



**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI XALQ TA'LIMI
VAZIRLIGI**

NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

Fizika-matematika fakulteti

“Matematika o'qitish metodikasi” kafedrası

Xudoyberdiyev Xayotjon Ochiltosh o'g'lining

5110100-Matematika o'qitish metodikasi yo'nalishi 4-kurs “A”

guruhi talabasining

“Operatorlar va ularning tadbiqlari”

mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar: f-m,f.d.,prof. Imomkulov S.A

Navoiy-2016

Mundarija

Kirish.....	3
1. Chiziqli uzluksiz operatorlar	5
2. Chiziqli chegaralangan operatorlarning spektirlari va rezolventasi.....	13
3. l_2 -ketma-ketliklar fazosida aniqlangan chiziqli operatorlar spektirlarining klassifikatsyasi.....	21
4. Chiziqli chegaralangan operatorlar tadbiqlariga doirmisollar.....	24
Xulosa.....	36
Foydalanilgan adabiyotlar.....	37

K I R I Sh

Vatanimizning kelajagi, xalqimizning ertangi kuni, mamlakatimizning jahon hamjamiyatidagi obro'-e'tibori avvalambor farzandlarimizning unib-o'sib, ulg'ayib, qanday inson bo'lib hayotga kirib borishga bog'liqdir.

I.A.Karimov

O'zbekiston o'z istiqlol va taraqqiyot yo'lidan rivojlanib, xalqaro maydonda o'zining munosib o'rnini topmoqda. Davlatimizning mustaqil taraqqiyot yo'lini ta'minlash uchun ijtimoiy-siyosiy, iqtisodiy, madaniy va ma'rifiy sohalarda chuqur islohotlar amalga oshirilmoqda. Jamiyat va inson manfaatiga qaratilgan bu islohotlarning samarasi bevosita ta'lim tizimida tayyorlanayotgan mutaxassis kadrlarning salohiyatiga bog'liqdir.

“XXI asr –axborotlashtirish va globalashtirish asri” deb yuritilishi bejiz emas. Respublikamiz Prezidenti Islom Karimov Oliy majlis IX sessiyasida “Barkamol avlod O'zbekiston taraqqiyoti poydevori” mavzusidagi nutqida ta'limning ustuvor yo'nalishga ega ekanligini alohida takidlab, ta'lim tushunchasiga milliy didaktik nuqtai nazardan yondashgan holda quydagi fikrni bildiradilar: “Ta'lim O'zbekiston xalqi ma'naviyatiga yartuvchanlik faolligini baxsh etadi. O'sib kelayotgan avlodning barcha eng yaxshi imkoniyatlari unda nomoyon bo'ladi, kasb-kori, mahorati uzluksiz takomillashadi, katta avlodlarning dono tajribasi

anglab olinadi va yosh avlodga o'tadi" [3]. Ta'kidlangan maqsadni amalga oshirish uchun ta'limning yangi modeli yaratildi va kelajakdagi "portlash effekti" yurtboshimiz tomonidan ilmiy asoslab berildi. Modelni amaliyotga tadbqiq etish o'quv jarayonini texnologiyalashtirish bilan uzviy bog'liqdir. Axborot va pedagogik texnologiyalar orqali ilm-fanning ta'lim amaliyoti bilan aloqasini ta'minlash chora-tadbirlarini ishlab chiqish, ilmiy tadqiqotlar natijalarini ta'lim-tarniya jarayoniga o'z vaqtida joriy etish mexanizimini ro'yobga chiqarish, zamonaviy kompyuterlashtirish va kompyuter tarmoqlari negizida ta'lim jarayonini axborot bilan ta'minlash masalalariga jiddiy e'tibor qaratilmoqda.

Biz ushbu bitiruv ishida cheksiz o'lchamli fazolarda aniqlangan chiziqli operatorlar rezolventalari spektirlari va ularning tadbqiqarini o'rgandik.

Ko'rsatdikki bunday operatorlarning spektirlari biz algebra kursidan biladigan matritsalarining ya'ni chekli o'lchamli Evklid fazosida aniqlangan chiziqli operatorning spektiridan tubdan farq qilar ekan, biz kvadrati bilan jamlanuvchi ketma-ketliklar fazosida aniqlangan siljish operatorlarining spektirlarini klassifikatsiyasini ko'rib chiqdik.

Bitiruv malakuv ishi referativ xarakterda bo'lib, biz foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidagi barcha adabiyotlardan unumli foydalandik [4-7].

Biz shundan kelib chiqib o'z tushunganlarimiz va xulosalarimizni yozdik. Bitiruv malakaviy ishida bir qancha mashiqqlar ishlab ko'rsatilgan.

1-§. Chiziqli uzluksiz operatorlar

Bu paragrafda biz normallangan fazolarda aniqlangan chiziqli operatorlarni qaraymiz. Chiziqli normallangan fazolarni X, Y va Z bilan, chiziqli operatorlarni A, B va C harflari bilan belgilaymiz. Chiziqli operatorlarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami chiziqli normalangan fazolarning qism fazolari bo'ladi. Shunday qilib, bizga X va Y chiziqli normalangan fazolar berilgan bo'lsin.

1.1-ta'rif. X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qo'yuvchi

$$Ax = y \quad (x \in X, y \in Y)$$

akslantirish operator deyiladi.

Umuman A operator X ning hamma yerida aniqlangan bo'lishi shart emas. Bu holda Ax mavjud va $Ax \in Y$ bo'lgan barcha $x \in X$ lar to'plami A operatorning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(A)$ bilan belgilanadi, ya'ni:

$$D(A) = \{ \exists x \in X : Ax \text{ mavjud va } Ax \in Y \}.$$

Agar chiziqli A operator qaralayotgan bo'lsa, $D(A)$ ning chiziqli ko'pxillik bo'lishi talab etiladi,

1.2-ta'rif. Agar L normalangan fazoning $L_0 \subset L$ qism to'plamida ixtiyoriy $x, y \in L_0$ elementlar va ixtiyoriy α, β sonlar uchun $\alpha x + \beta y \in L_0$ bo'lsa L_0 chiziqli ko'pxillilik deyiladi. Agar $L_0 \subset L$ qism to'plam yopiq chiziqli ko'pxillilik bo'lsa, L_0 qism to'plam L ning qism fazosi deyiladi.

1.3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in D(A) \subset X$ elementlar va ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ sonlar uchun $(\alpha x + \beta y) \in D(A)$ bo'lib,

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A ga chiziqli operator deyiladi.

1.4-ta'rif. Bizga $A: X \rightarrow Y$ operator va $x_0 \in D(A)$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar $y_0 = Ax_0 \in Y$ ning ixtiyoriy V atrofi uchun, x_0 nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in U \cap D(A)$ lar uchun $Ax \in V$ bo'lsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

1.4-ta'rifga teng kuchli quyidagi ta'riflarni keltiramiz.

1.5-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, $\|x - x_0\| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in D(A)$ lar uchun $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

1.6-ta'rif. Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlik uchun $\|Ax_n - Ax_0\| \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda A operator x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar A operator ixtiyoriy $x \in D(A)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, A uzluksiz operator deyiladi.

1.7-ta'rif. $Ax = \theta$ tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ lar to'plami A operatorning yadrosi deb ataladi va u $\text{Ker} A$ bilan belgilanadi.

1.8-ta'rif. Biror $x \in D(A)$ uchun $y = Ax$ bajariladigan $y \in Y$ lar to'plami A operatorning qiymatlar sohasi yoki tasviri deb ataladi va u $\text{Im} A$ yoki $R(A)$ bilan belgilanadi.

