, $\overline{G(k-1/2^n)} \subset G(k/2^n)$, $\overline{G(k/2^n)} \subset G(k+1/2^n)$ lar o‘rinli, shu bilan induksiya tugaydi.

$G_{(r)}$ to‘plamlarning aniqlanish sohasini quyidagicha kengaytiramiz:

$$G(r) = \begin{cases} \emptyset, & \text{agar } r > 0 \\ X, & \text{agar } r < 1 \end{cases} \text{ bo'lsa:}$$

Endi $\varphi: X \rightarrow [0,1]$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: agar $x \in G(0)$ bo‘lsa $\varphi(x) = 0$, va $\varphi(x) = \sup\{r : x \in G(r)X - G(r)\}$. Bu φ funksiyaning uzluksizligini ko‘rsatishimiz kerak. Shunga erishish maqsadida ixtiyoriy $x_0 \in X$ nuqta va $N > 0$ uchun x_0 nuqtaning shunday $O_{N(x_0)}$ atrofni ko‘ramizki, u uchun $|\varphi(x_0) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{2^N}$, $x \in O_N(x_0)$ o‘rinli bo‘lsin. Aytaylik, r_0 son $k/2^n$ ko‘rinishda bo‘lib, $\varphi(x_0) < r_0 < \varphi(x_0) + \frac{1}{2}N + 1$ (1) shartni qanoatlantirsin. Belgilaymiz: $U_N(x_0) = \overline{G(r_0) \setminus G(r_0 - \frac{1}{2}N)}$. Bu holda $x_0 \in U_N(x_0)$, chunki $r_0 < \varphi(x_0)$ va $r_0 - \frac{1}{2}N + 1 \leq \varphi(x_0)$. Agar $x \in U_N(x_0)$ bo‘lsa, u holda $x \in G(r_0)$. Shu sababli $\varphi(x) \leq r_0$. Bundan tashqari, $x \in \overline{X - G(r_0 - \frac{1}{2}N)} \subset X - G(r_0 - \frac{1}{2}N)$, shu sababli $r_0 - \frac{1}{2}N \leq \varphi(x)$. Demak, $r_0 - \frac{1}{2}N \leq \varphi(x) \leq r_0$.

(1) va (2) larni solishtirsak, quyidagi natijaga ega bo‘lamiz:

$$|\varphi(x_0) - \varphi(x)| < \frac{1}{2}N, x \in U_N(x_0)$$

Bu φ ning uzluksizligini ko‘rsatadi. Funksiyaning qurilishiga ko‘ra, $\varphi|_A \equiv 0$; $\varphi|_B \equiv 1$ va $0 \leq \varphi(x) \leq 1$.

Bunday qurilgan funksiya Urison funksiyasi deyiladi. Urisonning bu lemmasi quyidagiga ekvivalentdir.

Normal X fazoning ixtiyoriy kesishmaydigin va bo‘sh bo‘lmagan A va B yopiq to‘plamlari uchun shunday $\varphi_{a,b}(x)$ uzluksiz funksiya mavjud bo‘ladiki, u quyidagi shartni qanoatlantiradi: $\varphi_{a,b}(x)|_A \equiv a$; $\varphi_{a,b}(x)|_B \equiv b$; $a \leq \varphi_{a,b}(x) \leq b, x \in X$. Bu

yerda a, b ($a < b$) ixtiyoriy haqiqiy sonlardir. Haqiqatan ham, agar $\varphi_{a,b}(x)$ Urison funksiyasi bo'lsa, u holda $\varphi_{a,b}(x) = (b-a)\varphi(x) + a$ izlangan funksiya bo'ladi.

2.2.1. Teorema. Normal X fazoning ixtiyoriy yopiq A to'plamida berilgan. Ixtiyoriy chegaralangan $\varphi: A \rightarrow R$ uzluksiz funksiya uchun shunday $\Phi: X \rightarrow R$ uzluksiz funksiya mavjudki, uning uchun quyidagi o'rinli:

$$\Phi|_A \equiv \varphi \text{ va } \sup\{\Phi(x), x \in X\} = \sup\{\varphi(x), x \in A\}.$$

Isbot. Izlanayotgan uzluksiz $F_{(x)}$ funksiyaning funksiyalar ketma-ketligining limiti ko'rinishida quramiz.

$$\begin{aligned} \text{Aytaylik: } \varphi_0 = \varphi \text{ va } a_0 = \sup\{|\varphi(x)| : x \in A\} \quad A_0 = \left\{x : \varphi_0(x) \leq -\frac{a_0}{3}\right\}, \\ B_0 = \left\{x : \varphi_0(x) \geq \frac{a_0}{3}\right\} \end{aligned} \quad \text{bo'lsin}$$

Ravshanki, A_0 va B_0 to'plamlar yopiq va o'zaro kesishmaydi. Urison lemmasiga ko'ra, shunday uzluksiz funksiya $g_0: X \rightarrow R$ mavjudki, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$|g_0(x)| \leq \frac{a_0}{3} \text{ va } g_0(x) = \begin{cases} -\frac{a_0}{3} & \text{agar, } x \in A_0 \text{ bo'lsa} \\ \frac{a_0}{3} & \text{agar, } x \in B_0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Endi A to'plamda φ_1 funksiyaning $\varphi_1(x) = \varphi_0(x) - g_0(x)$ ko'rinishda aniqlaymiz. U holda φ_1 funksiya uzluksiz va $a_1 = \sup\{|\varphi_1(x)| : x \in A\} \leq \frac{2}{3}a_0$ o'rinli.

Shunga o'xshab, quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$A_1 = \left\{x : \varphi_1(x) \leq -\frac{a_1}{3}\right\}, \quad B_1 = \left\{x : \varphi_1(x) \geq \frac{a_1}{3}\right\}.$$

Endi yana Urison funksiyasi g_1 ni olamiz, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$|g_1(x)| \leq \frac{a_1}{3} \text{ va } g_1(x) = \begin{cases} -\frac{a_1}{3}, & \text{agar } x \in A_1 \text{ bo'lsa} \\ \frac{a_1}{3}, & \text{agar } x \in B_1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

A to'plamda $\varphi_2(x)$, funksiyani $\varphi_2(x) = \varphi_1(x) - g_1(x)$ ko'rinishda ko'ramiz va $a_2 = \sup(A)\{|\varphi_2(x)| : x \in A\} \leq \frac{2}{3}a_1$ deb olamiz. Shu yo'sinda A to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning $\varphi_0 = \varphi; \varphi_1; \varphi_2; \dots, \varphi_n, \dots$ ketma-ketligi va X da uzluksiz $g_0; g_1; g_2; \dots, g_n, \dots$ funksiyalar ketma-ketligiga ega bo'lib, ular quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - g_n(x), \quad |g_n(x)| \leq \frac{a_n}{3}; a_{n+1} \leq \frac{2}{3}a_n.$$

Bu yerda $a_n = \sup\{|\varphi_n(x)| : x \in A\} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$ bundan

$$|\varphi_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n a_0, \quad |\varphi_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{a_0}{3} \text{ larga ega bo'lamiz. Oxirgi tengsizliklardan } \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$$

qator X da birorta uzluksiz funksiyaga absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Bu yig'indini $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ bilan belgilaymiz va quyidagi baholashga ega

$$\text{bo'lamiz: } |\Phi(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{a_0}{3} = a_0. \quad \text{Endi } x \in A \text{ bo'lsin, } u \text{ holda}$$

$S_n(x) = g_0(x) + \dots + g_n(x)$ qisman yig'indi $\varphi_{n+1}(x)$ funksiyalarning qurilishiga ko'ra $\varphi_0(x) - \varphi_n(x)$ ga teng. Lekin $\varphi_n(x) \rightarrow 0$, u holda har bir $x \in A$ uchun $\Phi(x) = \varphi_0(x) = \varphi(x)$. Demak, $\Phi(x)$ izlangan funksiya ekan.

Natija. Normal X fazo ning ixtiyoriy yopiq A to'plamostisida berilgan har bir uzluksiz $\varphi : A \rightarrow I^n$ akslantirishni $\Phi : X \rightarrow I^n$ akslantirishgacha uzluksiz davomlashtirish mumkin.

3. Kompakt fazolar va ular ustida amallar

X to'plamning qism to'plamlaridan tuzilgan $\{A_s\}_{s \in S}$ oila uchun $\bigcup_{s \in S} A_s = X$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $\{A_s\}_{s \in S}$ ga X to'plamning qoplamasi deyiladi.

2.3.1.Ta'rif. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratib olish mumkin bo'lsa, X topologik fazo kompakt deyiladi.

$F = \{F_s\}_{s \in S}$ to'plamlar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar bu oilaning ixtiyoriy chekli qism kesishmasi bo'sh bo'lmasa, bunday sistema markazlashgan sistema deyiladi.

2.3.1.Teorema. X topologik fazo kompakt bo'lishi uchun undagi yopiq to'plamlardan iborat har qanday markazlashgan sistemaning kesishmasi bo'sh bo'lmasligi zarur va yetarlidir.

Isbot. X – kompakt fazo, $\{F_s\}_{s \in S}$ - X dagi yopiq to'plamlar sistemasi va $\bigcap_{s \in S} F_s = \emptyset$.

$U_s = X \setminus F_s$ ochiq to'plamni qaraymiz.

$\bigcup_{s \in S} U_s = \bigcup_{s \in S} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s \in S} F_s = X$ ekanligidan $\{U_s\}_{s \in S}$ oila X fazoning ochiq qoplamasi bo'ladi. Ammo X – kompakt edi. Demak, $\{U_s\}_{s \in S}$ qoplamada chekli $\{U_{s_1}, U_{s_2}, \dots, U_{s_k}\}$ qism qoplama mavjud bo'ladi.

$X = \bigcup_{i=1}^k U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^k (X \setminus F_{s_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^k F_{s_i}$ kelib chiqadi, bu esa $\bigcap_{i=1}^k F_{s_i} = \emptyset$ ekanini bildiradi. Shunday qilib X dagi yopiq to'plamlar sistemasi $\{F_s\}_{s \in S}$ markazlashgan bo'lsa, u holda $\bigcap_{i=1}^k F_{s_i} \neq \emptyset$.

2.3.2.Teorema. Kompakt fazoning yopiq qism to'plami kompaktdir.

Isbot. F to'plam X kompakt fazoning yopiq qism to'plami va $\{F_s\}_{s \in S}$ sistema F ning yopiq qism to'plamlaridan iborat ixtiyoriy markazlashgan sistema bo'lsin. U holda F_s to'plam X da ham yopiq bo'ladi. Demak $\{F_s\}_{s \in S}$ sistema X dagi uning yopiq to'plamlaridan iborat markazlashgan sistemadir.

Bundan $\bigcap_{i=1}^k F_s \neq \emptyset$ ekanligi kelib chiqadi. 2.3.1-teoremadan F ning kompakt ekanligi kelib chiqadi.

