



**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI  
XALQ TA'LIMI VAZIRLIGI**

**NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI**

**Fizika-matematika fakulteti**

**“Matematika o'qitish metodikasi”  
kafedrası**

**BITIRUV MALAKAVIY ISHI**

**Mavzu: Qaytma va yuqori darajali tenglamalar va  
ularni yechish metodikasi.**

Bajardi: 5110100-Matematika o'qitish  
metodikasi ta'lim yo'nalishi 4-kurs “A”  
guruhi talabasi Nurmamatov Alisher  
Fazliddin o'g'li

Ilmiy rahbar: dots. Jalilov A.A.

Navoiy-2016

## Mundarija

Kirish.....	3
I-BOB. Qaytma va yuqori darajali tenglamalar.....	7
1-§.Qaytma tenglamalar va ularni yechish metodikasi.....	7
2-§.Yuqori darajali tenglamalar.....	8
II-BOB.Yuqori darajali tenglamalarning xususiy hollari.....	14
1-§.Kvadrat tenglama tushunchasi va uni yechish usullari.Uch hadli tenglamalar.....	14
2-§. Uchinchi darajali tenglamalarni Kardano formulasi yordamida yechish.....	22
3-§.To'rtinchi darajali tenglamalarni Ferrari usulida yechish.....	26
4-§. Kvadrat tenglamaga keltiriladigan yuqori darajali tenglamalar.....	30
5-§. Bezu teoremasi.Gorner sxemasi.Ko`phadning ildizlari.....	34
6-§. Algebraik tenglamalarning kompleks ildizlari .....	37
III-BOB.Ratsional sonlar maydoni ustidagi ko`phadlar va algebraik sonlar.....	38
1-§. Butun koeffitsientli ko`phadning butun va ratsional ildizlari.....	38
2-§. Tenglamalarning radikallarda yechilish tushunchasi.....	46
3-§.Tenglamalarni taqribiy yechish.....	51
4-§.Ba'zi yuqori darajali tenglamalarni yechish.....	53
Xulosa.....	59
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati .....	60

## **Kirish.**

*Ilm - sahroda - do 'st,  
Hayot chorrahalarida - tayanch,  
Yo'lg'iz damlarda - yo 'ldosh,  
Bahtiyor daqiqalarda-rahbar,  
Qayg'uli onlarda madadkor,  
Odamlar orasida zebu-ziynat,  
Dushmanlarga qarshi kurashda-  
quroldir.*

Ilm o'rganish har bir inson uchun hayot yo'llarida asqotadigan, odamlar orasida uni ajratib turadigan, yolg'iz qolgan paytlarda yo'ldosh bo'lib, tushkunlikka tushganda doimo madadkor bo'luvchi yengilmas quroldir. Shu nuqtai nazardan bugun har birimiz ilm olishimiz, mukammal bilim egallashimiz, kasb-hunar o'rganishimiz va bu orqali o'z kelajagimizni o'zimiz yaratib, mamlakatimiz gullab-yashnashi, ravnaq topishi hamda rivojlangan davlatlar qatoridan munosib o'rin olishi uchun o'z hissamizni qo'shishimiz zarur va shartdir.

Biz erishgan yutuq va marralarning asosiy omili o'zimizning dunyoqarashimiz, ongu tafakkurimiz, hayotga, mehnatga, yon-atrofga munosabatimiz bilan belgilanadi. Biz bugun erkin fikrlaydigan, ongli yashaydigan, siyosiy, huquqiy va ma'naviy saviyasi tobora o'sib borayotgan, o'z kelajagini, kim uchun va nima uchun mehnat qilayotganini o'ziga aniq tasavvur etayotgan xalqmiz. Shu o'rinda Prezidentimiz I.A.Karimovning quyidagi fikrlarini eslatib o'tishni joiz deb bilaman:” biz o'z oldimizga qo'ygan kelajagi buyuk davlat qurishdek olijanob maqsadga yetish yo'lida sizlar kabi mard va shijoatli yoshlarimizga, ilmu fan cho'qqilarini egallashga bel bog'lagan, qiyinchilik va sinovlar oldida bosh egmaydigan, bugun hayotimizning hal qiluvchi kuchi bo'lib maydonga chiqayotgan sog'lom va barkamol avlodimizga ishonaman.”<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Prezident Islom Karimovning O'zbekiston Respublikasi mustaqilligining yigirma ikki yilligiga bag'ishlangan tantanali marosimdagi nutqidan. “Xalq so'zi”, 2013, 64-son, 1-3-betlar.

O‘zining ahamiyati va mohiyatiga ko‘ra hech narsa bilan qiyoslab bo‘lmaydigan hayotimizdagi o‘zgarishlar haqida gapirganda, avvalo odamlarimizning dunyoqarashi va kayfiyati, fikru zikri, ularning hayotga, o‘z mehnati natijasiga munosabati tubdan o‘zgarib, yuksalib borayotgani haqida to‘xtalmasdan o‘tolmaymiz. Bugun insonning o‘zi o‘zgarmoqda, uning grajdanlik va siyosiy ongi, huquqiy madaniyati o‘smoqda. Mustaqil fikrlaydigan, zamonaviy bilim va kasb-hunarlariga ega, hayotga yangicha qaraydigan, sobiq mustabid tuzumga xos tushunchalardan ozod bo‘lib voyaga yetayotgan, o‘z fikri va qarashlariga ega bo‘lgan navqiron yoshlarimiz hayotga ishonch bilan kirib kelmoqda, jamiyatimizda mustahkam o‘rin olmoqda va mamlakatimizning taraqqiyoti yo‘lida hal qiluvchi kuchga aylanmoqda.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturi va maktab ta’limini rivojlantirish umummilliy davlat dasturining amalga oshirilishi samaralari mamlakatimizda barkamol avlodni tarbiyalashga qaratilayotgan ulkan e’tiborning yaqqol tasdig‘idir. Ma’lumki, O‘zbekistonda 12 yillik majburiy ta’lim joriy etilgan, uning sifati xalqaro talablarga javob beradi. Shu o‘rinda Prezidentimiz I.A. Karimovning quyidagi fikrlari o‘rinlidir: ”O‘quvchi yoshlarni ijtimoiy himoyalashga, ularga ishlab chiqarishdan ajralgan holda o‘qib, bilim olishi uchun zarur moddiy sharoit yaratishga doimo e’tibor berilmoqda”.<sup>2</sup> Sport mamlakatimizda barkamol avlodni tarbiyalashning ajralmas tarkibiy qismiga aylangan. Uni bolalar va o‘smirlar, ayniqsa, qizlar o‘rtasida ommalashtirish, sog‘lom turmush tarzini keng qaror toptirish bo‘yicha noyob tizim yaratildi. Nafaqat shaharlarda, balki eng olis tumanlarda ham zamonaviy sport komplekslari barpo etildi. Bolalarni ommaviy tarzda sport bilan muntazam shug‘ullanishga va ularning salomatligini mustahkamlashga ko‘maklashmoqda. Mamlakatimizda ma’naviyat va ma’rifatni yuksaltirishga, bolalarni milliy va umuminsoniy qadriyatlar ruhida tarbiyalashga katta e’tibor qaratilmoqda.

---

<sup>2</sup> Karimov I.A. ”O‘zbekiston buyuk kelajak sari” asari. T.: ”O‘zbekiston” nashriyoti-1999, 289-bet.

2014-2015 o'quv yilida 2,6 million o'quvchi 575 nomdagi 25 million nusxa darsliklar va o'quv-uslubiy qo'llanmalar bilan ta'minlanadi.

“Milliy umumta'lim elektron kutubxona” loyihasining amalga oshirilishi ham bolalarning intellektual rivojlanishiga ko'maklashadi. Loyihada turli bilim olishga oid va o'quv materiallarini elektron formatga o'tkazish markazi, multimedia axborot resurslari markazi, shuningdek, integratsiyalashgan axborot-kutubxona tarmog'i tashkil etilishi, O'zbekistondagi barcha axborot-kutubxona muassasalarining 2020-yilgacha ushbu tarmoqqa ulanishi mo'ljallangan.”<sup>3</sup>

Mazkur bitiruv malakaviy ishi “Qaytma va yuqori darajali tenglamalar va ularni yechish metodikasi” mavzusiga bag'ishlangan bo'lib, o'quvchilarning matematik ta'lim jarayonida egallagan bilim, ko'nikma va malakalarini hamda o'z-o'zini rivojlantirish uchun xizmat qiladi.

Bitiruv malakaviy ishi kirish, uchta bob va o'n ikkita paragraf, xulosa hamda foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan.

Birinchi bobda dastlab qaytma va yuqori darajali tenglamalar haqida tushuncha, ta'rif, teoremlar isboti va misollar bilan beriladi.