Matematik simvollar yordamida operator yadrosi va qiymatlar sohasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\text{Ker}A = \{ \exists x \in D(A) : Ax = \theta \},$$

$$R(A) := \text{Im}A = \{ \exists y \in Y : \text{biror } x \in D(A) \text{ uchun } y = Ax \}.$$

Chiziqli operatorning qiymatlar sohasi va yadrosi chiziqli ko'pxillilik bo'ladi. Agar $D(A) = X$ bo'lib, A uzluksiz operator bo'lsa, u holda $\text{Ker}A$ yopiq qism fazo bo'ladi, ya'ni $\text{Ker}A = [\text{Ker}A]$. A operator uzluksiz bo'lgan holda ham $\text{Im}A \subset Y$ yopiq qism fazo bo'lmasligi mumkin.

Bizga X normalangan fazoning M to'plami berilgan bo'lsin.

1.9-ta'rif. Agar shunday $C > 0$ son mavjud bo'lib, barcha $x \in M$ uchun $\|x\| \leq C$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, M to'plam chegaralangan deyiladi.

1.10-ta'rif. X fazoni Y fazoga akslantiruvchi A chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar A ning aniqlanish sohasi $D(A) = X$ bo'lib, har qanday chegaralangan to'plamni yana chegaralangan to'plamga akslantirsa, A ga chegaralangan operator deyiladi.

Chiziqli operatorning chegaralanganligini tekshirish uchun quyidagi ta'rif qulaydir.

1.11-ta'rif. $A: X \rightarrow Y$ chiziqli operator bo'lsin. Agar shunday $C > 0$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun

$$\|Ax\| \leq C \cdot \|x\|$$

tengsizlik bajarilsa, A chegaralangan operator deyiladi.

1.12-ta'rif. (1.5) tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to'plamining aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi, va u $\|A\|$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$\|A\| = \inf C.$$

Bu ta'rifdan ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

1.1-teorema. X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan A operatorning normasi $\|A\|$ uchun

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$\alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

A chiziqli operator bo'lgani uchun

$$\alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq \theta} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Ixtiyoriy $x \neq 0$ uchun

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha.$$

Demak, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\|Ax\| \leq \alpha \|x\|$. Bundan esa

$$\|A\| \leq \alpha.$$

Aniq yuqori chegara ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday $x_\varepsilon \neq \theta$ element mavjudki,

$$\alpha - \varepsilon \leq \frac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} \leq \|A\| \quad (1.1)$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo'lgani uchun,

$$\alpha \leq \|A\|. \quad (1.2)$$

(1.1) va (1.2) lardan $\|A\| = \alpha$ tenglik kelib chiqadi.

1.1-tasdiq. Chiziqli chegaralangan A operator uchun

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$$

tenglik o‘rinli.

X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operatorlar to‘plamini $L(X,Y)$ bilan belgilaymiz. Xususan, $X=Y$ bo‘lsa $L(X,X)=L(X)$.

1.1-natija. Ixtiyoriy $A \in L(X,Y)$ va $x \in D(A)$, $\|x\|=1$ uchun

$$\|Ax\| \leq \|A\| \quad (1.3)$$

tengsizlik o‘rinli.

1.13-ta’rif. $A : X \rightarrow Y$ va $B : X \rightarrow Y$ chiziqli operatorlarning yig‘indisi deb, $x \in D(A) \cap D(B)$ elementga $y = Ax + Bx \in Y$ elementni mos qo‘yuvchi $C = A + B$ operatorga aytiladi.

Ravshanki, C chiziqli operator bo‘ladi. Agar $A, B \in L(X,Y)$ bo‘lsa, u holda C ham chegaralangan operator bo‘ladi va

$$\|C\| = \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (1.4)$$

tengsizlik o‘rinli. Haqiqatan ham,

$$\|Cx\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| \leq (\|A\| + \|B\|) \|x\|.$$

Bu yerdan (1.4) tengsizlik kelib chiqadi.

1.14-ta’rif. A chiziqli operatorning α songa ko‘paytmasi x elementga αAx elementni mos qo‘yuvchi operator sifatida aniqlanadi, ya’ni

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax.$$

1.15-ta’rif. $A : X \rightarrow Y$ va $B : Y \rightarrow Z$ chiziqli operatorlar berilgan bo‘lib $R(A) \subset D(B)$ bo‘lsin. B va A operatorlarning ko‘paytmasi deganda,

har bir $x \in D(A)$ ga Z fazoning $z = B(Ax)$ elementini mos qo'yuvchi $C = BA: X \rightarrow Z$ operator tushuniladi.

Agar A va B lar chiziqli chegaralangan operatorlar bo'lsa, u holda C ham chiziqli chegaralangan operator bo'ladi va

$$\|C\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \quad (1.5)$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham,

$$\|Cx\|_Z = \|B(Ax)\|_Z \leq \|B\| \cdot \|Ax\|_Y \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_X.$$

Bu yerdan (1.5) tengsizlik kelib chiqadi.

Operatorlarni qo'shish va ko'paytirish assotsiativdir. Qo'shish amali kommutativ, lekin ko'paytirish amali kommutativ emas.

Agar X va Y lar chiziqli normalangan fazolar bo'lsa, $L(X, Y)$ ham chiziqli normalangan fazo bo'ladi, ya'ni $p: L(X, Y) \rightarrow R$,

$$p(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

funksional normaning 1-3 - shartlarini qanoatlantiradi.

1.2-teorema. X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi $A: X \rightarrow Y$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. U holda quyidagi tasdiqlar teng kuchli:

- 1) A operator biror x_0 nuqtada uzluksiz;
- 2) A operator uzluksiz;
- 3) A operator chegaralangan.

Isbot. 1) $\rightarrow$ 2). Chiziqli A operatorning biror x_0 nuqtada uzluksiz ekanligidan uning ixtiyoriy nuqtada uzluksiz ekanligini keltirib chiqaramiz.

A operator x_0 nuqtada uzluksiz bo'lganligi uchun, x_0 ga intiluvchi

ixtiyoriy $\{x_n^0\}$ ketma-ketlik uchun $Ax_n^0 \rightarrow Ax_0$. Ixtiyoriy $x' \in D(A)$ nuqta uchun, $x'_n \rightarrow x'$ ekanligidan $Ax'_n \rightarrow Ax'$ kelib chiqishini ko'rsatamiz.

$y'_n = x'_n - x' + x_0 \rightarrow x_0$ deymiz. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ay'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x'_n - x' + x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax'_n - Ax' + Ax_0) = Ax_0.$$

Bu esa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax'_n = Ax'$$

ekanligini bildiradi. Demak, A operator ixtiyoriy x' nuqtada uzluksiz.

2) $\rightarrow$ 3). A operatorning uzluksiz ekanligidan uning chegaralanganligi kelib chiqishini ko'rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, A chiziqli operator uzluksiz bo'lsin, lekin chegaralangan bo'lmasin, ya'ni ixtiyoriy $C > 0$ son uchun shunday $x_c \in D(A)$ element mavjud bo'lib,

$$\|Ax_c\| \geq C\|x_c\|$$

bo'lsin. Agar $C = n \in N$ desak, ixtiyoriy $n \in N$ uchun shunday $x_n \in D(A)$ mavjudki, $\|Ax_n\| \geq n\|x_n\|$ tengsizlik bajariladi. Quyidagi

$$\xi_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Ko'rinib turibdiki, $\xi_n \rightarrow \theta$, ya'ni

$$\|\xi_n - \theta\| = \left\| \frac{x_n}{n\|x_n\|} \right\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \|x_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Ikkinchi tomondan,

$$\|A\xi_n - A\theta\| = \left\| A\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|} \right) \right\| = \left\| \frac{1}{n\|x_n\|} Ax_n \right\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \|Ax_n\| \geq 1$$

Bu qarama-qarshilik A operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatadi.

