O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI XALQ TA`LIMI VAZIRLIGI

NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

«Informatika va axborot texnologiyalari» кafedrasi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Mavzu: ***Interval kompleks sonlar ustida algebraik amallar***

Bajardi: *Xayrullayeva Sh.Sh.*

Ilmiy rahbar: *f.-m.f.n.Ibragimov A.A.*

Navoiy – 2015

MUNDARIJA

KIRISH 3
I-BOB. KOMPLEKS SONLAR, ULAR USTIDA AMALLAR VA TADBIQLARI 5
1.1. Kompleks sonlar haqida tarixiy ma'lumotlar va ularning tadbiqlari 5
1.2. Kompleks sonlar haqida asosiy tushunchalar. 7
1.2.1. Mavhum son tushunchasi. 7
1.2.2. Kompleks son. 8
1.2.3. Algebraik shakldagi kompleks sonlar ustida amallar. 9
1.2.4. Kompleks sonlarning xossalari. 12
1.3. Kompleks sonlarning tasvirlanish usullari. 13
1.3.1. Kompleks sonning geometrik ma'nosi. 13
1.3.2. Kompleks sonning trigonometrik shakli. 14
1.3.3. Kompleks sonning ko'rsatkichli shakli 17
1.4. Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlar ustida amallar. 19
1.4.1. Ko'paytirish. 19
1.4.2. Darajaga ko'tarish. Muavr formulasi 20
1.4.3. Bo'lish. 22
1.4.4. Kvadrat ildiz chiqarish 24
1.5. Kompleks sonning logarifmlari. 29
1.6. Umumiy daraja. 31
II BOB. INTERVAL MATEMATIKA ASOSLARI 33
2.1. Interval analiz rivojlanishining qisqacha tarixi 33
2.2. Interval sonlar va ularning xarakteristik xossalari 38
2.3. Interval hisoblashlarning zaruriyligi 40
2.4. Interval sonlar ustida arifmetik amallar. Klassik interval arifmetika va uning algebraik xossalari 44
III-BOB. INTERVAL KOMPLEKS SONLAR VA ULAR USTIDA ALGEBRAIK AMALLAR 48
3.1. Kompleks interval sonlarining berilish usullari 48
3.2. Kompleks intervallar ustida arifmetik amallar. 49
3.3. Kompleks intervallar arifmetikasining algebraik xossalari. 50
3.4. Kompleks intervallar arifmetikasining monotonlik xossasi. 51
3.5. Kompleks intervallar arifmetikasida interval arifmetikaning asosiy teoremasi. 51
3.6. To`g`ri to`rtburchakli kompleks interval sonlarning geometrik interpretatsiyasi. 52
3.7. INTLAB paketida komplex intervallar ustida amallar 54
XULOSA 65
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR 66

KIRISH

Kompleks sonlar nazariyasi matematika fanida va uning turli tadbiqlarida muhim rol o‘ynaydi. Jumladan, elektroenergetik tizimlarni matematik modellashtirishda, mezomexanika, dielektrik o`tkazuvchanlik yoki issiqlik o`tkazuvchanlik masalalarida va boshqa muhim amaliy masalalarni yechishda kompleks sonlar nazariyasi katta ahamiyatga ega. XVIII asr davomida kompleks sonlar yordamida ko`plab muammolar, jumladan, kartografiya, gidrodinamika va elektromagnetizm bilan bog`liq amaliy masalalar ham hal etilgan bo`lsa-da, bu sonlar nazariyasi hali qat’iy mantiqiy asoslanmagan edi. Shuning uchun ham fransuz matematigi P.Laplas mavhum sonlar yordamida olinadigan natijalar – faqat yo`llanma, ular bevosita qat’iy isbotlar bilan tasdiqlangandan keyingina chin haqiqat xarakterini oladi, deb hisoblagan [1,2].

Kompleks sonlarning geometrik talqini kompleks o`zgaruvchining funksiyalari bilan bog`liq ko`pgina tushunchalarni aniqlash imkonini beradi, ularning qo`llanish sohasini kengaytiradi. Kompleks sonlar tekislikda vektorlar yordamida tasvirlangan kattaliklar bilan ish ko`riladigan ko`pgina muammolarda: suyuqlik oqimini o`rganishda, elastiklik nazariyasi masalalarida foydalanish mumkinligi ravshan bo`ldi.

Hozirgi kunda kompleks sonlar juda ko`plab amaliy masalalarni yechishga tadbiq qilinadi. Shulardan biri - bu kompleks interval analiz [4, 18, 19] usullaridir. Interval analiz elementlari dastlab EHMda yaxlitlash xatoliklarini avtomatik ravishda hisobga olish vositasi sifatida paydo bo`lgan bo`lsa, keyingi tadqiqotlar shuni ko`rsatdiki, interval analiz nafaqat xatoliklarni hisobga oladigan apparat, balki amaliy matematikaning dolzarb masalalarini muvaffaqiyatli yecha oladigan yangi yo`nalish sifatida namoyon bo`ldi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi - kompleks sonlarning interval kengaytmasi bo`lgan interval kompleks sonlar to`plami va u ustida kiritiladigan algebraik amallar, munosabat amallari va xarakteristik funksiyalarga bag`ishlangan. Ishning

I bobida kompleks sonlar, kompleks sonlarning paydo bo`lish tarixi va rivojlanish davrlari, ular ustida turli algebraik amallar bajarish, bir shakldan boshqasiga o`tkazishning matematik asoslari yoritilgan. Har bir kiritilgan tushuncha aniq misollar asosida tushuntirilgan. II bobda esa Interval matematikaning paydo bo`lish tarixi, interval hisoblashlarning zarurligi va interval matematikaning boshlang`ich tayanch tushunchalari keltirilgan. Nihoyat, III bobda interval kompleks sonlar o`rganilgan. Bunda, interval kompleks sonlarning eng ko`p uchraydigan turlari, t`og`ri to`rtburchakli va doiraviy interval kompleks sonlar qaraladi. Interval kompleks sonlarning amaliy masalalarni yechishdagi o`rni, aynan qanday masalalarni yechishda yuzaga kelishi, shuningdek, kompleks interval arifmetika amallari, interval kompleks sonlarning geometrik ma’nosi hamda kompyuter amaliy dasturlar paketida bunday sonlar to`plami ustida ishlash asoslari bayon qilingan.

I-BOB. KOMPLEKS SONLAR, ULAR USTIDA AMALLAR VA TADBIQLARI

1.1. Kompleks sonlar haqida tarixiy ma’lumotlar va ularning tadbiqlari

Qadimgi Yunon matematiklari faqat natural sonlarni “*haqiqiy*” deb hisoblashgan, ammo Qadimgi Misr va Qadimgi Bobilda yangi eradan ikki ming yillar muqaddam amaliy hisob-kitoblarda kasrlarni qo`llay boshlashgan. Son haqidagi tushuncha taraqqiyotidagi navbatdagi muhim bosqich – manfiy sonlar bo`ldi. Ularni xitoy matematiklari yangi eradan ikki asr oldinroq kiritishgan edi. Yangi eraning III asrida qadimgi yunon matematigi Diofant manfiy sonlarni ishlatgan. U bu sonlar ustidagi amallar qoidalarini ham bilgan. Hind olimlari VIII asrda manfiy sonlarni mufassal o`rganishdi, ular bu sonlarni “*qarz*” deb talqin qilishgan. Manfiy sonlar yordamida miqdorlarning o`zgarishini yagona usulda bayon qilish mumkin edi. Eramizning VIII asridayoq musbat sonning kvadrat ildizi ikkita – musbat va manfiy qiymatga ega ekanligi, manfiy sonlardan esa kvadrat ildiz chiqarish mumkin emasligi, masalan. $x^2=-9$ bo`lgan $x$ sonini topib bo`lmasligini aniqlagan edi.

XVI asrda kubik tenglamalarni o`rganish munosabati bilan manfiy sonlardan ham kvadrat ildiz chiqarish zarurati tug`ildi. Kubik tenglamani yechish formulasida kub va kvadrat ildizlar qatnashadi. Bu formula tenglama bitta haqiqiy ildizga ega bo`lsa, (masalan, $x^3+3x–4=0$ tenglama uchun) bekamu-ko`st yaraydi, tenglama uchta haqiqiy ildizga ega bo`lgan holda esa (masalan, $x^3-7x+4=0$ ) kvadrat ildiz ostida manfiy son hosil bo`laveradi. Natijada tenglamaning bu uchta ildizini topish yo`li taqiqlangan amal – manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarish amali orqali o`tardi. Hosil bo`lgan paradoksni tushuntirish uchun italyan algebrachisi J. Kardano 1545 yilda yangi tabiatli sonlarni kiritishni taklif qildi. U haqiqiy sonlar to`plamida yechimga ega bo`lmagan $x+y=10$, $xy=40$ tenglamalar sistemasi $x=5\pm\sqrt{-15}$, $y=5\pm\sqrt{-15}$ ko`rinishidagi yechimlarga egaligini ko`rsatdi, faqat bunday ifodalar bilan odatdagi algebraning qoidalari bo`yicha $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a}=-a$

deb hisoblab ishlashni kelishib olish (shartlashib olish) kerak degan taklifni kiritdi. Kardano bunday miqdorlarni "*sof manfiy*" va hattoki "*g`ayri-mantiqiy manfiy*" deb atadi, ularni foydasiz deb hisobladi va tatbiq qilmaslikka intildi. Biroq 1572 yildayoq italyan algebrachisi R. Bombellining bunday sonlar ustida arifmetik amallarning dastlabki qoidalari berilgan kitobi chiqdi. Kitobda bunday sonlardan kub ildiz chiqarish qoidasi ham keltirilgan edi. "*Mavhum sonlar*" nomini 1637 yilda fransuz matematigi va filosofi R. Dekart kiritdi, 1777 yilda esa XVIII asrning yirik matematiklaridan biri L. Eyler *-1* sonni ("*mavhum*" birlikni) belgilash uchun fransuzcha "*imagineire"* ("*mavhum*") [1,2] so`zining birinchi harfidan foydalanishni taklif etdi; bu simvol K. Gauss tufayli keng tarqaldi (1831). XVII asr davomida mavhumlikning arifmetik tabiati, ularga geometrik talqin berish imkoniyatining muhokamasi davom ettirildi.

Kompleks sonlar ustida amallar bajarish texnilasi asta-sekin rivojlana bordi. XVII va XVIII asr chegarasida, avval, manfiy sonlardan *n*-chi darajali ildizlarning umumiy nazariyasi, keyinchalik esa ingliz matematigi A.Muavrning $(Cos\phi + iSin\phi)^n = Cosn\phi + iSinn\phi$ formulasiga asoslanib ixtiyoriy kompleks sonlardan *n*-chi darajali ildiz nazariyasi yaratildi (1707). Bu formuladan foydalanib karrali yoylarning kosinus va sinuslari uchun ham tengliklar keltirib chiqarish mumkin.

XVIII asr oxirida fransuz matematigi J. Lagranj mavhum miqdorlar endi matematik analizni qiynamay qo`ydi, deb ayta olgan. Matematiklar o`zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar yechimlarini kompleks sonlar yordamida ifodalashni o`rganib olishdi. Bunday tenglamalar, masalan, moddiy nuqtaning qarshilik ko`rsatuvchi muhitdagi tebranish nazariyasida uchraydi. Undan avvalroq shvetsariyalik matematik Ya. Bernulli kompleks sonlarni integrallarni hisoblashga tatbiq qildi.

XVIII asr davomida kompleks sonlar yordamida ko`plab muammolar, jumladan, kartografiya, gidrodinamika va elektromagnetizm bilan bog`liq amaliy masalalar ham hal etilgan bo`lsa-da, bu sonlar nazariyasi hali qat'iy mantiqiy asoslanmagan edi. Shuning uchun ham fransuz matematigi P.Laplas mavhum sonlar yordamida olinadigan natijalar – faqat yo`llanma, ular bevosita qat’iy isbotlar bilan tasdiqlangandan keyingina chin haqiqat xarakterini oladi, deb hisoblagan.

Kompleks sonlarning geometrik talqini kompleks o`zgaruvchining funksiyalari bilan bog`liq ko`pgina tushunchalarni aniqlash imkonini beradi, ularning qo`llanish sohasini kengaytiradi. Kompleks sonlar tekislikda vektorlar yordamida tasvirlangan kattaliklar bilan ish ko`riladigan ko`pgina muammolarda: suyuqlik oqimini o`rganishda, elastiklik nazariyasi masalalarida foydalanish mumkinligi ravshan bo`ldi.

Kompleks o`zgaruvchining funksiyalari nazariyasi taraqqiyotiga sovet olimlari katta hissa qo`shdilar. N.I.Musxelishvili ularni elastiklik nazariyasiga, M.V.Keldish, M.A.Lavrentyev aero- va gidrodinamikaga, N.N.Bogolyubov va V.S.Vladimirov maydonning kvant nazariyasi muammolariga tatbiqlari bilan shug`ullandilar. O`zbekistonlik matematik I.S.Arjanix kompleks sonlarni maydonlar nazariyasiga qo`lladi.

1.2. Kompleks sonlar haqida asosiy tushunchalar.

1.2.1. Mavhum son tushunchasi.

Ma’lumki, R haqiqiy sonlar to‘plamida manfiy sonning juft darajali ildizi mavjud emas. Manfiy sondan juft darajali ildiz chiqarish son haqidagi tushunchani kengaytiradi, xususan ushbu $x^2+1=0$ (1) кo‘rinishdagi algebraik tenglamani haqiqiy sonlar to‘plamida yechish mumkin emasligi $\sqrt{-1}$ ni i harfi bilan yoki $i^2=-1$ tenglik bilan aniqlanadigan mavhum son – mavhum birlik i ni kiritishga olib keladi, i - fransuzcha *imaginaire,* ya’ni mavhum (xayoliy, haqiqatda mavjud bo‘lmagan) atamasi fransuz matematigi Dekart tomonidan 1637 yilda kiritilgan. i son kiritilgach (1) tenglama $x_1=-i$ *va* $x_2=+i$ ga teng ildizlarga ega bo‘ladi.

Har qanday mavhum sonni i ning biror haqiqiy songa ko‘paytmasi shaklida ifodalash mumkin. Masalan,

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i, \text{ umuman,}$$
$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2(-1)} = b\sqrt{-1} = bi, \quad (b > 0).$$

Endi $ax^2 + c = 0,\ (ac > 0)$ ko‘rinishdagi har qanday chala kvadrat tenglama ikkita yechimga ega bo‘ladi: $x^2 = -\frac{c}{a}, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} = \pm i\sqrt{\frac{c}{a}}$;

ib va $-ib$ mavhum sonlar o‘zaro qarama-qarshi mavhum sonlar deyiladi, chunki $ib + (-ib) = 0$ tenglik o‘rinlidir.

1.2.2. Kompleks son.

1-ta’rif. Kompleks son deb $\alpha = a + bi, (1)$ ko‘rinishdagi songa aytiladi, bu yerda $a, b \in R$ - ixtiyoriy haqiqiy sonlardir, i esa mavhum birlik. Odatda (1) ga kompleks sonning algebraik shakli (formasi, ko‘rinishi) deyiladi. a va b sonlarga α kompleks sonning mos ravishda haqiqiy va mavhum qismining koeffisiyenti deyiladi va ular uchun $a = \mathrm{Re}\,\alpha,\ b = Im\,\alpha$ belgilashlar qabul qilingan bo‘lib, Re (fransuzcha $reele$ – haqiqiy), Im (fransuzcha $imaginaire$ – mavhum) so‘zlarining qisqartirib olingani.

Masalan: $\mathrm{Re}(-3-i) = -3;\ Jm(-3-i) = -1.$

$\alpha = a + bi$ *da* i – o‘zgaruvchi emas, balki son, “+” ishora esa qo‘shish amalini emas, balki, α kompleks son tarkibida a haqiqiy va bi mavhum son qatnashayotganligini bildiradi. “Kompleks” so‘zi lotincha $complexus$ – ”murakkab”, “tuzma” degan ma’noni anglatadi, $a + bi$ shakldagi sonlarga bu atama dastlab nemis matematigi Gauss (1777-1855) tomonidan berilgan.

Agar (1) kompleks sonda $b = 0$ bo‘lsa, u holda $\alpha = a + 0i = a$ haqiqiy songa teng bo‘ladi. Demak, R haqiqiy sonlar to‘plami kompleks sonlar to‘plamining qism to‘plamidir. Odatda kompleks sonlar to‘plamini C harfi bilan belgilaydilar va $R \subset C$.

Agar $a = 0$ bo‘lsa, (1) *dan* $\alpha = bi$ mavhum sonni hosil qilamiz, bu holda uni sof mavhum son deyiladi $(b \neq 0)$.

(1) da $a=0,\ b=0$ bo‘lsa, α kompleks son 0 ga teng bo‘ladi.

Kompleks sonlar uchun katta yoki kichik munosabatlari aniqlanmagan, ya’ni ularni o‘zaro taqqoslash mumkin emas, ammo kompleks sonlar tengligi tushunchasi quyidagicha aniqlanadi.

2-ta’rif. Agar ikkita $\alpha=a+bi\ va\ \beta=c+di$ kompleks sonlar berilgan bo‘lib, $a=c\ va\ b=d$ bo‘lsa, bu kompleks sonlar teng bo‘ladi $\alpha=\beta$ va aksincha, $\alpha=\beta$ bo‘lsa, $a=c\ va\ b=d$ bo‘ladi.

Bu ta’rifdan, $\alpha=a+bi$ kompleks son, agar $a=0,\ b=0$ bo‘lsa va faqat shunday bo‘lgandagina $\alpha=0$ nolga teng bo‘lishi kelib chiqadi. Haqiqatan ham 0 haqiqiy sonni kompleks son ko‘rinishida bunday tasvirlash mumkin: $0+0i$. Bundan ta’rifga muvofiq, $a+bi=0+0i$ tenglik faqat $a=0,\ b=0$ bo‘lgandagina o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

3-ta’rif. $\alpha=a+bi\ va\ \overline{\alpha}=a-bi$ ko‘rinishdagi kompleks sonlar o‘zaro qo‘shma kompleks sonlar deyiladi. Masalan, $\alpha=2-3i$ kompleks songa qo‘shma kompleks son $\overline{\alpha}=\overline{2-3i}=2+3i$ bo‘ladi.

$\alpha=a+bi\ \ va\ \ -\alpha=-a-bi$ ko‘rinishdagi kompleks sonlar o‘zaro qarama-qarshi kompleks sonlar deyiladi.

1.2.3. Algebraik shakldagi kompleks sonlar ustida amallar.

a) Kompleks sonlarni qo‘shish. $\alpha=a+bi\ va\ \beta=c+di$ kompleks sonlarning yig‘indisi quyidagicha aniqlanadi: $\alpha+\beta=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$ ya’ni ikkita kompleks sonni qo‘shish uchun ularning haqiqiy va mavhum qismlari koeffitsiyentlari o‘zaro qo‘shiladi.

Xususan, agar $\alpha=a+bi\ va\ \overline{\alpha}=a-bi$ o‘zaro qo‘shma kompleks sonlar berilgan bo‘lsa,ularning yig‘indisi bu sonlar haqiqiy qismini koeffisiyentini ikkilanganiga teng bo‘ladi: $\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a.$

в) Kompleks sonlarni ayirish ham shunga o‘xshash bajariladi $\alpha-\beta=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i,$ boshqacha aytganda, $\alpha=a+bi\ va\ \beta=c+di$ kompleks sonlarning ayirmasi deb shunday $\gamma=x+yi$ songa aytiladiki, u son $\alpha=\beta+\gamma$, ya’ni $a+bi=(c+x)+(d+y)i$ tenglikni qanoatlantiradi. Kompleks sonlarning tengligi shartiga asosan $c+x=a,\ d+y=b,\ ya'ni\ x=a-c,\ y=b-d$ tengliklarga ega bo‘lamiz.

Demak, $\alpha-\beta=\gamma=x+yi\ yoki\ \alpha-\beta=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$ xususan, $\alpha-\overline{\alpha}=(a+bi)-(a-bi)=2bi.$

s) Kompleks sonlarni ko‘paytirnish. Ikkita $\alpha=a+bi\ va\ \beta=c+di$ kompleks sonlarni ko‘paytirish quyidagi qoida bo‘yicha ko‘paytiriladi: $\alpha\cdot\beta=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$, shunga o‘xshash uch va undan ortiq kompleks sonlarning ko‘paytmasini tuzish mumkin. Xususan, $\alpha\cdot\overline{\alpha}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2.$

d) Kompleks sonlarni bo‘lish. Berilgan $\alpha=a+bi\ \ va\ \ \beta=c+di$ kompleks sonlarning $\dfrac{\alpha}{\beta}$ bo‘linmasi deb shunday $\gamma=x+yi$ kompleks songa aytiladiki, bu son $\alpha=\beta\cdot\gamma$, ya’ni
$a+bi=(c+di)(x+yi)=(cx-dy)+(dx+cy)i$ tenglikni qanoatlantiradi.

Kompleks sonlarning tenglik shartiga asosan $\begin{cases}cx-dy=a\\ dx+cy=b\end{cases}$ tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bu sistemani yechimi: $x=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$, $y=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$,

Natijada, $\dfrac{\alpha}{\beta}=\gamma=x+yi$ bo‘lib ushbuni topamiz: $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$ bu natijaga quyidagicha ham erishish mumkin: $\dfrac{\alpha}{\beta}$ nisbatni maxrajning qo‘shmasi $\overline{\beta}$ ga ko‘paytirib tegishli amallarni bajarish kifoya:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\overline{\beta}}{\beta\cdot\overline{\beta}}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$$ bu yerda $\beta\neq 0$, ya’ni $c,d\neq 0,$ aks holda nolga bo‘lish ma’noga ega emas.

e) Kompleks sonlarni darajaga ko‘tarish Dastavval mavhum son mavhum birlik i ni darajaga ko’tarishda hosil bo’ladigan natijalarni qaraymiz, bu yerda $i^2=-1$ ni e’tiborga olish kerak.