Ikkinchi bobda esa yuqori darajali tenglamaning xususiy hollari: kvadrat tenglama va uning bir necha ko'rinishlarini yechish yo'llari, uchinchi darajali tenglamalarni Kardano formulasi yordamida yechish, to'rtinchi darajali tenglamalarni Ferrari usulida yechish, kvadrat tenglamaga keltiriladigan yuqori darajali tenglamalar, Bezu teoremasi, Gerner sxemasi, ko'phadning ildizlari, algebraik tenglamalarning kompleks ildizlari va ularga doir misollar yechish namunalari bayon qilinadi. Buning tasdig'i sifatida misollar ham keltiriladi.

Uchinchi bobda esa butun koeffitsientli ko'phadning butun va ratsional ildizlari, tenglamalarning radikallarda yechilish tushunchasi, tenglamalarni taqribiy yechish va ba'zi yuqori darajali tenglamalarni yechish usullari va ularga oid misollardan namunalar yechib ko'rsatilgan.

---

<sup>3</sup> Karimov I.A. “Sog'lom bola yili” davlat dasturidan.”Xalq so'zi”, 2014, 39-son, 1-3 betlar

Xulosa qismida esa mavzu yuzasidan kelib chiqadigan fikrlar, uning qanday darajada ahamiyatligi aytib o'tiladi.

Bitiruv malakaviy ishi so'ngida foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati keltiriladi.

O'ylaymanki, ushbu bitiruv malakaviy ishida keltirilgan ma'lumotlar asosida matematika darslari akademik litsey va kasb-hunar kollejlari hamda oliy o'quv yurtlarida yoritilib o'tilsa, o'quvchi va talabalar tafakkurini rivojlantiradi va o'z ustida yanada ko'proq ishlashga undaydi.

**Bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligi:** Olingan nazariy bilimlarni amalda qo'llay bilish, o'zlashtirgan bilimlarini misol va masalalarga tadbiq qila olish shuningdek, o'quvchilarning erkin fikrlash, mustaqillik va ijodiy tashabbus ko'rsatish qobiliyatlarini o'stirishga va o'z-o'zini rivojlantirishga katta imkon berish.

**Bitiruv malakaviy ishining maqsadi:** "Qaytma va yuqori darajali tenglamalarni yechish usullari" ni o'rganish hamda uni o'quvchi va talabalarga o'rgatish.

**Bitiruv malakaviy ishining obykti:** Umumta'lim maktablari va akademik litsey, kasb-hunar kollejlari matematika fanini o'rgatish jarayoni hamda ushbu fan orqali o'quvchi va talabalarda ezgu axloq, e'tiqod, estetik tarbiya va bilimlarni shakllantirishda yordam beradigan, o'quvchini faollashtiradigan usullarini aniqlashga harakat qilish.

**Bitiruv malakaviy ishining predmeti:** Umumta'lim maktablari va akademik litsey, kasb-hunar kollejlari matematika darsliklaridagi mavzuga oid misollar yechish metodikasi ishning tadqiq predmeti sifatida tanlangan.

## I-BOB. Qaytma va yuqori darajali tenglamalar

### 1-§. Qaytma tenglamalar va ularni yechish metodikasi

$a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \dots + a_3x^2 + a_2x + a_1 = 0$  ko'rinishdagi butun algebraik tenglama *qaytma tenglama* deyiladi<sup>4</sup>.

Bu ko'rinishdagi tenglamalarda boshidan va oxiridan bir xil uzoqlikda joylashgan koeffitsiyentlar teng bo'ladi.

Qaytma tenglamalarni  $n = 2k$  va  $n = 2k + 1$  bo'lgan holatlarda qaraymiz. Buni misollarda keltirib o'tamiz.

**1-misol.**  $21x^6 + 82x^5 + 103x^4 + 164x^3 + 103x^2 + 82x + 21 = 0$  tenglamani yeching.

**Yechish.** Tenglamani  $x^3$  ga bo'lamiz.

$$21x^3 + 82x^2 + 103x + 164 + 103 \cdot \frac{1}{x} + 82 \cdot \frac{1}{x^2} + 21 \cdot \frac{1}{x^3} = 0$$

$$21\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 82\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 103\left(x + \frac{1}{x}\right) + 164 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$  belgilash kiritsak,  $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ ,  $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$  ga ega bo'lamiz.

$$21t^3 + 82t^2 + 40t = 0 \Rightarrow t(21t^2 + 82t + 40) = 0 \text{ bundan } t_1 = 0 \text{ va } 21t^2 + 82t + 40 = 0$$

Tenglamani ildizlari  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = -\frac{4}{3}$ ,  $t_3 = -\frac{10}{3}$

Agar: 1)  $t_1 = 0$  bo'lsa,  $x + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$  tenglamaga ega bo'lamiz.  $x_1 = -i$ ,  $x_2 = i$

2)  $t_2 = -\frac{4}{3}$  bo'lsa,  $7x^2 + 4x + 7 = 0$  tenglamaga ega bo'lamiz. Uning ildizlari

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm 3\sqrt{5}i}{7}.$$

3)  $t_3 = -\frac{10}{3}$  bo'lsa,  $3x^2 + 10x + 3 = 0$  tenglamaga ega bo'lamiz. Uning ildizlari:

$$x_5 = -\frac{1}{3}, x_6 = -3$$

---

<sup>4</sup> Jumaniyozov Q, Muxamedova G: "Matematikadan misol va masalalar yechish metodikasi", Toshkent-2014.82-85-betlar.

**Javob:**  $x_1 = -i, x_2 = i, x_3 = \frac{-2-3\sqrt{5}i}{7}, x_4 = \frac{-3+3\sqrt{5}i}{7}, x_5 = \frac{-1}{3}, x_6 = -3$

**2-misol.**  $x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$

**Yechish.** Bu tenglamaning daraja ko'rsatkichi toq son bo'lgani uchun, bitta ildizi  $x_1 = 1$  ga teng, ya'ni

$$(x-1)(x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1) = 0$$

$$x_1 = 1, x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$$

Bu tenglamani  $x^2$  ga bo'lamiz.

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$  belgilash kiritamiz.

U holda  $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$  ga teng bo'ladi.

Belgilashlarni o'rniga qo'yib  $t^2 + 5t = 0$  ga ega bo'lamiz.

Bundan  $t_1 = 0, t_2 = -5$ .

Agar: 1)  $t_1 = 0$  bo'lsa,  $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \pm i$

2)  $t_2 = -5$  bo'lsa,  $x^2 + 5x + 1 = 0$  bo'lib, yechimi  $x_{4,5} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$  bo'ladi.

**Javob:**  $x_1 = 1, x_2 = -i, x_3 = i, x_4 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}, x_5 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$

## 2-§. Yuqori darajali tenglamalar

1-ta'rif. Ushbu

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad a_0 \neq 0 \quad (1)$$

tenglama yuqori darajali tenglama deyiladi<sup>5</sup>.

**Misol.**  $2x^5 + 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 6 = 0$  beshinchi darajali tenglamadir.

Agar (1) da  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  bo'lsa, u holda (1) ni *butun koeffitsientli yuqori*

<sup>5</sup> To'laganov T. R: "Elementar matematika", Toshkent "O'qituvchi" -1997.217-226-betlar.

darajali tenglama deyiladi. Agar  $a_0=1$  bo'lsa, u holda (1) ni keltirilgan tenglama deyiladi.

**1-teorema.** Agar

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (2)$$

butun koeffitsientli tenglama butun yechimga ega bo'lsa u holda bu yechim ozod hadning bo'luvchisi bo'ladi.

**Isboti.** Teoremaning shartiga ko'ra (2) butun koeffitsientli bo'lib, butun  $x = k$  yechimga ega, ya'ni  $k^n + a_1k^{n-1} + \dots + a_{n-1}k + a_n = 0$  bo'lib, bundan  $a_n = k(-k^{n-1} - a_1k^{n-2} - \dots - a_{n-1})$  bo'ladi. Hosil qilingan natijaning o'ng tomoni ikkita butun sonning ko'paytmasi bo'lganligi uchun  $a_n : k$  bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

**2-teorema.** Agar butun koeffitsiyentli (1) tenglama  $\frac{p}{q}, (p, q) = 1,$

ratsional ildizga ega bo'lsa, u holda  $p$  ozod hadning bo'luvchisi,  $q$  bosh had koeffitsiyenti  $a_0$  ning bo'luvchisi bo'ladi.

**Isboti.** Teoremaning shartiga ko'ra  $\frac{p}{q}, (p, q) = 1$  (1) ning ildizi bo'lgani uchun

$$a_0 \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot \frac{p}{q} + a_n = 0 \quad (3)$$

bo'lib, bundan

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \dots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0 \quad (3')$$

hosil bo'ladi. Bu(3') dan

$$a_n q^n = p(-a_0 p^{n-1} - a_1 p^{n-2} q - a_2 p^{n-3} q^2 - \dots - a_{n-1} q^{n-1}) \quad (4)$$

hosil bo'lib, bundan  $a_n$  ning  $p$  ga bo'linishi ko'rinib turibdi. Xuddi shunga o'xshash, (4) dan  $a_0$  ning  $q$  ga bo'linishini ko'rsatish mumkin. Shu bilan teorema isbot qilindi.