3) $\rightarrow$ 1). A chiziqli chegaralangan operatorning biror nuqtada uzluksizligini

ko'rsatamiz.

Ta'rifga ko'ra, shunday $C > 0$ son mavjudki, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$$

tengsizlik bajariladi. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ - x ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy

ketma-ketlik bo'lsin, u holda $Ax_n \rightarrow Ax$ ekanligini ko'rsatamiz:

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\| \rightarrow 0,$$

ya'ni $Ax_n \rightarrow Ax$.

1.2-natija. A chiziqli operator chegaralangan bo'lishi uchun uning uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

2-§. Chiziqli chegaralangan operatorlarning spektirlari va rezolventasi

Chiziqli operatorlar nazariyasida spektr tushunchasi eng muhim tushunchalardan biridir. Spektirning asosida esa xos qiymat tushunchasi yotadi. Spektr haqida masala qaralsa X fazoni o'zini-o'ziga akislantiruvchi A operatorlar nazarda tutiladi. Spektr tushunchasini dastlab chekli o'lchamli fazolardagi chiziqli operatorlar uchun quydagicha bo'ladi.

Faraz qilaylik, $A: C^n \rightarrow C^n$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar biror λ son uchun

$$Ax = \lambda x$$

tenglama nolmas $x \in C^n$ yechimga ega bo'lsa, u holda λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, unga mos keluvchi nolmas x yechim esa xos vektor deyiladi. Ma'lumki, har bir $A: C^n \rightarrow C^n$ chiziqli operatorga $\{a_{ij}\} - n \times n$ matritsa mos keladi va aksincha. Chiziqli algebra kursidan ma'lumki, agar λ son A operatorning xos qiymati bo'lsa, $\det(A - \lambda I) = 0$ bo'ladi va aksincha. $n \times n$ matritsa determinanti $\det(A - \lambda I)$, parametr λ ning n -darajali ko'phadi bo'ladi va $\det(A - \lambda I) = 0$ tenglama ko'pi bilan n ta ildizga ega, ya'ni $A: C^n \rightarrow C^n$ chiziqli operator ko'pi bilan n ta xos qiymatga ega. Agar λ son A operatorning xos qiymati bo'lsa $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud emas va aksincha. Agar λ son A operator uchun xos qiymat bo'lmasa, ya'ni $\det(A - \lambda I) \neq 0$ bo'lsa, u holda $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud va u C^n fazoning hamma yerida aniqlangan bo'ladi.

2.1-teorema. $A: C^n \rightarrow C^n$ chiziqli operator chegaralangandir.

Isbot. C^n fazoda $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormal bazisni tanlaymiz. U holda har bir $x \in C^n$ vektor yagona usulda

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$$

ko‘rinishda tasvirlanadi. Agar A operator C^n da aniqlangan chiziqli operator bo‘lsa, u holda

$$Ax = \sum_{i=1}^n x_i \cdot A(e_i)$$

bo‘ladi. Shunday ekan, chiziqli operator o‘zining $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis vektorlardagi qiymatlari bilan bir qiymatli aniqlanadi. Endi Ax ning normasini baholaymiz:

$$\|Ax\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|A(e_i)\| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \|A(e_i)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \cdot \|x\|.$$

Bu yerda

$$M = \left(\sum_{i=1}^n \|A(e_i)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demak, chekli o‘lchamli fazoda aniqlangan har qanday chiziqli operator chegaralangan bo‘lar ekan.

Yuqorida aytilganlarning natijasi sifatida shuni ta’kidlash lozimki, chekli o‘lchamli fazolardagi chiziqli operatorlar uchun quyidagi ikki holat sodir bo‘lishi mumkin:

1) λ son uchun $Ax = \lambda x$ tenglama nolmas yechimga ega, ya’ni λ son A operator uchun xos qiymat, bu holda $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud emas;

2) λ son uchun C^n fazoning hamma yerida aniqlangan $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud va demak, chegaralangan.

Chekli o'lchamli fazolarda chiziqli operatorning xos qiymatlari to'plami uning spektri deb ataladi. Agar $\lambda \in C$ son A operator uchun xos qiymat bo'lmasa, u A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi. Umuman aytganda, chekli o'lchamli fazolarda spektr termini kam ishlatiladi.

Agar A operator cheksiz o'lchamli X fazoda berilgan bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan 1 va 2 holatlardan farqli bo'lgan uchinchi holat ham bo'ladi, ya'ni:

3) $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud, ya'ni $Ax = \lambda x$ tenglama faqat nol yechimga ega, lekin $(A - \lambda I)^{-1}$ operator X ning hamma yerida aniqlanmagan yoki $\overline{Im(A - \lambda I)} \neq X$.

2.1-ta'rif. Agar $\lambda \in C$ son uchun $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud bo'lib, u X ning hamma yerida aniqlangan bo'lsa, λ soni A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi,

$$R_{\lambda}(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

operator esa A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi deyiladi. Barcha regulyar nuqtalar to'plami $\rho(A)$ orqali belgilanadi.

2.2-ta'rif. A operatorning regulyar bo'lmagan barcha nuqtalari to'plami A operatorning spektri deyiladi va u $\sigma(A)$ orqali belgilanadi.

2.3-ta'rif. Agar biror $\lambda \in C$ son uchun $(A - \lambda I)x = 0$ tenglama nolmas ($x \neq 0$) yechimga ega bo'lsa, λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, nolmas yechim x esa xos vektor deyiladi.

Ko'rinib turibdiki, barcha xos qiymatlar to'plami spektrda yotadi, chunki λ xos qiymat bo'lsa, $A - \lambda I$ operatorning teskarisi mavjud emas.

Spektr quyidagi qismlarga ajratiladi.

2.4-ta'rif. a) Barcha xos qiymatlar to'plami A operatorning nuqtali spektri deyiladi va $\sigma_{pp}(A)$ bilan belgilanadi.

b) Agar λ xos qiymat bo'lmasa va $\overline{Im(A - \lambda I)} \neq X$, ya'ni $A - \lambda I$ operatorning qiymatlar sohasi X ning hamma yerida zich emas. Bunday λ lar to'plami A operatorning qoldiq spektri deyiladi va $\sigma_{qol}(A)$ bilan belgilanadi.

Endi o'z-o'ziga qo'shma operatorlar uchun muhim spektr ta'rifini keltiramiz.

2.5-ta'rif. Agar biror $\lambda \in \sigma(A)$ son uchun nolga kuchsiz yaqinlashuvchi $f_n \in H$ birlik vektorlar ketma-ketligi mavjud bo'lib

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda I) f_n\| = 0$$

bo'lsa, u holda λ son $A = A^*$ operatorning muhim spektriga qarashli deyiladi. A operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(A)$ bilan belgilanadi.

Operatorning nuqtali va qoldiq spektrlari o'zaro kesishmaydi. Nuqtali va muhim spektrlar o'zaro kesishishi mumkin.