$i^1=i;$

$i^2=-1;$

$i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i;$

$i^4=i^3\cdot i=-i^2=1;$

$i^5=i^4\cdot i=i;$

$i^6=i^5\cdot i=i^2=-1;$

$i^7=i^6\cdot i=-i;$

$i^8=i^7\cdot i=-i^2=1$ va hokozo

Shunday qilib navbatlanuvchi to‘rt qiymatni hosil qilamiz: $i,-1,-i,+1$. $i^0=1$ deb hisoblanadi. Bu natijani umumiy holda:

$i^{4\kappa+1}=i,\ i^{4\kappa+2}=-1,\ i^{4\kappa+3}=-i,\ i^{4\kappa+4}=1,\ \kappa=0,1,2,...$ ko‘rinishda yozish mumkin. Masalan, $i^{2006}=i^{4\cdot501+2}=-1$.

Endi $a+bi$ ni butun musbat ko‘rsatkichli darajaga ko‘tarishni qaraymiz:

$$\left(a+bi\right)^2=a^2+2abi+b^2i^2=a^2-b^2+2abi,$$

$$\left(a+bi\right)^3=a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3=a^3-3ab^2+\left(3a^2b-b^3\right)i.$$

i) Kompleks sondan kvadrat ildiz chiqarish. Berilgan $\alpha=a+bi$ kompleks sonning kvadrat ildizi deb kvadrati α ga teng bo‘luvchi $\gamma=x+yi$ kompleks songa aytiladi, ya’ni $a+bi=\left(x+yi\right)^2=x^2-y^2+2xyi$ demak,

$$\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}\qquad(1)$$

α kompleks sondan kvadrat ildiz chiqarish masalasi (1) sistemaning haqiqiy ildizlarini topishga keltiriladi. (1) dagi har ikki tenglamani kvadratga ko‘tarib, so‘ngra ularni qo‘shib ushbuni hosil qilamiz:

$$\left(x^2+y^2\right)^2=a^2+b^2\quad yoki\quad x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2},\qquad(2)$$

(2) ni (1) sistemaning birinchi tenglamasi bilan birgalikda olib yechsak:

$$x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},\quad x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$$

$$y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2},\quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

(1) sistemaning ikkinchi tenglamasidan ko‘rinadiki, agar $b>0$ bo‘lsa, va x va y bir xil ishorali, agar $b<0$ bo‘lsa har xil ishorali bo‘lishi kerak. Shu sababdan agar $b>0$ bo‘lsa,

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right],$$

Agar $b<0$ bo‘lsa,

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right],$$

Misollar.

1) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+3}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{1+3}-1}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\pm\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2};$

2) $\sqrt{i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1}+0}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1}-0}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2};$

3) $\sqrt{-i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1}+0}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1}-0}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2};$

Eslatma. Kompleks sondan yuqoriroq darajali ildiz chiqarish haqida keyingi paragraflarda tanishasiz.

1.2.4. Kompleks sonlarning xossalari.

Kompleks sonlar ham haqiqiy sonlar singari quyidagi xossalarga bo‘ysunishini ko‘rsatish oson:

1. reflektivlik xossasi: $\alpha=\alpha$
2. simmetriklik xossasi: $\alpha=\beta$ bo‘lsa, $\beta=\alpha$ bo‘ladi.
3. tranzitivlik xossasi: $\alpha=\beta$ va $\beta=\gamma$ dan $\alpha=\gamma$ kelib chiqadi.

Kompleks sonlarning qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan xossalari.

Kompleks sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallari ham haqiqiy sonlardagi kabi ushbu qonunlarga egadir:

1. kommutativlik qonuni:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \text{ va } \alpha\bullet\beta=\beta\cdot\alpha.$$

2. assotsiativlik qonuni:

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma \text{ va } \alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$$

3. distributivlik qonuni:

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$$

Shuningdek, ushbu xossalar ham o‘rinliidir.

4. $\alpha+0=\alpha$, bu yerda $0=0+0\cdot i$
5. $\alpha\cdot 1=\alpha$, $1=1+0\cdot i$
6.- $\alpha+(-\alpha)=0$ $-\alpha=-(a+bi)$ son α ga qarama – qarshi sondir.
7. $\alpha.\gamma=1$ ($\gamma=\dfrac{1}{\alpha}$ soni α ga teskari son), ya’ni nolga teng bo‘lmagan, har qanday α kompleks soniga teskari son mavjuddir. Shu sonni topishni qaraylik.

Aytaylik, $\alpha=a+bi$, $\gamma=x+yi$ bo‘lsin, x va y ni aniqlashimiz lozim .$\alpha\gamma=1$ tenglikdan:

$\gamma=x+yi$ $(a+bi)(x+yi)=1$ yoki $(ax-by)+(ay+bx)i=1,$ ikki kompleks sonning tenglik shartidan:

$$\begin{cases} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib $x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$; $y\dfrac{-b}{a^2+b^2}$, $a^2+b^2\neq 0,$ chunki $\alpha\neq 0$. Shunday qilib, α kompleks songa teskari son $\gamma=\dfrac{1}{\alpha}=x+yi=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$ ko‘rinishda bo‘lishini topamiz.

Qo‘shma kompleks sonlarning xossalari.

1-teorema. Har qanday $\alpha = a+bi$ sonining qo‘shmasiga qo‘shma son shu songa tengdir, ya’ni $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$.

Masalan: $\alpha = 2+3i,\ \overline{\alpha} = \overline{2+3i} = 2-3i,\ \overline{\overline{\alpha}} = \overline{2-3i} = 2+3i = \alpha$.

α haqiqiy songa qo‘shma son α ning o‘ziga teng: $\overline{\alpha} = \alpha$, shuningdek $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$.

2-teorema. Ikki kompleks son yig‘indisining qo‘shmasi, ularning qo‘shmalari yig‘indisiga teng, ya’ni:

$$\overline{\alpha_1 + \alpha_2} = \overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2}$$

Haqiqatan, $\alpha_1 = a_1 + b_1 i,\ \alpha_2 = a_2 + b_2 i$ bo‘lsin. U holda $\overline{\alpha_1} = a_1 - b_1 i,\ \overline{\alpha_2} = a_2 - b_2 i$.

Ravshanki, $\alpha_1 + \alpha_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Demak, $\overline{\alpha_1 + \alpha_2} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_{1i}) + (a_2 - b_{2i}) = \overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2}$.

3-teorema. Ikki kompleks son ko‘paytmasining qo‘shmasi ularning qo‘shmalari ko‘paytmasiga teng, ya’ni:

$$\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2}$$

Izoh. 2-, 3–teoremalar chekli sondagi $\alpha_{1,}\alpha_{2,} ..., \alpha_n$ kompleks sonlar uchun ham o‘rinlidir:

$$\overline{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} = \overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} + ... + \overline{\alpha_n}$$

$$\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n} = \overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2} \cdots \overline{\alpha_n}.$$

Misollar.

Amallarni bajaring.

1) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}$; 2) $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{1+i}{1-i}$; 4) $\left(\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}\right)^2$;

5) $(1-i)^3$; 6) $\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 7) $\dfrac{1+itg\varphi}{1-itg\varphi}$; 8) $\sqrt{3-i\sqrt{3}}$;

9) $\sqrt{8-6i}$ 10) i^{905};

Quyidagi tengliklarni isbotlang.

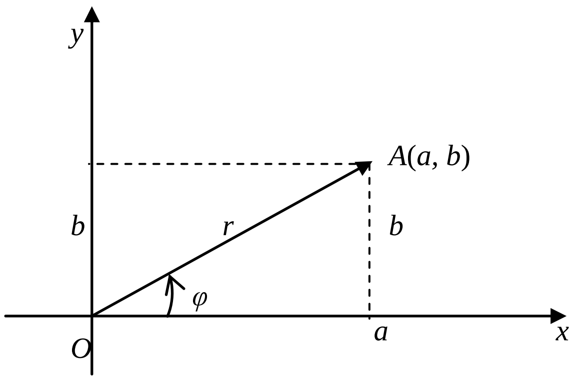
11) $\alpha + \overline{\alpha} = 2\operatorname{Re}\alpha$ 12) $\overline{(\alpha_1 - \alpha_2)} = \overline{\alpha_1} - \overline{\alpha_2}$.

1.3. Kompleks sonlarning tasvirlanish usullari.

1.3.1. Kompleks sonning geometrik ma’nosi.

Dekartning to‘g‘ri burchakli *XOY* sistemasini olib, absissalar o‘qiga berilgan $\alpha = a+bi$ kompleks sonning haqiqiy qismi koeffisiyenti yo’q a ni, ordinatalar o‘qiga esa α ning mavhum qismining koeffisiyenti b ni joylashtirsak, tekislikda yagona $A(a;b)$ nuqta hosil bo‘ladi. Shu nuqtani α kompleks sonning geomerik ma’nosi deb qabul qilinadi. Bu usul bilan istalgan har bir kompleks songa tekislikda birgina nuqta va aksincha, tekislikning ixtiyoriy bir nuqtasi uchun bitta kompleks son mos kelishini kuzatish mumkin. Demak, tekislikning barcha nuqtalari to‘plami bilan barcha kompleks sonlar to‘plami orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin.

Agar $b=0$ bo‘lsa, $\alpha=a$ haqiqiy songa teng bo‘lib, unga mos nuqta *ox* absisissalar o‘qida yotadi, shu sababdan *ox* ni haqiqiy o‘q deb ataladi. Agar $a=0, b\neq 0$ bo‘lsa, $\alpha=bi$ sof mavhum songa tegishli nuqta *oy* ordinatalar o‘qida yotadi, shu sababli *oy* ni mavhum o‘q va *xoy* tekislikni esa <u>kompleks tekislik</u> deyiladi.



1-chizma

Ba’zida, $\alpha=a+bi$ sonning geometrik ma’nosi sifatida boshi koordinatalar boshida oxiri esa tekislikdagi $A(a,b)$ nuqtada bo‘lgan $\overrightarrow{OA}$ vektorni ham qabul qilinadi. Bu vektorning kiritilishi kelgusida kompleks sonlar ustida bajariladigan amallarning geometrik ma’nosini tushuntirishga yordam beradi.

1.3.2. Kompleks sonning trigonometrik shakli.

$\alpha=a+bi, (1)$ algebraik ko‘rinishdagi kompleks sonning trigonometrik shaklini hosil qilish uchun 1-chizmadan ushbularga ega bo‘lamiz.

$$a=rcos\varphi,\ b=r\sin\varphi, \qquad (2)$$

Bu yerdagi r α kompleks sonni tasvirlagan $\overrightarrow{OA}$ vektorning uzunligini ifodalaydi, uni α sonning moduli deyiladi va $|\alpha|$ bilan belgilanadi. r yoki $|\alpha|$, a, b haqiqiy sonlari qo‘yidagi tenglik bilan bog‘lanadi:

$$|\alpha|=|a+ib|=r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Ravshanki, $|\alpha|\geq 0,$ ya’ni $0\leq r<+\infty$;

$\overrightarrow{OA}$ vektorining *ox* o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil qilgan φ burchakni α kompleks sonning argumentli deyiladi va u quyidagicha yoziladi: $\arg\alpha=\varphi$, α kompleks songa mos bo‘lgan $\overrightarrow{OA}$ vektorga birgina r uzunlik va cheksiz ko‘p burchaklar mos kelishi chizmadan ko‘rinib turibdi: $\varphi,\ \varphi \pm 2\pi,\ \ \varphi \pm 4\pi, ... \varphi \pm 2\pi k,\ ...,\ .$ α kompleks sonining barcha argumentlari to‘plamini $\mathrm{Arg}\,\alpha$ bilan belgilaymiz.

$Arg\alpha = \arg\alpha + 2k\pi = \varphi + 2k\pi \ \ k \in Z,\ \ Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$, odatda $\varphi = \arg\alpha$ ni argumentning <u>bosh qiymati</u> deyiladi. Chizmadan: $tg\alpha = \frac{b}{a}$, bundan $\varphi = \arg\alpha = arctg\frac{b}{a}$.

$\varphi = \arg\alpha$ ni hisoblash uchun ushbu tengliklar o‘rinli bo‘lishini ko‘rish qiyin emas:

$$\arg\alpha = \begin{cases} arctg\frac{b}{a},\ \ agar\ a > 0,\ bo'lsa, \\ \pi + arctg\frac{b}{a},\ \ agar\ a < 0,\ \ b \ge 0\ \ bo'lsa, \\ -\pi + arctg\frac{b}{a},\ \ agar\ a < 0,\ b < 0\ bo'lsa, \\ \frac{\pi}{2} \qquad agar\ a = 0,\ b > 0\ bo'lsa, \\ -\frac{\pi}{2}, \qquad agar\ a = 0,\ b < 0\ bo'lsa, \\ 0, \qquad agar\ a > 0,\ b = 0\ bo'lsa, \\ \pi, \qquad agar\ a < 0,\ b = 0\ bo'lsa, \end{cases} \qquad (A)$$

$-\pi < \arg \le \pi,\ \ -\frac{\pi}{2} < arctg\frac{b}{a} \le \frac{\pi}{2}.$ (2) ga asosan, (1) dan $\alpha = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, (3) ning o‘ng tomoniga α kompleks sonning *trigonometrik shakli (formasi)* deyiladi, ba’zan (3) ni quyidagicha ham yozilib $\alpha = |\alpha|\left[cos(\arg\alpha) + i\sin(\arg\alpha)\right],$ ($3'$) α kompleks sonining *bosh trigonometrik shakli* deb ataladi. $\alpha = 0$ kompleks soning moduli 0 ga teng, ammo argumenti aniqlanmagan. O‘zaro qo‘shma bo‘lgan α va $\overline{\alpha}$ kompleks sonlarga mos nuqtalar kompleks tekislikda *ox* absissalar o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘ladi, shu sababdan α va $\overline{\alpha}$ ga mos vektorlarning uzunliklari bir –biriga teng bo‘lib, burchaklari (argumentlari) esa qarama –qarshi ishoraga ega va ularning absolyut qiymatlari teng bo‘ladi: $|\overline{\alpha}| = |\alpha|$ va $\arg\overline{\alpha} = -\arg\alpha$. Ravshanki, $\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi = |\alpha|\left[\cos(\arg\alpha) - i\sin(\arg\alpha)\right]$ tenglik o’rinlidir.

<u>Misollar.</u>

1) a) $\alpha_1 = 1 + i,\ b)\ \alpha_2 = -1 + i,\ s)\alpha_3 = 1 - i,\ d)\alpha_4 = -1 - i$ kompleks sonlarni trigonometrik shaklda yozing.

Yechish: a) $a)|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; (A) formulaga asosan,

$$\arg(1+i)=\operatorname{ar}ctg\frac{1}{1}=\operatorname{ar}ctg1=\frac{\pi}{4};\ 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

b) $|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$; (A) formulaga asosan,

$$a=-1<0,\ b=1>0,\quad \arg(-1,+i)=\pi+\operatorname{ar}ctg\frac{1}{-1}=\pi-\operatorname{ar}ctg1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4},$$

$$\arg(-1,+i)\frac{3\pi}{4},\ -1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

c) $\alpha_3=1-i$ soni $\alpha_1=1-i$ ga qo‘shma, $\alpha_3=\overline{\alpha_1}$ bo‘lganligi sababli;

$$\arg\alpha_3=\arg(1-i)=-\arg\alpha_1=-\arg(1+i)=-\frac{\pi}{4}.$$

Natijada: $1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right);$

d) $\alpha_4=-1-i$ soni $\alpha_2=-1+i$ ga qo‘shma $\alpha_4=\overline{\alpha_2}$ bo‘lgani uchun $|\alpha_4|=|\alpha_2|=\sqrt{2},\ \arg\alpha_4=-\arg\alpha_2,\ \arg(-1-i)=\arg(-1+i)=-\frac{3\pi}{4};$ bo‘ladi va

$$-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

2. a) $a)\,\beta_1=5,\ b)\,\beta_2=3i,\ s)\ \beta_3=2+5i,\ d)\,\beta_4=1+cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$ sonlarni trigonometrik shaklda yozing.

Yechish.

a) $|\beta_1|=5,$ (A) formulaga asosan $\arg\beta_1=0$. Demak, $\beta_1=5=5(\cos0+i\sin0)$.

b) $|\beta_2|=\sqrt{0+3^2}=3;$ (A) formulaga asosan $\arg\beta_2=\arg3i=\frac{\pi}{2}$.

Natijada: $\beta_2=3i=3\left(cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right);$

c) $|2+5i|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$; (A) fomulaga assosan $\arg\beta_3=\arg(2+5i)=arctg\frac{2}{5}\ bo'lib$

$$\beta_3=2+5i=\sqrt{29}\left(\cos arctg\frac{2}{5}+i\sin arctg\frac{2}{5}\right).$$

d) β_4 sonda $a=1+\cos\frac{\pi}{7},\ b=\sin\frac{\pi}{7}$ bo’lib,

$|\beta_4|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(1+\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+\left(1+\sin\frac{\pi}{7}\right)^2}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{7}\right)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{14}}=2\cos\frac{\pi}{14},$ chunki $\cos\frac{\pi}{14}>0$, (A) formulaga asosan $a>0,\ b>0$ bo’lgani uchun

$$\arg\beta_4 = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{1+\cos\frac{\pi}{7}} = arctg\frac{2\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos^2\frac{\pi}{14}} = arctg\left(tg\frac{\pi}{14}\right) = \frac{\pi}{14};$$ bo‘ladi.

Demak, $\beta_4 = 1+\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7} = 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14}\right)$

<u>Mustaqil yechish uchun misollar.</u>

<u>Quyidagi kompleks sonlarni trigonometrik shaklga keltiring.</u>

1) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

2) $1+\cos\alpha + i\sin\alpha, (\alpha\in R)$

3) $-1-i\sqrt{3}$;

4) $-2-5i$

5) $-\sin\alpha + i(1+\cos\alpha), (\alpha\in R)$:

6) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

1.3.3. Kompleks sonning ko‘rsatkichli shakli

Matematikada va uning amaliy tadbiqlarida $\cos\varphi + i\sin\varphi$ (φ-haqiqiy son) ko‘rinishdagi ifoda ko‘plab uchrab turadi. Bu ifoda uchun turli belgilashlar ishlatiladi, masalan, kartografiyada I_φ, elektronikada $\angle\varphi$, matematik ishlarda esa $ex\rho(i\varphi)$ yoki $e^{i\varphi}$.

Shunday qilib $e^{i\varphi} = cos\varphi + i\sin\varphi,$ (1)

Agar φ ni $-\varphi$ bilan almashtirsak, $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi,$ (2)

(1) tenglik bilan aniqlanuvchi $e^{i\varphi}$ ko‘rinishdagi ifoda ko‘rsatkichli funksiya xossalariga o‘xshash hossalarga ega bo‘ladi, masalan istalgan α,β va φ haqiqiy sonlar uchun ushbu formulalar o‘rinlidir**:**

$$e^{i\alpha}.\ e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}, \qquad (3)$$

$$e^{-i\alpha} = \frac{1}{e^{-i\alpha}}, \qquad (4)$$

$$e^{(i\varphi)n} = e^{i(n\varphi)}, \text{(n- ixtiyoriy butun son)} \qquad (5)$$

Odatda (1) tenglikka Eyler formulasi deyiladi. Bu formulaning qat’iy isboti oliy matematika kursida beriladi. Bu formulaning mohiyati shundaki, u *i* mavhum birlik vositasida ko‘rsatkichli funksiya bilan trigonometrik funksiya sinusi va kosinusini bog‘laydi.

Eyler formulasidan foydalanib, $z = x+iy = |z|[\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)]$ har qanday kompelks sonni ushbu ko‘rsatkichli shaklga yozish mumkin:

$$z = |z|e^{i\arg z}, \qquad 6)$$

(1) va (2) dan osongina $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right); \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right),$ (7) formulalarni hosil qilish mumkin. Kompelks sonlarni trigonometrik yoki ko'rsakichli shakliga o'tish ko'pgina hisoblashlarni bajarishni osonlashtiradi.

Misollarga murojaat etaylik.

1-misol $A = \frac{(1+i)^7(\sqrt{3}-i)^5}{(-1+i)^6(1+\sqrt{3}i)^4}$ ifodani qiymatini hisoblang.