2.3.3.Teorema. Agar $A - X$ regulyar fazoning kompakt fazoostisi bo'lsa, u holda har bir yopiq $B \subset X \setminus A$ to'plam uchun shunday ochiq $U, V \subset X$ to'plamlar topiladiki $A \subset U, B \subset V$ va $U \cap V = \emptyset$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Agar $B - X$ fazoning kompakt fazoostisi bo'lsa, u holda X ni Xausdorf deb faraz qilish yetarli.

Isbot. X regulyar fazo ekanligidan har bir $x \in X$ uchun shunday ochiq $U_x, V_{x \in X}$ to'plamlar topiladiki

$$x \in U_x, B \subset V_x \text{ va } U_x \cap V_x = \emptyset \quad (1)$$

munosabat o'rinli.

Ravshanki $A \subset \bigcup_{x \in A} U_x$ bo'ladi. U holda shunday chekli $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset A$

to'plam topiladiki $A \subset \bigcup_{i=1}^k U_{x_i}$.

$U = \bigcup_{i=1}^k U_{x_i}$ va $V = \bigcap_{i=1}^k V_{x_i}$ to'plamlar teorema shartlarini qanoatlantiradi.

Agar B – bir nuqtali to'plam bo'lsa, u holda Teoremanin birinchi shartini isbotlashda faqat X ning xausdorfligidan foydalaniladi. Agar $B - X$ ning kompakt fazoostisi bo'lsa, har bir $x \in A$ uchun (1) shartni qanoatlantiruvchi $U_x, V_x \subset X$ ochiq to'plamlarga ega bo'lamiz¹.

2.3.4.Teorema. Xausdorf fazosining kompakt qism to'plami yopiqdir.

Isbot. X xausdorf fazosi, A – esa uning kompakt qism to'plami bo'lsin. Ixtiyoriy $y \notin A$ nuqtani olamiz, ular har bir $x \in A$ nuqta uchun x va y larning mos ravishda shunday ochiq bo'lgan V_x va $U_y^{(x)}$ atroflari mavjudki, $V_x \cap U_y^{(x)} = \emptyset$. $\{V_x : x \in A\}$ sistema A uchun ochiq qoplama, demak uning chekli

$$V_{x_1}, V_{x_2}, V_{x_3}, \dots, V_{x_n}$$

¹Энгелькинг Р. Общая топология. М. Наука. : 1986. -752 с.

qism qoplamasi mavjud. Endi $U = U_y^{(x_1)} \wedge U_y^{(x_2)} \cap \dots \cap U_y^{(x_n)}$ va $V = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_n}$ ochiq atrofi bo'lib, $U_y \cap V = \emptyset$.

Bunda $U_y \cap A = \emptyset$ ekanligi, ya'ni $y \in \bar{A}$ munosabat kelib chiqadi. Shunday qilib, $\bar{A} \subset A$ munosabat isbotlandi. To'plam yopilmasining xossalriga ko'ra $\bar{A} = A$ tenglik kelib chiqadi.

2.3.5. Teorema. Har bir kompakt xausdorf fazosi normal fazo bo'ladi.

2.3.6. Teorema. Kompakt fazoning uzluksiz aks ettirishdagi tasviri kompakt fazodir.

Isbot. X kompakt fazo, f esa X ni biror Y fazoga uzluksiz aks ettirish bo'lsin. $f(X)$ fazoning ixtiyoriy $\{U_s\}_{s \in S}$ ochiq qoplamasini olamiz, ya'ni $f(X) \subset \bigcup_{s \in S} U_s$.

So'ngi munosabatdan $X = \bigcup_{s \in S} f^{-1}(U_s)$ tenglik kelib chiqadi.

Bundan va f ning uzluksizligidan $\{f^{-1}(U_s)\}_{s \in S}$ sistema X ning ochiq qoplamasi ekanligi kelib chiqadi. Demak, undan chekli qism qoplama ajratib olishi mumkin, ya'ni ushbu $\bigcup_{k=1}^m f^{-1}(U_{s_k}) = X$ tenglikni yozishimiz mumkin.

Bundan $f(X) = \bigcup_{k=1}^m U_{s_k}$ tenglik kelib chiqadi, ya'ni $U_{s_1}, U_{s_2}, \dots, U_{s_m}$ sistema $f(X)$ ni qoplaydi, demak $f(X)$ kompaktdir.

2.3.7. Teorema. X kompakt fazoni Y Xausdorf fazosiga o'zaro bir qiymatli va uzluksiz f akslantirish gomomorfizm bo'ladi.

Lemma. Agar A – X fazoning kompakt fazoostisi, y – Y fazodagi nuqta bo'lsa, u holda $A \times \{y\}$ ni o'z ichiga oluvchi har bir ochiq $W \subset X \times Y$ to'plam uchun $A \times \{y\} \subset U \times V \subset W$ munosabat o'rinli bo'ladigan $U \subset X$ va $V \subset Y$ ochiq to'plamlar mavjud bo'ladi.

2.3.8. Kuratovskiy Teoremasi. Ixtiyoriy X fazo uchun quyidagi shartlar teng kuchli:

(i) X fazo kompakt;

(ii) Har bir Y topologik fazo uchun $p = X \times Y \rightarrow Y$ proyeksiyalash yopiq akslantirish bo'ladi.

(iii) Har bir Y normal fazo uchun $p = X \times Y \rightarrow Y$ yopiq akslantirish bo'ladi.

Isbot. X – kompakt fazo va $F = \bar{F} \subset X \times Y$ bo'lsin. $y \notin p(F)$ muqtani olamiz. $X \times \{y\} \subset (X \times Y)/F$ ekanligidan, 2.3.9. lemmaga ko'ra, y nuqtaning shunday V atrofi mavjudki, $(X \times V) \cap F = \emptyset$ tenglik o'rinli bo'ladi, u holda $p(F) \cap V = \emptyset$ bo'lsin, $p(F)$ akslantirish Y ga yopiq akslantirish bo'ladi. (i) $\Rightarrow$ (ii) implikasiya isbotlandi. (ii) $\Rightarrow$ (iii) implikasiyaning bajarilishi ravshan. (iii) $\Rightarrow$ (i) ni isbotlaymiz. X fazo (iii) xossaga ega bo'lsin. Faraz qilaylik X da yopiq to'plamlarning $\{F_s\}_{s \in S}$ markazlashgan sistemasi mavjud bo'lib, $\bigcap_{s \in S} F_s = \emptyset$ bo'lsin. $y_0 \notin X$ nuqtani olamiz va $y = X \cup \{y_0\}$ to'plamda, X ning barcha qism to'plamlaridan va $\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap \dots \cap F_{s_n}) \cup K$ ko'rinishidagi to'plamlardan topologiyani qaraymiz, bunda $s_1, s_2, \dots, s_k \in S$ va $K \subset X$.

$\bigcap_{s \in S} F_s = \emptyset$ tenglikdan Y ning T_1 fazo ekanligi kelib chiqadi. Y fazoning y_0 ni o'z ichiga olmagan har bir qism to'plami ochiq bo'lgani uchun Y normal fazo.

X fazo (iii) xossaga ega bo'lgani uchun $F = \overline{\{(x, x) : x \in X\}}$ to'plamning $p(F)$ proeksiyasi Y da yopiq to'plam bo'ladi.

$X \subset p(F)$ munosabatdan va $y_0 \in \bar{X} = Y$ ekanligidan $y_0 \in p(F)$.

Demak, shunday $x_0 \in X$ nuqta mavjudki, uning uchun $(x_0, y_0) \in F$.

U holda, x_0 nuqtaning har bir $U \subset X$ atrofi va har bir $s \in S$ uchun $[U \times (\{y_0\} \cup F_s)] \cap \{(x, x) : x \in X\} \neq \emptyset$, ya'ni $U \cap F_s \neq \emptyset$ munosabatlarga ega bo'lamiz. Demak, barcha $s \in S$ larda $x_0 \in F_s$ bo'lib, bundan $\bigcap_{s \in S} F_s \neq \emptyset$ - ziddiyat kelib chiqadi.

2.3.9. Teorema. X kompakt fazoda f uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda f funksiya X fazoda chegaralangan bo'lib, o'zining aniq quyi va aniq yuqori chegaralariga ega.

Isbot. X kompakt fazoda aniqlangan f uzluksiz funksiya X ni Xausdorf fazosi R ga uzluksiz akslantirish demakdir. 2.3.7-teorema ko'ra $f(x)$ kompaktdir.

Bundan $f(x)$ ning chegaralangan va yopiq to'plam ekanligi kelib chiqadi, demak f funksiya X da o'zining aniq yuqori chegarasigada aniq quyi chegarasiga erishadi. Teorema isbotlandi.

X – haqiqiy sonlarning biror qism to'plami bo'lsin: $X \subset R$.

2.3.2.Ta'rif. Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan har qanday $\{x_n\} (x_n \in X, n=1,2,3,...)$ ketma-ketlikdan shu to'plamning nuqtasiga yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qisman ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, X to'plam kompakt to'plam deyiladi.

2.3.1.Misol. $X=[a,b]$ segmentning kompakt bo'lishi Bolsano-veyershtas lemmasidan kelib chiqadi.

2.3.2.Misol. $X=[a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup ... \cup [a_n,b_n]$ - to'plam kompakt to'plam bo'ladi.

2.3.3.Misol. $X=(0,1)$ interval kompakt to'plam bo'lmaydi, chunki $x_n = \frac{1}{n+1} \in (0,1)$ ketma-ketlikning limiti 0 ga teng. Ammo 0 son $(0,1)$ to'plamga tegishli emas.

2.3.10.Teorema. X kompakt to'plam bo'lishi uchun uning chegaralangan va yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zaruriylik. X – kompakt to'plam bo'lsin. Avvalo bu to'plamning chegaralanganligini ko'rsatamiz. Teskarisidan faraz qilaylik, ya'ni X – kompakt to'plam bo'lsa ham u chegaralanmagan bo'lsin. U holda shunday $x_1 \in X$ nuqta mavjudki $|x_1| > 1$, shunday x_2 nuqta mavjudki $|x_2| > 2$ va h.k.

Natijada $\{x_n\}$ ketma-ketlik hosil bo'lib, $|x_n| > n$ bo'ladi. Bu $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratib bo'lmaydi. Bu esa X ning kompakt to'plamligiga zid. Demak, X -chegaralangan to'plam.

Endi, X ning yopiq to'plam bo'lishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. U holda X da a ga intiluvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik topiladi. Ravshanki, bu $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har qanday $\{x_{n_k}\}$ qisman ketma-ketligi uchun $\lim x_{n_k} = a$ limit o'rinli bo'ladi. X kompakt to'plam bo'lgani uchun $a \in X$ bo'ladi. Demak, X to'plamning limit nuqtasi o'ziga tegishli bo'ladi. Bu esa X ning yopiq to'plam ekanligini bildiradi¹.