2.2-teorema. X - Banax fazosi va $A \in L(X)$. Agar $\|A\| \leq q < 1$ bo'lsa, u holda $I - A$ operator uchun chegaralangan teskari operator mavjud.

Isbot. $L(X)$ fazoda quyidagi formal qatorni qaraymiz:

$$I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots \quad (2.1)$$

Ma'lumki, $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. Xuddi shuningdek, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. U holda (2.1) qatorning

$$S_n = I + \sum_{k=1}^n A^k$$

qisman yig'indilari ketma-ketligi Koshi shartini qanoatlantiradi, ya'ni

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|A^{n+1} + A^{n+2} + \dots + A^{n+p}\| \leq q^{n+1} + q^{n+2} + \dots + q^{n+p} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

(2.1) qatorning qisman yig'indilari ketma-ketligi S_n - fundamental ekan,

$L(X) := L(X, X)$ to'la bo'lgani uchun

$$S_n \rightarrow S \in L(X).$$

Shunday qilib,

$$I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k = S.$$

Bundan tashqari

$$\begin{aligned} S(I - A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(I - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (I + A + A^2 + \dots + A^n - A - A^2 - \dots - A^{n+1}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A^{n+1}) = I. \end{aligned}$$

Xuddi shunday ko'rsatish mumkinki, $(I - A)S = I$. Demak, S operator $I - A$ operator uchun teskari operator ekan. S operatorning normasi

$$\|S\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Demak, $S = (I - A)^{-1}$ operator chegaralangan va uning normasi

$$\|S\| = \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

2.3-teorema. Agar $A \in L(X)$ va $|\lambda| > \|A\|$ bo'lsa, u holda λ regulyar nuqta bo'ladi.

Isbot. $A - \lambda I$ operatorni quyidagicha yozib olamiz:

$$A - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A). \quad (2.2)$$

Teorema shartidan $\frac{1}{\lambda}A$ operatorning normasi 1 dan kichik ekanligi kelib chiqadi.

2.2-teoremaga ko'ra, $I - \frac{1}{\lambda}A$ operatorning chegaralangan teskarisi mavjud. Bundan

va (2.2) tenglikdan $A - \lambda I$ operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan ekanligi

kelib chiqadi.

Shunday qilib, chegaralangan $A: X \rightarrow X$ operatorning spektri markazi koordinatalar boshida va radiusi $\|A\|$ ga teng yopiq doirada saqlanar ekan.

2.4-teorema. $A \in L(X)$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud bo'lsin. Agar $A': X \rightarrow X$ operatorning normasi

$$\|A'\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $B = A - A'$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud.

Isbot. B operatorni quyidagicha yozib olamiz: $A - A' = A(I - A^{-1}A')$. Endi $A^{-1}A'$ operatorning normasini baholaymiz:

$$\|A^{-1}A'\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A'\| < 1.$$

2.2-teoremaga ko'ra, $I - A^{-1}A'$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud. U holda quyidagi lemmaga ko'ra, $A(I - A^{-1}A')$ operator ham teskarilanuvchan bo'ladi, hamda

$$B^{-1} = (I - A^{-1}A')^{-1} A^{-1}, \quad \|B^{-1}\| \leq \|(I - A^{-1}A')^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\|$$

munosabatlar o'rinli.

2.1-lemma. M to'plam X Banax fazosining hamma yerida zich bo'lsin. U holda ixtiyoriy nolmas $y \in X$ elementni

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots$$

qatorga yoyish mumkin. Bu yerda $y_k \in M$, $\|y_k\| \leq 3 \cdot 2^{-k} \cdot \|y\|$, $k \in \mathbb{N}$.

Isbot. $y_1, y_2, \dots$ elementlarni ketma-ket quramiz. M to'plam X Banax fazosining hamma yerida zich bo'lgani uchun, shunday $y_1 \in M$ mavjudki,

$$\|y - y_1\| \leq \frac{\|y\|}{2}$$

bo'lad. $y_2 \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\|y - y_1 - y_2\| \leq \frac{\|y\|}{4}$$

bo'lsin. Endi $y_3 \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\|y - y_1 - y_2 - y_3\| \leq \frac{\|y\|}{8}$$

bajarilsin. Umuman $y_n \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\|y - y_1 - y_2 - y_3 - \dots - y_n\| \leq \frac{\|y\|}{2^n}$$

bo'lsin. Bunday tanlash mumkin, chunki M to'plam X ning hamma yerida zich. $y_n \in M$ elementlarning tanlanishiga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{k=1}^n y_k \right\| = 0,$$

ya'ni

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

qator yaqinlashadi va uning yig'indisi y ga teng. Endi $y_n \in M$ elementlarning normalarini baholaymiz:

$$\|y_1\| = \|y_1 - y + y\| \leq \|y_1 - y\| + \|y\| \leq \frac{\|y\|}{2} + \|y\| \leq \frac{3\|y\|}{2},$$

$$\|y_2\| = \|y_2 + y_1 - y + y - y_1\| \leq \|y_2 + y_1 - y\| + \|y - y_1\| \leq \frac{\|y\|}{4} + \frac{\|y\|}{2} \leq \frac{3\|y\|}{2^2}$$

va nihoyat

$$\begin{aligned} \|y_n\| &= \|y_n + y_{n-1} + \dots + y_1 - y + y - y_1 - \dots - y_{n-1}\| \leq \\ &\leq \|y_n + y_{n-1} + \dots + y_1 - y\| + \|y - y_1 - \dots - y_{n-1}\| \leq \frac{\|y\|}{2^n} + \frac{\|y\|}{2^{n-1}} \leq \frac{3\|y\|}{2^n}. \end{aligned}$$

2.5-teorema. Agar $A \in L(X)$ bo'lsa, u holda $\sigma(A)$ yopiq to'plamdir.

Isbot. Operatorning spektri $\sigma(A)$ regulyar nuqtalar to'plamining to'ldiruvchi to'plami bo'lgani uchun, $\rho(A)$ ning ochiq to'plam ekanligini ko'rsatish yetarli. Endi $\lambda \in \rho(A)$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin, ya'ni $A - \lambda I$ operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan bo'lsin. U holda 2.4-teoremaga ko'ra, barcha δ , $\delta < \left(\|(A - \lambda I)^{-1}\| \right)^{-1}$ lar uchun $A - \lambda I - \delta I$ operatorning ham chegaralangan teskarisi mavjud. Demak, $\lambda \in \rho(A)$ nuqta o'zining $\varepsilon = \left(\|(A - \lambda I)^{-1}\| \right)^{-1} > 0$ atrofi bilan $\rho(A)$ ga qarashli ekan. Bu esa λ nuqtaning $\rho(A)$ to'plam uchun ichki nuqta ekanligini bildiradi. λ ning ixtiyoriyligidan $\rho(A)$ ning ochiq to'plam ekanligi kelib chiqadi. Demak, to'plamning yopiqligi haqidagi teoremaga ko'ra $\sigma(A) = C \setminus \rho(A)$ yopiq to'plam.

Quyidagi tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

2.6-teorema. $A \in L(H)$ o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsin: U holda:

(a) $\sigma_{qol}(A)$ bo'sh to'plam.

(b) $\sigma(A)$ to'plam R ning qismi, ya'ni $\sigma(A) \subset R$.

(c) A operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari o'zaro ortogonaldir.