Yechilishi: Agar Nyuton binomini qo'llab hisoblashlarni bajarsak murakkab hisoblashlarga duch bo'lamiz, shu sababdan A ifodadagi kompleks sonlarning ko'rsatkichli shakliga o'tamiz:

$|1+i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{2}, \quad \left|\sqrt{3}-i\right| = 2, \quad \arg\left(\sqrt{3}-i\right) = -\frac{\pi}{6}, \ |-1+i| = \sqrt{2},$ ekanligini

$\arg(1+i) = \frac{3\pi}{4}, \quad \left|1+\sqrt{3}i\right| = 2, \ \arg(1+\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}$

e'tiborga olsak, natijada $1+i = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{4}}, \ \sqrt{3}-i = 2e^{-\frac{\pi i}{6}}; \ -1+i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}, \ 1+\sqrt{3}i = 2e^{-\frac{\pi i}{3}}.$

Demak,

$$A = \frac{\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\right)^7\left(2e^{-\frac{\pi i}{6}}\right)^5}{\left(\sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)^6\left(2e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^4} = \frac{2^{\frac{17}{2}}e^{\pi i\left(\frac{7}{4}-\frac{5}{6}\right)}}{2^7 e^{\pi i\left(\frac{18}{4}+\frac{4}{3}\right)}} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{59}{12}\pi i} = 2\sqrt{2}e^{-5\pi i+\frac{\pi i}{12}} =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos 5\pi - i\sin 5\pi\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

2-misol $S = 1 + C_n^1\cos\alpha + C_n^2\cos 2\alpha + \cdots + C_n^n\cos n\alpha$ yig'indisini hisoblang, $\alpha \in R$

Yechish. Qo'shimcha ravishda ushbu $\mathrm{I} = C_n^1\sin\alpha + C_n^2\sin 2\alpha + \cdots + C_n^n\sin n\alpha$ yig'indini olaylik. Ravshanki, berilgan S yig'indi quyidagi yig'indining haqiqiy qismdan iborat bo'ladi.

$S + i\mathrm{I} = 1 + C_n^1(\cos\alpha + i\sin\alpha) + C_n^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \cdots + C_n^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$. Bu yig'indini $(1)-(6)$ formulalarga va Nyuton binomi formulasiga asosan hisoblaymiz.

$$S + i\mathrm{I} = 1 + C_n^1 e^{i\alpha} + C_n^2 e^{2i\alpha} + \cdots + C_n^n e^{ni\alpha} = \left(1+e^{i\alpha}\right)^n = \left[e^{\frac{i\alpha}{2}}\left(e^{\frac{i\alpha}{2}} + e^{-\frac{i\alpha}{2}}\right)\right]^n = \left(e^{i\frac{\alpha}{2}}2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n =$$

$$= 2^n\cdot\cos^n\frac{\alpha}{2}\cdot e^{ni\frac{\alpha}{2}} = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right) = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2} + i2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2};$$

Demak, $S = \mathrm{Re}(S + i\mathrm{I}) = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}$.

Mustaqil yechish uchun misollar.

Ushbu yig'indilarni hisoblang.

1. $\cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \cdots + \cos 99\alpha,$

2. $\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \cdots + \sin 99\alpha$
3. $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 6\alpha - \cdots + \cos 100\alpha,$
4. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin n\alpha$

1.4. Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlar ustida amallar.

1.4.1. Ko‘paytirish.

Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni olaylik:

$$\alpha_1 = |\alpha_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right),\quad \alpha_2 = |\alpha_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right),\cdots,$$
$$\alpha_{n-1} = |\alpha_{n-1}|\left(\cos\varphi_{n-1} + i\sin\varphi_{n-1}\right),\ \alpha_n = |\alpha_n|\left(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n\right)$$

Avvalo ularning ikkitasini ko‘paytmasini topaylik:

Bu yerdan, trigonometrik shaklda berilgan ikkita kompleks sonni ko‘paytirish uchun ularning modullarini o‘zaro ko‘paytirib, argumentlarini esa qo‘shish kerak degan sodda qoidaga ega bo‘lamiz. Bu qoidani ketma –ket tadbiq etib trigonometrik shaklda berilgan n ta kompleks sonning ko‘paytmasini hisoblash uchun ushbu formulani hosil qilish mumkin:

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n = |\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdots|\alpha_n|\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n\right)\right] \quad \textbf{(1)}$$

Matematik induksiya metodini tadbiq qilib bu formulaning to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish mumkin. (1) tenglikdan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$|\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n| = |\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdots|\alpha_n|,\quad \arg\left(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n\right) = \varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n = \arg\alpha_1 + \arg\alpha_2 + \cdots + \arg\alpha_n$$

ya’ni ko‘paytmaning moduli ko‘paytuvchilarning modullari ko‘paytmasiga teng, shuningdek, ko‘paytmaning argumentli ko‘paytuvchilarning argumentlarining yig‘indisiga teng.

Misollar.

1) $\alpha = 2\left(\cos 33^0 + i\sin 33^0\right),\quad \beta = 3\left(\cos 27^0 + i\sin 27^0\right)$ trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni (1) formulaga asosan ko‘paytiramiz:

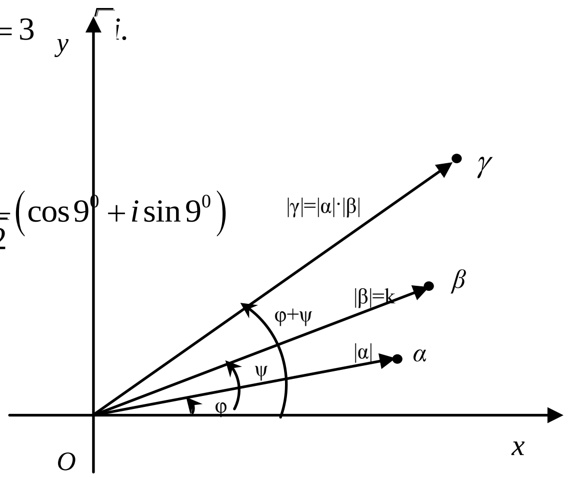
$$\alpha\cdot\beta = 6\left[\cos\left(33^0+27^0\right) + i\sin\left(33^0+27^0\right)\right] = 6\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\ \ i.$$

2)

$$\alpha = \frac{2}{3}\left(\cos 7^0 + i\sin 7^0\right),\ \beta = \frac{9}{8}\left(\cos 29^0 + i\sin 29^0\right),\ \gamma = \frac{16}{3\sqrt{2}}\left(\cos 9^0 + i\sin 9^0\right)$$

U holda

$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{3\sqrt{2}}\left(\cos 45^0 + i\sin 45^0\right) = 2(1+i).$$



2-chizma

Endi trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni ko‘paytirish amalini geometrik ma’nosini qaraylik. Shu maqsadda: $\alpha=|\alpha|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\beta=|\beta|(\cos\psi+i\sin\psi)$ sonlarni o‘zaro ko‘paytirsak, (1) formulaga asosan $\alpha\cdot\beta=|\alpha|\cdot|\beta|[\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)]=\gamma$ hosil bo‘ladi, bu yerda $|\gamma|=|\alpha|\cdot|\beta|$ va $\arg\gamma=\varphi+\psi=\arg\alpha+\arg\beta$.

Demak, α kompleks sonni β kompleks songa ko‘paytirishning geometrik ma’nosi, α ga mos vektorni (kompleks son geometrik jihatdan tekislikdagi vektorlardan iborat ekanligi bizga ma’lum) ψ burchakka (soat strelkasiga teskari) burib, $|\beta|=k$ marta cho‘zishdan iboratdir. Ravshanki, agar $k<1$ bo‘lsa α ga mos vektor cho‘zilmasdan, balki qisqaradi. (2-chizma)

Xususiy holda, agar a) $\beta=-1=\cos\pi+i\sin\pi$ bo‘lsa, $k=1$ bo‘lib, $\alpha\cdot(-1)=|\alpha|[\cos(\varphi+\pi)+i\sin(\varphi+\pi)]$, ya’ni (-1) ga ko‘paytirishning ma’nosi α ga mos vektorni π burchakka burishdan iboratdir.

v) $\beta=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ bo‘lsa, ya’ni $k=1$ bo‘lib $\alpha\cdot i=|\alpha|\left[\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]$, ya’ni i ga ko‘paytirishning ma’nosi α ga tegishli vektorni $\frac{\pi}{2}$ burchakka burish (soat sterelkasiga teskari burish) demakdir.

1.4.2. Darajaga ko‘tarish. Muavr formulasi.

Agar 1^0 dagi (1) formulada $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ kompleks sonlar o‘zaro teng, ya’ni $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\alpha$ bo‘lsa, u holda ularning modullari ham, argumentlari ham o‘zaro teng bo‘ladi:

$$|\alpha_1|=|\alpha_2|=\cdots=|\alpha_n|=|\alpha|,\qquad \arg\alpha_1=\arg\alpha_2=\cdots=\arg\alpha_n=\arg\alpha.\ \left(\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_n=\varphi\right)$$

. (1) formuladan esa ushbuni hosil qilamiz.

$$\alpha^n=\left[|\alpha|(\cos\varphi+i\sin)\right]^n=|\alpha|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\ (2)$$

Demak, trigonometrik shakldagi kompleks sonni n -darajaga ko‘tarmoq uchun uning modulini shu darajaga ko‘tarib, argumentini esa n ga ko‘paytirish kifoya ekan.

Daraja ko‘rsatkichi manfiy bo‘lsa ham (2) formula o‘z kuchini saqlaydi. Haqiqatan ham,

$$\left[|\alpha|(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^{-n}=\frac{1}{\left[|\alpha|(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n}=\frac{1}{|\alpha|^n}\cdot\frac{1}{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}=|\alpha|^{-n}\cdot\frac{\cos n\varphi-i\sin n\varphi}{\cos^2 n\varphi+\sin^2 n\varphi}=$$

$$=|\alpha|^{-n}[\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi)],$$

Demak, $\left[|\alpha|(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^{-n}=|\alpha|^{-n}[\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi)]$

(2) formuladan ushbu natija kelib chiqadi. $|\alpha^n| = |\alpha|^n, \quad \arg\alpha^n = n\arg\alpha$

Xususan, $|\alpha| = 1$ bo‘lsa, (2) dan $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$, (3)

Muavr formulasi hosil bo‘ladi. (3) tenglikning chap qismini Nyuton binomi formulasiga asosan ochib, $i^2 = -1, \quad i^3 = -1, \quad i^4 = 1,$ va umuman ixtiyoriy musbat butun k uchun $i^{4k} = 1, \ i^{4k+1} = i, \ i^{4k+2} = -1, \ i^{4k+3} = -i,$ tengliklarni e’tiborga olib, (3) tenglikning ikkala tomonidagi kompleks sonlarning haqiqiy va mavhum qismlarini tenglashtirib, ushbu karrali burchakning kosinus va sinuslarini oddiy burchak sinus va kosinuslari orqali ifodalovchi formulalarni hosil qilamiz:

$$Cosn\varphi = Cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \cdots, \quad (4)$$

$$Sinn\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \cdots, \quad (5)$$

Xususan, $n = 2$ desak, trigonometriyadan ma’lum bo‘lgan $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, \quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ formulalarni hosil qilamiz.

Misollar:

1) $(1+i)^{25}$ ni hisoblang.

Yechilishi: Dastlab $1+i$ ni trigonometrik shaklga keltirib olamiz:

$|1+i| = \sqrt{2}, \ \arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$ bo‘lgani uchun $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right).$

Endi (2) formulaga asosan

$$(1+i)^{25} = \left(\sqrt{2}\right)^{25}\left(\cos\frac{25\pi}{4} + i\sin\frac{25\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{25}\left[\cos\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{25}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{25}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{12}(1+i).$$

2). $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ ni hisoblang.

Yechilishi: Dastlab kasrning surat va maxrajida turgan kompleks sonlarni trigonometrik shaklga keltirib olamiz:

$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ va $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ bulardan

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Endi (2) formulani qo‘llasak, ushbu natijani hosil qilamiz. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}=\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos 20\cdot\frac{7\pi}{12}+i\sin 20\cdot\frac{7\pi}{12}\right)=2^9\left(1-i\sqrt{3}\right).$

<u>Mustaqil yechish uchun misollar:</u>

Quyidagilarni hisoblang.

1) $\left(1+\cos\alpha+i\sin\alpha\right)^n$; 3) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$;

2) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{30}$; 4) $\frac{(1+i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{10}}$;

1.4.3. Bo‘lish.

a). $\alpha=|\alpha|\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right),\ \varphi=\arg\alpha,\ \beta=|\beta|\left(\cos\psi+i\sin\psi\right),\ \psi=\arg\beta,$ trigonometrik shaklda berilgan kompelks sonlarni bo‘lishni qaraylik. U holda

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{|\alpha|\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}{|\beta|\left(\cos\psi+i\sin\psi\right)}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\frac{\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi+i(\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi)}{\cos^2\varphi-i^2\sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot\left[\cos\left(\varphi-\psi\right)+i\sin\left(\varphi-\psi\right)\right], \qquad (6)$$

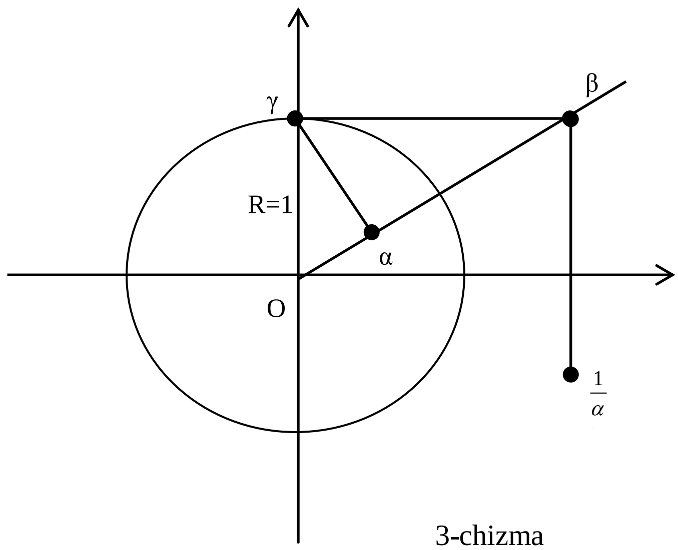
tenglikni hosil qilamiz, bundan esa ikkita kompleks sonlarni bo‘lish uchun modullarini bo‘lib, argumentlarini ayirish kerak degan qoidaga kelamiz. (6) tenglikdan ushbu natijalar kelib chiqadi:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|},\ \arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\varphi-\psi=\arg\alpha-\arg\beta.$$

Bo‘lish amali ko‘paytirishga teskari amal bo‘lganligi uchun α sonni β ga bo‘lishning geometrik ma’nosi ularni ko‘paytirish hodisasiga teskari bo‘lib, α ga mos bo‘lgan vektorni, soat strelkasi manfiy yo‘nalishi bo‘yicha ψ burchakka burib, $k=|\beta|$ marta qisqartirish (yoki cho‘zish) demakdir.

b) $\frac{1}{\alpha}$ sonning geometrik ma’nosi.

Aytaylik, $|\alpha|<1$ bo‘lsin. α nuqtadan Oα nurga perpendikulyar o‘tkazsak, u $|\alpha|=1$ aylana bilan γ nuqtada kesishadi. γ nuqtada bu aylanaga urinma o‘tkazamiz, uni Oα nur bilan kesishgan nuqtasini β



3-chizma

bilan belgilaymiz. (Agar $|\alpha|>1$ bo‘lsa, yasash aksincha bajariladi) (3-chizma).

α va β nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun ularning argumentlari o‘zaro teng, ya’ni: $\arg\alpha=\arg\beta$, (7)

O$\alpha\gamma$ va O$\beta\gamma$ uchburchaklar o‘xshash bo‘lgani uchun: $\frac{O\beta}{O\gamma}=\frac{o\alpha}{o\gamma}$, bundan

$|\gamma|=1$ bo‘lgani sababli $|\beta|=\frac{1}{|\alpha|}$; (8).

(7) va (8) tengliklardan $\beta=\frac{1}{\overline{\alpha}}$ ekanligi kelib chiqadi. α nuqtadan $\beta=\frac{1}{\overline{\alpha}}$ nuqtaga o‘tishni *birlik aylanaga nisbatan inversiya* deyiladi. α va β nuqtalar esa birlik aylanaga nisbatan *simmetrik nuqtalar* deyiladi.

β ga qo‘shma son, ravshanki, $\overline{\beta}=\frac{1}{\alpha}$ bo‘ladi. Bu songa, haqiqiy o‘qqa nisbatan β ga simmetrik bo‘lgan nuqta mos keladi.

Agar aylananing radiusi $R(\neq 1)$ bo‘lsa, unga nisbatan o‘zaro simmetrik nuqtalar α va $\beta=\frac{R^2}{\overline{\alpha}}$ bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

Shunday qilib, $\frac{1}{\alpha}$ ni yasash uchun aylanaga nisbatan α ga simmetrik bo‘lgan $\frac{1}{\overline{\alpha}}$ ni yasash hamda haqiqiy o‘qqa nisbatan $\frac{1}{\overline{\alpha}}$ ga simmetrik bo‘lgan $\frac{1}{\alpha}$ ni topishdan iborat.

Agar $|\alpha|=1$ bo‘lsa, $|\beta|=1$ bo‘ladi. Agar α nuqta aylana markaziga yaqinlashib borsa, ya’ni $\alpha\to 0$ bo‘lsa, u holda β markazdan uzoqlashadi, ya’ni $\beta\to\infty$. Shu sababdan aylana markazining aylanaga nisbatan simmetrik nuqtasi cheksizlikda hisoblanadi.

Misollar:

1) $\alpha=2\sqrt{3}\left(\cos 39^0+i\sin 39^0\right)$, $\beta=\sqrt{6}\left(\cos 9^0+i\sin 9^0\right)$ bo‘lsa, u holda (6) formulaga asosan

$$\gamma=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sqrt{3}\left(\cos 39^0+i\sin 39^0\right)}{\sqrt{6}\left(\cos 9^0+i\sin 9^0\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\left(\cos 30^0+i\sin 30^0\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$$

2) $\gamma=\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(2-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$ ni hisoblang.

Yechilishi: Dastlab kasrning bir qismini soddalashtirib olamiz.

$$\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}=\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)}=\cos\left[\varphi-(-\varphi)\right]+i\sin\left[\varphi-(-\varphi)\right]=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi$$

Endi $1-i\sqrt{3}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$, $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ni hisobga olsak, u holda

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

Bularga asosan

$$\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]\left(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

1.4.4. Kvadrat ildiz chiqarish.

Algebraik koʻrinishdagi kompleks sonning kvadrat ildizlarini topish masalasini biz oldinroq qaragan edik. Endi esa kompleks sonning har qanday darajali ildizlarini topish bilan shugʻullanamiz.

$\alpha=a+ib$ kompleks son berilgan boʻlsin. Agar $\alpha=\beta^n$ tenglik bajarilsa, β son α ning n-darajali ildizi deyilib,

$$\beta=\sqrt[n]{\alpha}, \quad (1)$$

koʻrinishda yoziladi. Endi β ildizni topishni qaraymiz.

Avvalo berilgan α kompleks sonni trigonometrik shaklga keltiramiz:

$$\alpha=|\alpha|\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$$

(1) ni quyidagi shaklda izlaymiz:

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{|\alpha|\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}=\rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right), \qquad (2)$$

bu yerda ρ va θ hozircha noma’lumlar boʻlib, masala ularni aniqlashdan iboratdir.

Shu maqsadda (2) tenglikning har ikki tomonini n-darajaga koʻtaramiz, u holda $\alpha=\beta^n$, ya’ni $|\alpha|\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=\rho^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)$ tenglik hosil boʻladi, tenglikning ikki tomonidagi kompleks sonlarning haqiqiy va mavhum qismlarini oʻzaro tenglash bilan ushbu tengliklarga ega boʻlamiz:

$$\rho^n\cos n\theta=|\alpha|\cos\varphi, \quad \rho^n\sin n\theta=|\alpha|\sin\varphi, \ (3).$$

Bundan

$$\rho^{2n}\left(\cos^2 n\theta+\sin^2 n\theta\right)=r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right), \qquad (4)$$

Yoki $\rho^n=|\alpha|$ va $\rho=\sqrt[n]{|\alpha|}$, $\rho>0$.

ρ^n ning qiymatini e'tiborga olsak, (4) dan

$$\cos n\theta = \cos\varphi, \quad \sin n\theta = \sin\varphi, \tag{5}$$

(5) dan $n\theta = \varphi + 2k\pi, \ k \in Z$, bundan esa

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \ k = 0,1,2,3,...., \tag{6}$$

Agar (2) ning chap tomonini β_k desak, va ρ, θ ning topilgan qiymatlarini o‘rniga qo‘ysak,

$$\beta_k = \sqrt[n]{|\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{|\alpha|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{7}$$

Bu yerda $k = 0,1,2,....$

(7) dan $k = 0,1,2,....$ qiymatlarini qabul qilinganligi uchun α kompleks sondan chiqarilgan ildizlarining soni cheksiz ko‘p bo‘lishi mumkinmi, degan savol tug‘ilishi tabiiydir. Agar (7) da $k = 0,1,2,....,\ n-1$ bo‘lsa, unga mos $\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_{n-1}$ ildizlar o‘zaro teng emas, chunki k ning bu qiymatlariga mos bo‘lgan

$$\frac{\varphi}{n}, \ \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \ \frac{\varphi + 4\pi}{n}, ..., \ \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}, \tag{8}$$

burchaklarning bir –biridan farqi 2π dan kichik, misol uchun

$$\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} - \frac{\varphi}{n} = \frac{n-1}{n}\pi < 2\pi .$$

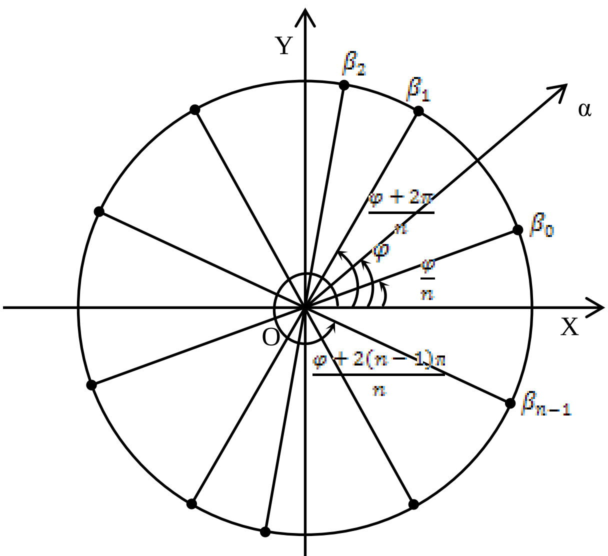
Endi, $k = n, \ n+1, \ n+2, ...$ bo‘lganda (7) dan yangi ildizlar kelib chiqmay, $\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_{n-1}$ ildizlarining yana takrorlanishini ko‘rish qiyin emas. Shu maqsadda $k = np + q \geq n, \ q = 0,1,2,..., n-1, \ p \in Z$ deb belgilaymiz, u holda $\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(np + q)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2q\pi}{n} + 2p\pi$.