**Ta'rif.** Ushbu

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \dots + a_n x^{n+1} + \lambda a_n x^n + \lambda^3 a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (5)$$

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (6)$$

ko'rinishdagi tenglamalar *qaytma tenglamalar* deyiladi.

**3-teorema.** *Toq darajali qaytma tenglama  $x = -\lambda$  ildizga ega bo'ladi.*

**Isboti.** Teoremaning shartiga ko'ra (5) ni olamiz va uni quyidagicha almashtiramiz:  $a_0(x^{2n+1} + \lambda^{2n+1}) + a_1x(x^{2n-1} + \lambda^{2n-1}) + \dots + a_nx^n(x + \lambda) = 0$  (7)

Natijada  $x = -\lambda$  ni almashtirsak, u holda (7) ning chap tomoni nolga teng bo'ladi. Shu bilan teorema isbot qilindi.

**4-teorema.** *Darajasi  $2n$  bo'lgan qaytma tenglama  $C$  sonlar maydonida  $y = x + \frac{\lambda}{x}$  almashtirish orqali  $n$ -darajali tenglamaga keltirilib,  $n$  ta kvadrat tenglama hosil bo'ladi.*

**Isboti.** Teoremaning shartiga ko'ra  $a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_nx^n + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda^2 a_{n-2}x^{n-2} + \dots + \lambda^n a_0 = 0$  (8)

tenglamani  $x^n \neq 0$  ga bo'lamiz, natijada

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n + a_{n-1}\frac{\lambda}{x} + \dots + a_1\frac{\lambda^{n-1}}{x^{n-1}} + a_0\frac{\lambda^n}{x^n} = 0$$

hosil

bo'ladi. So'ngra, guruhlashdan so'ng  $a_0(x^n + \frac{\lambda^n}{x^n}) + a_1(x^{n-1} + \frac{\lambda^{n-1}}{x^n}) + \dots + a_n = 0$

tenglamada  $y = x + \frac{\lambda}{x}$  belgilashni kiritamiz. Bu yerda  $x^n + \frac{\lambda^n}{x^n}, m \in N$  yig'indi

$y$  ga nisbatan  $f_m(y)$  ni hosil qilishi ma'lumdir. Endi  $m$  ga nisbatan matematik induksiya usulini tatbiq qilamiz:  $m=1$  bo'lsin, u holda  $y = x + \frac{\lambda}{x}$  bo'lib, talab

bajariladi.  $m=2$  bo'lganda  $x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2} = y^2 - 2\lambda$  bo'ladi.  $m=k+1$  bo'lganda

$x^{k+1} + \frac{\lambda^{k+1}}{x^{k+1}} = f_{k+1}(y)$  bo'lsin deb,  $m=k+2$  uchun ko'rsatamiz.

$$x^{k+2} + \frac{\lambda^{k+2}}{x^{k+2}} = (x^{k+1} + \frac{\lambda^{k+1}}{x^{k+1}})(x + \frac{\lambda}{x}) - \lambda(x^k + \frac{\lambda^k}{x^k})$$

ekanidan

$$x^{k+2} + \frac{\lambda^{k+2}}{x^{k+2}} = y f_{k+1}(y) - \lambda f_k(y) = f_{k+2}(y) \text{ hosil bo'lib, u } y \text{ ga nisbatan n-}$$

darajali tenglama bo'ladi. Bu tenglama C da n ta yechimga ega ekanligidan uni  $y_1, y_2, \dots, y_n$  orqali ifodalasak,  $y_1 = x + \frac{\lambda}{x}$ ;  $y_2 = x + \frac{\lambda}{x}$ ; ...  $y_n = x + \frac{\lambda}{x}$  kvadrat tenglamalarni hosil qilamiz. Bu tenglamalarning yechimlari (8) ning yechimlaridan iborat bo'ladi. Shu bilan teorema isbotlandi.

**1-misol.**  $x^7 - 2x^6 + 3x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$  (9) tenglamani yeching.

**Yechish.** 3-teoremaga asosan (9)  $\leftrightarrow (x+1)(x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1) = 0$  bo'lib,

bundan  $x+1=0$  yoki  $(x^3 + \frac{1}{x^3}) - 3(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 6(x + \frac{1}{x}) - 7 = 0$  larni hosil qilamiz.

$y = x + \frac{1}{x}$  belgilanishiga ko'ra  $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ ,  $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$  ekanligi

$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0$  yoki  $(y-1)^3 = 0$  tenglamani beradi. Bundan  $x + \frac{1}{x} = 1$  ga ko'ra  $x_1 = -1$ ,

$x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $x_5 = x_6 = x_7 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$  natijalarni olamiz. Demak, C da yechim

$\{-1; \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\}$  bo'ladi.

Endi

$$x^n = b \tag{10}$$

ko'rinishidagi ikki hadli tenglamani yechishni ko'rib chiqaylik. Bunda ushbu hollar bo'lishi mumkin:

1)  $n = 2m - 1$  bo'lsin, u holda  $y = x^{2m-1}$  funksiya  $x \in (\infty; +\infty)$  da monoton o'suvchi bo'lganligi uchun  $x^{2m-1} = b$  tenglamaning yechimi:

a) agar  $b > 0$  bo'lsa,  $x = \sqrt[2m-1]{b}$ ;

b) agar  $b = 0$  bo'lsa,  $x = 0$ ;

v) agar  $b < 0$  bo'lsa,  $x = -\sqrt[2m-1]{b}$  bo'ladi.

g)  $n = 2m$  bo'lsin, u holda  $y = x^{2m}$  funksiya  $A = (0; +\infty)$  da qat'iy monoton o'sadi,  $B = (-\infty; 0]$  da qat'iy monoton kamayadi. Shuning uchun  $x^{2m} = b$  tenglamani A da va B da alohida yechamiz. A oraliqda: agar  $b > 0$  bo'lsa,  $x_1 = \sqrt[2m]{b}$ ;  $b = 0$  bo'lsa,  $x = 0$ ;  $b < 0$  bo'lsa, yechimga ega emas. B oraliqda esa:  $b > 0$

bo'lsa,  $x_2 = -\sqrt[2m]{b}$ ;  $b < 0$  bo'lsa, yechim yo'q. Demak,  $x^n = b$  tenglama uchun:

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$x^{2m-1} = b$	$x_1 = \sqrt[2m-1]{b}$	$x_1 = 0$	$x_1 = -\sqrt[2m-1]{b}$
$x^{2m} = b$	$x_1 = \sqrt[2m]{b},$ $x_2 = -\sqrt[2m]{b}$	$x = 0$	yechim yo'q

$x^n = 1$  ko'rinishdagi tenglamani  $C$  da yechish uchun sonning trigonometrik shaklidan foydalanamiz, ya'ni  $1 = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k$  dan  $x_k = \sqrt[n]{\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$  topiladi. Bundan  $\varepsilon_0 = 1; \varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}; \dots k = 0, \dots, (n-1); \varepsilon_{n-1} = \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}; x_1 = \varepsilon_0; x_2 = \varepsilon_1; \dots x_n = \varepsilon_{n-1}$ .

Bu ma'lumotlarga tayangan holda  $ax^{2n} + bx^n + c = 0; a \neq 0$ , tenglamani yechish mumkin.

**2-misol.** Ushbu tenglamani yeching:

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0.$$

**Yechish. Birinchi usul.** Bu tenglamada  $a_n = 1$  va  $a_0 = -12$  bo'lgani uchun  $a_0$  ning  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$  bo'luvchilarini yozib olamiz, so'ngra Gornor sxemasi bo'yicha tenglamaning ildizlari to'plamini aniqlaymiz:

	1	2	5	4	-12
1	1	3	8	12	0
-2	1	1	6	0	

Demak, tenglamaning ildizlar to'plami  $R$  da  $\{1; -2\}$ . So'ngra

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = (x-1)(x+2)(x^2+x+6) = 0.$$

Bundan 
$$\begin{cases} x^2 + x + 6 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}, \\ x = 1, \\ x = -2. \end{cases}$$

Demak, tenglamaning ildizlar to'plami  $C$  da

$$\left\{ x = \frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}, x = 1, x = -2. \right\}$$

**Ikkinchi usul (ko'paytuvchilarga ajratish usuli):**

$$\begin{aligned}x^4+2x^3+5x^2+4x-12 &= (x^4+2x^3)+(5x^2+10x)-(6x+12) = (x+2)(x^3+5x-6) = \\ &= (x-1)(x+2)(x^2+x+6) = 0.\end{aligned}$$

Bundan, tenglamaning ildizlar to'plami  $\{x = \frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}, x=1, x=-2.\}$

**Uchinchi usul:** (noma'lum koeffitsientlarni kiritish usuli): berilgan tenglamani  $x^4+2x^3+5x^2+4x-12=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$  ko'rinishida yozib olib, qavslarni ochib chiqamiz, so'ngra ko'phadning ko'phadga tenglik shartini hisobga olgan holda  $a=1, b=2, c=1, d=6$  ni aniqlaymiz.