Yetarliligi. X -chegaralangan va yopiq to'plam bo'lsin. U holda Bolsano-Vveyershtass lemmasiga ko'ra har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan a ga taqinlashuvchi

qisman ketma-ketlik ajratish mumkin: $x_{n_k} \rightarrow a$. Ravshanki, bu a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'ladi. X yopiq to'plam bo'lgani uchun $a \in X$ bo'ladi. Demak, X kompakt to'plam. Teorema isbotlandi.

2.3.11. Teorema. Agar $f(x)$ funksiya X kompakt to'plamda uzluksiz bo'lsa, funksiya X da tekis uzluksiz bo'ladi.

2.3.4. Misol. Haqiqiy sonlar to'g'ri chizig'i va Zorgenfrey to'g'ri chizig'i kompakt emas, chunki $\{(-i), i\}_{i=1}^{\infty}$ ochiq qoplamadan chekli qism qoplama ajratib olib bo'lmaydi.

X topologik fazo, Y kompakt fazo va $C: X \rightarrow Y$ akslantirish X fazoni Y fazoga akslantirish uchun $\overline{C(X)} = Y$ shart bajarilsa, u holda (Y, C) juftlik X fazoning **kompaktifikatsiyasi** yoki kompakt **Xausdorf kengaytmasi** deyiladi.

Agar X fazo va Y kompakt fazoning biror M qism to'plami uchun $f: X \rightarrow Y$ ($M = f(M)$) gomomorf akslantirish mavjud bo'lsa, u holda $(\overline{f(X)}, if)$ juftlik, bu yerda $i: M \rightarrow \overline{M}$ ga ayniy almashtirish, X fazoning kompakt kengaytmasi bo'ladi. Demak, har qanday kompakt fazoga hamma yerida zich qilib joylashtirish mumkin bo'lgan fazo kompakt kengaytmaga ega. Ya'ni, quyidagi ikkita teoremlar o'rinli bo'ladi:

¹Энгелькин Р. Общая топология. М. Наука. : 1986. -752 с.

2.3.12. Teorema. X topologik fazo kompakt kengaytmaga ega bo'lishi uchun uning Tixonov kengaytmasi bo'lishi zarur va yetarlidir.

2.3.13. Teorema. Har qanday X tixonov fazosi uchun $\omega(X) = \omega(Y)$ shartni qanoatlantiruvchi (Y, C) kompakt kengaytmasi mavjud.

Biz X fazoning kompakt kengaytmasi deganda faqat (Y, C) juftlikni nazarda tutmasdan, X fazoni hamma yerida zich qilib joylashtirish mumkin bo'lgan Y kompakt fazoni tushunamiz. X fazoning kompakt kengaytmalari CX , C_iX , $\gamma(X)$ va hokozo ko'rinishlarda belgilanadi. Bu yerda C , C_i , γ lar X fazoning mos ravishdagi kompakt kengaytmalarini joylashtiruvchi gomeomorf inektiv akslantirishlar¹.

Demak, X fazoning CX kompakt kengaytmasi uchun

$$C : X \rightarrow CX, \quad C|_X : X \rightarrow C(X)$$

gomeomorf akslantirish va $\overline{C(X)} = C(X)$ bo'ladi.

Bizga X fazoning C_1X va C_2X kompakt kengaytmalari berilgan bo'lsin.

Agar $f : C_1X \rightarrow C_2X$ gomeomorf akslantirish mavjud bo'lib,

$$\begin{array}{ccc} C_1X & \xrightarrow{f} & C_2X \\ c_1 \downarrow & & \uparrow c_2 \\ X & \xrightarrow{2d_x} & X \end{array}$$

diagrammaning kommunikativligi bajarilsa, ya'ni, $\forall x \in X$ uchun $fC_1(X) = C_2(X)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bunday kompakt kengaytmalarning ekvivalentligi ekvivalentlik munosabati bo'lishi kelib chiqadi. Kelgusida CX bilan X fazoning ekvivalent kompaktifikatsiyalaridan ihtiyoriysini belgilaymiz.

Bu yerda quyidagi Teorema o'rinli bo'ladi:

¹Энгелькинг Р. Общая топология. М. Наука. : 1986. -752 с.

2.3.14. Teorema. X fazoning ixtiyoriy Y kompakt kengaytmasi uchun $\omega(Y) \leq \exp d(X)$ va $|Y| \leq \exp \exp d(X)$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Demak, X fazoning barcha kompakt kengaytmalari $I^{\exp d(X)}$ tixonov kubining qism fazolari bo'lar ekan. Bundan $I^{\exp d(X)}$ tixonov kubining qism fazolaridan tuzilgan X fazoning barcha ekvivalent kompakt kengaytmalari oilasi $\wp(X)$ ni qarash mumkinligi kelib chiqadi.

Endi, $\wp(X)$ to'plamda eʼfʼkenni tushunchasini kiritaylik. Agar $fC_1 = C_2$ shartni qanoatlantiruvchi $f : C_1X \rightarrow C_2X$ uzluksiz akslantirish mavjud bo'lsa, u holda $C_2X \leq C_1X$ deymiz. U holda $C_2X \leq C_1X$ tengsizlikdan C_1X ni C_2X ga shunday akslantirish mumkinki, unda C_1X va C_2X fazoning qism fazosi sifatida qaralayotgan X fazoning ixtiyoriy nuqtasi o'ziga o'tadi. Demak, agar $C_1X \leq C_2X$ va $C_2X \leq C_3X$ bo'lsa, u holda $C_1X \leq C_3X$ bo'ladi.

Ushbu $\leq$ munosabatning oilada o'rinli bo'lishi quyidagi teoremdan kelib chiqadi.

2.3.15. Teorema. X fazoning C_1X va C_2X kompakt kengaytmalari ekvivalent bo'lishi uchun $C_1X \leq C_2X$ va $C_2X \leq C_1X$ bajarilishi zarur va yetarlidir.

Quyidagi teorema kompakt kengaytmalarning ekvivalentligining yana bir zaruriy va yetarli shartini ifodalaydi:

2.3.16. Teorema. X fazoning C_1X va C_2X kompakt kengaytmalari ekvivalent bo'lishi uchun ekvivalent bo'lishi uchun, X fazoning ixtiyoriy A va B yopiq qism to'plamlari uchun $\overline{C_1A} \cap C_1A = \emptyset \Leftrightarrow \overline{C_2(A)} \cap \overline{C_2(B)} \neq \emptyset$ ekvivalentlik munosabati bajarilishi zarur va yetarlidir.

Bizga X topologik fazoning ixtiyoriy CX kompakt kengaytmasi berilgan bo'lsin. CX ning $C(X)$ dan farq qiluvchi nuqtalari to'plami $CX \setminus C(X)$ ga CX kompakt kengaytmaning to'ldiruvchisi deyiladi. Quyidagi Teoremda to'ldiruvchining muhim hossasi bayon qilingan:

2.3.17.Teorema. Agar C_1X va C_2X lar X fazoning kompakt kengaytmalari va $f : C_1X \rightarrow C_2X$ akslantirish uchun $fC_1 = C_2$ bo'lsa, u holda $f(C_1(X)) = C_2(X)$ va $f(C_1X \setminus C_1(X)) = C_2X \setminus C_2(X)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Quyidagi Teorema ixtiyoriy X fazoning kompakt kengaytmalari oilasining muhim hossalari bayon etadi.

2.3.18.Teorema. X fazoning kompakt kengaytmalari oilasi $\wp(X)$ ning istalgan bo'sh bo'lmagan qism $\wp_0 \subset \wp(X)$ fazosi $\wp(X)$ dagi $\leq$ tartib munosabatiga nisbatan aniq yuqori chegaraga ega.

Ushbu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija. Har qanday X fazoning kompakt kengaytmalari $\wp(X)$ oilada $\leq$ tartib munosabatga nisbatan eng kata element mavjud.

X topologik fazoning kompakt kengaytmalari $\wp(X)$ oilaning eng katta elementi X fazoning eng kata kompakt kengaytmasi yoki Stoun-Chex kompakt kengaytmasi deyiladi va βX kabi belgilanadi.

Demak, biz X fazoning istalgan CX kompakt kengaytmaga aynan joylashtirish mumkin deb qarashimiz mumkin. X fazoni CX kompakt kengaytmasiga aynan joylashtiruvchi akslantirish berilgan bo'lsa, uni X fazoning kompakt kengaytmasiga aynan joylashtiruvchi akslantirish berilgan bo'lsa, uni X fazoning kompakt kengaytmasigacha davom ettirish mumkinligi quyidagi Teoremada bayon etilgan:

2.3.19.Teorema. Har qanday X tixonov fazosini istalgan Z kompakt fazoga akslantiruvchi ixtiyoriy uzluksiz $f : X \rightarrow Z$ akslantirishni, $F : \beta X \rightarrow Z$ uzluksiz akslantirishgacha davom ettirish mumkin.

Agar X tixonov fazosini kompakt fazoga akslantiruvchi har qanday uzluksiz akslantirishni X fazoning biror γX kompakt kengaytmasigacha uzluksiz davom ettirish mumkun bo'lsa, u holda γX kompakt kengaytma X fazoning stoun-chex kompakt kengaytmasiga ekvivalent bo'ladi.

Natija 1. X tixonov fazosini $I = [0, 1]$ kesmaga akslantiruvchi har qanday uzluksiz akslantirishni $F : \beta X \rightarrow I$ uzluksiz akslantirishgacha davom ettirish mumkin.

Agar X tixonov fazosini I kesmaga akslantiruvchi har qanday uzluksiz akslantirishni X fazoning biror γX kompakt kengaytmagacha uzluksiz davom ettirish mumkin bo'lsa, u holda γX kompakt kengaytma X fazoning stoun-chex kompakt kengaytmasiga ekvivalent bo'ladi¹.

Natija 2. X tixonov fazoning istalgan ochiq-yopiq A qism fazosi uchun, A ning yopig'i $\bar{A}$ to'plam βX da ochiq-yopiq va yopiq bo'ladi.

Endi diskret fazolarning stoun-chex kompakt kengaytmalariga, jumladan, N —notural sonlar to'plamining diskret topologiya bilan qaralgan holdagi stoun-chex kompakt kengaytmasining hossalari qaraylik:

2.3.20. Teorema. Har qanday cheksiz m diskret fazoning istalgan $\mathfrak{D}(m)$ stoun-chex kompakt kengaytmasining quvvati 2^{2^m} va salmog'i 2^m ga teng bo'ladi.

Natija. N diskret fazo uchun βN ning quvvati 2^c ga va salmog'i c ga teng bo'ladi.

2.3.21. Teorema. Har qanday $x \in \beta D(m)$ nuqta va x ning istalgan V atrofi uchun $\beta D(m)$ da shunday U ochiq-yopiq to'plam mavjud bo'lib, $x \in U \subset V$ bo'ladi.