O‘ng tomondagi mana shu burchaklarning sinus va kosinuslari mos ravishda ushbu $\frac{\varphi + 2q\pi}{n}$ burchakning sinus va kosinuslariga teng bo‘lgani uchun yana $k = 0,1,2,..., \ n-1$ hol takrorlanadi.

Shunday qilib, ushbu muhim xulosaga kelamiz: $\alpha = a + ib$ kompleks soning n-darajali ildizlari sonni n dona bo‘lib, ular (8) ga asosan (7) formula bilan aniqlanadi.

Endi $\alpha = a + ib \neq 0$ kompleks sonning n-darajali ildizining geometrik ma’nosi bilan tanishaylik.

Buni uchun markazi koordinatalar boshida bo‘lgan, radiusi $R = \sqrt[n]{|\alpha|}$ ga teng bo‘lgan aylanani olamiz. (7) formula bilan aniqlangan α kompelks sonning n-darajali



4-chizma

ildizlari bo‘lgan $\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_{n-1}$ sonlar, ya’ni nuqtalar shu aylanada yotadi va uni n ta teng yoylarga ajratadi, chunki β_k nuqtalarning (sonlarning) argumentlari bir – biridan $\frac{2\pi}{n}$ burchakka farq qiladi.

Demak, bu nuqtalar markazi $O(0,0)$ nuqtada radiusi $R=\sqrt[n]{|\alpha|}$ da teng bo‘lgan aylanaga ichki chizilgan muntazam n burchakning uchlaridan iborat bo‘ladi.
(4-chizma)

Misollar:

1) $\sqrt[3]{i}$ ni hisoblang.

Yechilishi: Dastlab ildiz ostidagi i kompleks sonni trigonometrik shaklda keltiramiz: $|i|=1,\ \varphi=\arg i=\frac{\pi}{2}$ bo‘lgani uchun $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

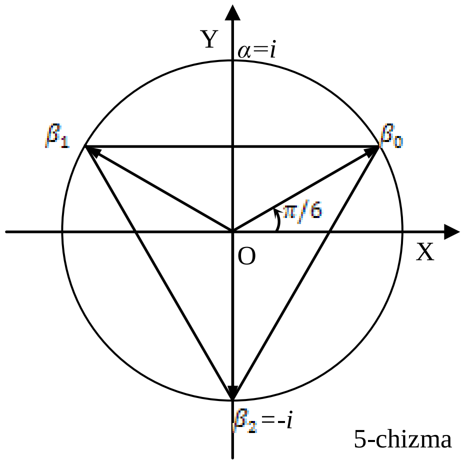
U holda (7) formulaga binoan $\beta_k=\sqrt[3]{i}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}$; bu yerda $k=0,1,2$.

Demak,

$$\beta_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,$$

$$\beta_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,$$

$$\beta_2=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i,\ \text{(5-chizma)}$$



5-chizma

2) $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}}$ ni hisoblang.

Yechilishi: Avvalo ildiz ostidagi kasrni surat va maxrajini trigonometrik shaklga keltirib, trigonometrik shakldagi kompleks sonlarni bo‘lish qoidasiga asosan ushbularni topamiz:

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\quad -1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),\frac{\sqrt{3}-1}{-1+i}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

Endi (7) formulaga asosan:

$$\beta_k=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}}=\sqrt[6]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{12}+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{\pi}{12}+2k\pi}{6}\right)=$$

$$=\sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{(24k+1)\pi}{72}+i\sin\frac{(24k+1)\pi}{72}\right),$$

$$k=0,1,2,3,4,5.$$

Bu tenglikdan $\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \beta_5,\ \beta_6$ larni topib olamiz.

Mustaqil yechish uchun misollar:

Kompleks sonlarning ildizlarini topilsin.

1) $\sqrt[3]{1+i}$; 2) $\sqrt[n]{-1}$; 3) $\sqrt[8]{-i}$; 4) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; 5) $\sqrt[4]{-2-2i\sqrt{3}}$; 6) $\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$.

(7) formulani qo‘llashdagi ayrim hollarni qaraymiz.

1^0. Aytaylik, $\alpha=a+ib$ kompleks sonida $b=0$ bo‘lsa, $\alpha=a$ haqiqiy songa teng bo‘lib qoladi. Agar $a>0$ bo‘lsa, $\sqrt[n]{|\alpha|}=\sqrt[n]{a}>0,\ \varphi=\arg\alpha=\arg a=0$ bo‘ladi. U holda ham ildizlarni (7) formula bo‘yicha topamiz:

$\beta_k=\sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,...,n-1$. Xususan, $k=0$ da ildizning $\beta_0=\sqrt[n]{a}$ musbat haqiqiy qiymatini (ya’ni arifmetrik ildizni) hosil qilamiz.

Agar $n=2m$ juft son bo‘lsa, $k=m$ ga mos $\beta_m=\sqrt[n]{a}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\sqrt[n]{a}$ dan iborat yana bir ildizni hosil qilamz. Agar n soni toq bo‘lsa, $k=0$ uchun topilgan β_0 qiymat ildizning yagona haqiqiy qiymati bo‘ladi.

2^0. $az^n+b=0\left(a,b\in R\right)$ ikki hadi tenglamalarni yechish $z=\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ $(a\neq 0)$ ildizning barcha qiymatlarini topishga keladi.

1-misol. $z^3-1=0$ tenglamani yeching.

Yechilishi:

$z=\sqrt[3]{1},\ |1|=1,\ \varphi=\arg 1=0,\ \ 1=\cos 0+i\sin 0,\ \ z_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3},\ \ k=0,1,2,.$

$z_0=1,\ z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ z_1=-\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$

$z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$

Eslatib o'tamiz, bu yechimlarni $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)\Rightarrow\begin{cases}z-1=0\\ z^2+z+1=0\end{cases}$, tenglamlarni yechib ham topish mumkin.

<u>2-misol.</u> $z^5-1=0$ tenglamani barcha yechimlarini toping.

<u>Yechilishi</u>: $z=\sqrt[5]{1}$ bo'lib, barcha ildizlar $z_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5},\ k=0,1,2,3,4.$ tenglikdan aniqlanadi.

Shu tenglamani $z^5-1=(z-1)\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)=0$ ko'paytuvchilarga ajratib, undan $z_0=1$ ni va

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0\Rightarrow\frac{z^4}{z^2}+\frac{z^3}{z^2}+\frac{z^2}{z^2}+\frac{z}{z^2}+\frac{1}{z^2}=0,$$

$$(z\neq 0)\Rightarrow\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0$$

tenglamada $z+\frac{1}{z}=t$ almashtirish bajarib $t^2+t-1=0$ kvadrat tenglama keltirib, keyin esa $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ ildizlarni topish ham mumkin.

3^0. $az^{2n}+bz^n+c=0\ \ (a,b,c,\in R)$ ko'rinishdagi uchhadli tenglamalar $z^n=u$ almashtirish yordamida $au^2+bu+c=0$ kvadrat tenglamaga keltiriladi, bu tenglamani yechib u_1 va u_2 ildizlarini aniqlasak, $z^n=u_1$ va $z^n=u_2$ tenglamalarning ildizlarini esa berilgan uchhadli tenglamani yechimlaridan iborat bo'ladi.

<u>Misol:</u> $z^8-12z^4+11=0$ uchhadli tenglamani yeching.

<u>Yechilishi::</u> $z^4=u$ desak, $u^2-12u+11=0$ ko'rinishdagi kvadrat tenglamaga kelamiz: Uning ildizlari $u_1=1$ va $u_2=11$.

Endi $z^4=1$ va $z^4=11$ tenglamalarni yechishga yoki $z=\sqrt[4]{1}$ va $z=\sqrt[4]{11}$ ildizlarni topishga kelamiz, ularni topsak, berilgan tenglamaning yechimlari quyidagicha bo'ladi:

$$z_1=1,\ z_2=-1,\ z_3=-i,\ \ z_4=i,\ z_5=\sqrt[4]{11},\ \ z_6=-\sqrt[4]{11},\ z_7=-i\sqrt[4]{11},\ \ z_8=-i\sqrt[4]{11},$$

<u>Mustaqil yechish uchun misollar:</u>

Quyidagi tenglamalrni yeching.

1) $z^4-16=0$; 2) $z^3+1=0$; 3) $27z^3-8=0$;

4) $z^6+28z^3-27=0$; 5) $z^5+243=0$; 6) $z^{12}-65z^6+64=0$;

1.5. Kompleks sonning logarifmlari.

O‘quvchiga ma’lumki, haqiqiy sonlar bilan ish ko‘rganimizda biz faqat musbat sonlarning logarifmlarini tekshirish bilan chegaralaganmiz, xolos.

Endi kompleks sonlar nazariyasi bilan tanishar ekansiz, noldan boshqa har qanday kompleks sonning, xususan manfiy sonning ham logarifmi mavjudligini ko‘rsatamiz.

Ta’rif. Berilgan

$$e^w=z, \tag{1}$$

tenglamani qanoatlantiruvchi har qanday w kompleks son $z(z\neq 0)$ kompleks sonning e asosli (ya’ni natural) logarifmi deyilib, quyidagicha yoziladi:

$$w=Lnz, \tag{2}$$

Ravshanki, $e^w\neq 0$ ligi uchun (1) da $z=x+iy\neq 0$ ya’ni nolni logarfmi mavjud emas.

Deylik, $w=u+iv,\ \ z=re^{i\varphi},\ \ \left(r=|z|,\ \ \varphi=\arg z\right)$ ko‘rinishda bo‘lsin, u holda (1) dan $e^{u+iv}=ze^{i\varphi}$ yoki $e^u\cdot e^{iv}=re^{i\varphi}$ tenglikka ega bo‘lamiz.

Bundan $e^u=r$ yoki $u=\ln r,\ \ v=\varphi+2k\pi,\ \ k\in Z$.

Demak,

$$w=u+iv=\ln r+i(\varphi+2k\pi)$$

yoki (2) ga asosan

$$Lnz=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi), \tag{3}$$

$Argz=\arg z+2k\pi$ ni e’tiborga olsak.

$$Lnz=\ln|z|+iArgz, \tag{4}$$

$k=0$ bo‘lgan holni, z kompelks sonning logarfmini bosh qiymati deyiladi va $\ln z$ kabi belgilanadi:

$$\ln z=ln|z|+iargz, \tag{5}$$

(5) tengikni e’tiboga olib (4) formulani quyidagicha ham yozish mumkin:

$$Lnz=lnz+2k\pi i, \tag{6}$$

(4), (6) tengliklardan z ning har bir qiymatiga logarifmning cheksiz ko‘p qiymati mos kelishini ko‘ramiz, chunki $k=0,\ \pm1,\ \pm2,...,$.

Ba’zi xususiy hollarni qaraymiz.

(1) $z=m,\ (m>0)$ musbat son bo‘lsin.

U holda $r=|z|=|m|=m,\ \ \varphi=\arg m=0$ bo‘lib (3) ga asosan $Lnm=\ln m+2k\pi i$ tenglikka ega bo‘lamiz.

Elementar matematikada lnm qiymatlaridan $k=0$ bo‘lgan holi, ya’ni logarfmning bosh qiymati lnm ishlatiladi.

Lnm ning barcha qiymatlari esa quyidagicha bo‘ladi:

$..., lnm-4\pi i,\ lnm-2\pi i,\ lnm,\ lnm+2\pi i, lnm+4\pi i,\ ...,$

2) $z=-m(m>0)$ manfiy son bo‘lsin.

U holda $r=|z|=|-m|=m, \quad \varphi=\arg(-m)=\pi$.

Bularni (3) ga qo‘ysak $Ln(-m)=\ln m+i(\pi+2k\pi)$.

$Ln(-m)$ ning barcha qiymatlari esa:

$..., \ln m-3\pi i,\ \ln m-\pi i,\ \ln m+\pi i, \ln m+3\pi i,\ ...,$

$Ln(-m)$ ning bosh qiymati

$Ln(-m)=\ln m+\pi i$ ga teng bo‘ladi, ya’ni manfiy sonning logarifmi kompleks sondan iborat. Boshqacha aytganda, haqiqiy sonlar sohasida manfiy sonning logarfmi mavjud emas. Shu sababli ham elementar matematikada manfiy sonlarning logarfmlari tekshirilmaydi.

1-teorema. Har qanday $z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0,$ kompleks sonlar uchun

$$Ln(z_1 \cdot z_2)=Lnz_1+Lnz_2$$

tenglik o‘rinlidir.

Bu teoremaning isboti elementar matematikadagidan farq qilmaydi, faraz qilaylik $e^{w_1}=z_1,\ e^{w_2}=z_2$ ya’ni $w_1=Lnz_1,\ w_2=Lnz_2$ bo‘lsin. U holda

$$z_1 \cdot z_2=e^{w_1} \cdot e^{w_2}=e^{w_1+w_2}.$$

Bundan, logarifmning ta’rifiga asosan,

$$Ln\left(z_1 \cdot z_2\right)=w_1+w_2=Lnz_1+Lnz_2.$$

2-teorema. $Ln\dfrac{z_1}{z_2}=Lnz_1-Lnz_2,\ (z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0)$ tenglik o‘rinlidir.

Misollar.

1) $Ln(-1)$ ni hisoblang.

Yechilishi:

$r=|-1|=1, \quad \varphi=\arg(-1)=\pi$, (3) ga asosan

$Ln(-1)=\ln 1+i(\pi+2k\pi)=(2k+1)\pi i$,

(-1) ning logarifmlari $...,-3\pi i,\ -\pi i,\ \ \pi i,\ \ 3\pi i,\ ...,$ sof mavhum sonlardan iborat bo‘lib, juft –juft o‘zaro qo‘shma sonlardir. Geometrik nuqtai nazardan $Ln(-1)$ ning qiymatlari mavhum o‘qqa joylashgan va koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalarni tasvirlaydi.

2). Lni ni hisoblang.

Yechilishi:

$$r=|i|=1,\ \varphi=\arg i=\frac{\pi}{2},\quad Lni=\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i,\ \ k=0,\ \pm1,\ \pm2,...,$$

3). $Ln(2-2i)$ ni hisoblang.

Yechilishi:

$$|2-2i|=2\sqrt{2},\ \arg(2-2i)=-\frac{\pi}{4},\ Ln(2-2i)=ln2\sqrt{2}+\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)i,\ k\in Z\ .$$

Mustaqil yechish uchun misollar.

Quyidagi sonlarning logarifmlarini toping.

1). $-i$, 2). $-1+i$, 3). $1-i\sqrt{3}$, 4). $3+7i$, 5). $2-3i$, 6). $-1-i$.

1.6. Umumiy daraja.

Mazkur paragrafga kompleks sonning ixtiyoriy kompleks darajaga ko‘tarish masalasi bilan tanishamiz. Har qanday haqiqiy x va a sonlar $(x>0,\ x\neq1)$ uchun $x^a=e^{a\ln x}$ ayniyat o‘rinli bo‘lgani uchun ixtiyoriy $z=x+iy\neq0,\ \alpha=a+ib$ kompleks sonlari uchun z^α darajaning eng umumiy holi uchun

$$z^\alpha=e^{\alpha Lnz}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar $w=z^\alpha$ desak, va $Lnz=\ln z+i(\arg z+2k\pi)$ formulani e’tiborga olsak

$$w=z^\alpha=e^{\alpha(\ln z+i\arg z+2k\pi i)}=e^{\alpha\ln z}.\ \ e^{2k\pi\alpha i},\ \ k\in Z\quad, \tag{1}$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Agar $k=0$ ga mos keladigan qiymatni

$$w_0=e^{\alpha\ln z}, \tag{2}$$

deb belgisak, u holda

$$w=z^\alpha=w_0\cdot e^{2k\pi\alpha i}, \tag{3}$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Agar darajaning (3) dagi barcha qiymatlarini yoyib yozsak, quyidagicha bo‘ladi:

$$...,\ w_0e^{-4\pi\alpha i},\ \ w_0e^{-2\pi\alpha i},\ \ w_0,\ \ w_0e^{2\pi\alpha i},\ w_0e^{4\pi\alpha i},\ ....,$$

Misollar:

1) 1^i darajani hisoblang.

Yechilishi:

$z=1,\ |z|=1,\ \arg z=\arg 1=0,\ \ \alpha=i,\ \ln 1=\ln 1+i\cdot0=0$ bo‘lgani uchun

$w_0=e^{\alpha\ln z}=e^{i\ln 1}=1,\ \ 1^i=e^{2k\pi i\cdot i}=e^{-2k\pi},\ k\in Z$.

Xususan, $k=0$ bo‘lsa $1^i=w_0=1$ ekanligi ko‘rinadi.

2) $(-1)^i$ hisoblang.

Yechilishi:

$z=-1$ va

$\alpha=i,\ |z|=1, \arg(-1)=\pi,\ \ln z=\ln(-1)=\ln 1+\pi i=\pi i=\pi i$

$w_0=e^{\alpha\ln z}=e^{i\pi i}=e^{-\pi}.$

$w=(-1)^i=e^{-\pi}\cdot e^{-2k\pi}=e^{-(1+2k)\pi},\ k\in Z$

3) $(-i)^i$ ni hisoblang.

Yechilishi:

$$z=-i,\ \alpha=i,\ |z|=|-i|=1,\ \ \arg(-i)=-\frac{\pi}{2},\ \ln z=\ln(-i)=\ln 1-\frac{\pi}{2}i=-\frac{\pi}{2}i$$

$$w_0=e^{\alpha\ln z}=e^{\frac{\pi}{2}},\ (-i)^i=w_0e^{2k\pi\alpha i}=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-2k\pi}=e^{-\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}.$$

4) $(-1+i)^i$ ni hisoblang.

Yechilishi:

$$z=-1+i,\ \ \alpha=i,\ |z|=|-1+i|=\sqrt{2},\ \arg(-1+i)=\frac{3\pi}{4},$$

$$w_0=e^{\alpha\ln z}=e^{i\left(\ln\sqrt{2}+\frac{3\pi}{4}i\right)}=e^{-\frac{3}{4}\pi}\cdot e^{-\frac{3}{4}}\cdot e^{i\ln\sqrt{2}},$$

$$w=\left(-1+i\right)^i=e^{-\frac{3}{4}\pi}\cdot e^{i\ln\sqrt{2}}\cdot e^{2k\pi i\cdot i}=e^{-\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi}\cdot e^{i\ln\sqrt{2}},\ k\in Z$$

Mustaqil yechish uchun misollar:

Quyidagi darajalarni hisoblang.

1) i^{-i}; 4) $(-1+i\sqrt{3})^i$;

2) $(-1)^{-1+i}$; 5) $(3-5i)^{-i}$;

3) $(1-i)^{-i}$; 6) i^i

II BOB. INTERVAL MATEMATIKA ASOSLARI

2.1. Interval analiz rivojlanishining qisqacha tarixi

O‘tgan asrning 60 yillaridan boshlab elektron hisoblash mashinalarining matematik, texnik va texnologik hisoblash jarayonlariga keng ko‘lamda qo‘llanilishi foydalanuvchilar (dasturchilar) oldiga turli xarakterdagi muammolarni qo‘ya boshladi. Ya’ni, EHM da hosil qilingan sonli taqribiy yechimlarning izlanayotgan haqiqiy yechimdan chetlanishini baholash muammosi turli foydalanuvchilar tomonidan turlicha hal qilina boshladi.

Taqribiy yechimning izlanayotgan yechimdan chetlanishini baholash maqsadida quyidagi:

- sonli yechimlarni tajriba natijalari bilan taqqoslash;
- aniq yechimi mavjud bo‘lgan turli model-test masalalarni yechish;
- masalalardagi parametrlarning (masalan, integrallash qadami, yechim aniqligi va h. k.) turli qiymatlarida hisoblashlarni tashkil etish usullari qo‘llanila boshlangan bo‘lsada, ammo bu usullar yagona bir matematik aniqlikkaolib kelaolmadi.

Hisoblash jarayonida (EHMda) xatoliklarning paydo bo‘lishining ba’zi manbalari bilan tanishib chiqaylik:

1. Beriladigan ma’lumotlardagi xatoliklar. Juda ko‘p algoritmlarda foydalaniladigan parametrlar, koeffitsientlar va boshlang‘ich qiymatlar o‘lchash natijalari (har xil fizik va texnik asboblar yordamida) asosida olinadi. Yoki ba’zi taqribiy algoritmlarning natijalari foydalaniladigan algoritm uchun boshlang‘ich qiymat sifatida ishlatiladi.

2. Algoritmning prinsipial xatoligi. Masalan, iteratsion algoritmlar izlanayotgan aniq yechimga ketma-ket yaqinlashish asosida ko‘rilgan.

3. EHMlarda algoritmni aniq bajarish mumkinmasligi. Hatto algoritm aniq berilsa ham yaxlitlash xatoliklari tufayli izlanayotgan aniq yechim olinayotgan taqribiy yechimdan ancha farq qilish mumkin. Masalan, kvadrat tenglamaning ildizlarini topish algoritmi. Bu algoritm aniq bo‘lgan holda ham, agar uning ildizlari irratsional sonlar bo‘lsa, u holda hisoblashlar ma’lum bir aniqlik bilan bajariladi.