**4-misol.**  $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$  tenglamani yangi o'zgaruvchi kiritish usuli bilan yeching.

**Yechish.**  $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow (x^2+x+1)^2-3(x^2+x+1)+2=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} t^2 - 3t + 2 = 0 \\ t = x^2 + x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = 1 \\ x^2 + x + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Tenglamaning ildizlar to'plami  $\{0; -1; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$ .

## II-BOB. Yuqori darajali tenglamalarning xususiy hollari

### 1-§. Kvadrat tenglama tushunchasi va uni yechish usullari

**Ta'rif:** Ushbu  $ax^2+bx+c=0$  ko'rinishdagi tenglama **kvadrat tenglama** deyiladi, bunda  $x$  - o'zgaruvchi,  $a, b, c$  - berilgan sonlar ( $a \neq 0$ ). Agar  $a \neq 1$  bo'lsa tenglama to'la kvadrat tenglama deyiladi.  $a, b, c$  sonlar kvadrat tenglamaning koeffitsiyentlari,  $c$  esa ozod had deyiladi.<sup>6</sup>

Kvadrat tenglamani *ikkinchi darajali tenglama* ham deb ataladi, chunki uning chap qismi ikkinchi darajali ko'phaddan iborat.

O'zgaruvchining kvadrat tenglamani to'g'ri sonli tenglikka aylantiradigan qiymatlari *kvadrat tenglama ildizlari* deyiladi.

**Chala (to'liqmas) kvadrat tenglama.** Agar

$$ax^2+bx+c=0$$

kvadrat tenglamada  $b=0$  yoki  $c=0$  bo'lsa, bunday tenglama *chala (to'liqmas) kvadrat tenglama* deyiladi. Chala kvadrat tenglamalar:

$$1) ax^2+c=0; \quad 2) ax^2+bx=0; \quad 3) ax^2=0.$$

Bu turdagi tenglamalarning yechilishini qarab chiqamiz:

$$1) ax^2+c=0 \quad \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$\left[ x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}, \text{ agar } \frac{c}{a} < 0 \text{ bo'lsa,} \right.$$

ildizga ega emas, agar  $\frac{c}{a} > 0$  bo'lsa,

$$2) ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x(ax+b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -\frac{b}{a}; \end{cases}$$

$$3) ax^2=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Rightarrow [x=0.$$

---

<sup>6</sup> Usmonov F.R, Isomov R.D, Xo'jayev B.O: "Matematikadan qo'llanma"

1-qism Toshkent "Yangi asr avlodi" 2006. 120-131-betlar.

**Miso11ar.** Ushbu tenglamalarni yeching:

$$1)x^2-2=0; \quad 2)x^2=9; \quad 3)4x^2+6x=9x^2-15x; \quad 4)2x^2+4=0.$$

**Yechilishi:**

$$1)x^2-2=0 \Leftrightarrow (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0 \rightarrow \begin{cases} (x+\sqrt{2})=0 \\ (x-\sqrt{2})=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\sqrt{2} \\ x_2=\sqrt{2} \end{cases}$$

**Javob:**  $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$ .

$$2) x^2=9 \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)=0 \rightarrow \begin{cases} (x+3)=0 \\ (x-3)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=3 \end{cases}$$

**Javob:** -3;3.

$$3)4x^2+6x=9x^2-15x \Leftrightarrow 5x^2-21x=0 \Leftrightarrow x(5x-21)=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 5x-21=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=4,2 \end{cases}$$

**Javob:** 0;4,2.

4)  $2x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2+2=0 \rightarrow x^2=-2$  tenglamaning ildizlari yo'q, chunki kvadrati -2 ga teng son mavjud emas.

**Javob:** tenglama yechimga ega emas.

**To'la kvadrat tenglamani yechish.** Ushbu  $ax^2+bx+c=0$  ( $a \neq 0$ )

tenglamani yechamiz:  $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

Bu tenglamada ikkihadning to'la kvadratini ajratamiz:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Hosil bo'lgan tenglamaning o'ng qismidagi kasrning maxraji musbat bo'lganligi sababli uning ildizlari soni  $b^2-4ac$  ifodaning ishorasi bilan bog'liq. Bu ifoda  $ax^2+bx+c=0$  tenglamaning *diskriminanti* deyiladi. Uni  $D$  harfi bilan

belgilanadi:

$$D=b^2-4ac.$$

Diskriminantga bog'liq bo'lgan uchta hol bo'lishi mumkin.

1 . Agar  $D > 0$  bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{D}}{2a} \rightarrow -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ &= \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \end{cases} \end{aligned}$$

Shunday qilib,  $D>0$  bo'lsa, kvadrat tenglama ikkita haqiqiy  $x_1$  va  $x_2$ , ildizlarga ega va ular

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

formula bilan topiladi.

2. Agar  $D=0$  bo'lsa, u holda

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \rightarrow \llbracket x = -\frac{b}{2a}$$

Demak, tenglama bitta  $-\frac{b}{2a}$  ildizga ega. Bunday holda tenglama bir-biriga teng  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$  ikki ildizga ega ham deyiladi.

3. Agar  $D < 0$  bo'lsa, u holda

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$$

tenglamaning o'ng qismi manfiy bo'ladi va u haqiqiy ildizga ega bo'lmaydi.

**1-misol.**  $3x^2+2x-2=0$  tenglamani yeching.

**Yechilishi.**  $D = b^2-4ac=4+24=28 > 0$ ;

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{7}$$

**Javob:**  $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$ ;  $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$

**2-misol.**  $25x^2-30x+9=0$  tenglamani yeching.

**Yechilishi.**  $D = (-30)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900 - 900 = 0$ ;

$$x_{1,2} = \frac{30 \pm 0}{50} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \quad \text{Javob: } x_{1,2} = \frac{3}{5}$$

**3-misol.**  $2x^2-4x+3=0$  tenglamani yeching.

**Yechilishi.**  $D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 16 - 24 = -8 < 0$ .

**Javob:** tenglama haqiqiy ildizlarga ega emas.

**4-misol.**  $x^2-2ax+a(1+a)=0$  tenglama  $a$  ning qanday qiymatlarida bitta haqiqiy ildizga ega bo'ladi?

**Yechilishi.** Berilgan kvadrat tenglama bitta haqiqiy ildizga ega bo'lishi uchun uning diskriminanti 0 ga teng bo'lishi kerak:

$$D = 4a^2 - 4a(1+a) = 0 \Rightarrow 4a^2 - 4a - 4a^2 = 0 \Rightarrow -4a = 0 \Rightarrow a = 0. \text{ Javob: } 0.$$

**Keltirilgan kvadrat tenglama.** Agar  $x^2$  oldidagi koeffitsiyent 1 ga teng bo'lsa, bu tenglama *keltirilgan kvadrat tenglama* deyiladi. Keltirilgan kvadrat tenglama umumiy holda

$$x^2+px+q=0$$

ko'rinishda yoziladi, bunda  $p$  va  $q$  - berilgan sonlar.

Keltirilgan kvadrat tenglamani  $ax^2+bx+c=0$  to'la kvadrat tenglamada  $a=1$ ,  $b=p$ ,  $c=q$  bo'lgan xususiy hol deb qarash mumkin.

Keltirilgan kvadrat tenglama ildizlari

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

formula bilan topiladi. Bu yerda diskriminant

$$D = p^2 - 4q.$$

Agar  $D > 0$  bo'lsa, keltirilgan kvadrat tenglama ikkita haqiqiy ildizga ega.

Agar  $D=0$  bo'lsa, keltirilgan kvadrat tenglama bitta haqiqiy ildizga ega.

Agar  $D < 0$  bo'lsa, tenglamaning haqiqiy ildizlari yo'q.

Har qanday  $ax^2+bx+c=0$  tenglamani uni  $a$  ga bo'lish yo'li bilan keltirilgan

kvadrat tenglamaga keltirish mumkin:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Agar keltirilgan kvadrat tenglamaning  $p$  koeffitsiyenti juft son bo'lsa, uning ildizlarini

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

formula bilan topish qulay.

### Viyet teoremasi

**Teorema.** Agar keltirilgan kvadrat tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo'lsa, bu ildizlarning yig'indisi qarama-qarshi ishora bilan olingan  $x$  oldidagi koeffitsiyentga, ularning ko'paytmasi esa shu tenglamaning ozod hadiga teng, ya'ni  $x^2+px+q=0$  tenglamada  $D=p^2-4q > 0$  bo'lsa,

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Masalan,  $x^2-7x-8=0$  tenglama uchun  $D=49 + 32 = 81 > 0$ ;

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 8; \end{cases} \quad x_1 + x_2 = -1 + 8 = 7, \quad x_1 \cdot x_2 = (-1) \cdot 8 = -8$$

Umumiy  $ax^2+bx+c=0$  kvadrat tenglama uchun Viyet teoremasi quyidagicha yoziladi:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a};$$

**Viyet teoremasiga teskari teorema.** Agar  $x_1+x_2=-p$  va  $x_1x_2=q$  tengliklarni qanoatlantiruvchi  $x_1$  va  $x_2$  haqiqiy sonlar mavjud bo'lsa, bu sonlar  $x^2+px+q = 0$  keltirilgan kvadrat tenglamaning ildizlari bo'ladi.