2.3.20-teorema $m = \aleph_0$ da quyidagicha bo'ladi:

2.3.22. Teorema. Har qanday cheksiz $F \in \beta N$ yopiq to'plamda βN ga gomomorf bo'lgan qism to'plam mavjud. Xususan, F ning quvvati 2^c ga, F ning salmog'i esa c ga teng.

Ushbu Teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija. Har qanday $N \cup \{x\} \subset \beta N$ qism to'plam, bu yerda $x \in \beta N \setminus N$, sanoqlilikning birinchi aksiomasi qanoatlantirilmaydi.

II bob bo'yicha xulosa

Bu bobda topologiyaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lgan uzluksiz funksiyalar ko'rib chiqilgan. Unga ta'rif berilib, xossalari o'rganilgan, teoremlar keltirilib isbotlangan, misollar ko'rsatilgan. Ikkichi paragraf ajrimlilik aksiomalariga bag'ishlangan. Har bir fazo ta'riflanib, misollar keltirilgan, bir – biridan farqi ko'rsatilgan. Uchinchi bobi kompakt fazolar va ular ustida amallarga bag'ishlangan. Bunda kompaktlik ta'rifi berilgan. Kompakt fazolarning uzluksiz akslantirishdagi va Dekart ko'paytmadagi holati ko'rib chiqilgan. Kompaktlik topologik invariantligi ko'rsatilgan.

III bob. Topologik fazolarning ba'zi kardinal xossalari

1. Topologik fazolarning uzluksiz akslantirishdagi holati

Bog'lamli topologik fazolar topologiyaning asosiy va muhim tushunchalaridan biridir. Bu tushuncha ba'zi manbalarda tutash fazolar sifatida ham keltirilgan¹.

3.1.1. Ta'rif. Agar X to'plamni o'zining bo'sh bo'lmagan ikkita o'zaro kesishmaydigan ochiq to'plamostilari birlashmasi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lmasa, X topologik fazo bog'lamli topologik fazo deyiladi. Ya'ni, $X \neq U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$ $\emptyset$ – bo'sh to'plam, U_1, U_2 ochiq to'plamlardir.

Ta'rifdan bevosita ma'lumki, bog'lamli X fazoda X va $\emptyset$ dan boshqa ochiq va yopiq to'plamlar bo'lmasligi zarur va yetarlidir. Bog'lamli bo'lmagan fazoga misol sifatida elementi bittadan ortiq bo'lgan ixtiyoriy diskret fazoni keltirish mumkin.

Bog'lamli fazoga ixtiyoriy bir nuqtali topologik fazolar misol bo'la oladi.

3.1.1. Misol. X to'plam haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. Bu to'plamda topologiyani, ya'ni ochiq to'plamlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$\tau = \{\{\emptyset\} \cup \{R\} \cup \{-\infty; x\} : x \in R\}$ (X, τ) fazoda ixtiyoriy to'plam bog'lamli bo'ladi.

Bu jumlaning isbotlash uchun ixtiyoriy $S \subset X$ to'plamni olamiz. Faraz qilaylik, F to'plam S ning bo'sh bo'lmagan ochiq va yopiq to'plamostisi bo'lsin. Bu holda F to'plamni $F = U \cap S = C \cap S$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda U to'plam X da ochiq, S to'plam esa X da yopiq to'plamdir. Ya'ni, $U = (-\infty, b)$, $b \in R$, $C = [a, \infty)$, $a \in R$, $F = U \cap S = C \cap S$ tengliklar o'rinli.

Yuqoridagilar o'rinli bo'lganligi sababli ixtiyoriy $x \in S$ uchun $x < b$ va $x \geq a$ lar ham o'rinli bo'ladi.

Agar shunday $x \geq b$ topilsa, u holda $C \cap S \neq U \cap S$. Shunga o'xshab,

¹ Жураев Т.Ф. Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиклар. -Т.: 2012. -187 б.

shunday $x \in A$ topilsa, u holda $U \cap S \neq C \cap S$. Shunday qilib, $S \subset [a, b)$ va $F=S$. Bu S to'plamning bog'lamli ekanligini anglatadi. Demak, bu topologiyada ixtiyoriy $S \subset X$ bog'lamli ekan. Endi shu haqiqiy sonlar to'plami R da τ topologiyani quyidagicha aniqlaymiz.

Agar ixtiyoriy $s \in S$ uchun shunday $t > s$ topilsa va $[s, t) \subset S$ bo'lsagina, $S \in \tau$ dir. Bu topologiya bilan aniqlangan fazoda yagona bog'lamli bo'sh bo'lmagan to'plam faqat nuqtadan iboratdir. Bu jumlaning isbotlash uchun X da ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan bog'lamli T to'plamostini olaylik va τ nuqta T ga tegishli bo'lsin. Ma'lumki, $[x, x + \varepsilon)$ to'plam ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun X fazoda ham ochiq, ham yopiq to'plamdir. U holda $[x, x + \varepsilon) \cap T$ — kesishma ham ochiq, ham yopiq to'plam bo'ladi. T ning bog'lamli ekanligidan va $[x, x + \varepsilon) \cap T \neq \emptyset$ shartidan ko'rinadiki, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $[x, x + \varepsilon) \cap T = \emptyset$ o'rinli bo'ladi. Bu esa T to'plamning faqat $T = \{x\}$ shartidagina bo'lishini ko'rsatadi. Demak, bu fazoda faqat bir nuqtadan iborat bo'lgan to'plamlargina bog'lamli to'plam bo'lar ekan.

3.1.1. Teorema. X topologik fazo bog'lamli bo'lishi uchun uni ikki ayri bo'sh bo'lmagan to'plamlar birlashmasi sifatida ifodalash mumkin bo'lmazligi zarur va yetarlidir.

Zarurligi. X bog'lamli bo'lsin va $X = A \cup B$ bo'lib, A va B lar bo'sh bo'lmagan ayri to'plamlar bo'lsin. U holda, bir tomondan aniqki, $\overline{CB} \subset CB = A$; ikkinchi tomondan, $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Ma'lumki, $A \subset \overline{CB}$, shu sababli $A = \overline{CB}$. Shunga o'xshab, amin bo'lamizki, $B = \overline{CA}$. Bundan ko'rinadiki, yopiq to'plamlarning to'ldiruvchi to'plamlari bo'lganligi sababli A ham, B ham ochiq to'plamlardir. Bu X ning bog'lamli ekanligiga ziddir.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, X bog'lamsiz bo'lsin. U holda $X = F_1 \cup F_2$, F_1 yopiq, F_2 yopiq, $F_1 \neq \emptyset, F_2 \neq \emptyset$ ba $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, bundan ko'rinadiki, F_1 va F_2 to'plamlar ayri to'plamlardir, chunki bu to'plamlar uchun $\overline{F_1} \cap F_2 = F_1 \cap F_2$, $F_1 \cap \overline{F_2} = F_1 \cap F_2$, $\overline{F_1} \cap F_2 = \emptyset$ va $F_1 \cap \overline{F_2} = \emptyset$ tengliklar o'rinlidir.

3.1.2. Misol. $[a, b]$ kesma bog'lamlidir.

Eslatma. Keltirilgan misollardan ma'lum bo'lmoqdaki, fazoning yoki fazoostining bog'lamli bo'lishi yoki bo'lmasligi unda qaralayotgan topologiyaga bog'liq ekan.

3.1.2. Teorema. Uzlüksiz akslantirishlarda bog'lamlilik saqlanadi. Ya'ni, uzlüksiz akslantirishda bog'lamli fazo aksi (obrazi) bog'lamli bo'ladi.

Isbot. $f: X \rightarrow Y$ uzlüksiz akslantirish berilgan bo'lsin. X bog'lamli fazo bo'lsin. Biz bu yerda f akslantirishni syurektiv deb olishimiz mumkin, ya'ni ixtiyoriy $y \in Y$ nuqta uchun $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Agar U to'plam Y ning ochiq va yopiq to'plami bo'lsa, u holda $f^{-1}(U)$ to'plam X ning ochiq va yopiq to'plami bo'ladi. Bu holda $f^{-1}(U) = \emptyset$ yoki $f^{-1}(U) = X$, qolaversa, $U = \emptyset$ yoki $U = Y$ bo'lishi mumkin. Bu Y fazoning bog'lamli ekanligini ko'rsatadi.

Endi $f(t) = (\cos 2\pi t; \sin 2\pi t) \in S^1 \subset R^2$ formula orqali aniqlangan $f: [0,1] \rightarrow S^1$ akslantirishni olaylik, bu yerda S^1 — aylana. Bu akslantirish syurektiv va uzlüksizdir. Bundan ko'rinadiki, aylana S^1 bog'lamlidir.

Natiya. Agar X va U gomeomorf topologik fazolar bo'lsa, X fazo bog'lamli bo'lishi uchun U ning bog'lamli bo'lishi zarur va yetarlidir.

3.1.3. Teorema. X fazoning bog'lamli to'plamlari oilasi $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ berilgan bo'lib, bu oilaning ixtiyoriy ikki elementi o'zaro ayri bo'lmasa, $C = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$ to'plam X fazoda bog'lamlidir.

Isbot. Buning aksini faraz qilamiz, ya'ni $C = C_1 \cup C_2$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, C_1, C_2 to'plamlar bo'sh emas va S da yopiq to'plamlardir.

A_α to'plamlarning bog'lamli ekanligidan har bir A_α to'plam S_1 yoki S_2 ning qismi bo'ladi. S_1 yoki S_2 larning bo'sh to'plam emasligidan shunday $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2} \in \{A_\alpha : \alpha \in J\}$ topiladiki, $A_{\alpha_1} \subset C_1$, $A_{\alpha_2} \subset C_2$. C_1 va C_2 larning yopiq C da yopiq ekanligidan, A_{α_1} va A_{α_2} to'plamlarning C dagi yopig'i mos ravishda C_1 va C_2 da yotadi.

Bu quyidagilarga ekvivalentdir:

$\bar{A}_{\alpha_1} \cap C \subset C_1$, $\bar{A}_{\alpha_2} \cap C \subset C_2$. Bu yerda $\bar{A}_{\alpha_1}$ va $\bar{A}_{\alpha_2}$ lar A_{α_1} va A_{α_2} larning X dagi yopig'idir. Shu sababli quyidagi ikki tenglikka ega bo'lamiz.

$$(\bar{A}_{\alpha_1} \cap C) \cap A_{\alpha_1} = \theta, A_{\alpha_1} \cap (A_{\alpha_2} \cap C) = \theta. \text{ Lekin,}$$

$$(\bar{A}_{\alpha_1} \cap C) \cap A_{\alpha_1} = \bar{A}_{\alpha_1} \cap (C \cap A_{\alpha_2}) = A_{\alpha_1} \cap \bar{A}_{\alpha_2}$$

$$A_{\alpha_1} \cap (\bar{A}_{\alpha_2} \cap C) = (A_{\alpha_1} \cap C) \cap \bar{A}_{\alpha_2} = \bar{A}_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}.$$

Bundan $\bar{A}_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} = \theta$, $A_{\alpha_1} \cap \bar{A}_{\alpha_2} = \theta$ o'rinlidir. Bu A_{α_1} va A_{α_2} to'plamlarning ayri ekanligini bildiradi. Bu ziddiyat teorema o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

Bog'lamli fazolarning maxsus chiziqli bog'lamli sinfi ham mavjud. Yuqoridagi teorema shu chiziqli bog'lamli fazolar sinfi shartlarini qanoatlantiradi.