Hozirgi kunda xatoliklarni, noaniqliklarni va ularni keltirib chiqaradigan manbalarini hisobga olish uchun bir necha usullardan foydalanilmoqda. Masalan, L. Zadening noravshan to‘plamlar nazariyasi, matematik-statistika usullari, interval analiz apparati va hokazolar. Bu usullar matematik apparati, qo‘llanilish sohasi va imkoniyatlari bilan bir-biridan farq qiladi.

Interval analiz elementlari dastlab EHMda yaxlitlash xatoliklarini avtomatik ravishda hisobga olish vositasi sifatida paydo bo‘ldi. Keyingi tadqiqotlar shuni ko‘rsatdiki, interval analiz nafaqat xatoliklarni hisobga oladigan apparat, balki amaliy matematikaning dolzarb masalalarini muvaffaqiyatli yecha oladigan hamda informatika va matematik tahlilning eng yaxshi xususiyatlarini o‘zida mujassamlashtirgan fanning yangi yo‘nalishi sifatida namoyon bo‘ldi. Natijada, interval matematika, interval algebra, interval topologiya hamda amaliy matematikaning masalalarini yechish uchun mo‘ljallangan interval metodlar kabi yo‘nalishlar paydo bo‘ldi. Hozirgi kunda interval analiz fani nafaqat nazariy tadqiqotlar olib borishga mo‘ljallangan fan, balki interval noaniqlikka ega bo‘lgan amaliy masalalarni yechishning ishonchli vositasiga aylandi. Zamonaviy adabiyotlarda interval analizning meditsinaga, iqtisodiyotga, optimal boshqarishga, biologiya hamda bir qancha sohalarga tatbiqini ifodalaydigan ilmiy izlanishlarni ko‘rish mumkin. Shunday qilib, amaliy matematikadagi yangi yo‘nalish - interval analizning predmeti berilgan ma’lumotlarda yoki oraliq hisoblashlarda yoki olinadigan ma’lumotlarda interval noaniqliklar bo‘lgan masalalarni o‘rganishdan hamda olinadigan yechimlarni baholashdan iboratdir.

Interval analizda biron a parametring noaniqligi uning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari diapazoni (to‘plami) yopiq interval- $[\underline{a},\overline{a}]$ orqali ifodalanadi. Bunda $\underline{a}$ - diapazonning quyi(chap) chegarasi, $\overline{a}$ esa yuqori (o‘ng) chegarasi deyiladi. Shubhasiz, endi a parametr bitta haqiqiy qiymat bilan emas, balki $[\underline{a},\overline{a}]$ to‘plam tasniflanadi. Bu diapazon (to‘plam)ga *interval son* deyiladi.

Interval sonni ikki xil ma’noda:

- sonlarning yangi bir shakli – mustaqil bir matematik obekt sifatida; yoki
- qandaydir xatolik bilan berilgan haqiqiy son sifatida tushunish mumkin.

Interval analizning asosiy yutug‘i, ya’ni boshqa usullardan ustunligi shundaki, bunda EHMda biror bir muayyan masalani yechish jarayonida uchraydigan xatoliklarning barcha manbalari: hisoblashlardagi xatolik – yaxlitlash xatoligi; foydalaniladigan ma’lumotlardagi xatolik; qo‘llaniladigan sonli usul xatoligi bir vaqtning o‘zida hisobga olinib, olinadigan taqribiy yechimning izlanadigan haqiqiy yechimdan chetlanishi baholanadi.

Interval analizdagi ilmiy muammolarni, shartli ravishda, quyidagi 3 guruhga:

- interval sonlar sistemasini muayyan matematik sistema sifatida qaralib tadqiq etish;
- interval analiz apparatining amaliy masalalarni yechish jarayoniga qo‘llash;
- interval algoritmlarni EHM da hal qilish (hisoblash) muammolariga bo‘lish mumkin.

Endi tabiiy savol to‘g‘iladi: *Interval analiz* fan *sifatida qachondan buyon mavjud? Bu yo‘nalishning fanda shakllanishida qaysi olimlarning xizmatlari singgan?*

«Interval analiz» atamasini fanga kiritgan amerikalik olim Raymon Murning fikricha, bu sohada birnchi bo‘lib Arximedning nomini tilga olish kerakdir. Chunki, Arximed o‘z hisoblashlarida π sonini hosil qilish uchun, ya’ni aylana uzunligini uning diametriga nisbatini olib, matematika tarixida ilk bor ikki tomonlama hisoblashlarni (kami va ko‘pi bilan) bajargan.

Ammo interval analiz fan sifatida faqat XX asrga kelib shakllandi va rivojlandi. Ya’ni, EHM larning jadallik bilan hayotga kirib kelishi, amaliy masalalarni EHMda yechish jarayonida duch kelingan muammolar bu fanni shakllanishini tezlashtirdi.

Arximeddan so‘ng, 1931 yilda ingliz olimasi Rozalinda Yang[29] sonli to‘plamlar ustida arifmetik amallar bajarish usulini taklif etdi. 1951 yilda esa, P. Dvayer [17] sonli analizning hisoblashlaridagi xatoliklarni hisobga olish maqsadida yopiq interval (sonli diapazon)lar tushunchasini taklif qildi. 1955-58 yillarda Polshalik Mechislav Varmus hamda Yaponiyalik Teruo Sunagilar o‘z ilmiy tadqiqotlarida sonli diapazonlar ustida amallarni ta’minlaydigan, hozirgi kunda *klassik interval arifmetika* nomi bilan ma’lum, arifmetikaning xossalarini o‘rgandilar. Shuni ta’kidlash joizki, T. Sunagining izlanishlarida *«interval»*, *«intervalli»* atamalari, fanda birinchi bor, qo‘llanilgan. Bundan tashqari, T. Sunagi intervallar arifmetikasini qo‘llab sonli analizning ba’zi masalalarini, masalan, differensial tenglamalarga qo‘yilgan Koshi masalasini yechish usulini taklif etgan birinchi tadqiqotchidir.

Interval arifmetika va uning tatbiqlari bilan 1959 yildan shug‘ullanishni boshlagan Raymon Mur, o‘zining 1966 yilda chop ettirgan “Interval Analysis” nomli monografiyasida, sistemali tarzda, *interval sonlar, interval arifmetika, interval qiymatli funksiyalar* kabi tushunchalarni qiziqarli va tushunarli tilda bayon etgan. Bundan tashqari, ushbu monografiyada interval analiz apparatining algebraik va differensial tenglamalarni yechishga tatbiqlari hamda interval arifmetikani va interval algoritmlarni EHMda hal etish muammolari yoritilgan. Bu monografiyani paydo bo‘lishi fanda interval analizning shakllanishiga va turli-tuman tadqiqotchilar tomonidan izchillik bilan rivojlantirilishiga turtki bo‘ldi desak xato bo‘lmaydi.

Sobiq Sovet Ittifoqida, «interval analiz» tarixini boshlanish sanasi o‘tgan asrning 20-yillariga to‘g‘ri keladi. Bu sana mashhur rus matematigi va pedagogi V. M. Bradis nomi bilan bog‘liqdir. V. M. Bradis Tver Pedagogika institutida ishlash jarayonida talabalarga «chegaralar usuli»(metod granitsi)ni, ya’ni hisoblash jarayonidagi izlanayotgan qiymatga ikki tomonlama yaqinlashish usulini o‘rgatgan. Bu usulning tavsifi uning ilmiy tadqiqotlarida o‘z aksini topgan [8]. Uning bu usuli «Ensiklopediya elementarnoy matematiki» (M. : Uchpedgiz, 1951g.) kitobiga kiritilib va bu ensiklopediya Germaniyada nemis tiliga o‘girilganidan so‘ng, bu usul haqida xorijlik olimlar xabar topgan desak xato bo‘lmas.

Aslida, rus akademiklari N. N. Yanenko va Yu. I. Shokinlarning sayi-harakatlari bilan Sobiq Sovet Ittifoqiga interval analiz o‘tgan asrning 70-yillarini boshlarida kirib keldi. Dastlab, N. N. Yanenko SSSR FA Sibir bo‘limining «Nazariy va amaliy mexanika» ilmiy-tekshirish institutida interval analiz masalalari bilan shug‘ullanadigan, yosh iqtidorli olimlardan iborat, guruhni tashkil etdi va unga raxnamolik qildi. 1981 yilda rus tilida, ilk bor Yu. I. Shokin qalamiga mansub, N. N. Yanenko muharrirligida «Interval analiz» monografiyasi chop etildi. Krasnoyarsk shahridagi «Hisoblash markazi» institutida «Interval analiz» ilmiy laboratoriyasi tashkil etildi. Yu. I. Shokinnning tashabbusi bilan Krasnoyarsk shahrida 1984-1989 yillarda interval analiz va uning tatbiqlariga bag‘ishlangan Butun ittifoq ilmiy anjumanlari tashkil etildi. 1990 yildan boshlab bu anjuman Rossiyaning boshqa shaharlarida o‘tkazila boshlandi. 1986 yilda Yu. I. Shokin va uning shogirdlari tomonidan «Metodi intervalnogo analiza» nomli monografiya chop ettirildi. 1987 yilda esa Germaniyadagi interval analizning targ‘ibotchilaridan bo‘lgan G. Alefeld va J. Herzbergerlarning «Introduction to Interval Computations» nomli monografiyasi «Vvedeniye v intervalniye vichesleniya» nomi bilan rus tiliga o‘girildi. Bularning barchasi SSSRda interval analizning shakllanishiga va rivojlanishiga asos bo‘ldi.

Hozirgi kunda deyarli barcha mamlakatlarda interval analiz masalalari bilan ko‘pgina olimlar shug‘ullanadi va interval analiz masalalari yoritiladigan bir qator ilmiy jurnallar chop etilmoqda. Rivojlangan xorijiy mamlakatlarda sistemali ravishda interval analiz muammolariga bag‘ishlangan ilmiy anjumanlar o‘tkazilib kelinmoqda. AQSh, Rossiya, Germaniya, Xitoy, Buyuk Britaniyalik olimlar o‘zlarining sermahsul izlanishlari bilan interval analiz fanini rivojlantirmoqdalar. Minglab ilmiy maqolalar, o‘nlab monografiyalar chop ettirildi. Bundan tashqari, interval analiz fan sifatida juda ko‘p universitetlarda o‘rganilmoqda. Rossiyaning Novosibirsk, Krasnoyarsk, Sankt - Peterburg davlat universitetlarida interval analiz yo‘nalishlari bo‘yicha mutaxassis kadrlar tayyorlanmoqda.

O‘zbekistonlik olimlar interval analizning SSSR da dastlabki shakllanish yillaridan boshlab bu jarayonda faol ishtirok etmoqdalar. Shuni ta’kidlash joizki, SSSRda himoya qilingan dastlabki tarixiy nomzodlik dissertatsiya (1977 yil) yurtdoshimiz Z. X. Yuldashev ga tegishlidir. SSSRda tashkil etilgan birinchi ilmiy laboratoriyada (1984-1987 yillar, Krasnoyarsk shahri) faoliyat ko‘rsatgan olimlar qatorida yurtdoshlarimizning bo‘lishi (M. B. Bazarov) ham yuqoridagi fikrlarning isbotidir. Hozirgi kunda, interval analiz mavzusida yurtdoshlarimiz tomonidan yuzlab ilmiy maqolalar, bir qator o‘quv qo‘llanma va monografiyalar chop ettirilgan.

2.2. Interval sonlar va ularning xarakteristik xossalari

Faraz qilaylik R-haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin.

1-Ta’rif. Interval son deb

$$[a,b]=\{x \mid x\in R, a\le x\le b\}$$

ifoda bilan aniqlanadigan R ning chegaralangan va yopiq qism to‘plamiga aytiladi.

Interval sonlar to‘plamini $\mathbf{I}(R)$ bilan belgilaymiz. Agar $\mathbf{a}$ interval $\mathbf{I}(R)$ ning elementi bo‘lsa: $\mathbf{a}\in\mathbf{I}(R)$ hamda $\mathbf{a}$ ning chap va o‘ng chegaralarini, mos ravishda, $\underline{a}$ va $\overline{a}$ shaklida yozilsa, u holda $\mathbf{a}=[\underline{a},\overline{a}]$ deb yozish matematiklar tomonidan o‘zaro kelishib olingan.

Agar $\mathbf{a}=[\underline{a},\overline{a}]$ da $\underline{a}=\overline{a}=a$ bo‘lsa, ya’ni intervalning chap va o‘ng chegaralari ustma–ust tushsa, u holda $\mathbf{a}$ interval a haqiqiy songa teng deyiladi. Shunday qilib, $R\subset\mathbf{I}(R)$.

2-Ta'rif. Agar $\mathbf{a}=[\underline{a},\overline{a}]$ va $\mathbf{b}=\left[\underline{b},\overline{b}\ \right]$ intervallar uchun $\underline{a}=\underline{b}$, $\overline{a}=\overline{b}$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ intervallar o'zaro teng intervallar deyiladi.

$\mathbf{I}(R)$ to'plamda tartib munosabati quyidagicha aniqlanadi: $\mathbf{a}\le\mathbf{b}$ munosabat faqat $\overline{a}\le\underline{b}$ tengsizlik o'rinli bo'lgandagina bajariladi. Demak $\mathbf{I}(R)$ bu ma'noda qisman tartiblashgan to'plam.

$\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ to'plamlarning kesishmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\mathbf{a}\cap\mathbf{b}=\begin{cases}\text{agar } \mathbf{a}<\mathbf{b} \text{ yoki } \mathbf{b}<\mathbf{a} \text{ bo'lsa}\\ \left[\max\{\underline{a},\underline{b}\},\min\{\overline{a},\overline{b}\}\right] \text{aks holda.}\end{cases}$$

$\mathbf{a}$ intervalning kengligi (uzunligi) $wid(\mathbf{a})$ kabi belgilanib, $wid(\mathbf{a})=\overline{a}-\underline{a}$ formula bilan hisoblanadi.

$\mathbf{a}$ intervalning o'rtasi – o'rta qiymati $mid(\mathbf{a})$ esa quyidagicha aniqlanadi:

$$mid(\mathbf{a})=\frac{1}{2}\left(\underline{a}+\overline{a}\right).$$

$\mathbf{a}$ intervalning radiusi $rad(\mathbf{a})$kabi belgilanib,

$$rad(\mathbf{a})=\frac{1}{2}(\overline{a}-\underline{a})=0.5*wid(\mathbf{a})$$

formula bilan hisoblanadi.

$\mathbf{a}$ intervalning absolyut miqdori yoki moduli yoki magnitudasi – $|\mathbf{a}|$:

$$|\mathbf{a}|=\max\{|a|,a\in\mathbf{a}\}=\max\left\{|\underline{a}|,|\overline{a}|\right\}.$$

Interval $\mathbf{a}$ ning mignitudasi, ya'ni uning chegaralarining absolyut qiymati bo'yicha eng kichigi deb $\langle\mathbf{a}\rangle$ belgi bilan belgilanib va quyidagi munosabat:

$$\langle\mathbf{a}\rangle=\min\{|a|,a\in\mathbf{a}\}=\begin{cases}\min\{|\overline{a}|,|\underline{a}|\}, & \text{agar } 0\notin\mathbf{a}\\ 0, & \text{agar } 0\in\mathbf{a}\end{cases}$$

orqali aniqlanuvchi miqdorga aytiladi.

Metrika (masofa) $\mathbf{I}(R)$ to‘plamda quyidagicha aniqlanadi. Agar $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{I}(R)$ bo‘lsa, u holda

$$\rho(\mathbf{a},\mathbf{b})=\max\left\{\left|\underline{a}-\underline{b}\right|,\left|\overline{a}-\overline{b}\right|\right\}.$$

Agar $\mathbf{a}=[\underline{a},\overline{a}]$ interval uchun $-\underline{a}=\overline{a}$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda – $\mathbf{a}$ simmetrik interval deyiladi. Bunda $mid(\mathbf{a})=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Yuqorida keltirilgan tushunchalar asosida interval sonning uni o‘rtasi va radiusi orqali ifodalanishini quyidagicha yozish mumkin:

$$\mathbf{a}=mid(\mathbf{a})+[-1,1]\cdot rad(\mathbf{a}).$$

Shunday qilib, $\mathbf{a}$ intervalni ikki xil usul: 1) uning chegaralari – $\underline{a}$, $\overline{a}$; 2) uning o‘rtasi $mid(\mathbf{a})$ va radiusi $rad(\mathbf{a})$ bilan tasvirlash mumkin ekan. Bu tasvirlashlar o‘rtasidagi bog‘liqlik quyidagicha:

$$\mathbf{a}=[\underline{a},\overline{a}]=mid(\mathbf{a})+[-1,1]rad(\mathbf{a}).$$

2.3. Interval hisoblashlarning zaruriyligi

Ushbu paragrafda ananaviy usullar vositasida hal qilinishi qiyin bo‘lgan, ammo interval hisoblash yordamida samarali hal qilinadigan ba’zi masalalar bilan tanishamiz.

Taqribiy hisoblashlarni EHM larda bajarganda ro‘y beradigan quyidagi tipik holatlarni keltiraylik.

1- misol. Faraz qilaylik va $x_0=1-10^{-21}$, $x_{n+1}=x_n^2$ $n=0,1,2,...$ bo‘lsin. Bunda x_{75} ning qiymatini hisoblash talab etilsin.

Agar biz verguldan keyin 20 ta raqamli arifmetikada hisoblashlarni bajarsak, u holda

$x_0=1,\ x_1=1,...,\ x_{75}=1$ ga ega bo‘lamiz.

Ammo x_{75} ni aniq qiymatini yuqoridan quyidagicha baholash mumkin

$$x_{75} = (1-10^{-21})^{2^{75}} < (1-10^{-21})^{10^{22,2}} <$$
$$< \{(1-10^{-21})^{10^{21}}\}^{31,6} < e^{-31,6} < 10^{-10}.$$

Bu misolni yechish uchun qo‘llanilgan interval arifmetika (verguldan keyin 10 ta raqam saqlagan holda) esa [0, 1] intervalga yaqin natijani, 20 ta raqamni saqlagan holda bajarilgan hisoblashlar yanada aniqroq natijani beradi. Misoldan ko‘rinib turibdiki hisoblashlar 21 ta raqamdan ko‘proq raqamlarni saqlagan holda bajarilishi kerak.

2-misol. Berilgan $a = 77617.0$ va $b = 330096.0$ qiymatlarda $f = 333.75b^6 + a^2(11a^2b^2 - b^6 - 121b^4 - 2) + 5.5b^8 + a/(2b)$ ifodaning qiymatini hisoblash talab qilinsin.

Aslida f ning aniq qiymati -0.8273960599468213 ga tengdir.

Fortrantilida tuzilgandasturda oddiy aniqlik (6 ta raqamni saqlagan holda), ikkilangan aniqlik (17 ta raqam) hamda kengaytirilgan aniqlik (34 ta raqam) hisoblashlarbajarilganda quyidagilarga ega bo‘lamiz:

-oddiy aniqlikda - $f = +1.172603...$;

-ikkilangan aniqlikda – $f = +1.1726039400531...$;

-kengaytirilgan aniqlikda - $f = +1.172603940053178...$.

Exceldasturida esa hisoblashlarnibajarsak kompyuter 0 natijaniberadi.

3- misol. Endi

$I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx$ integralnihisoblashmasalasibilanshug‘ullanamiz.

Bo‘laklabintegrallashformulasidanfoydalanibquyidagirekurrentformulaga ega bo‘lamiz

$$I_n=\frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx=\frac{1}{e}\int_0^1 x^n de^x=\frac{1}{e}x^n e^x\Big|_0^1-\frac{1}{e}\int_0^1 e^x dx^n=$$

$$=\frac{1}{e}(1^n e^1-0^n e^0)-\frac{1}{e}n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx=1-n\left(\frac{1}{e}\int_0^1 x^{n-1}e^x dx\right)=1-n\cdot I_{n-1}.$$

$I_n=1-n\cdot I_{n-1},\ I_0=1-\frac{1}{e}$ rekurrent formulaga ko‘ra EHMda hisoblashlarni bajarganda quyidagi hollarni kuzatish mumkin (1-jadval).