Masalalar yechishda Viyet teoremasi va unga teskari teorema tatbiqiga doir bir necha misollar ko'ramiz.

**1- misol.** Ildizlari -15 va 22 ga teng bo'lgan kvadrat tenglamani tuzing.

**Yechilishi.**  $x^2+px+q=0$  kvadrat tenglama koeffitsiyentlarini Viyet teoremasidan topamiz:

$$p = -(-15 + 22) = -7, \quad q = (-15) \cdot 22 = -330.$$

Shunday qilib, izlanayotgan tenglama:  $x^2 - 7x - 330 = 0$ .

**Javob:**  $x^2 - 7x - 330 = 0$ .

**Eslatma.** Ildizlari -15 va 22 ga teng bo'lgan cheksiz ko'p kvadrat tenglama tuzish mumkin. Buning uchun tuzilgan  $x^2 - 7x - 330 = 0$  tenglamaning har bir hadini noldan va birdan farqli ixtiyoriy songa ko'paytirish kifoya.

Masalan,

$$2x^2 - 14x - 660 = 0. \quad 3x^2 - 21x - 990 = 0 \text{ va hokazo.}$$

**2-misol.**  $x_1$  va  $x_2$  sonlar  $x^2 + 2x - 14 = 0$  tenglamaning ildizlari bo'lsa,  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$  ning qiymatini toping.

**Yechilishi.** Viyet teoremasiga ko'ra  $x_1 + x_2 = -2$ ,  $x_1 x_2 = -14$  tengliklar o'rinligidan foydalanamiz:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}$$

Bu ifodaga  $x_1 + x_2$  yig'indi va  $x_1 x_2$  ko'paytma qiymatlarini qo'yamiz:

$$\frac{(-2)^2 - 2 \cdot (-14)}{-14} = -\frac{4 + 28}{14} = -\frac{32}{14} = -\frac{16}{7} = -2\frac{2}{7}$$

**Javob:**  $-2\frac{2}{7}$

### Uch hadli tenglamalar

**Ta'rif.**  $ax^{2n} + bx^n + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) (1)

ko'rinishdagi tenglama uch hadli tenglama deyiladi. Agar  $x^n = y$  deb belgilasak, (1) uch hadli tenglama ( $y$ ) ga nisbatan quyidagi kvadrat tenglamaga keltiriladi:

$$ay^2 + by + c = 0$$

Natijada  $x = \pm^n \sqrt[n]{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$  ni hosil qilamiz.

Xususiyl holda,  $n=2$  bo'lganda, bikvadrat tenglamaga ega bo'lamiz va uning hamma to'rtta ildizlari uchun

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \text{ ni topamiz.}$$

Bikvadrat tenglamani  $a > 0$  bo'lganda ildizlarini tekshiramiz.

1.  $D = b^2 - 4ac > 0$ ,  $c > 0$ ,  $b < 0$  bo'lsa, yordamchi  $ay^2 + by + c = 0$  tenglamaning ildizlari musbat va turli. Bikvadrat tenglama to'rtta haqiqiy ildizga ega.

2.  $D > 0$ ,  $c < 0$  bo'lganda  $x^2$  uchun har xil ishorali ikkita qiymatni hosil qilamiz. Bikvadrat tenglama ikkita haqiqiy, ikkita mavhum ildizga ega bo'ladi.

3.  $D > 0$ ,  $c > 0$ ,  $b > 0$  bo'lganda  $x^2$  uchun ikkita manfiy qiymatlarni topamiz. Bikvadrat tenglama faqat mavhum ildizlariga ega bo'ladi.

4.  $c = 0$  bo'lsa, yordamchi tenglama  $ay^2 + by = 0$  bo'lib,  $y_1 = x^2 = 0$ ,  $y_2 = x^2 = -\frac{b}{a}$  bo'ladi.

$b \neq 0$  bo'lganda bikvadrat tenglama ikki karrali ildiz  $x = 0$  ga va yana ikkita haqiqiy ildizlarga,  $b < 0$  bo'lganda, mavhum ildizlarga,  $b > 0$  bo'lganda ega bo'ladi.

$b = c = 0$  bo'lsa, bikvadrat tenglama to'rt karrali ildiz  $x = 0$  ga ega bo'ladi.

$D < 0$  bo'lganda,  $x^2$  uchun ikkita qo'shma mavhum qiymatlarni topamiz. Bikvadrat tenglama uchun to'rtta har xil (juft=juft qo'shma) mavhum ildizlarni topamiz.

6.  $D = 0$  bo'lganda, yordamchi tenglama ikki karrali ildiz  $y = x^2 = -\frac{b}{2a}$  ga ega bo'ladi. Bikvadrat tenglama,  $b > 0$  bo'lganda, ikkita ikki karrali mavhum ildizlarga,  $b < 0$  bo'lganda, ikkita ikki karrali haqiqiy ildizlarga ega bo'ladi.

**1-misol.**  $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$  tenglama yechilsin.

**Yechish:**  $y = x^3$  deb belgilab  $y^2 - 3y + 2 = 0$  yordamchi tenglama topamiz, uning ildizlari  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 2$ .

Natijada  $x^3 = 1$  va  $x^3 = 2$  tenglamalarga ega bo'lamiz. Bular  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$  va  $(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) = 0$  tenglamalarga teng kuchlidir.

Birinchisidan,  $x_1=1$ ,  $x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ,  $x_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  ni, ikkinchisidan  $x_4 = \sqrt[3]{2}$ ,

$x_5 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ ,  $x_6 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$  ni hosil qilamiz.

**2-misol.**  $3x^4+26x^2-9$  bikvadrat uchhad ko`paytuvchilarga ajratilsin.

**Yechish:**  $3x^4+26x^2-9=0$  tenglamani yechamiz:  $x^2 = \frac{-13 \pm 14}{3}$  va  $x^2 = \frac{1}{3}$  dan

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $x^2 = -9$  dan  $x_3 = 3i$ ,  $x_4 = -3i$  ni topamiz va

$3x^4 + 26x^2 - 9 = 3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(x - 3i)(x + 3i)$  ni hosil qilamiz, yoki  $3x^4 + 26x^2 - 9 =$   
 $= (\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)(x - 3i)(x + 3i)$  hosil bo`ladi (kompleks sonlar to`plamida), haqiqiy sonlar to`plamida esa  $3x^4 + 26x^2 - 9 = (\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)(x^2 + 9)$  bo`ladi.

## 2-§. Uchinchi darajali tenglamalarni Kardano formulasi yordamida yechish

Kompleks sonlar maydoni ustidagi ushbu

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad (a \neq 0) \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglama *uchinchi darajali bir noma'lumli tenglama* deyiladi.<sup>7</sup>

(1) tenglamaning har ikkala tomonini  $a$  ga bo'lib, ushbu tenglamaga ega bo'lamiz:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0. \quad (2)$$

(2) da  $x = y - \frac{b}{3a}$  almashtirishni kiritib

$$\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0 \quad (3)$$

tenglamani hosil qilamiz. (3) tenglamani soddalashtirgandan keyin

$$y^3 + py + q = 0 \quad (4)$$

ko'rinishdagi tenglamaga ega bo'lamiz. (4) tenglamadagi  $y$  o'zgaruvchi o'rniga ikkita  $u$  va  $v$  o'zgaruvchilarni  $y = u + v$  tenglik yordamida kiritamiz. Natijada  $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$  yoki

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0 \quad (5)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. (5) da  $u$  va  $v$  larni shunday tanlaymizki, natijada

$$3uv + p = 0 \quad (6)$$

shart bajarilsin. Bunday talab qo'yishimiz o'rinli, chunki

$$\begin{cases} u + v = y \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi  $y$  berilganda yagona yechimga ega.

(5) dan

$$u^3 + v^3 = -q. \quad (7)$$

(6) dan  $u^3 v^3 = -p^3/27$  bo'lgani uchun  $u$  va  $v$  lar Viet teoremasiga asosan biror  $z^2 + qz - p^3/27 = 0$  ko'rinishdagi kvadrat tenglamaning ildizlari bo'ladi. Bu tenglamani yechib

---

<sup>7</sup> Nazarov R.N, Toshpo'latov B.T, Do'simbetov A.D: "Algebra va sonlar nazariyasi" 2-qism, Toshkent "O'qituvchi" -1995. 229-235-betlar.

$$z_1 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad z_2 = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad (8)$$

ni hosil qilamiz. (8) dan

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

lar topilib,  $u$  va  $v$  ning har biriga 3ta qiymat,  $y$  o'zgaruvchi uchun esa to'qqizta qiymat topiladi. Ulardan (6)shartni qanoatlantiruvchilarini olamiz. U holda (4) tenglamaning barcha yechimlari topiladi.