3.1.2. Ta'rif. $S: [0,1] \rightarrow X$, $S(0) = a$, $S(1) = b$ shartlarni qanoatlantiruvchi uzluksiz S akslantirish X topologik fazoning a va b nuqtalarini tutashtiruvchi yo'l deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, $[0,1]$ kesmaning S akslantirishdagi obrazi a va b nuqtalarni tutashtiruvchi bog'lamli to'plam ekan.

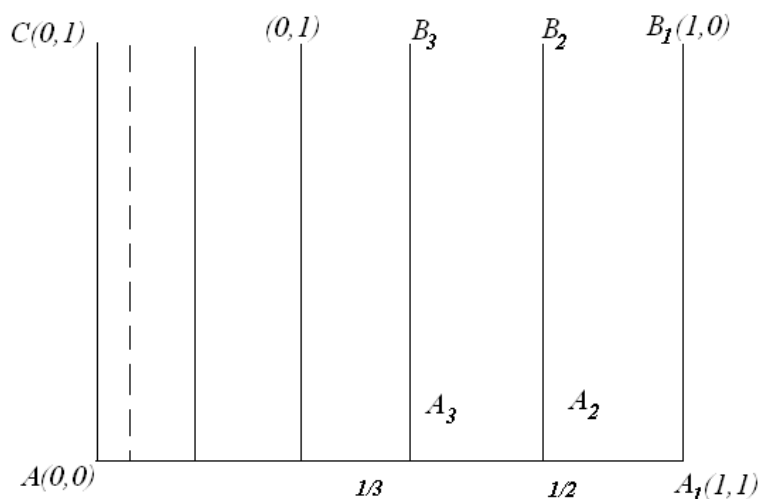
3.1.3. Ta'rif. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ikki nuqtasini yo'l orqali tutashtirish mumkin bo'lsa, X fazo chiziqli bog'lamli fazo deyiladi.

Ta'rifdan ma'lum bo'ladiki, ixtiyoriy chiziqli bog'lamli fazo bog'lamlidir. Lekin buning aksi doimo ham o'rinli bo'lavermaydi. Bunga quyidagi ikki misolni keltiramiz.

3.1.3. Misol. Tekislikda, ya'ni R^2 fazoda quyidagi to'plamostini ko'raylik:

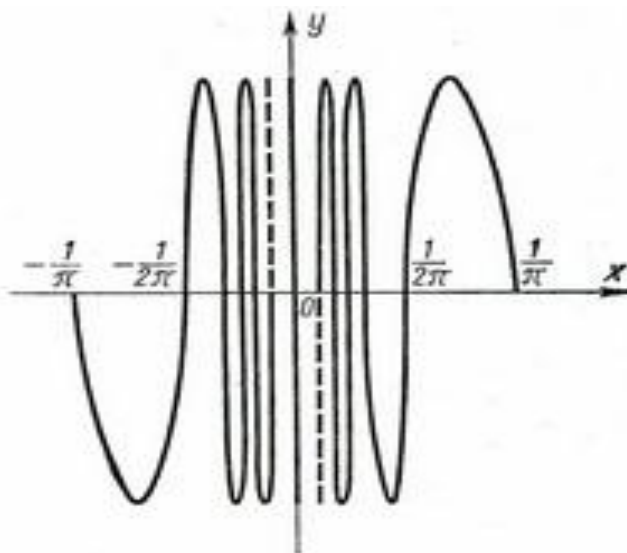
$$X = \left[\begin{matrix} A \\ (0,0); (1,0) \end{matrix} \right] \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} A_n & B_n \\ (\frac{1}{n}, 0), (\frac{1}{n}, 1) \end{matrix} \right] \cup (0,1); \text{ bu yerda } A(0,0), A_1(1,0), A_n(\frac{1}{n}, 0), B_n(\frac{1}{n}, 1)$$

tekislik nuqtalardir, $[A, A_1]$, $[A_n, B_n]$ kesmalar, $(0,1)$ interval.



Bu X to'plam bog'lamli bo'ladi. Lekin chiziqli bog'lamli emas, chunki $S(0,1)$ nuqtani X ning boshqa nuqtalari bilan yo'l orqali tutashtirish mumkin emas¹.

3.1.4. Misol. R^2 tekislikda M to'plam sifatida ordinatalar o'qida uchlari $A(0,-1)$ va $B(0,1)$ nuqtada bo'lgan $[A,B]$ kesma va $y = \sin \frac{1}{x}$ ($0 < x \leq 2\pi$) funktsiya grafigi $Gr f$ dan tashkil topgan to'plamni olaylik.



Bu M to'plam bog'lamli to'plamni tashkil qiladi, lekin chiziqli bog'lamli bo'lmaydi. Chunki $[A,B]$ kesma nuqtalari bilan M ning boshqa nuqtalarini

¹ Жўраев Т.Ф.Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиклар. -Т.: 2012. -187 б.

tutashtiruvchi yo'l mavjud emas. Haqiqatan ham, M to'plam $[A, B]$ kesma va Tf grafikdan iborat, ya'ni $M = [A, B] \cup F_f$. F_f grafikni olsak, bu bog'lamli to'plamdir. $[A, B]$ kesmaning har bir nuqtasi M to'plam uchun tegish nuqta bo'lmoqda, ya'ni ixtiyoriy $0(x_0 \in \varepsilon)$ atrofi bilan M va F_f ning kesishmasi bo'sh emas. Demak, $\overline{F_f} = F_f \cup [A, B] = M$. Bu xulosaga ko'ra, M to'plam bog'lamli to'plamdir.

Bog'lamli to'plamlarning (fazolarning) to'g'ri ko'paytmasi va Tixonov ko'paytmalarining bog'lamli bo'lishi haqidagi jummalarni keltiramiz.

3.1.4. Teorema. Bog'lamli fazolarning ko'paytmasi $X \times Y$ bog'lamli fazodir.

3.1.5. Teorema. Ixtiyoriy sondagi bog'lamli fazolarning Tixonov ko'paytmasi $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ bog'lamli fazo bo'ladi.

3.1.6. Teorema. X topologik fazo kompakt kengaytmaga ega bo'lishi uchun uning Tixonov kengaytmasi bo'lishi zarur va yetarlidir.

3.1.7. Teorema. Agar $f(x)$ funksiya X kompakt to'plamda uzluksiz bo'lsa, funksiya X da tekis uzluksiz bo'ladi.

3.1.8. Teorema. Kompakt fazoning uzluksiz aks ettirishdagi tasviri kompakt fazodir.

Isbot. X kompakt fazo, f esa X ni biror Y fazoga uzluksiz aks ettirish bo'lsin. $f(x)$ fazoning ixtiyoriy $\{U_s\}_{s \in S}$ ochiq qoplamasini olamiz, ya'ni $f(X) \subset \bigcup_{s \in S} U_s$.

So'ngi munosabatdan $X = \bigcup_{s \in S} f^{-1}(U_s)$ tenglik kelib chiqadi.

Bundan va f ning uzluksizligidan $\{f^{-1}(U_s)\}_{s \in S}$ sistema X ning ochiq qoplamasi ekanligi kelib chiqadi. Demak, undan chekli qism qoplama ajratib olishi mumkin, ya'ni ushbu $\bigcup_{k=1}^m f^{-1}(U_{s_k}) = X$ tenglikni yozishimiz mumkin.

Bundan $f(X) = \bigcup_{k=1}^m U_{s_k}$ tenglik kelib chiqadi, ya'ni $U_{s_1}, U_{s_2}, \dots, U_{s_m}$ sistema $f(X)$ ni qoplaydi, demak $f(X)$ kompaktdir.

3.1.9. Teorema. Agar A fazo X Tixonov fazosining kompakt fazoostisi bo'lsa, u holsa har bir $B \subset X \setminus A$ yopiq to'plam uchun shunday uzluksiz $f : X \rightarrow I$ funksiyalar topiladiki, barcha $x \in X$ uchun $f(x) = 0$ va barcha $x \in B$ uchun $f(x) = 1$ bo'ladi.

Isbot. Har bir $x \in A$ uchun shunday $f_x : X \rightarrow I$ funksiya mavjud bo'lib, bunda $f_x(x) = 0$ va $f_x(B) \subset \{1\}$.

$A \subset \bigcup_{x \in X} f_x^{-1}\left([0, \frac{1}{2}]\right)$ ekanligidan, shunday chekli $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset A$ to'plam topiladiki $A \subset \bigcup_{i=1}^k f_{x_i}^{-1}\left([0, \frac{1}{2}]\right)$ bo'ladi.

$g : X \rightarrow I$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$$g(x) = \min(f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_k}(x))$$

bu funksiya quyidagicha shartni qanoatlantirsin:

$$A \subset g^{-1}([0, 1 \setminus 2]) \text{ va } g(B) \subset \{1\}$$

$$\text{U holda } f(x) = 2 \max\left(g(x) - \frac{1}{2}, 0\right) \text{ formula bilan aniqlanuvchi } f : X \rightarrow I$$

funksiya Teorema shartini qanoatlantiradi.

2. Topologik fazolarning absolyuti va Shanin sonlari

Agar X va Y regulyar fazolar o'zaro absolyut bo'lsa, ular umumiy xossalarga ega bo'ladilar. Masalan:

$$C(X) = C(Y), d(X) = d(Y), \pi\omega(X) = \pi\omega(Y).$$

Agar bu topologik fazolarning bittasi kompakt, final kompakt, parakompakt, lakal kompakt, Chex tipidagi kompakt fazo bolsa, u holda ikkinchisi ham shunday bo'ladi.

Maqsad, X va Y regulyar fazolar o'zaro absolyut bo'lsa, shanin sonlari o'zaro $sh(X) = sh(Y)$ ekanligini ko'rsatish.

Ba'zi aniqliklarni eslatib o'tamiz.

3.2.1. Ta'rif. $f : X \rightarrow Y$ akslantirish to'la deyiladi

- 1) X - Xausdorff fazosi;
- 2) f - yopiq akslantirish;
- 3) Ixtiyoriy $y \in Y$ uchun $f^{-1}(y)$ to'plam kompakt fazo bo'lsa.