1–jadval

n	I_n	n	I_n	n	I_n
0	. 632 1205	7	. 112 4296	14	-597. 5973
1	. 367 8795	8	. 100 563	15	119 6496
2	. 207 2786	9	9. 493 256 E-02	16	-194 38. 3
3	. 170 8932	10	5. 067 444	17	325 4453
4	. 145 534	11	. 442 5812	18	-485 8015 E+07
5	. 126 7958	12	-4. 310 974	19	1. 113 023 E+09
6	. 129 4790	13	57. 04 216 E-05	20	-2. 226 046 E+10

Iteratsion jarayonni noto‘g‘ri natijaga olib kelishiga asosiy sabablardan biri, o‘zaro yaqin sonlarning ayirilishidir. I_n ketma-ketlik yuqoridan va quyidanchegaralangan, ya’ni $1/(n+1)<I_n<1/n$. Shu kesmani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz $I_n \in [1/(n+2), 1/(n+1)] = \mathbf{I}_n^{'}$. so‘ngra $\mathbf{I}_0$ berilgan deb faraz qilib, quyidagi iteratsion jarayonni tuzamiz

$$I_n \in \mathbf{I}_n = (1 - n\mathbf{I}_{n-1}) \cap \mathbf{I}_n^{'}, \ (n = 1, 2, 3...). \qquad (1)$$

Bu jarayon natijasida olinadigan interval yechimlarning aniqligini quyidagicha baholash mumkin

$$wid\left(I_n\right) < wid\left(\left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right]\right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Bu yerda, $n \to \infty, \ wid\left(I_n\right) \to 0$

2–jadval

n	$\underline{\mathbf{I}}_n$	$\bar{\mathbf{I}}_n$	$wid(\mathbf{I}_n)$
0	. 632 1203	. 632 1208	4. 77 E-07
1	. 367 8789	. 367 88	4. 01 E-07
2	. 264 2398	. 264 2424	2. 56 E-07
3	. 207 2724	. 207 281	8. 52 E-07
4	. 170 8758	. 170 9106	3. 48 E-05
5	. 145 4466	. 145 6215	1. 75 E-04
6	. 126 2766	. 127 3209	1. 05 E-03
.	……	…. .	….
.	……	….	….
13	6. 66 6666 E-02	7. 142875 E-02	7. 76 E-03
14	6. 24 9999 E-02	6. 66 6668 E-02	4. 17 E-03

Bu xarakterdagi misollarni yana ko‘plab keltirish mumkin. Yuqorida keltirilgan misollar shuni ko‘rsatadaki, EHMda an’anaviy usullar yordamida olingan «*taqribiy yechim izlangan haqiqiy yechimdan qanchaga farq qiladi?*» yoki *«EHMda olingan taqribiy yechimlarimizga qay darajada ishonsak bo‘ladi?»* degan savollarga hamma vaqt javob bera olmaydi. Bu savollarga javoblarni izlash ham olimlarimiz va EHMning tajribali foydalanuvchilari oldida hozirgi kunda *muammo* bo‘lib turibdi. Interval analiz apparati yordamida shu muammolarning ba’zilarini hal etish mumkin.

2.4. Interval sonlar ustida arifmetik amallar. Klassik interval arifmetika va uning algebraik xossalari

Agar $* \in \{+,-,\times,/\}$ bo‘lsa, uholda $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ intervallaruchun arifmetik amallarquyidagicha ifodalanadi:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \left\{ a * b \middle| a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b} \right\}. \tag{1}$$

Bunda bo‘lish amalida $0 \notin \mathbf{b}$.

$\mathbf{a} = \left[\underline{a}, \overline{a}\right]$va $\mathbf{b} = \left[\underline{b}, \overline{b}\right]$bo‘lsa, uholda (1) formula moshollarda, quyidagi formulalarga ekvivalentdir:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \left[\underline{a}, \overline{a}\right] + \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = \left[\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}\right],$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \left[\underline{a}, \overline{a}\right] - \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = \left[\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}\right],$$

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \left[\underline{a}, \overline{a}\right] * \left[\underline{b}, \overline{b}\right] =$$

$$= \left[\min\{\underline{a} * \underline{b}, \underline{a} * \overline{b}, \overline{a} * \underline{b}, \overline{a} * \overline{b}\}, \max\{\underline{a} * \underline{b}, \underline{a} * \overline{b}, \overline{a} * \underline{b}, \overline{a} * \overline{b}\}\right],$$

$$\mathbf{a} / \mathbf{b} = \left[\underline{a}, \overline{a}\right] / \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = \left[\underline{a}, \overline{a}\right] * \left[1/\overline{b}, 1/\underline{b}\right]. \tag{2}$$

Agar $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ intervallarda chap va o‘ng chegaralari o‘zaro teng bo‘lsa, ya’ni $\mathbf{a} = a, \mathbf{b} = b$ bo‘lsa, u holda (2) formulalar haqiqiy sonlar ustidagi arifmetik amallarni aniqlovchi formulalarni ifodalashini ko‘rish qiyin emas.

Demak, interval son haqiqiy sonning umumlashmasi, interval arifmetika esa haqiqiy arifmetikaning umumlashmasidir. Interval qo‘shish va ko‘paytirish amallari assotsiativlik va kommutativlik qonuniyatlariga bo‘ysunadi. Ya’ni, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{I}(R)$bo‘lsa, u holda

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathbf{b} * \mathbf{a},$$

$$\mathbf{a} * (\mathbf{b} * \mathbf{c}) = (\mathbf{a} * \mathbf{b}) * \mathbf{c}.$$

Interval sonni butun darajaga ko‘tarish quyidagi formula asosida amalga oshiriladi

$$\mathbf{a}^n = [\underline{a}, \overline{a}]^n = \begin{cases} [\underline{a}^n, \overline{a}^n], & \text{agar } n = 2i+1 \text{ bo'lsa} \\ [\underline{a}^n, \overline{a}^n], & \text{agar } n = 2i \text{ va } \underline{a} > 0 \text{ bo'lsa} \\ [\overline{a}^n, \underline{a}^n], & \text{agar } n = 2i \text{ va } \overline{a} < 0 \text{ bo'lsa} \\ [0, \max(\underline{a}^n, \overline{a}^n)], & \text{agar } n = 2i \text{ va } 0 \in \mathbf{a} \text{ bo'lsa.} \end{cases} \tag{3}$$

(1)–(2) formulalar bilan aniqlangan interval arifmetika, interval analizga tegishli adabiyotlarda, *klassik interval arifmetika* yoki *R. Mur arifmetikasi* ham deb yuritiladi.

(1)-(2) formulalarni tahlili shuni ko‘rsatadiki, interval arifmetikada: qo‘shish amali, ayirish amaliga, ko‘paytirish amali esa bo‘lish amaliga teskari emasdir. Ya’ni, $\mathbf{a} - \mathbf{a} \neq [0,0]$, $\mathbf{a}/\mathbf{a} \neq [1,1]$. Ammo, $0 \in \mathbf{a} - \mathbf{a}$, $1 \in \mathbf{a}/\mathbf{a}$.

Chunki, (2.10) formuladan ko‘rinib turibdiki, intervallarning yig‘indisini yoki ayirmasining radiusi (kengligi) qo‘shiluvchilarning radiuslarining yig‘indisiga teng bo‘ladi. Shuning uchun, $\mathbf{I}(R)$ ga tegishli ixtiyoriy interval uchun unga qarama-qarshi interval mavjud emas, ya’ni $\mathbf{a} - \mathbf{a} \neq 0$. Ikkinchi tomondan, (2.11)-(2. 12) formulalardan ko‘rinib turibdiki, ixtiyoriy chegaralari ustma-ust tushmagan intervalni, intervallar ko‘paytmasining nolga teng bo‘lmagan radiusiga ko‘paytirganda natija hech qachon nolga teng bo‘lmaydi. Shu sababli, $\mathbf{I}(R)$ ning ixtiyoriy chegaralari ustma-ust tushmagan intervalining teskarisi mavjud emas, ya’ni $\mathbf{a}/\mathbf{a} \neq [1,1]$.

Ammo, $\mathbf{I}(R)$ da, quyidagi xossalar o‘rinlidir:

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},\ 0 \notin \mathbf{a},\ 0 \notin \mathbf{b},\ 0 \notin \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Klassik interval arifmetikani qo‘llanilishiga doir quyidagi misollar bilan tanishamiz:

$[1,2]+[4,6]=[5,8]$, $\quad [2,4]/[-2,1]=\varnothing$,

$1+[-3,2]=[-2,3]$, $\quad 2/[1,2]=[1,2]$,

$[2,5]-[0,2]=[0,3]$, $\quad [2,4]/[-2,-1]=[-4,-1]$,

$[-2,1]\times[0,4]=[-8,0]$, $\quad [2,3]**2=[4,6]$,

$3\times[-2,3]=[-6,9]$, $\quad [-1,2]**2=[0,4]$.

Interval arifmetikaning subdistributivlik xossasi. Interval arifmetikada $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbf{I}(R)$ intervallar uchun, distributivlik xossasi, ya’ni

$$\mathbf{a}*(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}*\mathbf{b}+\mathbf{a}*\mathbf{c}. \tag{4}$$

munosabat hamma vaqt o‘rinli bo‘lmaydi. Haqiqatdan ham, $[0,1](1-1)=0$ bo‘lgan holda $[0,1]-[0,1]=[-1,1]$ekanini ko‘rish mumkin.

Interval arifmetikada *subdistributivlik* deb ataladigan quyidagi xossa

$$\mathbf{a}*(\mathbf{b}+\mathbf{c})\subseteq\mathbf{a}*\mathbf{b}+\mathbf{a}*\mathbf{c}, \tag{5}$$

doimo o‘rinlidir.

Shunday bo‘lsada, quyidagi hollarda, ya’ni:

1) Agar $\omega id(\mathbf{a})=0$ yoki $\mathbf{b}=[0,0]$, yoki $\mathbf{c}=[0,0]$;

2) Agar $\mathbf{b}$ va $\mathbf{c}$ intervallar uchun $sign(\mathbf{b})=sign(\mathbf{c})$ munosabat o‘rinli;

3) Agar $\mathbf{d}=\mathbf{bc}=\left[\underline{d},\overline{d}\right]$ interval hamma vaqt musbat;

4) Agar $\mathbf{b}$ va $\mathbf{c}$ intervallar – simmetrik intervallar bo‘lsa, u holda interval arifmetikada distributivlik qonuni bajariladi, ya’ni (4) tenglik o‘rinli bo‘ladi, aks holda (5) munosabat, ya’ni subdistributivlik xossasi bajariladi.

Interval arifmetikaning monotonlik xossasi

Ta’rif. Agar $\mathbf{a}\subseteq\mathbf{c}$ va $\mathbf{b}\subseteq\mathbf{d}$ bo‘lgan holda

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}\subseteq\mathbf{c}+\mathbf{d},$$

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} \subseteq \mathbf{c}-\mathbf{d},$$
$$\mathbf{ab} \subseteq \mathbf{cd},$$
$$\mathbf{a/b} \subseteq \mathbf{c/d}. \quad (6)$$

munosobat o‘rinli bo‘lsa, *interval arifmetika monotonlik xossasiga (*$\subseteq$ *amali bo‘yicha)* ega deyiladi.

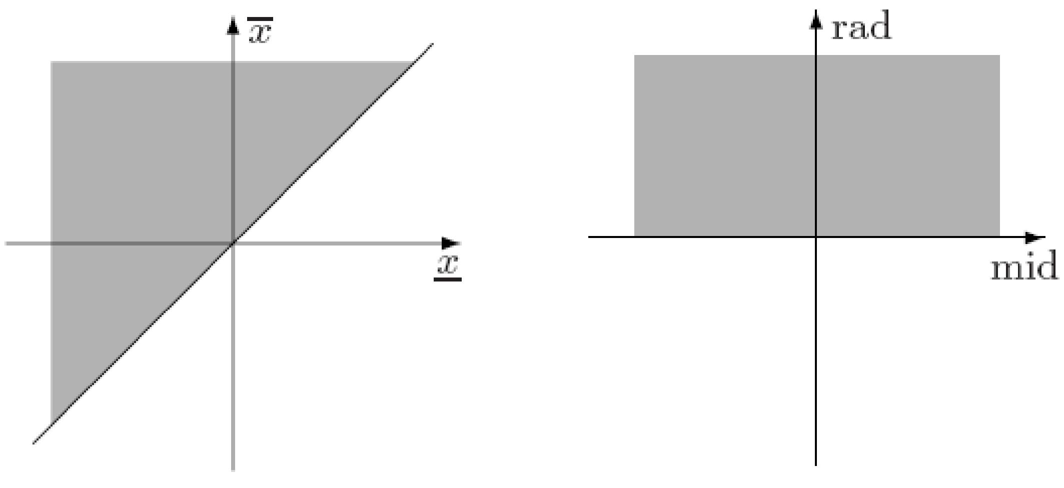
Teorema. Agar $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)$ chekli sondagi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ interval o‘zgaruvchilar hamda interval arifmetik amallar yordamida hosil qilingan ratsional ifoda bo‘lsa, u holda barcha $x_i \in \mathbf{x}_i$, $i=\overline{1,n}$ uchun

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = F(x_1, x_2, ..., x_n),$$
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \subseteq \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n),$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan teorema interval analizda, *interval arifmetikaning asosiy (fundamental) teoremasi* deb ham yuritiladi.

Oldingi paragrafda intervallarni tasvirlashning ikki usuli, ya’ni uning chegaralari hamda o‘rtasi va radiusi orqali ifodalanishi bilan tanishgan edik. Agar sonlar tekisligida shu tasvirlashlarni ifodalamoqchi bo‘lsak, u holda quyidagi tasvirlarga ega bo‘lamiz:



Rasm 1. *Interval tekisliklar*

Bu rasmlardan ko‘rinib turibdiki, $\mathbf{I(R)}$ni koordinatalar tekisligida tasvirlaganimizda, interval tekisliklar (ikkala holda ham) to‘laligicha foydalanilmay qolayapti, uning yarmisi foydalaniladi. Bu cheklashlar klassik interval arifmetikaning takomillashgan ko‘rinishlarida (keyingi paragrafga qarang) ma’lum bir manoda yo‘qotiladi.

III-BOB. INTERVAL KOMPLEKS SONLAR VA ULAR USTIDA ALGEBRAIK AMALLAR

3.1. Kompleks interval sonlarining berilish usullari.

Haqiqiy sonlar to`plami - $R$ dan farqli o`laroq kompleks sonlar to`plami - $C$ «ikki o`lchovli» to`plamdir. Shuning uchun bu to`plamda intervallarni bir necha usullarda tasvirlash mumkin.

To`gri to`rtburchaklar va kompleks tekisligining aylanalari - eng ko`p qo`llaniladigan kompleks intervallar hisoblanadi.

$\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{I}(R)$ intervallar uchun *to`gri to`rtburchakli kompleks interval* - $\mathbf{a}+i\mathbf{b}$ deb kompleks tekislikning quyidagicha aniqlanadigan

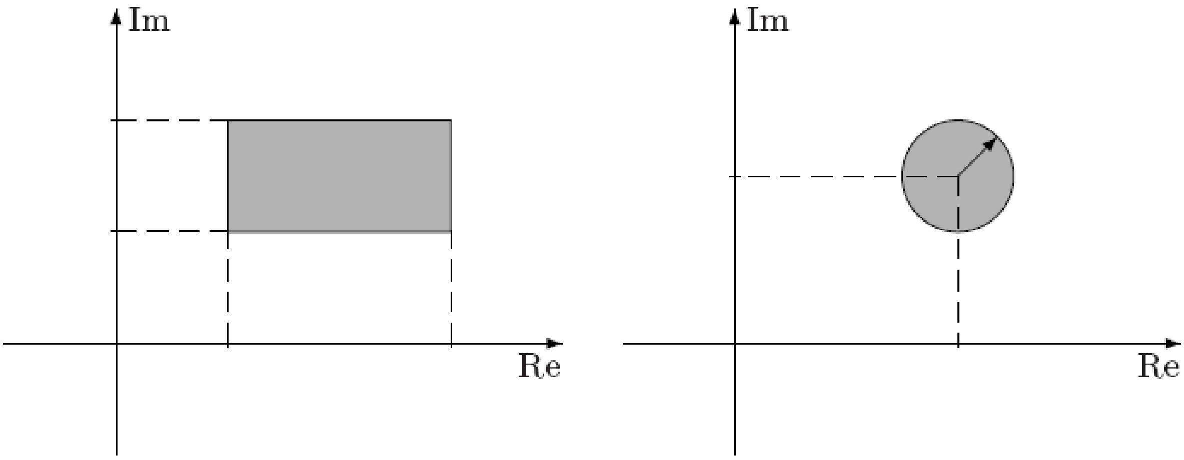
$$\left\{z = a + ib \in C \,\middle|\, a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\right\}$$

to`plamiga aytiladi. Bundan keyingi bayonimizda to`g`ri to`rtburchakli kompleks intervalni oddiygina qilib *kompleks interval* deb ataymiz.

Kompleks tekisligining quyidagicha

$$\{z \in C \,\big|\, |z - c| \le r\}$$

aniqlanadigan to`plamiga esa doiraviy kompleks interval deb ataladi va $\langle c, r \rangle$ kabi belgilanadi. Bunda $c \in C, r \in R$ va $r \ge 0$.



Rasm 2. *To`gri to`rtburchakli va doiraviy kompleks intervallar*

Quyidagicha belgilash kiritib olamiz: $\mathbf{I}(C)_{rect}$ - barcha kompleks intervallar to`plami;   - barcha doiraviy kompleks intervallar to`plami. Agar matnning mazmunidan ikkala to`plamga ham tegishli arifmetik amallar ustida so`z yuritilsa, u holda kompleks intervallar to`plamini qisqacha qilib $\mathbf{I}(C)$ deb belgilaymiz.

Ta'rif. $\mathbf{z} \in \mathbf{I}(C)$ *kompleks intervalning absolyut qiymati deb,* $|\mathbf{z}| = \max\{|z| \mid z \in \mathbf{z}\}$ munosabat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

$\mathbf{z} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ formula bilan aniqlanadigan kompleks interval uchun u $|\mathbf{z}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2}$ ga teng, $\mathbf{z} = \langle c, r \rangle$ doiraviy kompleks interval uchun esa uning qiymati $|z| = |c| + r$ bilan ifodalanadi.

3.2. Kompleks intervallar ustida arifmetik amallar.

Kompleks intervallar ustida arifmetik amallar quyidagicha aniqlanadi:

$$\left(\mathbf{a}_1+i\mathbf{b}_1\right)+\left(\mathbf{a}_2+i\mathbf{b}_2\right)=\left(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\right)+i\left(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2\right),$$
$$\left(\mathbf{a}_1+i\mathbf{b}_1\right)-\left(\mathbf{a}_2+i\mathbf{b}_2\right)=\left(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2\right)+i\left(\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2\right),$$
$$(\mathbf{a}_1+i\mathbf{b}_1)*\left(\mathbf{a}_2+i\mathbf{b}_2\right)=\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2-\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\right)+i\left(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2+\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1\right),$$
$$\left(\mathbf{a}_1+i\mathbf{b}_1\right):(\mathbf{a}_2+i\mathbf{b}_2)=\frac{1}{\left|\mathbf{a}_2+i\mathbf{b}_2\right|^2}\left(\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\right)+i\left(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1-\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{\left|\mathbf{a}_2\right|^2+\left|\mathbf{b}_2\right|^2}\left(\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2+\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\right)+i\left(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1-\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\right)\right).$$

Bunda bo`lish amalida $0\notin(\mathbf{a}+i\mathbf{b})$.

Doiraviy kompleks intervallar uchun arifmetik amallar quyidagicha aniqlanadi:

$$\left\langle c_1,r_1\right\rangle+\left\langle c_2,r_2\right\rangle=\left\langle c_1+c_2,r_1+r_2\right\rangle,$$
$$\left\langle c_1,r_1\right\rangle-\left\langle c_2,r_2\right\rangle=\left\langle c_1-c_2,r_1+r_2\right\rangle,$$
$$\left\langle c_1,r_1\right\rangle*\left\langle c_2,r_2\right\rangle=\left\langle c_1c_2,\left|c_1\right|r_2+\left|c_2\right|r_1+r_1r_2\right\rangle,$$
$$\frac{1}{\left\langle c,r\right\rangle}=\left\langle\frac{c^*}{\left|c\right|^2-r^2},\frac{r}{\left|c\right|^2-r^2}\right\rangle,$$
$$\left\langle c_1,r_1\right\rangle:\left\langle c_2,r_2\right\rangle=\left\langle c_1,r_1\right\rangle*\frac{1}{\left\langle c_2,r_2\right\rangle}.$$

Bu yerda c^*-c ga qo`shma bo`lgan kompleks sondir.

3.3. Kompleks intervallar arifmetikasining algebraik xossalari.

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$,
2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\boldsymbol{\omega}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega})$,
3. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$,
4. $\mathbf{u}(\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega})\subseteq\mathbf{u}\mathbf{v}+\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}$.

Shuni ta'kidlash kerakki, kompleks intervallar arifmetikasida ko`paytirish amali assotsiativlik xossasini saqlamaydi. Masalan, $\mathbf{u} = ([1,2]+i)$, $\mathbf{v} = (1+i)$ va $\boldsymbol{\omega} = (1+i)$ intervallar uchun

$$\mathbf{(uv)}\boldsymbol{\omega} = ([0,1]+i[2,3]) * (1+i) = [-3,-1]+i[2,4],$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}) = ([1,2]+i) * 2i = -2+i[2,4].$$

Buning sababi shundaki, distributivlik xossasi $\mathbf{I}(\mathbb{C})$da hamma vaqt bajarilmaydi. Ammo doiraviy kompleks intervallar arifmetikasida esa distributivlik xossasi bajariladi:

$$\mathbf{(uv)}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}(\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}),\ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{I}(C)_{circ}.$$

3.4. Kompleks intervallar arifmetikasining monotonlik xossasi.

Kompleks interval arifmetika monoton xossasiga ega, ya'ni har qanday $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{I}(C)$ intervallar hamda $* \in \{+, -, \cdot, /\}$arifmetik amallar uchun

$$\mathbf{u} \subseteq \mathbf{u}',\ \mathbf{v} \subseteq \mathbf{v}' \Rightarrow \mathbf{u} * \mathbf{v} \subseteq \mathbf{u}' * \mathbf{v}'$$

munosabat o`rinlidir.

Haqiqiy intervallar to`plamida bu munosabatni bajarilishini tekshirish hech qanday qiyinchilik tug`dirmaydi. Doiraviy kompleks intervallar uchun bu munosabatni bajarilishi ochiq ko`rinmaydi va maxsus shakl almashtirishlarni talab qiladi.