Agar  $u, u\varepsilon, u\varepsilon^2$  (bunda  $\varepsilon$  soni 1 dan chiqarilgan uchinchi darajali ildizlardan biri, ya'ni  $\varepsilon^3 = 1$ ) lar  $z_1$  ning uchinchi darajali ildizlarining qiymatlari bo'lsa unga mos  $z_2$  ning uchinchi darajali ildizlari qiymatlari  $v, v\varepsilon^2, v\varepsilon$  dan iborat bo'ladi. Natijada (4) tenglama ushbu

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = u\varepsilon + v\varepsilon^2, \quad y_3 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon \quad (9)$$

ildizlarga ega bo'lib, unda  $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  bo'lganligidan

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = -\frac{1}{2}(u + v) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v), \quad y_3 = -\frac{1}{2}(u + v) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) \quad (10)$$

yechim hosil bo'ladi. (10) va  $x = y - \frac{b}{3a}$  ni e'tiborga olib (1) tenglamaning

$$x_1 = y_1 - \frac{b}{3a}, \quad x_2 = y_2 - \frac{b}{3a}, \quad x_3 = y_3 - \frac{b}{3a}$$

ildizlari topiladi.

**Haqiqiy koeffitsientli uchinchi darajali tenglamalarni tekshirish.** Endi haqiqiy koeffitsiyentli uchinchi darajali tenglama ildizlarini tekshiraylik. Quyidagi teorema uchinchi darajali tenglamaning haqiqiy va mavhum ildizlari sonini aniqlaydi.

**Teorema.** Agar

$$x^3 + px + q = 0 \quad (11)$$

tenglama haqiqiy koeffitsientli tenglama bo'lib,

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

bo'lsa, u holda quyidagi mulohazalar o'rinli bo'ladi:

a) agar  $\Delta > 0$  bo'lsa, (11) tenglama bitta haqiqiy va ikkita o'zaro qo'shma mavhum ildizlarga ega;

b)  $\Delta = 0$  bo'lsa, (11) ning barcha ildizlari haqiqiy va kamida bittasi karrali;

s) agar  $\Delta < 0$  bo'lsa (11) tenglamaning ildizlari haqiqiy va turlicha bo'ladi.

**Isboti.** a)  $\Delta > 0$  bo'lsa, u holda  $z_1$  va  $z_2$  ildizlar haqiqiy va har xil bo'ladi. Demak, ildizlardan kamida bittasi, masalan  $z_1$  noldan farqli bo'ladi.

$u = \sqrt[3]{z_1}$  soni  $z_1$  ning arifmetik ildizi bo'lsin. Shuning uchun  $u$  haqiqiy son bo'ladi.  $uv = -p/3$  tenglikka asosan  $v$  ham haqiqiy son bo'ladi.  $z_1 \neq z_2$  bo'lganligi sababli  $u^3 \neq v^3$  bo'ladi, bunda  $u \neq v$  munosabatning o'rinli ekanligi ravshan.

(10)ga asosan

$$x_1 = u + v, \quad x_2 = -\frac{1}{2}(u + v) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v), \quad x_3 = -\frac{1}{2}(u + v) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) \quad (12)$$

bo'lib,  $u$  va  $v$  lar haqiqiy hamda turli sonlar bo'lganligi uchun (12) da  $x_1$  haqiqiy,  $x_2$  va  $x_3$  lar o'zaro qo'shma mavhum sonlar bo'ladi.

b)  $\Delta = 0$  bo'lsin. Agar  $\Delta = 0$  va  $q \neq 0$  bo'lsa, u holda  $z_1 = z_2 = -q/2 \neq 0$  bo'ladi.

$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$  son  $-q/2$  ning arifmetik ildizi bo'lsin.  $uv = -p/3$  haqiqiy son bo'lgani uchun  $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$  - haqiqiy son bo'ladi, ya'ni  $u = v \neq 0$  bo'ladi. (12) formulaga asosan  $x_1 = 2u \neq 0$ ,  $x_2 = x_3 = -u$  bo'ladi. Shunday qilib  $q \neq 0$  bo'lganda (11) tenglama uchta haqiqiy ildizga ega va ulardan bittasi karrali bo'ladi.

Agar  $\Delta = 0$  va  $q = 0$  bo'lsa, u holda  $p = 0$  bo'ladi. Bu holda (11) tenglama  $x^3 = 0$  ko'rinishda bo'lib,  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  bo'ladi.

c)  $\Delta < 0$  bo'lsin. U holda  $z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}$  bo'ladi. Demak,  $z_1$ ,  $z_2$  sonlari o'zaro qo'shma mavhum sonlar ekan. Shuning uchun ham

$$|z_1| = |z_2| \neq 0 \quad (13)$$

va 
$$z_1 \neq z_2 \quad (14)$$

munosabat o'rinli. (6) va (8) ga ko'ra

$$u^3 = z_1, \quad v^3 = z_2, \quad uv = \frac{-p}{3} \quad (15)$$

bo'lgani uchun (13) va (15) dan  $|u|^3 = |v|^3 \neq 0$  bo'lib, bundan

$$|u| = |v| \neq 0 \quad (16)$$

kelib chiqadi. (14) ga asosan  $u \neq v$  munosabat ham o'rinlidir. (6)ga ko'ra  $uv = \frac{-p}{3}$  bo'lib, bundan  $|u||v| = \frac{-p}{3}$  kelib chiqadi. Shartga asosan  $p < 0$ . (16)ga ko'ra

$$\frac{-p}{3|u|^2} = 1 \quad (17)$$

tenglik bajariladi. (15) va (17) larga asosan

$$v = -\frac{p}{3|u|} = -\frac{p}{3u\bar{u}} \cdot \bar{u} = -\frac{p}{3|u|^2} \bar{u} = \bar{u}, \quad \text{ya'ni}$$

$$v = \bar{u} \quad (18)$$

tenglik o'rinlidir. (12) formuladagi  $v$  ni  $\bar{u}$  bilan almashtirsak va  $u \neq v$  ni e'tiborga olsak,  $x_1, x_2, x_3$  ildizlar haqiqiy va har xil ekanligi ma'lum bo'ladi. Haqiqatan ham (12) formuladan  $x_2 \neq x_3$  kelib chiqadi. Faraz qilaylik,  $x_1 = x_2$  bo'lsin. U holda (9) ga asosan  $u+v = u\varepsilon + v\varepsilon^2$  bo'lib bundan  $u(1-\varepsilon) = v(\varepsilon^2 - 1)$  yoki  $u = v\varepsilon^2$  kelib chiqadi. Bundan  $z_1 = z_2$  va  $\Delta = 0$  tengliklar kelib chiqadi. Bu esa  $\Delta < 0$  shartga qarama-qarshidir. Xuddi shuningdek  $x_1 \neq x_3$  ekanligini ko'rsatish mumkin.

### 3-§. To'rtinchi darajali tenglamalarni Ferrari usulida yechish

To'rtinchi darajali tenglamani yechishning Ferrari usuli bilan tanishib chiqamiz. Bu usul bo'yicha to'rtinchi darajali tenglamani yechish biror yordamchi uchinchi darajali tenglamani yechishga keltiriladi.

Kompleks koeffitsientli 4-darajali tenglama ushbu

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. (1) ni  $x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$  ko'rinishda yozib olib, uning ikkala tomoniga  $\frac{a^2x^2}{4}$  hadni qo'shamiz va ushbu ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d \quad (2)$$

(2) tenglamaning ikkala tomoniga  $\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4}$  hadni qo'shib ushbu

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right) \quad (3)$$

tenglamani hosil qilamiz. (3) ning chap tomonida to'la kvadrat hosil bo'ladi. O'ng tomonidagi uchxad esa  $y$  parametrga bog'liq. Undagi  $y$  parametrni shunday tanlab olamizki, natijada (3)ning o'ng tomoni to'la kvadrat bo'lsin. Ma'lumki  $Ax^2 + Bx + C = 0$  uchxad to'la kvadrat bo'lishi uchun  $B^2 - 4AC = 0$  bo'lishi yetarli. Haqiqatan ham, bu shart bajarilsa,  $B^2 = 4AC$  bo'ladi va

$$Ax^2 + Bx + C = Ax^2 + 2\sqrt{AC}x + C = (\sqrt{Ax} + \sqrt{C})^2,$$

ya'ni  $Ax^2 + Bx + C = (\sqrt{Ax} + \sqrt{C})^2$  tenglamaga ega bo'lamiz. Demak,  $y$  ni shunday tanlab olamizki, natijada

$$\left(\frac{ay}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0 \quad (4)$$

shart bajarilsin, ya'ni  $y$  ga nisbatan uchinchi darajali tenglama hosil bo'ladi.