Agar $f(x_1) = f(x_2)$ shartni qanoatlantiruvchi $x_1 \neq x_2 \in X$ nuqtalar uchun o'zaro kesishmaydigan atroflar mavjud bo'lsa, u holda $f : X \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish seporabel deyiladi

Agar ixtiyoriy $A \subset X$ yopiq to'plamosti uchun

$$f(A) \neq Y$$

shart bajarilsa, u holda $f : X \rightarrow Y$ akslantirish ochiq deyiladi.

Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ochiq $U \subset X$ to'plamostisi uchun $[U]$ to'plam X da ochiq bo'lsa, X topologik fazo ekstrimal bog'lamsiz deyiladi.

Agar ixtiyoriy quvvati $|A| = \tau$ ga teng bo'lgan

$$\mu = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$$

ochiq to'plamlar oilasi uchun X da shunday quvvati τ ga teng bo'lgan $B \subset X$ to'plamosti topilib

$$\cap \{U_\alpha : \alpha \in B\} \neq \emptyset$$

shart bajarilsa $\tau > \chi_0$ kardinal son X fazoning kalibri deyiladi.

X topologik fazoning kalibrlari to'plami $k(X)$ ko'rinishida belgilanadi.

$$sh(X) = \min \{ \tau : \tau - X \text{ fazoning kalibri} \}$$

ga X topologik fazoning shanin soni deyiladi.

3.2.1.Teorema. Agar $f : X \rightarrow Y$ uzluksiz va ustiga akslantirish bo'lsa, u holda

$$k(Y) \leq k(X), \quad sh(Y) \leq sh(X)$$

shart bajariladi¹.

3.2.2.Teorema. Agar $f : X \rightarrow Y$ uzluksiz va ustiga akslantirish berilgan bo'lsin.

$f : X \rightarrow Y$ akslantirish yopiq akslantirish bo'lishi uchun ixtiyoriy $U \subset X$ ochiq to'plam uchun

$$f(U) = \{ y \in Y : f^{-1}(y) \subset U \}$$

to'plam Y da ochiq bo'lishi zarur va yetarli².

3.2.3.Teorema. X va Y regulyar fazolar o'zaro absolyut bo'lsin. U holda $k(X) = k(Y)$ bo'ladi.

Isbot. $\tau > N_0$ bo'lsin. 3.2.2. teoremadan $k(Y) \leq k(X)$ ligini ko'rish mumkin. $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ oila X ning ixtiyoriy ochiq to'plamostilaridan tashkil topgan oila bo'lsin.

$$f(U_\alpha) = \{ y \in Y : f^{-1}(y) \subset U_\alpha \}$$

bo'lgan

$$f(\mu) = \{ f(U_\alpha) : \alpha \in A \}$$

sistemani tekshiramiz.

(2) teoremadan $f(\mu)$ sistema Y ning ochiq to'plamostisi bo'ladi.

$A \subset A$ qism oilalagidan $|A| = \tau$ va ixtiyoriy kesishma $\cap \{ f(U_\alpha) : \alpha \in A \subset A \} \neq \emptyset$ bo'ladi.

¹ Arhangel'skii A.V. , Ponomarvov V.I. bases of general topology In problems and exercises. Moskow. 1974. p. 475.

² Beshimov R.B. Caliber, precaliber and the Shanin number of hyperspaces// 2012 TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, V.3, n.1, p.12-17.

f - uzluksizligidan har bir $f(U_\alpha) \in f(\mu)$ uchun $f^{-1}(f(U_\alpha)) \subset U_\alpha$ to'plam X ning ochiq to'plamostisi bo'ladi.

$\cap \{f(U_\alpha) : \alpha \in A \subset A\} \neq \emptyset$ dan biz ixtiyoriy kesishma

$$\cap \{U_\alpha : \alpha \in A\} \neq \emptyset$$

ligiga erishamiz. 3.2.3.- teorema isbotlandi.

Xulosa. X va Y regulyar fazolar o'zaro absolyut bo'lsin. U holda $sh(X) = sh(Y)$ bo'ladi.

3. Topologik fazolarning kardinal xossalarini OTM da o'rganish

Topologiya fani matematikaning deyarli yosh, lekin muhim qismidir. Topologiya fanini paydo bo'lishida XIX asr matematiklari Labachevskiy, Riman, Kantor, Gilbert, Freshlar katta hissa qo'shganlar. Lekin, uning ba'zi elementlarini antik davr olimlari Platon, Aristotel, Evklid, Ptolomeylarni ishlarida uchratish mumkin.

Topologiyaga quyidagicha ta'rif berish mumkin: **topologiya** — matematikaning geometrik bo'limi bo'lib, uzluksizlikni tadqiq qiluvchi, ya'ni uzluksiz akslantirishlarni o'rganuvchi sohasi hisoblanadi. Qisqacha qilib aytganda, funksiyaning uzluksizligi tushunchasga ko'ra, metrik fazo va topologik fazolar hamda ularning uzluksiz akslantirishlarni anglatadi. Geometrik nuqtai nazardan ikki sonning ayirmasi moduli uni sonlar o'qi R da nuqtalar orasidagi masofadan iborat ekanligini bildiradi.

1906-yilda fransuz matematigi M. Freshe fanga metrik fazo tushunchasini kiritganidan so'ng ixtiyoriy tabiatli to'plamda ikki nuqta orasidagi masofani ma'lum shartlar asosida aniqlash imkoni tug'ildi¹.

Akslantirish $f: X \rightarrow Y$ ning biror nuqtadagi uzluksizlik shartini olaylik, bunda nuqtaning yetarli “yaqin” nuqtalari obrazning yetarli “yaqin” nuqtalariga o'tadi. Bu fikrni geometrik tasavvur nuqtai nazardan ifodalaymiz: X metrik fazo x_0 nuqtasining (xususiyl holda R — to'g'ri chiziq) ε atrofi $O_\varepsilon(x_0)$ deb fazoning x_0 nuqtadan $\varepsilon > 0$ dan katta bo'lmagan uzoqlikda yotgan nuqtalari to'plamini bildiradi, ya'ni $O_\varepsilon(x_0) = \{x: \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ (to'g'ri chiziqda x_0 nuqtaning ε atrofi $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ intervaldan iborat). Akslantirishning x_0 nuqtasidagi uzluksizligi quyidagi ko'rinishni oladi: ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ topilib, $x \in O_\varepsilon(x_0)$ nuqtalar uchun $f(x) \in O_\delta f(x_0)$ o'rinli bo'laveradi. Bu esa, $f: X \rightarrow Y$ akslantirish x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi, x_0 nuqtaning yetarli “zich” atrofidagi nuqtalari obrazi $f(x_0)$ nuqtaning yetarli “zich” atrofidagi nuqtalariga

¹ Жураев Т.Ф. Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиклар. -Т.: 2012. -187 б.

akslanadi demakdir.

Bundan ko‘rinadiki, akslantirishning nuqtadagi uzluksizligini aniqlash uchun nuqtalar orasidagi masofa nuqtaning atrofi tushunchasidan foydalanish yetarli emas, balki ma’qul bo‘ladi.

1914-yilda nemis matematigi F. Xausdorf o‘zining “To‘plamlar nazariyasi” kitobida birinchi bo‘lib nuqtaning atrofi tushunchasini aksiomashtirib, topologik (atroflar orqali aniqlangan) fazoning ta’rifini ifodalab berdi. Keyinchalik topologik fazolarning nisbatan soddaroq ta’riflari keltirildi¹.

Shuni jiddiy ta’kidlashimiz kerakki, metrik fazolar tabiiy ravishda topologik fazoni tashkil qiladi. Topologik fazolarga uzluksiz akslantirishlarning mavjud bo‘lishi uchun tabiiy muhit sifatida qaralib, uning asosida topologiyaning umumiy topologiya deb ataluvchi bir tarmog‘i vujudga keldi va barqaror rivojlanib bormoqda. Topologiyaning boshqa tarmoqlaridan farqli o‘laroq umumiy geometrik topologiya uning umumiy va sof topologik xossalarini o‘rganadi.

Xususiyl holda differensial va bo‘lakli-chiziqli (kusochno-lineynaya) topologiya differensiallanuvchi ko‘pxilliklar va poliedrlar (umumlashgan ko‘pyoqliklar)ning, algebraik va gomotopik topologiya esa, algebraning topologiyada qo‘llanishiga asoslanadi. Shuni ta’kidlash kerakki, oxirgi paytlarda gomologiya va gomotopik topologiyalarda topologiyaning juda muhim umumiy topologik fazolar sinflari o‘rganilmoqdaki, algebraik topologiya bilan umumiy topologiya orasidagi chegarani aniqlash ma’lum murakkablik tug‘dirmoqda. Uzluksiz akslantirishlar xususiyatini o‘rganish, o‘z navbatida, bu akslantirishlarni aniqlash va qiymatlari sohalari bo‘lmish topologik fazolarni o‘rganishga olib keladi.

Topologik fazolarni uzluksiz akslantirishlar orasida topologik akslantirishlar (gomeomorf) deb ataluvchi gomeomorfizmlar maxsus o‘rin tutadi. Bu

¹ Жўраев Т.Ф.Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиклар. -Т.: 2012. -187 б.

akslantirishlar topologiyada shunday muhim o'rinni egallaydiki, chunonchi, o'zaro bir qiymatli affin akslantirishlar affin geometriyada qanday ahamiyat kasb etsa, ular ham topologiyada shunday ahamiyat kasb etadi. Masalan, X va Y lar metrik fazolar bo'lsa, $f: X \rightarrow Y$ akslantirishning gomeomorfizm ekanligi X fazoning shakl va o'lchovlari Y fazoga ham bir xilda o'tadi, X fazoda hech qanday "uzilish" va hech qanday nuqtalarni "yelimlash" ro'y bermasa, Y fazoda ham xuddi shunday bo'ladi¹.

Topologik akslantirishlar bizga jo'n topologik invariantlarni ta'riflash va aniqlashda qo'l keladi. Bu invariantlar topologik akslantirishda o'z xususiyatini o'zgartirmaydi. Topologik invariantlarga misol tariqasida topologik fazoning quvvati tushunchasini, topologik fazolarning salmog'ini, fazoning bir yoki bir necha bo'lakdan iborat bo'lishini, ya'ni bog'lamlı yoki bog'lamsiz ekanligini, topologik chegaralanganlik xossasini (kompaktligini), fazolarning "o'lchovlari soni"ni (fazoning o'lchami) keltirish mumkin. Metrik, affin va proektiv geometriyalarga o'xshab, topologiya ham ko'p hollarda matematikaning topologik invariantlarini o'rganuvchi bo'limi deb yuritiladi. Umumiy topologiyada ko'p o'rganilayotgan, yetarlicha geometrik va asosiy topologik invariantlardan biri fazolarning "o'lchovlari soni"dir. Bu juda muhim invariantlardan biridir. Biz geometriyada to'g'ri chiziq, tekislik, R^3 fazo va uning qism fazolari o'lchamlarini vektor fazoning chiziqli erkin vektorlari soni orqali aniqlagan edik. Topologiyada esa, o'lchamlarning uchta: $\dim$, ind va Ind invariantlari bilan tanishamiz.