3.5. Kompleks intervallar arifmetikasida interval arifmetikaning asosiy teoremasi.

Teorema. Agar kompleks ratsional funksiya – $f(z_1, z_2, ..., z_n)$da $z_1, z_2, ..., z_n$ kompleks miqdorlar, mos ravishda $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_n$ interval kompleks miqdorlar hamda ular ustida bajariladigan arifmetika esa kompleks interval arifmetika bilan almashtirilib, $\mathbf{f}\left(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,...,\mathbf{z}_n\right)$ -kompleks interval funtksiya hosil qilingan bo`lsa, u holda

$$\left\{f\left(z_1,...,z_n\right)\middle|z_1\in\mathbf{z}_1,...,z_n\in\mathbf{z}_n\right\}\subseteq\mathbf{f}\left(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,...,\mathbf{z}_n\right),\ \mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,...,\mathbf{z}_n\in\mathbf{I}\left(C\right)$$

munosabat hamma vaqt o`rinli bo`ladi, ya'ni, $\left(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,...,\mathbf{z}_n\right)$ da $\mathbf{f}\left(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,...,\mathbf{z}_n\right)$ - $f\left(z_1,z_2,...,z_n\right)$ funksiyaning qiymatlar to`plamini o`z ichiga oladi.

Bu teoremaning isboti haqiqiy intervallar arifmetikasidagi kabi amalga oshiriladi.

3.6. To`g`ri to`rtburchakli kompleks interval sonlarning geometrik interpretatsiyasi.

Biz esa quyida to`rtburchakli interval kompleks son va uning modulining geometrik ma'nosi haqida bir nechta misollar ko`rib chiqamiz.

Tarif. Z kompleks intervalning absolyut qiymati deb, $|\boldsymbol{Z}| = max\{|z||z \in \boldsymbol{Z}|\}$ munosabat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi. $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}i$ formula bilan aniqlanadigan kompleks intervallar uchun u

$$|\boldsymbol{Z}| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2} \quad (1)$$

ga teng. Bu yerda $\mathbf{a}=[\underline{a},\overline{a}]$ va $\mathbf{b}=[\underline{b},\overline{b}]$ interval sonlar.

a intervalning absolyut miqdori yoki moduli

$$|\mathbf{a}| = \max\{|a|, a\in\mathbf{a}\} = \max\left\{|\underline{a}|,|\overline{a}|\right\} \quad (2)$$

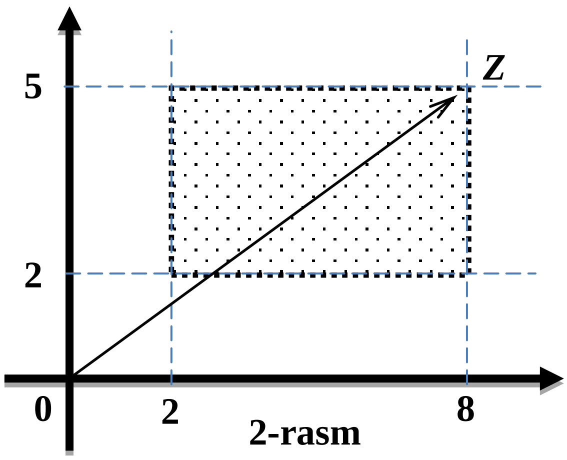
ifoda orqali aniqlanadi.

(1) hamda (2) ifodalardan foydalanib kompleks intervallarning moduli topiladi.

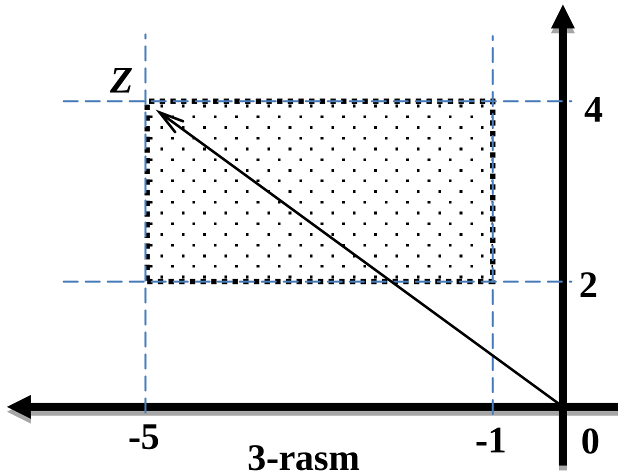
1-misol. **Z**=[2,8]+i[2,5] kompleks intervalning modulini hisoblaymiz:

$|\mathbf{Z}|=\sqrt{(\max(|2|,|8|))^2+(\max(|2|,|5|))^2} = \sqrt{8^2+5^2} = \sqrt{89} \approx 9{,}43.$

Z=[2,8]+i[2,5] kompleks instervalning moduli koordinatalar sistemasida (0, 0) va (8, 5) nuqtalarni tutashtiruvchi vector uzunligiga teng bo`ladi (2-rasm).



2-rasm



3-rasm

2-misol. Z=[-5,-1]+i[1,4] kompleks intervalning modulini hisoblaymiz:

|**Z**|=$\sqrt{(\max(|-5|,|-1|))^2+(\max(|2|,|4|))^2} = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}4.$

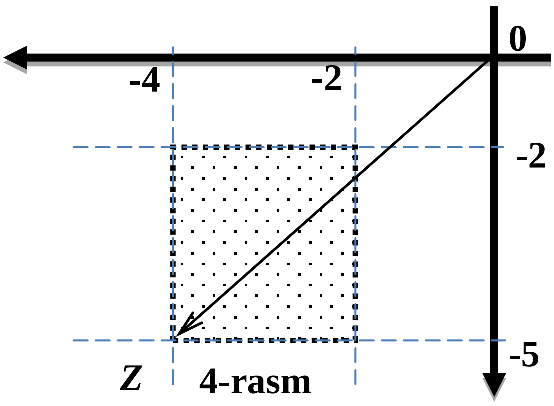
Z=[-5,-1]+i[2,4] kompleks instervalning moduli koordinatalar sistemasida (0, 0) va (-5, 4) nuqtalarni tutashtiruvchi vektor uzunligiga teng bo`ladi (3-rasm).

3-misol. Z=[-4,-2]+i[-2,-5] kompleks intervalning modulini hisoblaymiz:

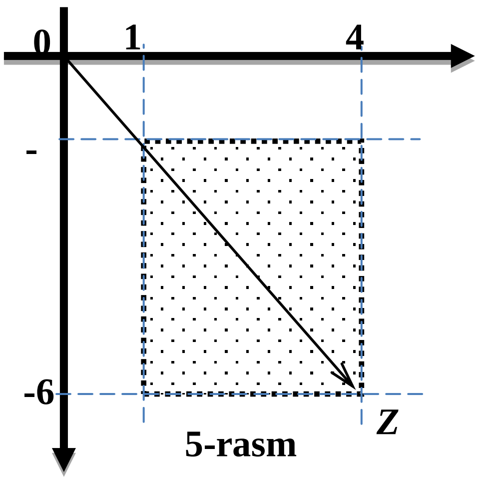
|**Z**|=$\sqrt{(\max(|-4|,|-2|))^2+(\max(|-2|,|-5|))^2} = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}4.$

Z=[-4,-2]+i[-2,-5] kompleks instervalning moduli koordinatalar sistemasida (0, 0) va (-4, -5) nuqtalarni tutashtiruvchi vektor uzunligiga teng bo`ladi (4-rasm).

4-misol. Z=[1,4]+i[-2,-6] kompleks intervalning modulini hisoblaymiz:



4-rasm

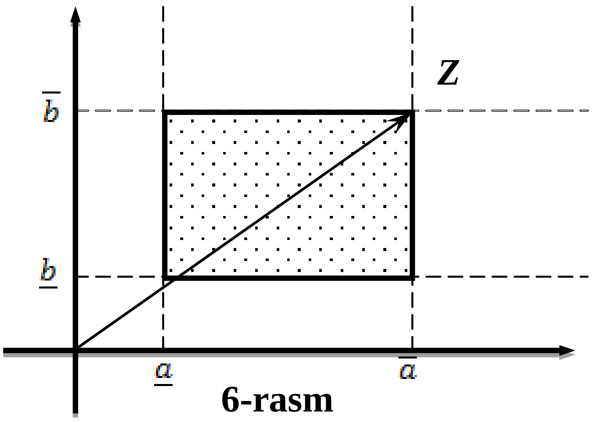


5-rasm

|**Z**|=$\sqrt{(\max(|1|,|4|))^2+(\max(|-2|,|-6|))^2} = \sqrt{4^2+6^2} = \sqrt{52} \approx 7{,}2.$

Z=[1,4]+i[-2,-5] kompleks instervalning moduli koordinatalar sistemasida (0, 0) va (4, -6) nuqtalarni tutashtiruvchi vektor uzunligiga teng bo`ladi (5-rasm).

Yuqorida ko`rib chiqilgan misollardan shunday xulosa qilish mumkin. Ya'ni ***Z*** = $[\underline{a}, \overline{a}]$+i$[\underline{b}, \overline{b}]$ kompleks intervalning absolyut qiymati (0,0) koordinatali nuqtadan $(\max[\underline{a}, \overline{a}], \max[\underline{b}, \overline{b}])$ koordinatali nuqtagacha bo`lgan vektor uzunligiga teng bo`ladi (6-rasm).



6-rasm

3.7. INTLAB paketida komplex intervallar ustida amallar

Keyingi yillarda yana bir samarali yo'nalish sonli – interval hisoblashlarni simvolli analitik hisoblashlar (kompyuter algebrasi) bilan uyg'unlashtirish usuli ancha rivojlanmoqda. Bu uyg'unlashtirish analitik hisoblashlarda sonli yechimlarni boshqariladigan yuqori aniqlikdagi ishonchli ko'rinishda olishga imkon beradi. Ikkinchi tomondan analitik hamda interval hisoblashlarni birgalikda amalga oshirish, ko'p hollarda olinadigan interval yechimning kengayib ketish (Wrapping effect[1]-эффект расскрутки) effektining oldini olishga yordam bermoqda. Shuning uchun Maple, Matlab, Mathematica, Scilab kabi kompyuter algebrasi tizimlarida interval tipli ma'lumotlarni qo'llash odat tusiga kirmoqda. Kompyuter algebrasi tizimlarining paydo bo'lishi, analitik hisoblashlarni ularda oson va tez amalga oshirish foydalanuvchiga ancha imkoniyatlar yaratib bermoqda. Shunday

[1] Interval yechimlarning ba'zi iteratsion jarayonlarda kengayib ketish holatini birinchi bo`lib, XX asrning 60-yillarida AQSH olimi R.E.Mur tomonidan aniqlangan. Tashqi interval baholash masalasida bunday yechimlar optimal yechim hisoblanmaydi.

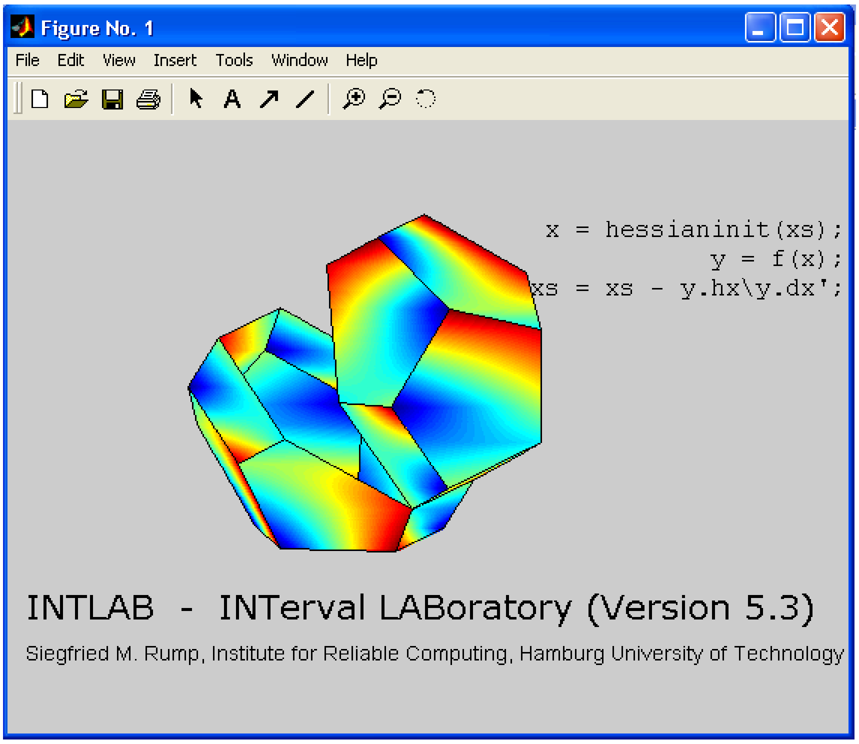
paketlardan biri – klassik interval arifmetikasi asosida yaratilgan MATLAB tizimi tarkibida ishlovchi INTLAB paketi hisoblanadi.

Nemis matematigi Rump tomonidan yaratilgan va hozirgi kunda juda ko’p tadqiqotchilar tomonidan unumli foydalanilayotgan **«INTLAB»** dasturlar majmuasi haqidagi ma’lumotlarni va uning dasturlar kutubxonasini Internet ning **http://www.ti3.tu-harburg.de/~rump/intlab/index.html** saytidan topish mumkin. Ushbu ish yozilish vaqtida eng oxirgi versiyasi INTLAB 5.3 bilan ish ko`rildi.
INTLAB paketida quyidagi soha algoritmlari bo`yicha hisoblashlarni amalga oshirish mumkin:

- haqiqiy intervallar va shu tipdagi massivlar (vektor va matrisalar) ustida arifmetik amallar;
- avtomatik differensiallash (parallel hisoblashlar);
    - chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechish uchun gradientlar;
    - Hessian bo`yicha global optimallashtirish (ko`p o`zgaruvchili funksiyalar uchun);
- bir va ko`p o`zgaruvchili interval ko`phadlar;
- haqiqiy intervalli elementar funksiyalar;
- kompleks intervalli elementar funksiyalar

va boshqalar.

Bu yerda biz ***Intlab***dan foydalanish haqida qisqacha ma’lumot beramiz. Foydalanuvchi “>>” komandasidan so‘ng quyidagi ma’lumot bo‘yicha ishlashi kerak. Foydalanuvchi Matlab bilan tanish bo‘lish va Intlabni to‘g‘ri o‘rnatgan bo‘lishi muhim. Intlabga kirish uchun >>**startintlab** ni tering.



Bu ***intlab*** kutubxonasiga kirib Matlab qidiruv tizimi so‘ralgan global o‘zgarishlarga kirishni ta’minlaydi.

Intervalga kirishning 4 yo‘li bor. Birinchisi bu matritsaning nuqtasiga kirishga eltuvchi *intval* funksiyadir. Keyingisi 2×2 interval nuqtasi matritsani keltirib chiqaradi.

```
>> A=intval([1.2,5,10;21,10,9])
intval A =
    1.2000    5.0000   10.0000
   21.0000   10.0000    9.0000
>> A=intval('1.2 5 10 21 10 19')
intval A =
    1.2000
    5.0000
   10.0000
   21.0000
   10.0000
   19.0000
```

Birinchi komponent endi 1.2 yig‘indi. Bu radius 0 ga teng bo‘lmaganda ko‘rinishi mumkin.

```
>> rad(A(1,1))
ans =
  2.2204e-016
```

Yodingizda tuting, A bu vektor ustuni. Barcha natija chiziqli argumenti shu formadagi vektorni keltirib chiqaradi. Bu 2×3 matritsasi quyidagi bilan o‘zlashtirilishi mumkin:

```
>> A=reshape(A,2,3)
intval A =
    1.2000   10.0000   10.0000
    5.0000   21.0000   19.0000
```

Uchinchi alternativ bu uning o‘rta nuqtasi va radiusi orqali interval berish.

```
>> A=midrad([1.2,5,10;21,10,9],1e-4)
intval A =
    1.2000     5.0000   10.0000
   21.0000   10.0000     9.0000
```

Va nihoyat intervallarni infimum va supremum orqali kirish mumkin.

```
>> C = infsup([-1,0;2,4],[-0.9,0;2.4,4.01])
intval C =
-0.9_ _ _           0.0000
2._ _ _  _          4.00_ _
```

Kompleks sonli intervallarga murakkab raqam bilan belgilangan o‘rta nuqta yoki radius belgilash sistemasi orqali kirish mumkin.

```
>>a=midrad(9-13i,0.1)
intval a =
  9.0___ - 13.0___i
```

Agar kompleks son haqiqiy chiziqda o‘rta nuqtaga ega bolsa, yuqoridagi usul haqiqiy intervalda natija bo‘lishi mumkin. Uning o‘rnida quyidagi qo‘llanilishi kerak.

>> z=cintval(7,0.1)

intval z =

7.0___ + 0.____i

Bu hohlagan kompleks intervalga uning o‘rta nuqtasi va radiusi orqali kirishda ishlatilishi mumkin. Yetishmaydigan qoldiq taxmin ko‘rsatiladi. Bu intervalga kirish 1 ko‘rsatkichli sonlar ko‘rsatilganidek o‘rta nuqta orqali kirishni va oxirgi shaklda ko‘rsatilganidek kirishni anglatadi. Intervalning o‘rta nuqta, radius, infimum va supremumlariga erishish mumkin.

Interval analizda qaraladigan ichki va tashqi baholash masalalarida izlanayotgan aniq yechimlar to‘plamini qirralari koordinata o‘qlariga parallel bo‘lgan n o‘lchovli parallelopipedlar yordamida mos ravishda ichki va tashqi tomondan qoplanadi. Odatda tadqiqotchilar ichki baholashda eng katta, tashqi baholashda eng kichik parallelopipedlarni qurishga harakat qilishadi. Demak, interval masalalarni yechishda masalaning geometrik tomoni muhim o‘rin tutadi.

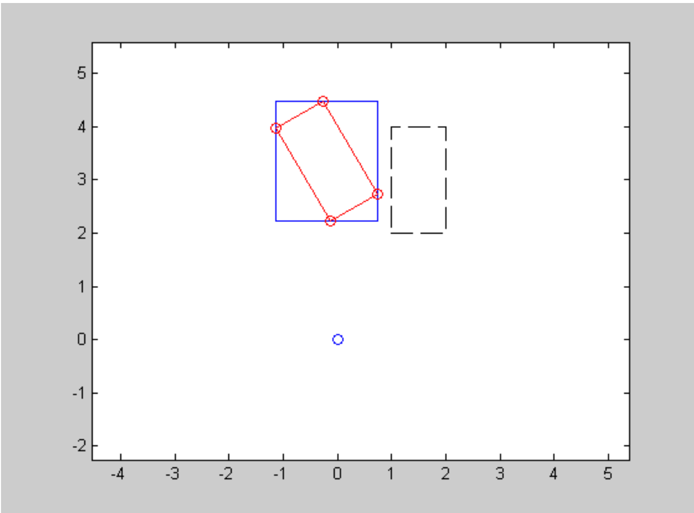
Biz quyida INTLAB paketining grafik imkoniyatlarini ko‘rib chiqamiz:

1. 30^0 li aylantirishlar 2 x 2 Q matrisasi va pastki chap uchi (1,1) nuqtada, o‘ng yuqori uchi (3,3) nuqtada bo‘lgan X qoplama uchun

```
>> phi = 30*pi/180;
Q = [ cos(phi) -sin(phi) ; sin(phi) cos(phi) ]
X = [ infsup(1,2) ; infsup(2,4) ]

Q =

   0.86602540378444  -0.50000000000000
   0.50000000000000   0.86602540378444

intval X =

   2._____________
  1_._____________
```

Natija Q*X interval vektor bo‘ladi, shuningdek u aniq yechimni o‘zida saqlovchi eng kichik vektordir Q*x, ya’ni barcha $x \in X$ lar uchun.

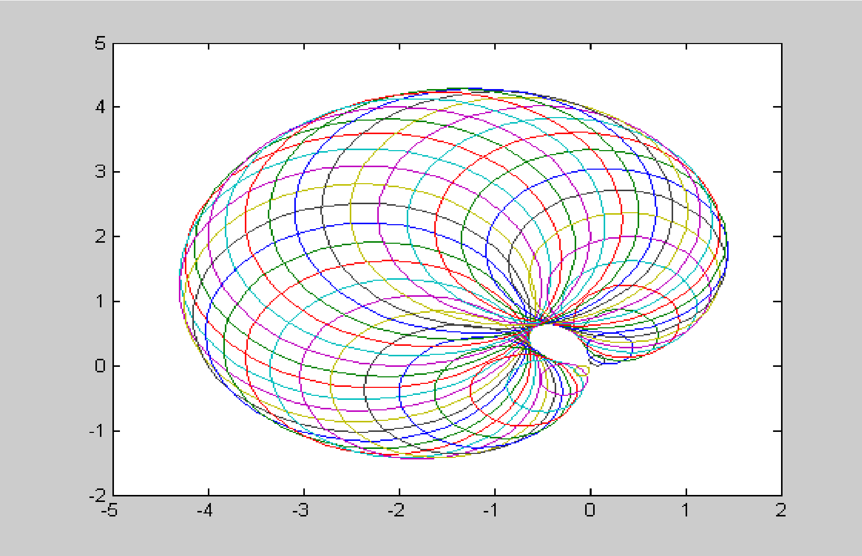
```
>>Y = Q*X
plotintval(Y), hold on
x = [1 1 2 2;2 4 2 4]; y = Q*x;
index = convhull(y(1,:),y(2,:));
plot(0,0,'o‘)
plot(x(1,index),x(2,index),'k--')
plot(y(1,index),y(2,index),'r-o‘)
axis equal

intval Y =

-0_.______________
  1_.______________
```



Chizmadagi qizil ragnli figura – aniq yechim, ko‘k ranglisi esa interval baho.