(4)shart bajarilsa, u holda (3)ning o'ng tomoni to'liq kvadratga aylanadi.

(4)tenglamani yechib uning bitta ildizi  $y_0$  ni topamiz va uni (3)tenglamadagi  $y$  o'rniga olib borib qo'yamiz. U holda

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2}\right)^2 = (\alpha x + \beta)^2 \quad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) tenglamani yechganda quyidagi kvadrat tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} &= \alpha x + \beta, \\x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} &= -\alpha x - \beta.\end{aligned}\quad (6)$$

Bu yerda 
$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + y_0}, \quad \beta = \frac{\frac{ay_0}{2} - c}{2\alpha}.$$

Bu sistemani yechib berilgan (1) tenglamaning barcha yechimlarini topamiz.

### Misollar.

1.  $x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = 0$  tenglamani yeching.

**Yechilishi.** Bu yerda  $x = y + 3$  degan almashtirish olamiz. U holda  $y^3 - 6y + 4 = 0$  tenglama hosil bo'ladi. Demak, bizda  $p = -6$ ,  $q = 4$  va  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$  dan  $\Delta = -4$  ni hosil qilamiz.  $\Delta < 0$  bo'lganligi uchun berilgan tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil bo'lishi kerak. (8) dan

$$u = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} = \sqrt[3]{-2 + 2i}.$$

Endi  $-2 + 2i$  ning moduli va argumentini topamiz:

$$r = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2}{-2} = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

Bundan kompleks sonlarni trigonometrik ko'rinishga keltirish va ildiz chiqarish qoidalariga asosan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}-2 + 2i &= 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right); \\u_k &= \sqrt[3]{-2 + 2i} = (2\sqrt{2})^{1/3} \left( \cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) = \\&= \sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right]; \quad k = 0, 1, 2.\end{aligned}$$

Bu yerda  $k=0$  deb olsak

$$u_0 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 1 + i.$$

(18) ga ko'ra  $v = \bar{u}$ . Demak,  $v_0 = 1 - i$  va  $y_0 = u_0 + v_0 = u_0 + \bar{u} = 2$ . (10) dan

$$y_1 = -\frac{1}{2}(u_0 + \bar{u}_0) + i \frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - \bar{u}_0) = -1 - \sqrt{3};$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_0 + \bar{u}_0) - i \frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - \bar{u}_0) = -1 + \sqrt{3}.$$

Bu qiymatlarni  $x = y + 3$  almashtirishga olib borib qo'yib

$$x_0 = 5, \quad x_1 = 2 - \sqrt{3}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

berilgan tenglamaning yechimlarini hosil qilamiz.

**2-misol.**  $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 7 = 0$  tenglamani yeching.

**Yechilishi.** Bizning misolimizda  $a = 2, b = 2, c = 1, d = -7$ . Shuning uchun ham (4)  
 $y^3 - 2y^2 + 30y - 29 = 0; \quad A = 0, B = 0, C = 29/4$

ko'rishda bo'ladi. Shunday qilib berilgan tenglama

$$x^2 + x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

tenglamaga teng kuchli. Buni yechib berilgan tenglamaning yechimlarini hosil

qilamiz.  $1) \quad x^2 + x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2} \quad x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2} = 0$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}) > 0 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2})}}{2}$$

**3- misol.**  $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0$  tenglamani yeching.

**Yechilishi.** Bu yerda  $a = -1, b = -3, c = 5, d = -10$  va

$$(-y/2 - 5)^2 - 4(1/4 + 3 + y)(y^2/4 + 10) = 0$$

$$(y/2 + 5)^2 - (13 + 4y)(y^2/4 + 10) = 0$$

$$y^2/4 + 5y + 25 - 13y^2/4 - 130 - y^3 - 40y = 0$$

$$-y^3 - 3y^2 - 35y - 105 = 0$$

$$-y^2(y + 3) - 35(y + 3) = 0.$$

Demak  $y_0 = -3$  va  $A = 1/4$ ,  $B = -13/2$ ,  $C = 49/4$ ;  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 7/2$ . Shuning uchun ham berilgan tenglama ushbu tenglamaga teng kuchli

$$x^2 - x/2 - 3/2 = \pm(x/2 - 7/2).$$

Bu tenglamani yechib berilgan tenglamaning yechimlarini hosil qilamiz.

$$1) x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \leftrightarrow D = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$$

$$x \in \emptyset$$

$$2) x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = 5$$

**Javob:**  $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$

#### 4-§.Kvadrat tenglamaga keltiriladigan yuqori darajali tenglamalar

Ba'zi yuqori darajali algebraik tenglamalarni kvadrat tenglamaga keltirib yechish mumkin. Shunday tenglamalardan ayrim muhim hollarini ko'rib chiqamiz.

Ushbu

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglama *to'rtinchi darajali tenglama* deyiladi. Bunda  $a \neq 0$  bo'lib,  $a, b, c, d, e$  tenglama koeffitsiyentlari haqiqiy sonlardir. (1) tenglamaning haqiqiy ildizlarini xususiy hollarda topish usullari bilan tanishib chiqamiz.

**Bikvadrat tenglamalar.** Agar (1) tenglamada  $b=d=0$  bo'lsa, u holda tenglama

$$ax^4 + cx^2 + e = 0$$

ko'rinishni oladi. Bunday shakldagi tenglama *bikvadrat tenglama* deyiladi. Tenglama koeffitsiyentlarini qabul qilingan tartibda yozsak,

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (2)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Agar  $D = b^2 - 4ac \geq 0$  bo'lsa, tenglamani yechishda

$$x^2 = t (t \geq 0) \quad (3)$$

almashtirishdan foydalaniladi. Natijada

$$at^2 + bt + c = 0$$

kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz. Ma'lumki,  $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Agar  $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$  bo'lsa, (2) tenglama ildizlari (3) ga ko'ra quyidagicha topiladi:

$$\begin{cases} x^2 = t_1 \\ x^2 = t_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{t_1})(x + \sqrt{t_1}) = 0 \\ (x - \sqrt{t_2})(x + \sqrt{t_2}) = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1} \\ x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2} \end{cases}$$

**1-miso1.**  $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$  tenglamani yeching.

**Yechilishi.**  $x^2 = t, t^2 - 4t - 5 = 0$

$$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 5} = 2 \pm 3 \rightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 5 \end{cases}$$

$x^2 = -1$  tenglama haqiqiy ildizlarga ega emas.

$$x^2 = 5 \rightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0 \rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{5} \quad \text{Javob: } \{\pm\sqrt{5}\}$$

### Qaytma tenglamalarni kvadrat tenglamaga keltirib yechish.

Agar to'rtinchi darajali  $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$  tenglama ko'effitsiyentlari uchun  $a=e$  va  $b=d$  tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda bunday tenglama «qaytma» tenglama deyiladi.

Quyida bu tenglamani yechish uslubini ko'rib chiqamiz.

**2-misol.**  $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$  tenglamani yeching.

**Yechilishi.**  $x \neq 0$  bo'lganligi uchun, tenglamaning har ikkala tomonini  $x^2$  ga bo'lamiz:

$$2x^2+3x - 16 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$$

endi  $x + \frac{1}{x} = t$  almashtirishni bajaramiz.

U holda  $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$  Natijada  $t$  ga nisbatan ushbu tenglamaga ega

bo'lamiz:

$$2(t^2 - 2) + 3t - 16 \neq 0 \leftrightarrow 2t^2 + 3t - 20 = 0$$

Bu tenglamalarning ildizlarini topamiz:

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{4} \rightarrow \begin{cases} t_1 = -4 \\ t_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Kiritilgan almashtirishni inobatga olib, berilgan tenglama ildizlarini topamiz:

$$x + \frac{1}{x} = -4 \leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - \sqrt{3} \\ x_2 = -2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Berilgan tenglama to'rtta haqiqiy ildizga ega:

$$x_1 = -2 - \sqrt{3} ; \quad x_2 = -2 + \sqrt{3} ; \quad x_3 = \frac{1}{2}; \quad x_4 = 2$$

Agar (1) tenglama ko'effitsiyentlari uchun  $\frac{a}{e} = \frac{b^2}{d^2}$  tenglik o'rinli bo'lsa ham, u «qaytma» tenglama kabi yechiladi.

**3-misol.**  $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$  tenglamani yeching.

**Yechilishi .**  $\frac{a}{e} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}; \frac{b^2}{d^2} = \frac{21 \cdot 21}{105 \cdot 105} = \frac{1}{25}$

Demak, ko'rsatilgan shartlar bajarilyapti:  $x^2 \neq 0$ .