O'lchamlar nazariyasining eng mashhur nazariyotchi va asoschilari sifatida dunyoning uch mashhur matematigi: A. Puankare, A. Lebeg va L. Brauerlar alohida e'tirof etiladi. 1913-yilgacha hech qanday o'lchamlar nazariyasi, hattoki ularning ta'riflanishi ham mavjud emas edi. Shu jumladan, o'lchamlar nazariyasi topologiyaning o'rganish sohasi ekanligi ham ma'lum emasdi. Lekin o'lchamlar nazariyasi to'plamlar nazariyasining o'rganish obyekti emasligi aniq edi. Bu fakti to'plamlar nazariyasi asoschisi G. Kantor 1890-yilda to'g'ri chiziq

nuqtalari to'plami bilan tekislikning nuqtalari to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslikni o'rnatib, asoslagan edi[4].

Bu yo'nalishda 1911-yilda Brauer ajoyib natijaga, ya'ni R^n va R^m ($m \neq n$) Evklid fazolarining gomeomorf emasligini aniqlashga erishdi. Bu fakti isbotlashda Brauer o'lchamlar nazariyasiga asoslanmadi, chunki bu paytda hatto o'lchamning ta'rifi ham yo'q edi. 1912-yilda filosofik jurnalda A. Puankarening bir maqolasi e'lon qilindi va u o'z maqolasida o'lchamning ta'rifini keltirmasa ham, o'lchamning ta'rifiga induktiv yondashish kerakligini yetarlicha yoritib berdi. Ushbu maqolada u topologik fazoni yetarlicha "kichik" o'lchamli qism fazoostilarga bo'lishga asoslanadi. 1913-yilda Brauer bu maqolaga asoslanib, yetarlicha keng topologik fazolar sinfi uchun katta induktiv o'lcham $\square \text{Ind} X$ deb ataluvchi o'lchamning aniq ta'rifini berdi va $\text{Ind} R^n = n$ ni isbotladi. Keyinchalik Lebeg va Brauerlar o'lchamning qoplama tilidagi ta'rifini berdi, ya'ni $\dim X$ to'plam o'lcham invarianti ta'riflandi. 1922–1923-yillarda Brauerning $\text{Ind} X$ o'lchamidan farqli ravishda va bir-biridan bexabar holda rus matematigi P.S. Urison hamda avstriyalik Ye. Mengerlar kichik $\text{ind} X$ o'lchamining ta'rifini berishdi.

Ko'pgina matematik tushunchalar, ba'zida butun bir matematik nazariyalar vujudga kelishi bilan matematikadan tashqarida bir qancha vaqt davomida o'z tatbig'ini topmaydi. Jumboqli kompleks sonlar tarixi bunga yaqqol misol bo'ladi: ushbu sonlar bir necha yuz yillar mobaynida boshqa sohalarda qo'llanilmay, keyinchalik fizika va mexanikaga kirib keldi. Shunga o'xshab, matematikaning asosiy bo'g'ini bo'lmish geometriya fanini oladigan bo'lsak, bu sohada noevklid (Lobachevskiy) geometriyaning asosiy obyektlari - Lobachevskiy tekisligi va fazosi (Lobachevskiy tekisligi modeli) ham bir necha o'n yillar davomida o'z tatbig'ini topmagan.

Shunga o'xshash sohalardan yana biri Evklid geometriyasi, Lobachevskiy geometriyasi, zamonamiz geometriyasi, qolaversa, zamonaviy matematikaning

bir bo‘limi, hosilasi bo‘lgan topologiya fanidir. Topologiya so‘zining lug‘aviy ma’nosi grekcha $\tau\omicron\pi\omicron\varsigma$ — *joy (o‘rin)*, $\tau\omicron\gamma\omicron\varsigma$ — *qonun* so‘zlaridan iborat.

Topologiya atamasini birinchi bo‘lib Listing qo‘llagan. Topologiya – matematikaning nisbatan “yosh” va muhim bo‘limlaridan biridir. Topologiya fani geometriya va matematik analiz fanlarining qator fundamental faktlarini (tushunchalarini) umumiy nuqtai nazardan qayta ko‘rib chiqish natijasida paydo bo‘ldi.

Topologiya fan sifatida ilk marta XIX asrning oxirlarida buyuk fransuz matematigi Anri Puankare ishlarida shakllana boshlagan. U topologiyani “analysis situs” (lotinchadan tarjimasi — *joy (o‘rin) geometriyasi*) tahlili deb nomlaydi. Bu atamani esa, matematikaga birinchi bo‘lib Riman olib kirgan. Keyinchalik bu atamalar bir so‘z bilan *topologiya* deb atala boshlandi.

Bu o‘rinda mashhur fransuz matematigi Andre Veylning topologiya xususida aytgan quyidagi so‘zlari ham e’tiborga loyiqdir: “Har bir matematikning qalbini zabt etish ustida topologiya farishtasi bilan mavhum algebra shaytoni kurash olib boradi. Bu orqali, birinchidan, topologiyaning ajoyib jozibasi va go‘zalligi namoyon bo‘lsa, ikkinchidan, barcha zamonaviy matematikaning g‘aroyib birikishi topologiya va algebraga eltishi ifoda etiladi”.

Hozirgi zamon fanlarining rivojlanishida topologiyaning fizika, biologiya, ximiya va binobarin, geografiya fanlaridagi tatbig‘i qo‘llanilmoqda. Topologiyaning sehrli olamiga kirish mashaqqatlidir. Shu sababli topologiya fanining tushuncha, ta’rif va ma’lumotlarini puxta o‘zlashtirish muhim. Oddiy topologik tushunchalar bizni o‘rab turgan olamga nazar tashlaganda paydo bo‘la boshlaydi. O‘z-o‘zidan tushunarliki, figuralarning geometrik xossalari figura o‘lchamlari, ularning joylashishi, burchaklarining ko‘rinishi va hokazolar kiradi¹.

Bu geometrik xususiyatlardan tashqari, yana nimadir nazarimizdan chetda qolayotgandek tuyuladi. Masalan, geometrik chiziqlarning yopiq yoki yopiq

¹ Жўраев Т.Ф.Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиклар. -Т.: 2012. -187 б

emasligi, figuralarning “teshikli” yoki “teshiksiz”, cho‘ziluvchan yoki cho‘ziluvchan emasligi, geometrik figuralarning zanjirsimonligi yoki yo‘qligi, bog‘lamli chiziqlarning bog‘ichli bo‘lishi yoki bo‘lmasligi, figuralarni yirtmasdan cho‘zish yoki cho‘zish mumkin emasligi kabi xossalarini inobatga oladigan bo‘lsak, Evklid geometriyasidan sal tashqariga chiqishga to‘g‘ri keladi. Aynan shu o‘rganish natijasida va shu kabi geometrik figuralarning xossalarini o‘rganuvchi topologiya fani elementlari kirib kela boshladi¹.

A. Puankare nuqtai nazariga ko‘ra, topologiya shunday fanki, u geometrik figuralarning sifatii xossalarini faqat uch o‘lchamli fazoda emas, balki undan yuqori o‘lchamli fazolarda ham o‘rganishga yordam beradi. Geometrik figuralarning sifatii xossalari deganda, masalan, sferani rezina qobiq bilan qoplangan deb faraz qilib, uni yetarlicha siqishni yoki yetarlicha uzmasdan cho‘zishni tushunish mumkin. Sferani bunday almashtirishlar topologik gomeomorfizm deb yuritiladi. Figuralarning sifatii xossalari bu figuraga o‘zaro gomeomorf bo‘lgan barcha geometrik figuralarga tegishli bo‘ladi. Bunday xossalar bir so‘z bilan topologik xossalar deb ataladi.

Topologiya fani geometriya va matematik analiz fanlarining elementlaridan keng foydalansada uni o‘rganish ancha qiyin.

Shuning uchun topologiya fa‘nining tushuncha, ta‘rif va ma‘lumotlarini puxta o‘rganish muhim.

Shu sababli ham hozirgi kunda matematika o‘qitish metodikasi yo‘nalishida ish olib borayotgan olimlar va mutahassislarni topologiya elementlarini o‘qitish muammolari o‘ziga jalb etmoqda.

Topologiya fan sifatida o‘rganuvchilarga qiyinchilik tug‘dirishi mumkin. Lekin, fan nuqtai nazaridan topologiya elementlarini o‘rganish o‘quvchilarda matematikaga bo‘lgan qiziqishni oshiradi, bilim doirasini kengaytiradi, mantiqiy o‘ylash qobiliyatini oshiradi, amaliy masalalarni ishlashda nazariy bilimlardan foydalana olishni o‘rgatadi.

Topologiyani muhim elementlaridan biri topologik invariantlardir. Ko‘p hollarda olimlar topologiyani huddi metrik, affin va proektiv geometriyaga

o'xshab matematikaning topologik invariantlarini o'rganuvchi bo'limi deb yuritadilar. Invariantlar topologik akslantirishlarda o'z hususiyatini o'zgartirmaydi.

Oliy ta'lim muassasalarida topologiya fani "Matematika va informatika" yo'nalishlarida III va IV bosqichlarda, "Matematika" yo'nalishlari bo'yicha III bosqichda, "Matematika o'qitish metodikasi" bo'yicha III kursga mo'ljallangan.

Magistrlik yo'nalishi bo'yicha "Matematika o'qitish metodikasi" bo'yicha I kurs, Universitetlarning "Matematika" yo'nalishi bo'yicha I kursda kengroq o'tiladi.

III bob bo'yicha xulosa

Uchinchi bob topologik fazolarning kardinal xossalariga bag'ishlangan bo'lib, bunda topologik fazolarning kardinal xossalarini uzluksiz akslantirishdagi va ko'paytmadagi holati ko'rib chiqilgan. Oliy o'quv yurtlarida topologik fazolarning kardinal xossalarini o'rganishga ham to'xtalib o'tilgan. Shu bilan birga bu bobda ilmiy ishning yangiligi, ya'ni mavzuga doir teorema keltirilib isbotlangan. Topologik fazolarning absolyuti va Shanin sonlarining ta'riflari berilgan. Agar ikkita regulyar fazolar o'zaro absolyut bo'lsa, u holda ularning kalibrlari teng bo'lishi isbotlangan.