3-§. l_2 -ketma-ketliklar fazosida aniqlangan chiziqli operatorlar spektirlarining

klassifikatsiyasi

Biz $C^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in C, n = 1, 2, \dots, n\}$ fazoni o'z-o'ziga akislantiruvchi chiziqli operatorlar $n \times n$ matritsalar ekanligini yaxshi bilamiz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matritsa karraliklarini ham e'tiborga olib hisoblaganda n ta xos qiymatga ega, ya'ni uning spektri faqat xos qiymatlaradan iborat bo'ladi.

Endi biz cheksiz o'lchamli, elementlari

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

Kompleks sonlar Ketma-ketliklaridan iborat fazoda aniqlangan chiziqli operatorlar spektirlarini o'rganamiz.

Quyidagi ketma-ketliklar fazosini qaraymiz.

$$l_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), x_i \in C, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

Bu fazoda chiziqli fazo bo'lib unga kvadrati bilan yig'iluvchi ketma ketliklar fazosi deyiladi. Bu fazoning har bir elementini koordinatalari soni cheksizta bo'lgan vektorlar deb qarash mumkin. Bu vektorlar to'plamida quydagicha skalyar ko'paytma aniqlanadi:

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

Bu skalyar ko'paytma bilan ℓ_2 fazoga cheksiz o'lchamli Evklid fazosi deyiladi.

Bu fazoda quydagi chiziqli operatorlarni qaraymiz:

- 1) $A: (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0)$ - ortogonal proyeksiyalash operatori .
- 2) $A: (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (e^{i\varphi_1} x_1, e^{i\varphi_2} x_2, \dots, e^{i\varphi_n} x_n, \dots)$ - burish operatori. Bunda vektorni normasi o'zgarmaydi, yo'nalishi o'zgaradi.
- 3) $A: (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, \frac{1}{2} x_2, \dots, \frac{1}{n} x_n, \dots)$ - qisqartirish operatori. Bu operator vektor yo'nalishini o'zgartirmaydi lekin uzunligini qisqartiradi.

Yuqorida ko'rilgan uch xil turdagi operatorlar chekli o'lchamli Evklid fazolarida ham aniqlanadi. Endi biz faqat cheksiz o'lchamli fazolarda aniqlanadigan operatorga misol keltiramiz.

- 4) $A: (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ - chapga siljish operatori.
- 5) $A: (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ - o'nga siljish operatori. Bu operatorlar chekli o'lchamli fazolarda aniqlanmaydi.

Yuqorida keltirilgan besh turdagi operatorlarning spektirlari quydagicha bo'ladi.

Birinchi turdagi ortogonal proyeksiyalash operatorining spektri faqat $\lambda = 1$ sonidan iborat bo'lib karrali n ga teng bo'ladi.

Ikkinchi turdagi burish operatorining spektri faqat $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_n}, \dots$ xos qiymatlardan iborat, uchinchi turdagi qisqartirish operatorining spektri

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Sonlardan iborat xos qiymatlar to'plami bo'ladi.

To'rtinchi va beshinchi turdagi operatorlarning spektirlari yuqoridagi operatorlarning spektirlaridan tubdan farq qiladi.

Chapga siljish operatorining spektri kompleks sonlar tekisligida

$$\mathbb{U} = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$$

Yopiq birlik doiradan iborat bo'lib $|\lambda| < 1$ -moduli birdan kichchik barcha kompleks sonlar xos qiymatlar bo'ladi.

O'nga siljish operatorining spektri ham yopiq kichchik doiradan iborat bo'lib, bitta ham xos qiymatga ega bo'lmaydi.

Demak cheksiz o'lchamli fazolarda chiziqli operatorlarning spektirlari faqat xos qiymatlardan iborat bo'lmasligi, hatto bitta xos qiymat bo'lmasligi ham mumkin ekan.

4-§. Chiziqli chegaralangan operatorlar tadbiqlariga doir misollar

4.1-misol. X va Y ixtiyoriy chiziqli normalangan fazolar bo'lsin.

$$\Theta: X \rightarrow Y, \quad \Theta x = \theta$$

operator nol operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Nol operatorning chiziqliligi va uzluksizligi bevosita ta'rifdan kelib chiqadi. Uning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o'rinli:

$$D(\Theta) = X, \quad R(\Theta) = \{\theta\}, \quad \text{Ker}(\Theta) = X.$$

4.2-misol. Aniqlanish sohasi $D(A) = C^{(1)}[a, b] \subset C[a, b]$ bo'lgan va $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi

$$A: C[a, b] \rightarrow C[a, b], \quad (Af)(x) = f'(x)$$

operatorni qaraymiz. Bu operator differensial operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Uning chiziqli ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy $f, g \in D(A)$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasi bo'lgan $\alpha f + \beta g$ elementga A operatorning ta'sirini qaraymiz:

$$(A(\alpha f + \beta g))(x) = (\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x) = \alpha (Af)(x) + \beta (Ag)(x).$$

Biz bu yerda yig'indining hosilasi hosilalar yig'indisiga tengligidan, hamda o'zgarmas sonni hosila belgisi ostidan chiqarish munimligidan foydalandik.

Demak, A operator chiziqli ekan. Uni nol nuqtada uzluksizlikka tekshiramiz.

Ma'lumki, $A\theta = \theta$, bu yerda θ - $C[a, b]$ fazoning nol elementi, ya'ni $\theta(x) \equiv 0$.

Endi nolga yaqinlashuvchi $f_n \in D(A)$ ketma-ketlikni tanlaymiz. Umumiylikni

buzmagan holda $a=0, b=1$ deymiz.

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ikkinchi tomondan,

$$(Af_n)(x) = x^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|Af_n - A\theta\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} |x^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Demak, A operator nol nuqtada uzluksiz emas ekan.

Teorema. X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi $A: X \rightarrow Y$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. U holda quyidagi tasdiqlar teng kuchli:

- I) A operator biror x_0 nuqtada uzluksiz;
- II) A operator uzluksiz;
- III) A operator chegaralangan.

ga ko'ra differensial operator aniqlanish sohasining barcha nuqtalarida uzilishga ega. Uning qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o'rinli:

$$R(A) = C[a, b], \quad \text{Ker} A = \{\text{const}\}.$$

4.3-misol. Endi $C[a; b]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi B operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Bf)(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt$$

Bu operator integral operator deyiladi. Bu yerda $K(x, y)$ funksiya $[a, b] \times [a, b]$ - kvadratda aniqlangan, uzluksiz. $K(x, y)$ integral operatorning o'zagi (yadrosi) deyiladi. B operatorni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Ma'lumki, ixtiyoriy $f \in C[a, b]$ uchun $K(x, t) f(t)$ funksiya x va

t larning uzluksiz funksiyasidir. Matematik analiz kursidan ma'lumki,

$$\int_a^b K(x, t) f(t) dt$$

integral parametr $x \in [a, b]$ ning uzluksiz funksiyasi bo'ladi. Bulardan B operatorning aniqlanish sohasi $D(B)$ uchun $D(B) = C[a; b]$ tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Integral operatorning chiziqli ekanligi integrallash amalining chiziqlilik xossasidan kelib chiqadi, ya'ni ixtiyoriy $f, g \in C[a; b]$ va $\alpha, \beta \in C$ lar uchun

$$\begin{aligned} (B(\alpha f + \beta g))(x) &= \int_a^b K(x, t)(\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \\ &= \alpha \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \beta \int_a^b K(x, t) g(t) dt = \alpha (Bf)(x) + \beta (Bg)(x) \end{aligned}$$

tengliklar o'rinli. Endi integral operator B ning uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz.