2. Kompleks intervalli baho:

```
>> kmax=40; i=sqrt(-1); a=midrad(1,1); b=midrad(-1+i,1);
>> plotintval(a*b);
>> phi=linspace(0,2*pi, kmax);
>> [A,B]=meshgrid(mid(a)+rad(a)*exp(i*phi),
mid(b)+rad(b)*exp(i*phi));
>> plot(A.*B)
```

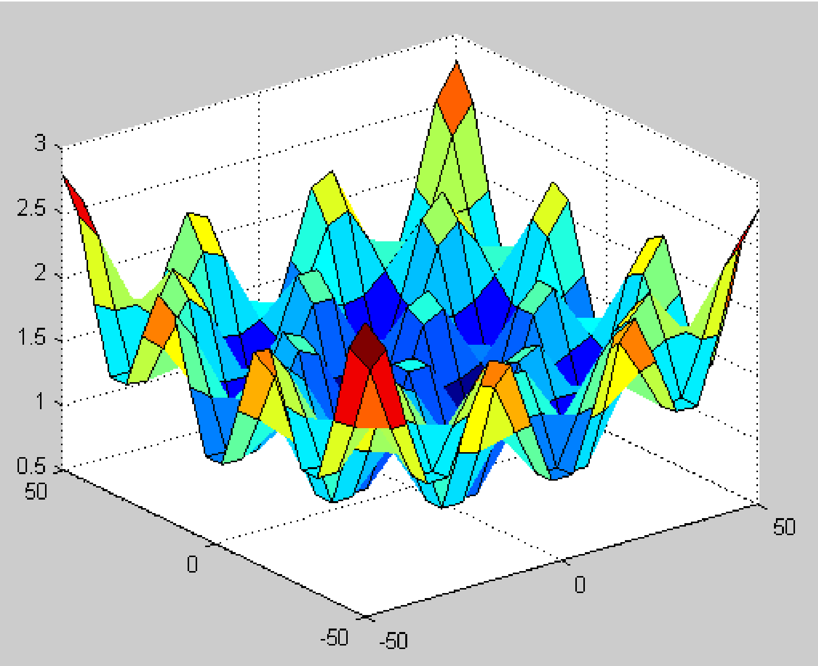


3. Global optimallashtirish masalasi:

```
f = inline(' (x.^2+y.^2)/4000 + cos(x).*cos(y)/sqrt(3) + 1 ')
     f =
         Inline function:
        f(x,y) = (x.^2+y.^2)/4000 + cos(x).*cos(y)/sqrt(3) + 1
```

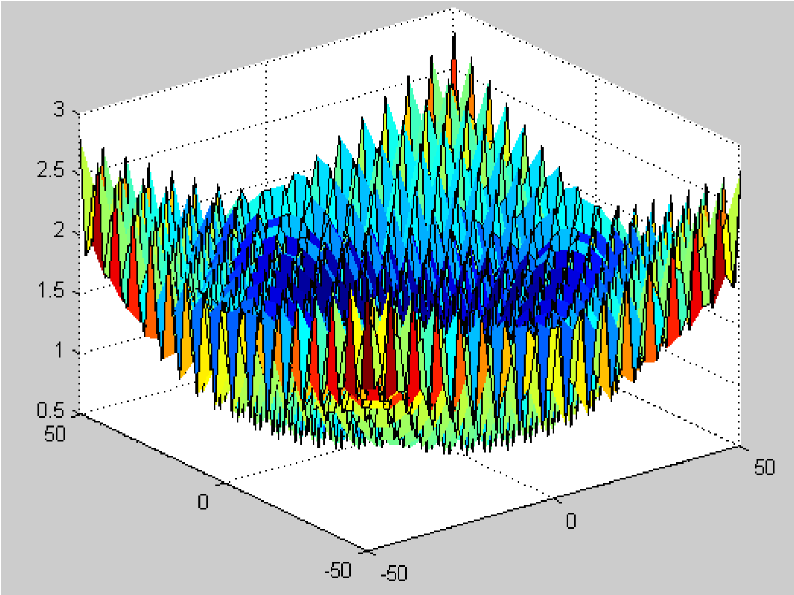
Berilgan funksiya uchun quyida keltirilgan qiymatlarda minimumni topish talab qilinadi.

```
-50 <= x <= 50
-50 <= y <= 50
>> kmax = 20;
[x,y] = meshgrid(linspace(-50,50,kmax));
surf(x,y,f(x,y))
```



Agar `kmax` parametrga 50 qiymatini bersak,

```
>> kmax = 50;
[x,y] = meshgrid(linspace(-50,50,kmax));
surf(x,y,f(x,y))
```



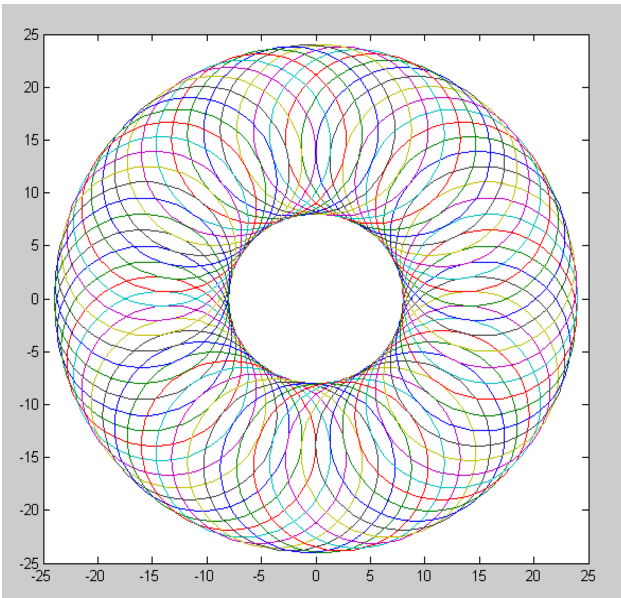
kmax=52; i=sqrt(-1); a=midrad(4,5); b=midrad(3+2*i,2);

plotintval(a*b^1/2);

phi=linspace(0,3*pi, kmax);

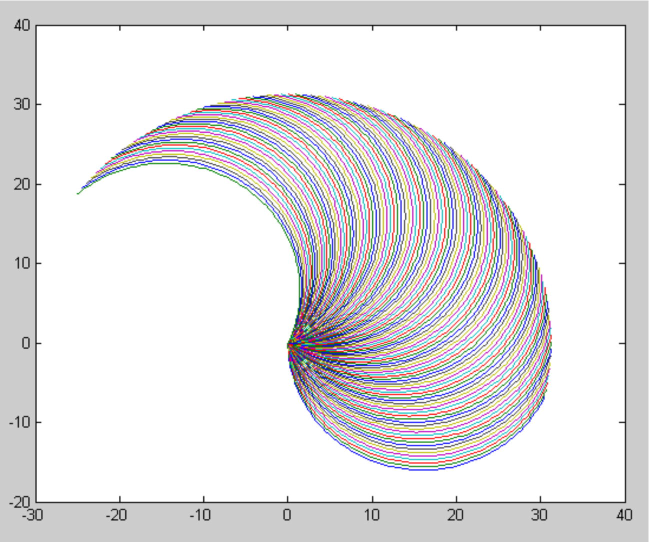
[A,B]=meshgrid(mid(a)*exp(i*phi), mid(a)-rad(b)*exp(i*phi));

plot(A.*B)



kmax=9; i=sqrt(-1); a=midrad(4,5); b=midrad(10+6*i,4);
plotintval(a^1/2*b^2);

phi=linspace(2*pi, kmax);
[A,B]=meshgrid(mid(a)*exp(i*phi), mid(a)-rad(b)*exp(i*phi));
plot(A.*B)



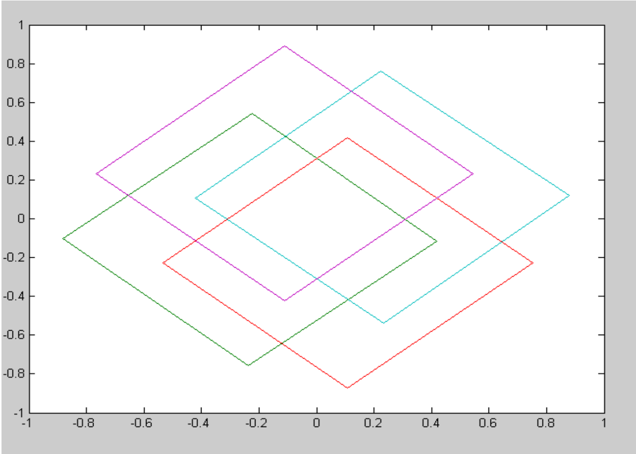
kmax=5; i=sqrt(-1); a=midrad(1,100); b=midrad(-11+23i,65);

plotintval(a*b);

phi=linspace(0,2*pi, kmax);

[A,B]=meshgrid(mid(a)+rad(a)*exp(i*phi), mid(b)+rad(b)*exp(i*phi));

plot(A.*B)



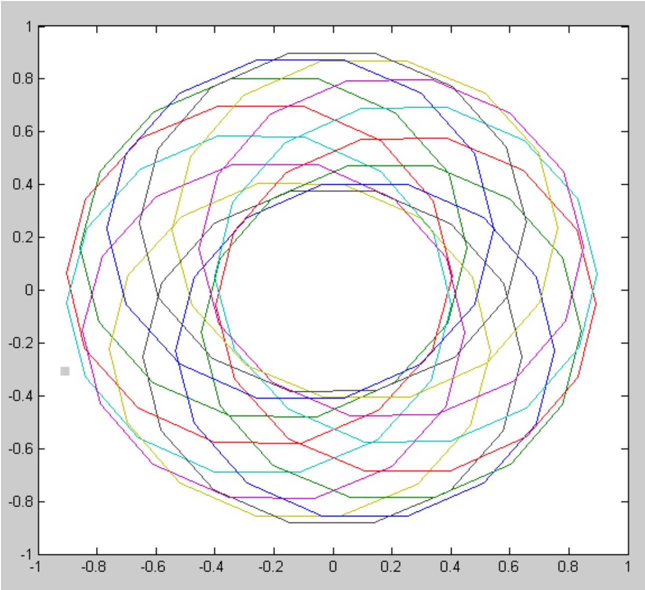
kmax=15; i=sqrt(-1); a=midrad(1,100); b=midrad(-11+23i,65);

plotintval(a*b);

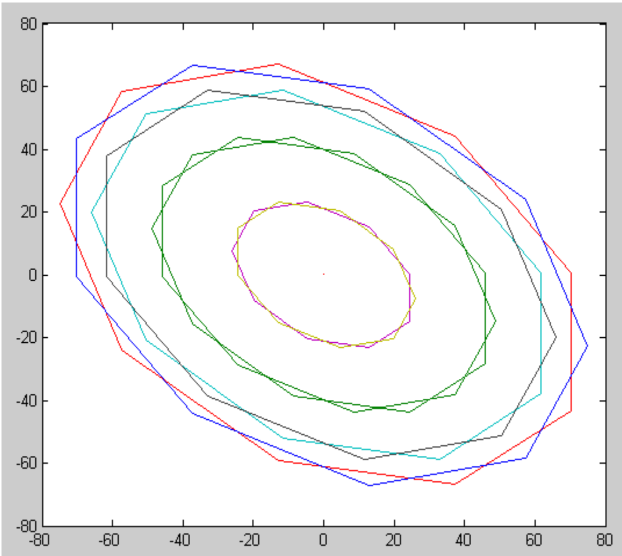
phi=linspace(0,2*pi, kmax);

[A,B]=meshgrid(mid(a)+rad(a)*exp(i*phi), mid(b)+rad(b)*exp(i*phi));

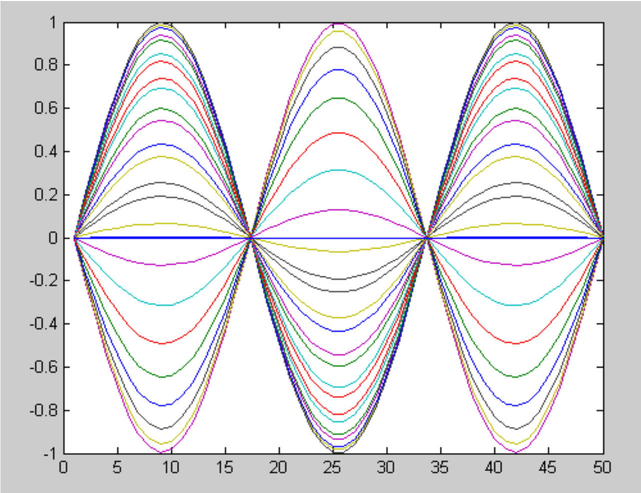
plot(A.*B)



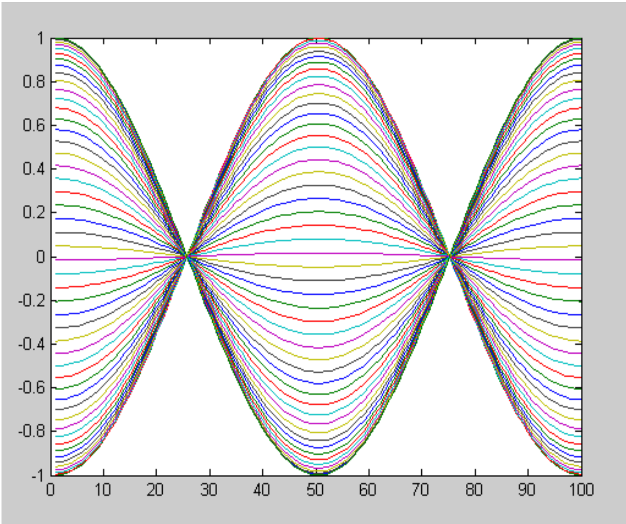

```
kmax=10; i=sqrt(-1); a=midrad(1,100); b=midrad(-11+23i,65);
plotintval(a*b);
phi=linspace(0,2*pi, kmax);
[A,B]=meshgrid(sin(phi), cos(phi)*mid(b)-rad(b)*exp(i*phi));
plot(A.*B)
```




```
kmax=50; i=sqrt(-1); a=midrad(14,53); b=midrad(25-13i,35);
plotintval(a*b);
phi=linspace(0,3*pi, kmax);
[A,B]=meshgrid(sin(phi));
plot(A.*B)
```




```
kmax=100; i=sqrt(-1); a=midrad(12,80); b=midrad(-31+40i,46);

plotintval(a*b);
phi=linspace(0,2*pi, kmax);
[A,B]=meshgrid(cos(phi));
plot(A.*B)
```



XULOSA

Hozirgi kunda optimal boshqarish, robototexnika, umuman matematik modellashtirish sohasidagi ko`pgina amaliy masalalarni yechishda interval analiz usullari keng tadbiq qilinmoqda. Interval analiz usullari – amaliy masalalarni yechish jarayonida yuzaga keladigan barcha turdagi xatoliklarni tahlil qilish, qaralayotgan masaladagi, qiymatlari ma’lum amplitudada tebranib turuvchi parametrlar aniqmasliklarini hisobga olish kabi muhim xususiyatlarga ega. Bu usullarni rivojlantirish, ular yordamida “ishonchli” hisoblash eksperimentlarini tashkil qilish va o`tkazish hozirgi zamon amaliy matematikasi muhim masalalaridan biridir.

Bitiruv malakaviy ishi kompleks sonlar maydonining interval kengaytmasiga bag`ishlanadi. Ishda oddiy kompleks sonlarga oid barcha tushunchalar keltirilsada, asosiy e’tibor interval analiz asoslari, xususan, interval kompleks sonlar va ularning xossalariga qaratiladi.

Ishda interval kompleks sonlar ustida bajariladigan amallar, oddiy arifmetik amallardan ancha farq qilishi ko`rsatib o`tilgan. Chunki, bunda oddiy son emas, balki intervallar (to`plamlar) ustida, shuningdek, interval kompleks sonlar ustida amallar bajariladi. Masalan, oddiy ikkita sonni qo`shish uchun bitta arifmetik amal bajarilsa, ikkita haqiqiy interval sonni qo`shish uchun ikkita arimetik amal, ikkita interval kompleks sonlarni qo`shish uchun esa 4 ta arifmetik amalni bajarishga to`g`ri keladi.

Bitiruv malakaviy ishida asosan, to`g`ri to`rtburchakli kompleks sonlar maydoni va undagi arifmetik amallarni bajarish qoyidalari, interval kompleks sonli funksiyalar, ularning grafiklarini IntLab deb ataluvchi kompyuter amaliy dasturida qurish usullari o`rganilgan.

Bitiruv malakaviy isida keltirilgan ma’lumotlardan kompleks sonlar o`qitiladigan kurslarda o`qituvchi va talabalar, shuningdek, interval analiz sohasida faoliyat olib borayotgan tadqiqotchilar foydalanishlari mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. T. Sharifova, E. Yo`ldoshev Matematik analizdan misol va masalalar yechish, “O`qituvchi”, T., 1996.
2. A. Abduhamidov va b. Algebra va matematik analiz asoslari. I qism, “O`qituvchi”, T., 2001.
3. A.A.Abduhamidov va b. Algebra va matematik analiz asoslari, II qism, T. 2000 y.
4. С.П.Шарый Конечномерный интервальный анализ. Издательство “XYZ”, электронная книга, Новосибирск, 2010.
5. Alefeld G., Xersberger Yu. Введение в интервальные вычисления. – М.:Мир, 1987.
6. Sh.T.Maqsudov, M.Salohiddinov, S. Sirojiddinov “Kompleks o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi” T. 1970 y.
7. Sh.T.Maqsudov. Analitik funksiyalar nazariyasidan mashqlar. T. 1978 y.
8. R.N. Vafoyev va b. Algebra va analiz asoslari, T. 2001 y.
9. A.A.Abduhamidov va b. Algebra va matematik analiz asoslari, I qism, T. 2000 y.
10. Sh.A. Alimov va b. Algebra va analiz, o‘rta maktabning 10-11 sinflari uchun darslik, T. 1996 y. va undan keyingi yillardagi nashrlari.
11. A.N. Kolmogorov, “Algebra va analiz asoslari” 10-11 sinflar uchun darslik, T. 1992 y.
12. E.S. Kochetkov va E.S.Kochetkova, Algebra va elementar funksiyalar, I -II qism, T. 1967 y.
13. A.R. Kiselev. Algebra, o‘rta maktablar uchun darslik T. 1964 y.
14. Энциклопедия Элементарной математики, III том, 1952 г.
15. М.Л. Краснов и др. Функции комплексного пременного..., М. 1971 г.
16. И.И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного, М. 1954 г.
17. Bradis V.M. Teoriya i praktika vichisleniy. Posobie dlya visshix pedagogicheskix uchebnix zavedeniy. –Moskva: Uchpedgiz, 1937.
18. Dobrones B.S., Shaydurov B.B. Dvustoronnie chislennie metodi. – Novosibirsk: Nauka, 1990.
19. Kalmikov S.A., Shokin Yu.I., Yuldashev Z.X. Metodi intervalnogo analiza. Novosibirsk: Nauka, 1986.

20. Kantorovich L.V. O nekotorix novix podxodax k vichislitelnim metodam i obrabotke nablyudeniy // Sibirskiy Matematicheskiy Jurnal. – 1962. – T. 3, №5. – S. 701–709.

21. Menshikov G.G. Intervalniy analiz i metodi vichisleniy. Konspekt leksiy. – Sankt-Peterburg: SPbGU, Fakultet prikladnoy matematiki-protsessov upravleniya, 1998–2003.

22. Shokin Yu.I. Intervalniy analiz. – Novosibirsk: Nauka, 1981. –112s.

23. Shokin Yu.I. Ob intervalnix zadachax, intervalnix algoritmax i ix trudoyomkosti // Vichislitelnie texnologii. – Novosibirsk. Izd. SO RAN – 1996. –T. 1, №1 – s. 98–115.

24. Dwyer P.S. Linear Computations. – New York: John Wiley & Sons, 1951.

25. Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space IR // Computing Supplement. - 1977. -N1.P. 65-79.

26. Moore R.E. Interval analysis. – Englewood Cliffs. N.J.: Prentice Hall, 1966.

27. Moore R.E. Methods and applications of interval analysis. – Philadelphia: SIAM, 1979.

28. Neumaier A. Interval methoda for systems of equations. –Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

29. Ratschek H. Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik // Journal fЁur die reine und angewandte Mathematik. – 1972. – Bd. 252. – S. 128–138.

30. Rump S.M. «INTLAB»-INTerval LABoratory //Developments in Reliable Computing / Csendes T., ed.-Dordrecht: Kluwer academic Publishers, 1998. -P. 77-104.

31. S.M. Markov (Ed.), Scientific Computation and «Mathematical» Modelling, DATECS Publishing, Sofia, 1993.

32. S.M. Rump. «INTLAB» - INTerval LABoratory. In Tibor Csendes, editor, *Developments in Reliable Computing*, pages 77. Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, 1999. http://www.ti3.tu-harburg.de/english/index.html.

33. Sunaga T. Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // RAAG Memoirs. – 1958. – Vol. 2, Misc. II. – P. 547–564.

34. Warmus M. Calculus of approximations // Bull. Acad. Polon. Sci. – 1956. – Cl. III, vol. IV, No. 5. – P. 253–259.

35. www.edu.uz - O`liy va o`rta maxsus ta'lim vazirligi portali.

36. www.Ziyonet.uz - jamoat ta'lim tarmog`i.

37. www.exponenta.ru – matematik paketlar haqida ilovalar.