Xulosa

Dissertatsiyaning birinchi bobida topologiyaning asosiy obyektlari va topologik fazo ta'rifi berildi, topologik fazoning asosiy tushunchalarining mohiyati yoritildi. Bunda to'plam, uning elementlari, ikkita to'plamning birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, qism to'plam, to'plam to'ldiruvchisi tushunchalariga ta'riflar berilib misollar ko'rsatilgan, teoremlar keltirilgan. Shu bilan birga to'plamlarning quvvati, ixtiyori to'plamlar sistemasi uchun Dekart ko'paytma va funksiya tushunchalari keltirib o'tilgan. Ikkinchi paragrafda topologik fazoning tarifi keltirilda va misollar ko'rsatildi. Topologik fazoning asosiy tushunchalari: ochiq to'plam, yopiq to'plam, topologik fazo bazasi, salmog'i, harakteriga ta'rif berilib misollar orqali tushuntirilgan, ularga oid teoremlar ko'rsatilib isbotlangan. Topologiya kiritishning ochiq to'plamlarini bevosita ko'rsatish orqali, baza orqali, atroflar sistemasi bilan, yopiq to'plamlar sistemasi bilan, yoki yopilma operatori, ikki qismini olish shartlari orqali kiritish usullari ko'rsatildi.

Qisqasi, bu bobda topologiya va topologik fazolarning asosiy tushunchalari o'rganildi.

Ikkinchi bobda topologiyaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lgan uzluksiz funksiyalar ko'rib chiqilgan. Unga ta'rif berilib, xossalari o'rganilgan, teoremlar keltirilib isbotlangan, misollar ko'rsatilgan. Ikkinchi paragraf ajrimlilik aksiomalariga bag'ishlangan. Har bir fazo ta'riflanib, misollar keltirilgan, bir – biridan farqi ko'rsatilgan. Uchinchi bobi kompakt fazolar va ular ustida amallarga bag'ishlangan. Bunda kompaktlik ta'rifi berilgan. Kompakt fazolarning uzluksiz akslantirishdagi va Dekart ko'paytmadagi holati ko'rib chiqilgan. Kompaktlik topologik invariantligi ko'rsatilgan.

Uchinchi bob topologik fazolarning kardinal xossalari bag'ishlangan bo'lib, bunda topologik fazolarning kardinal xossalarini uzluksiz akslantirishdagi va ko'paytmadagi holati ko'rib chiqilgan. Oliy o'quv yurtlarida topologik fazolarning kardinal xossalarini o'rganishga ham to'xtalib o'tilgan. Shu bilan birga bu bobda ilmiy ishning yangiligi, ya'ni mavzuga doir teorema

keltirilib isbotlangan. Topologik fazolarning absolyuti va Shanin sonlarining ta'riflari berilgan. Agar ikkita regulyar fazolar o'zaro absolyut bo'lsa, u holda ularning kalibrlari teng bo'lishi isbotlangan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

I. O'zbekiston Respublikasi qonunlari

1. O'zbekiston Respublikasi "Ta'lim to'g'risidagi" qonuni. 464-I-son, 1997 yil 29 avgust.
2. O'zbekiston Respublikasi "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" to'g'risidagi qonuni. 463-I-son, 1997 yil 29 avgust.

II. O'zbekiston Respublikasi Prezident farmonlari va qarorlari, Vazirlar maxkamasining qarorlari

3. I.A. Karimov. "Barkamol avlod mamlakatimiz rivojlanishida hal qiluvchi kuch". 16 – 17 fevral kunlari Toshkentda o'tkazilgan "Yuksak bilimli va intellektual rivojlangan avlodni tarbiyalash mamlakatni barqaror taraqqiy ettirish va modernizatsiya qilishning muhim sharti" mavzusidagi xalqaro konfirensiyada so'zlagan nutqi. "Toshkent oqshomi" gazetasi. 20 – fevral.

III. O'zbekiston Respublikasi Prezident asarlari

4. I.A. Karimov. "O'zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida". Toshkent. "O'qituvchi". 2011 yil, 440 bet.
5. I.A. Karimov. "Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch". Toshkent. "Ma'naviyat". 2008 yil, 175 bet.

IV. Asosiy adabiyotlar

6. Р.Н. Назаров, Б.Т.Тошпўлатов, А.Д. Дўсумбетов. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Ўқитувчи. 1995. – 271 б.
7. Жўраев Т.Ф.Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиқлар. -Т.: 2012. -187 б.
8. Энгелькинг Р. Общая топология. М. Наука. : 1986. -752 с.
9. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. -М.: Физматлит, 2006. -252 с.
- 10.Келли. Дж. Л. Общая топология. М. Наука : 1981. -431 с.
11. Архангельский А.В. О мощностях бикомпактов с первой аксиомой счетности // ДАН СССР. – 1969. – № 5 (187). – С. 967-970.

12. Аюпов Ш.А., Заитов А.А. Слабо аддитивные функционалы на линейных пространствах // ДАН РУз. 2006. № 4-5. Стр. 7-12.
13. Аюпов Ш.А., Заитов А.А. Принцип равномерной ограниченности для слабо аддитивных операторов // УзМЖ. 2006. № 4. стр. 3-10.
14. Банах Т.О. Топология пространств вероятностных мер. I: Функторы P_τ и $\mathcal{P}$ // Математичні студії. – 1995. – Вып.5. – С. 65-85.
15. Заитов А.А. Некоторые свойства пространств знакопеременных мер и функтора слабо аддитивных нормированных и сохраняющих порядок функционалов: Дисс. канд. физ. – мат. наук. – Ташкент: НУ, 2004. – 62 с.
16. Заитов А.А. Клеточность и (слабая) плотность пространства слабо аддитивных функционалов // УзМЖ. 2003. № 2. С. 16-21.
17. Заитов А.А. О продолжении слабо аддитивных функционалов // ДАН РУз. 2005, № 5. Стр. 3-7.
18. Мусаев Д.К. Равномерно суперкомпактные, вполне компактные и сильно паракомпактные равномерные пространства // ДАН РУз. – 2004. – № 4. – С. 3-9.
19. Федорчук В.В. Вполне замкнутое отображения // Математический сборник. – 1976. – № 1 (99). – С. 3-33.
20. Федорчук В.В. Бесконечномерные бикомпакты // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1978. – (42). – С. 1162-1178.
21. Федорчук В.В. Вполне замкнутые отображения и их приложения // Фундаментальная и прикладная математика. – 2003. – 4 (9). – С. 105-235.
22. Fedorchuk V.V., Todorovic S. Cellularity of covariant functors // Topol. and its applications. – 1997. – № 1 (76). – P. 125-150.
23. Fedorchuk V.V. The Suslin number of the functor of probability measures // Topol. and its Appl. – 1996. – № 1 (84). – P. 55-60.

24. Musaev D.K. Dyadic mappings and dyadic superparacompact topological groups // Siberian Mathematical Journal. – 2005. – № 4 (46). – P. 35-48.
25. Musaev D.K. Characterization of complete mappings by means of morphisms into zero-dimensional mappings // Siberian Advances in Mathematics. – 2005. – № 2 (15). – P. 44-68
26. Zaitov A.A. The density and cellularity of the spaces of signed measures and probability measures. //Methods of functional analysis and topology. 2002. Vol. 8. No. 3. P. 85-89.

V. Qo'shimcha adabiyotlar

27. Куротовский К. Топология. Масква. Мир. 1966. Том 1. 594 с.
28. Arhangel'skii A.V. , Ponomarvov V.I. bases of general topology In problems and exercises. Moskow. 1974. p. 475.
29. Собиров М.А. Математик фанлардан русча – ўзбекча луғат. Тошкент. Ўқитувчи. 1983 й. 256 б.
30. Souslin M. Problem 3 // Fundamenta Mathematica. – 1920. – (1). – P. 223.
31. Todorcevic S., and Velickovic B., Martin's axiom and partitions // Compositio Math. – 1987. – (63). – P. 391 – 408.
32. Todorcevic S. Partition Problems in Topology // Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI. –1989. – (84).
33. Todorcevic S., Remarks on cellularity in products // Compositio Math. – 1986. – (57). P. 357 – 372.
- Tychonof A.N. Uber die topologishe Erweiterung von Raumen // Math. Ann. – 1930. – (102). – P. 544-561
34. van Douwen E.K. Density of compactifications // Set-theoretic topology. N.Y.Acad. Press. – 1977. – P. 97-110.
35. Verbek A., Superextensions of Topological Spaces // CWI Tracts. – 1972. – (41).

36. Zaitov A.A. On categorical properties of order-preserving functionals // Methods of Functionals Analysis and Topology. – 2003. – № 4 (9). – P. 357-364.

37. Yajnal A., Juhasz J. Discrete subspaces of topological spaces // Indag. Math. – 1967. – (29). – P. 343-346.

38. Грызлов А.А. Кардинальные инварианты и бикомпактные расширения топологических пространств: Дисс. доктора физ. - мат. наук. – Москва: МГУ, 1996. – 209 с.

39. Заричный М.М. О свойствах нормальных функторов // V-Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям: Тезисы докладов. – Кишинев, Штинца. 1985. С. 96-97.

40. Иванов А.В. О весе нигде не плотных подмножеств в компактах // Сибирский математический журнал. – 2003. – 6 (44). – С. 1266-1272.

41. Зайтов А.А. Число Суслина единичного шара знакопеременных мер // УзМЖ. 2001. № 3-4. С. 14-18.

VI. Davriy nashrlar statistik to'plamlar va hisobotlar

42. Петров Н.Н. О канторовых кубах. Вестник Санкт-Петербургский государственный университет. Сер. 1. 2012. Вып 3. Стр. 53-58.

43. А.В.Иванов. Кардинальнозначные инварианты и функторы в категории бикомпактов: Дисс. док. физ.-матем. наук. Петрозаводск, 1985.

44. Beshimov R.B. Caliber, precaliber and the Shanin number of hyperspaces // 2012 TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, V.3, n.1, p.12-17.

45. Бешимов Р.Б. Калибр пространства вероятностных мер // V-международной Ферганской конференции «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения»: Тезисы докладов. – Фергана, 10-12 мая 2005. С. 91-93.

46. Махмуд Т. Кардинальнозначные инварианты пространств

- сцепленных систем: Дисс. канд. физ.- матем. наук. М.: МГУ, 1993.
47. Qo'chqorova H.A. "The Shanin numbers and Absolute of regular spaces". Abstracts of the international conference "Problems of modern topology and applications". Tashkent. 20 – 24 may 2013. 53 – 54 p.
48. Qo'chqorova H.A. "Kardinal invariantlar mavzusini o'qitish haqida". "Zamonaviy fizika va astronomiya yutuqlari: muammolari va yechimlari" Respublika ilmiy amaliy kanferensiya materiallari. Tashkent. 4 noyabr 2013 yil. 214 – 217 b.
49. Эшпулатов Н.О. О методике изучения элементов топологии на факультативных занятиях в средних специальных учебных заведениях. Проблемы современной топологии и ее приложения. Тошкент. 20 – 24 май. 213. 263 – 265 с.

VII. Internet saytlari

50. <http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/>.
51. <http://www.allmath.ru/>.
52. <http://www.akademic.ru/>.