$f_0 \in C[a; b]$ ixtiyoriy tayinlangan element va $\{f_n\} \subset C[a; b]$ unga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} \|Bf_n - Bf_0\| &= \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b K(x, t)(f_n(t) - f_0(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} |f_n(t) - f_0(t)| \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b K(x, t) dt \right| = C \cdot \|f_n - f_0\|. \end{aligned}$$

Bu yerda

$$C = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x, t)| dt.$$

C ning chekli ekanligi $[a, b]$ kesmada uzluksiz funksiyaning chegaralangan ekanligidan kelib chiqadi. Agar yuqoridagi tengsizlikda $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Bf_n - Bf_0\| \leq C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_0\| = 0$$

ekanligini olamiz. Agar $\|Bf_n - Bf_0\| \geq 0$ tengsizlikni hisobga olsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B f_n - B f_0\| = 0.$$

Shunday qilib, B integral operator ixtiyoriy nuqtada uzluksiz ekan.

B integral operatorning qiymatlar sohasi va yadrosi integral operatorning o'zagi - $K(x, y)$ funksiyaning berilishiga bog'liq. Masalan, $K(x, t) \equiv 1$ bo'lsa, B operatorning qiymatlar sohasi $\text{Im} B$ o'zgarmas funksiyalardan iborat, ya'ni $\text{Im} B = \{f \in C[a, b] : f(t) = \text{const}\}$, uning yadrosi $\text{Ker} B$ o'zgarmasga ortogonal funksiyalardan iborat, ya'ni

$$\text{Ker} B = \{f \in C[a, b] : \int_a^b f(t) dt = 0\}.$$

4.4-misol. X - ixtiyoriy chiziqli normalangan fazo bo'lsin.

$$Ix = x, \quad x \in X$$

akslantirish birlik operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Bu operatorning chiziqliligi va uzluksizligi quyidagi tengliklardan bevosita kelib chiqadi:

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha Ix + \beta Iy, \quad \|I(x - x_0)\| = \|x - x_0\|.$$

Qo'shimcha qilib aytishimiz mumkinki, uning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o'rinli:

$$D(I) = X, \quad R(I) = X, \quad \text{Ker} I = \{\theta\}.$$

4.5-misol. $C[a, b]$ orqali $[a, b]$ da aniqlangan uzluksiz (kompleks qiymatli) funksiyalardan iborat chiziqli fazo belgilangan. Bu fazoda

$$(Ax)(t) = u(t) \int_a^b u(s)x(s)ds, \quad x \in C[a, b]$$

formula vositasida aniqlangan A operatorning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping.

Yechish. Ta'rifga ko'ra, nol bo'lmagan $x \in C[a, b]$ vektor va biror $\lambda \in C$ soni uchun

$$Ax = \lambda x \quad (4.5)$$

tenglik bajarilsa, x vektor A operatorning xos vektori va λ soni unga mos keluvchi xos qiymat deyiladi. Qaralayotgan operator uchun (4.5) tenglik quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$u(t) \int_a^b u(s)x(s)ds = \lambda x(t). \quad (4.6)$$

Bu yerda $x \neq 0$. Faraz qilaylik, $\lambda \neq 0$ bo'lsin. U holda $x \neq 0$ bo'lgani uchun

$$\alpha_x = \int_a^b u(s)x(s)ds \neq 0 \quad (4.7)$$

tengsizlik bajarildi. (4.6) tenglikda (4.7) ni e'tiborga olsak,

$$x(t) = \lambda^{-1} \alpha_x u(t)$$

tenglikni olamiz. (4.7) tenglikka x funksiyaning bu ifodasini qo'yib

$$\alpha_x = \alpha_x \lambda^{-1} \int_a^b u^2(t)dt \quad \text{yoki} \quad \alpha_x \left(\lambda - \int_a^b u^2(t)dt \right) = 0$$

tenglikka kelamiz. Bunda $\alpha_x \neq 0$ bo'lgani uchun $\lambda = \int_a^b u^2(t)dt$ son A operatorning xos qiymati va $x(t) = u(t)$ unga mos xos vektor ekanligi kelib chiqadi. Yana shuni ta'kidlash kerakki, agar

$$\int_a^b u(t)x(t)dt = 0 \quad (4.8)$$

shartini qanoatlantiruvchi nolmas x funksiya mavjud bo'lsa, u holda $\lambda = 0$ soni uchun ham (4.5) tenglik bajariladi. Albatta (4.6) shartni qanoatlantiruvchi nolmas

x funksiya mavjud. Demak, A operator ikkita $\lambda = 0$ va $\mu = \int_a^b u^2(t)dt$ xos

qiymatlarga ega. (4.8) shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar $\lambda = 0$ xos qiymatga mos keluvchi xos funksiyalar bo'ladi.

4.6-misol $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga aks ettiruvchi va

$$(Ax)(t) = tx(t) \quad (4.9)$$

formula bilan aniqlangan A operatorni qaraymiz. Uning spektri va rezolventasini toping.

Yechish. Yuqoridagi misolda $C[a, b]$ fazoda (4.9) tenglik bilan aniqlanuvchi A operatorning spektri topilgan. Bu yerda biz A operator spektrini topishning yangi variantini taklif qilamiz.

Dastlab $A - \lambda I$ operatorni va unga teskari operator bo'lgan $R_\lambda(A)$ rezolventani topamiz. Ixtiyoriy $x \in C[a, b]$ uchun

$$(A - \lambda I)x(t) = (t - \lambda)x(t)$$

bo'lgani uchun $Ax = \lambda x$ tenglik

$$(t - \lambda)x(t) = 0 \quad (4.10)$$

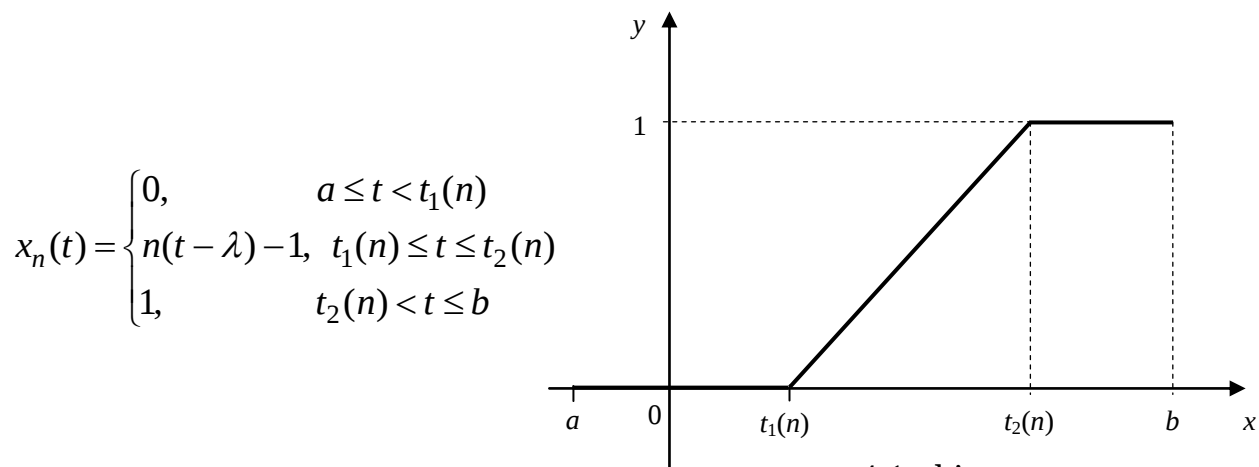
tenglikka teng kuchli. Istalgan $\lambda \in C$ uchun (4.10) tenglama faqat aynan nolga teng uzluksiz yechimga ega. Shunday ekan, A operatorning xos qiymati yo'q. U holda operatorning teskarilanuvchanligi haqidagi teorema ko'ra ixtiyoriy $\lambda \in C$ uchun $A - \lambda I$ operator teskarilanuvchan. Ammo, $\lambda \in (a, b)$ bo'lganda

$$(A - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{1}{t - \lambda}x(t)$$

formula bilan berilgan $(A - \lambda I)^{-1}$ operator aniqlangan elementlar to'plami $C[a, b]$ fazoning qismi bo'lib, unga teng emas. Masalan, $x_0(t) = C$, $C \neq 0$ desak, $x_0 \in C[a, b]$, ammo $(A - \lambda I)^{-1}x_0 \notin C[a, b]$. Bundan tashqari, $\lambda \in (a, b)$

uchun $(A - \lambda I)^{-1}$ chegaralanmagan operator. Buni ko'rsatamiz.

Agar n yetarlicha katta bo'lsa, u holda $\lambda + 2/n < b$ bo'ladi va



4.1-chizma.

funksiyalar ketma-ketligi $C[a, b]$ ga qarashli bo'ladi (32.1-chizma). Bu yerda $t_1 = t_1(n) = \lambda + 1/n$, $t_2 = t_2(n) = \lambda + 2/n$. Qurilishiga ko'ra $\|x_n\| = 1$. Endi quyidagi $\|(A - \lambda I)^{-1} x_n\|$ normani hisoblaymiz:

$$\|(A - \lambda I)^{-1} x_n\| = \max_{a \leq t \leq b} \left| \frac{1}{t - \lambda} x_n(t) \right| \geq \frac{n}{2} \cdot \left[n(\lambda + \frac{2}{n} - \lambda) - 1 \right] = \frac{n}{2}.$$

Shunday qilib, $\lambda \in (a, b)$ bo'lganda $(A - \lambda I)^{-1}$ chegaralanmagan operator ekan. Demak, $(a, b) \subset \sigma(A)$. Endi $\lambda \notin [a, b]$ holni qarasak, bu holda ixtiyoriy $x \in C[a, b]$ uchun $(t - \lambda)^{-1} x(t)$ uzluksiz funksiya bo'lgani uchun $(A - \lambda I)^{-1}$ operator fazoning barcha elementlarida aniqlangan va

$$\|(A - \lambda I)^{-1} x\| \leq \frac{1}{\min_{a \leq t \leq b} \{t - \lambda\}} \|x\|$$

tengsizlik o'rinli. Shunday qilib, ixtiyoriy $\lambda \notin [a, b]$ son A operator uchun regulyar nuqta bo'ladi. Spektr yopiq to'plam bo'lgani uchun berilgan A operatorning spektri $\sigma(A) = [a, b]$ kesmadan iborat. $C \setminus [a, b]$ to'plam esa A

operatorning rezolvent to'plami bo'ladi. A operatorning $\lambda \in C \setminus [a, b]$ nuqtadagi rezolventasi

$$R_\lambda(A)x(t) = (A - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{1}{t - \lambda}x(t), \quad \lambda \in \rho(A) = C \setminus [a, b]$$

formula vositasida aniqlanadi.

4.7-misol. ℓ_1 fazoda berilgan

$$A: \ell_1 \rightarrow \ell_1, \quad Ax = (x_1 + x_2, x_2 + 2x_3, 3x_3, 4x_4, x_5, x_6, \dots)$$

operatorning spektri va rezolventasini toping.

Yechish. a) A operatorning xos qiymatlarini topish uchun $\lambda \in C$ songa mos $Ax = \lambda x$ yoki

$$(x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, 3x_3, 4x_4, x_5, x_6, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots) \quad (4.11)$$

tenglamani yechamiz. (4.11) tenglama quyidagi tenglamalar sistemaga teng kuchli:

$$x_1 + x_2 = \lambda x_1, \quad x_1 + 2x_2 = \lambda x_2, \quad 3x_3 = \lambda x_3, \quad 4x_4 = \lambda x_4, \quad x_n = \lambda x_n, \quad n \geq 5. \quad (4.12)$$

Agar $\lambda \notin \{1, 3, 4\}$ bo'lsa, (4.10) tenglik bajarilishi uchun

$x_3 = x_4 = x_5 = \dots = 0$ bo'lishi kerak. U holda (4.12) tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (2 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga keladi. Bu tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo'lishi uchun $(1 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = 0$ yoki

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \quad (4.13)$$

tenglik bajarilishi kerak. (4.13) tenglama $\lambda_1 = 2^{-1}(3 - \sqrt{5})$, $\lambda_2 = 2^{-1}(3 + \sqrt{5})$

ildizlarga ega. Bu yerdan kelib chiqadiki, (4.9) tenglama $\lambda_1 = 2^{-1}(3 - \sqrt{5})$ songa mos nolmas

$$x^{(1)} = \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0, 0, \dots \right) \quad (4.14)$$

yechimga va $\lambda_2 = 2^{-1}(3+\sqrt{5})$ soniga mos nolmas

$$x^{(2)} = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, 0, \dots \right) \quad (4.15)$$

yechimga ega. Shunday qilib, $\lambda_1 = 2^{-1}(3-\sqrt{5})$, $\lambda_2 = 2^{-1}(3+\sqrt{5})$ sonlari A operatorning xos qiymatlari bo'ladi va (4.14) va (4.15) ko'rinishdagi $x^{(1)}$ va $x^{(2)}$ elementlar A operatorning λ_1 va λ_2 ga mos xos vektorlari bo'ladi. Agar $\lambda_3 = 1$ bo'lsa $x^{(3)} = e_n$, $n \geq 5$ nolmas element $Ax = 1 \cdot x$ tenglikni qanoatlantiradi, ya'ni 1 soni A operatorning cheksiz karrali xos qiymati va $x^{(3)} = e_n$, $n \geq 5$ ko'rinishdagi elementlar unga mos xos vektorlar bo'ladi. Xuddi shunday ko'rsatish mumkinki, $\lambda_4 = 3, \lambda_5 = 4$ sonlar ham A operatorning xos qiymatlari bo'ladi va $x^{(4)} = e_3$, $x^{(5)} = e_4$ lar esa ularga mos xos vektorlar bo'ladi. Shunday qilib, A operator $2^{-1}(3-\sqrt{5}), 2^{-1}(3+\sqrt{5}), 1, 3, 4$ xos qiymatlarga ega va boshqa xos qiymatlari yo'q. $2^{-1}(3-\sqrt{5}), 2^{-1}(3+\sqrt{5}), 3, 4$ xos qiymatlar operatorning

oddiy xos qiymatlari bo'ladi.

b) Endi $\lambda \notin \{2^{-1}(3-\sqrt{5}), 2^{-1}(3+\sqrt{5}), 1, 3, 4\}$ holni qaraymiz. Ta'rifga ko'ra, A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi $A - \lambda I$ operatorning teskarisi sifatida aniqlanadi. $(A - \lambda I)x = y$, ya'ni

$$((1-\lambda)x_1 + x_2, x_1 + (2-\lambda)x_2, (3-\lambda)x_3, (4-\lambda)x_4, (1-\lambda)x_5, \dots) = (y_1, y_2, \dots), \quad (4.16)$$

tenglikdan x ni topamiz. Buning uchun

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 = y_1, \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 = y_2, \\ (3-\lambda)x_3 = y_3, \\ (4-\lambda)x_4 = y_4, \\ (1-\lambda)x_n = y_n, \quad n \geq 5, \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib

$$\begin{cases} x_1 = \frac{(2-\lambda)y_1 - y_2}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}, \\ x_2 = \frac{-y_1 + (1-\lambda)y_2}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}, \\ x_3 = y_3(3-\lambda)^{-1}, \\ x_4 = y_4(4-\lambda)^{-1}, \\ x_n = y_n(1-\lambda)^{-1}, \quad n \geq 5 \end{cases}$$

munosabatlarni olamiz, ya'ni (4.16) tenglama

$$x = \left(\frac{(2-\lambda)y_1 - y_2}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}, \frac{-y_1 + (1-\lambda)y_2}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}, \frac{y_3}{3-\lambda}, \frac{y_4}{4-\lambda}, \frac{y_5}{1-\lambda}, \frac{y_6}{1-\lambda}, \dots \right)$$

yagona yechimga ega. Shunday qilib, A operatorning rezolventasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$R_\lambda(A)x = \left(\frac{(2-\lambda)x_1 - x_2}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}, \frac{-x_1 + (1-\lambda)x_2}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}, \frac{x_3}{3-\lambda}, \frac{x_4}{4-\lambda}, \frac{x_5}{1-\lambda}, \frac{x_6}{1-\lambda}, \dots \right)$$

Ko'rinib turibdiki, agar $\lambda \notin \{2^{-1}(3-\sqrt{5}), 2^{-1}(3+\sqrt{5}), 1, 3, 4\}$ bo'lsa,

$D(R_\lambda(A)) = \ell_1$. Banax teoremasiga ko'ra $R_\lambda(A)$ chegaralangan operator bo'ladi.

Shunday qilib, barcha $\lambda \notin \{2^{-1}(3-\sqrt{5}), 2^{-1}(3+\sqrt{5}), 1, 3, 4\}$ lar, A operator

uchun regulyar qiymat bo'ladi. Bundan

$\sigma(A) = \{2^{-1}(3-\sqrt{5}), 2^{-1}(3+\sqrt{5}), 1, 3, 4\}$ tenglik kelib chiqadi.

4.8-misol. Endi ℓ_2 Hilbert fazosida ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$A: \ell_2 \rightarrow \ell_2, \quad Ax = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \dots, a_nx_n, \dots) \quad (4.17)$$

operatorni qaraymiz. Uning xos qiymatlarini va spektrini toping.

Yechish. $\sup_{n \geq 1} |a_n| = a < \infty$ bo'lgan holda, A ning chegaralangan ekanligi ℓ_2 fazoda ko'paytirish operatorida $(A: \ell_2 \rightarrow \ell_2)$ ko'rsatilgan. Bundan tashqari $\|A\| = \sup_{n \geq 1} |a_n| = a$ tenglik isbotlangan edi. $Ax = \lambda x$ tenglama $\lambda = a_n$ bo'lganda $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ nolmas yechimga ega. Demak, $a_n, n \in N$ sonlar A operatorning xos qiymatlari bo'lar ekan. Agar birorta ham $n \in N$ da $\lambda \neq a_n$ bo'lsa, u holda $(A - \lambda I)$ operator teskarilανuvchan bo'ladi va

$$(A - \lambda I)^{-1}x = -\left(\frac{x_1}{\lambda - a_1}, \frac{x_2}{\lambda - a_2}, \dots, \frac{x_n}{\lambda - a_n}, \dots\right). \quad (4.18)$$

Bulardan $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \sigma_{pp}(A)$ tenglik kelib chiqadi. Ma'lumki, xos qiymatlar operatorning spektriga qarashli bo'ladi, shuning uchun $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \subset \sigma(A)$. Ikkinchi tomondan chegaralangan operatorning spektri yopiq to'plamdir, demak $\sigma_{pp}(A)$ to'plamning yopig'i $[\sigma_{pp}(A)]$ uchun

$$\overline{\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}} = [\sigma_{pp}(A)] \subset \sigma(A) \quad (4.19)$$

munosabat o'rinli. Agar $\lambda \notin [\sigma_{pp}(A)]$ bo'lsa, u holda (4.18) tenglik bilan aniqlangan $(A - \lambda I)^{-1}$ operator ℓ_2 fazoning hamma yerida aniqlangan va chegaralangan bo'ladi. Bundan $C \setminus [\sigma_{pp}(A)] \subset \rho(A)$ ekanligi kelib chiqadi. Bu yerdan

$$\sigma(A) \subset [\sigma_{pp}(A)]. \quad (4.20)$$

(4.19) va (4.20) munosabatlardan

$$\sigma(A) = [\sigma_{pp}(A)]$$

ga kelamiz. Ko'rsatamizki, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning barcha limitik nuqtalari A operatorning muhim spektriga qarashli bo'ladi. Buning uchun limitik nuqta λ ga yaqinlashuvchi $\{a_{n_k}\}$ qisman ketma-ketlikni qaraymiz. U holda

$$\|(A - \lambda I)e_{n_k}\| = \|(a_{n_k} - \lambda)e_{n_k}\| = |a_{n_k} - \lambda| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

$\{e_{n_k}\}$ ketma-ketlik ortonormal sistema bo'lganligi uchun nolga kuchsiz ma'noda yaqinlashadi. Demak, λ son A operatorning muhim spektriga qarashli ekan.

Xulosa

Cheksiz o'lchamli fazolarda chiziqli operatorlarning spektirlari chekli o'lchamli fazolardagidek yakkalangan nuqtalar to'plamidan iborat bo'lmas ekan. Hamda spektr faqat xos qiymatlardan ham iborat bo'lmas ekan, uzluksiz spektirlar ham bo'lar ekan.

Yuqorida 2-bo'limda biz ko'rib o'tdikki chiziqli cheksiz o'lchamli fazolarda chiziqli operatorning spektiri birlik doiradagi barcha nuqtalar to'plamidan iborat bo'lishi mumkin. Bazida bu nuqtalar to'plami xos sonlar ham bo'ladi, demak cheksiz o'lchamli fazolarda chiziqli operatorlarning xos sonlari to'plami yakkalanmagan nuqtalar to'plamidan iborat bo'lmasligi mumkin.

Xulosa qilib aytganda cheksiz o'lchamli fazolarda aniqlangan operatorlarning spektirlari chekli o'lchamli fazolarda aniqlangan spektridan tubdan farq qilar ekan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. I.A.Karimov. Yuksak ma'naviyat - yengilmas kuch. -T.: "Ma'naviyat" nashriyoti, 2008. – 176 b.
2. I.A.Karimov, Jahon moliyaviy iqtisodiy inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo'llari va choralari. - T.: "O'zbekiston" 2009. -56b.
3. I. A.Karimov, Barkamol avlod – O'zbekiston taraqqiyotining poydevori. –T.: "Sharq" nashriyoti, 1997.-64b.
4. Ayupov. Sh.A, Berdiqulov.M.A, Turg'unboev. R.M. Funksional analiz. Toshkent. 2008.
5. Laqayev.S.N.,Holmatov. Sh.Yu. Hilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma operatorlar. O'quv qo'llanma. Samarqand. 29.09.2010 y. 95-b.
6. WWW.GOOGLE.UZ internet sayti.
7. **www.eduportal.uz** - Axborot ta'lim portal.
8. WWW. ZIYONET. UZ internet sayti.