Tenglamaning har ikkala tomonini  $x^2$  ga bo'lamiz:

$$2x^2 - 21x + 74 - \frac{105}{x} + \frac{50}{x^2} = 0 \leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{5}{x}\right) + 74 = 0$$

Endi  $x + \frac{5}{x} = t$  almashtirishni bajarib,  $t$  ga nisbatan ushbu tenglamaga ega bo'lamiz:

$$2t^2 - 21t + 54 = 0.$$

Bu tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$t_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 432}}{4} = \frac{21 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{cases} t_1 = 6 \\ t_2 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Kiritilgan almashtirishni inobatga olib, berilgan tenglama ildizlarini topamiz:

$$x + \frac{5}{x} = 6 \leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x_{3,4} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

$$x + \frac{5}{x} = \frac{9}{2} \leftrightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0 \rightarrow x_{3,4} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{4} = \frac{9 \pm 1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{5}{2} \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Berilgan tenglama to'rtta haqiqiy ildizga ega:

$$x_1=1, x_2=5, x_3=\frac{5}{2}, x_4=2$$

**To'la kvadratni ajratish usuli bilan kvadrat tenglamaga keltiriladigan to'rtinchi darajali tenglamalar.**

To'rtinchi darajali tenglamalarni yechishda to'la kvadratni ajratish usuli bilan uning tartibini pasaytirib, kvadrat tenglamaga keltirishdan ham foydalanish ko'pgina hollarda qo'l keladi.

**4-misol.**  $x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 12x + 3 = 0$  tenglamaning haqiqiy ildizlarini toping.

**Yechilishi.** Tenglamaning chap tomonida to'la kvadratni ajratamiz:

$$x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 12x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^4 + 6x^3 + 9x^2) - 4x^2 - 12x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x)^2 - 4(x^2 + 3x) + 3 = 0$$

Endi  $x^2 + 3x = t$  almashtirish yordamida  $t$  ga nisbatan ushbu kvadrat tenglamani hosil qilamiz:

$$t^2 - 4t + 3 = 0.$$

Bu tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

Qabul qilingan almashtirishni hisobga olib, berilgan tenglamaning haqiqiy ildizlarini topamiz:

1)  $x^2 + 3x = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

2)  $x^2 + 3x = 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

**Javob:**  $x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ ;  $x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ ;  $x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$ ;  $x_4 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$

## 5-§. Bezu teoremasi. Gorner sxemasi. Ko`phadning ildizlari.

(Etyen Bezu (1730-1783) – fransuz matematigi).  $P(x)$  ko`phadni  $x-a$  ikkihadga bo`lganda bo`linmada  $Q(x)$ , qoldiqda  $R(x)$  qolsin:

$$P(x)=(x-a)Q(x)+R(x)$$

Agar bu munosabatga  $x=a$  qo`yilsa,  $P(a)=0 \cdot Q(a)+R(a)=R(a)=r$  hosil bo`ladi. Shu tariqa ushbu teorema isbotlanadi:

**1-teorema (Bezu).**  $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n(a \neq 0)$  ko`phadni  $x-a$  ga bo`lishdan chiqadigan  $r$  qoldiq shu ko`phadning  $x=a$  dagi qiymatiga teng,  $r=P(a)$ .

Masalan, 1)  $x^5+x+20$  ni  $x+2$  ga bo`lishdan chiqadigan qoldiq  $r=(-2)^5+(-2)+20=-14$ ;

2)  $x^5+x+34$  ni  $x+2$  ga bo`lishdan chiqadigan qoldiq  $r=(-2)^5+(-2)+34=0$ .

Demak,  $x=-2$  soni shu ko`phadning ildizi.

**Natijalar.**  $n \in \mathbb{N}$  bo`lganda:

1)  $x^n - a^n$  ikkihad  $x-a$  ga bo`linadi. Haqiqatan,  $P(a) = a^n - a^n = 0$ ;

2)  $x^n + a^n$  ikkihad  $x-a$  ga bo`linmaydi. Haqiqatan,  $P(a) = a^n + a^n = 2a^n \neq 0$ ;

3)  $x^{2n} - a^{2n}$  ikkihad  $x+a$  ga bo`linadi. Haqiqatan,  $P(-a) = (-a)^{2n} - a^{2n} = 0$ ;

4)  $x^{2n+1} - a^{2n+1}$  ikkihad  $x+a$  ga bo`linmaydi. Haqiqatan,  $P(-a) = (-a)^{2n+1} - a^{2n+1} = -2a^{2n+1} \neq 0$ ;

5)  $x^{2n+1} + a^{2n+1}$  ikkihad  $x+a$  ga bo`linadi. Haqiqatan,  $P(-a) = (-a)^{2n+1} + a^{2n+1} = 0$ ;

6)  $x^{2n} + a^{2n}$  ikkihad  $x+a$  ga bo`linmaydi. Haqiqatan,  $P(-a) = a^{2n} + a^{2n} = 2a^{2n} \neq 0$ ;

Bo`lish bajariladigan hollarda bo`linmalarning ko`rinishini aniqlaymiz:

$$x^5 - a^5 = (x-a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4);$$

$$x^5 + a^5 = (x+a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4);$$

$$x^6 - a^6 = (x-a)(x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5);$$

$$x^6 + a^6 = (x+a)(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5).$$

Bulardan ko`rinadiki, bo`linma albatta bir jinsli ko`phad bo`lib,  $x$  ning darajalari kamayib,  $a$  ning darajalarida o`shish tartibida joylashgan va agar bo`luvchi  $a+x$  bo`lsa, koeffitsiyentlar  $+1$  va  $-1$  almashib keladi, agar bo`luvchi  $x-a$  bo`lsa, bo`linmada hosil bo`lgan ko`phadning koeffitsiyentlari  $1$  ga teng bo`ladi. Bu xulosalarni istagan darajali ko`phadlar uchun umumlashtirish mumkin.

**1-misol.**  $x^5 - ax + 4$  ni  $x + 3$  ga bo'lishdagi qoldiq  $r = 4$  bo'lsa,  $a$  ni toping.

**Yechish.**  $(-3)^5 - a \cdot (-3) + 4 = 4$ , bundan  $a = 81$ .

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$  ko'phadni  $x - a$  ikkihadga bo'lishdagi qoldiqni hisoblashning Gornor (Xorner Uilyam (1786-1837) – ingliz matematigi) sxemasi deb ataluvchi usulini ko'rsatamiz.

$$P(x) = Q(x)(x - a) + r$$

bo'lsin. Bunda

$$Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-1}.$$

(1) da  $x$  ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$a_0 = b_0$$

$$a_1 = b_1 - \alpha b_0$$

$$a_2 = b_2 - \alpha b_1$$

.....

$$a_{n-1} = b_{n-1} - \alpha b_{n-2}$$

$$a_n = r - \alpha b_{n-1}$$

Bundan ko'rinadiki,  $b_0 = a_0$ ,  $b_k = \alpha b_{k-1} + a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $r = a_n + \alpha b_{n-1}$ .

Bo'linma va qoldiqni hisoblash quyidagi jadval yordamida topiladi.

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	...	$a_{n-1}$	$a_n$
$\alpha$		$\alpha b_0 + a_1$	$\alpha b_1 + a_2$	...	$\alpha b_{n-2} + a_{n-1}$	$\alpha b_{n-1} + a_n$
	$b_0 = a_0$	$b_1$	$b_2$	...	$b_{n-1}$	$r$

**2-misol.**  $x^3 + 4x^2 - 3x + 5$  ko'phadni Gornor sxemasidan foydalanib,  $x - 1$  ga bo'lishni bajaramiz.

	1	4	-3	5
1	1	5	2	7

Demak,  $x^3 + 4x^2 - 3x + 5 = (x - 1)(x^2 + 5x + 2) + 7$ .

Bezu teoremasidan  $P(x)$  ko'phadni  $ax+b$  ko'rinishdagi ikkihadga bo'lishda hosil bo'ladigan  $r$  qoldiq  $P(-b/a)$  ga teng bo'lishi kelib chiqadi.

**3-misol.**  $P_3(x)=x^3-3x^2+5x+7$  ni  $2x+1$  ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqni toping.

**Yechish.** Qoldiq  $r=P_3(-1/2)=(-1/3)^3-3\cdot(-1/2)^2+5\cdot(-1/2)+7=29/8$  ga teng.

**2-teorema.** Agar  $\alpha$  soni  $P(x)$  ko'phadning ildizi bo'lsa,  $P(x)$  ko'phad  $x-\alpha$  ikkihadga qoldiqsiz bo'linadi.

**Isbot.** Bezu teoremasiga ko'ra,  $P(x)$  ni  $x-\alpha$  ga bo'lishdan chiqadigan qoldiq  $P(\alpha)$  ga teng, shart bo'yicha esa  $P(\alpha)=0$ . Isbot bajarildi.

Bu teorema  $P(x)=0$  tenglamani yechish masalasini  $P(x)$  ko'phadni chiziqli ko'paytuvchilarga ajratish masalasiga keltirish imkonini beradi.

**1-natija.** Agar  $P(x)$  ko'phad har xil  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ildizlarga ega bo'lsa, u  $(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$  ko'paytmaga qoldiqsiz bo'linadi.

**2-natija.**  $n$ -darajali ko'phad  $n$  tadan ortiq har xil ildizga ega bo'la olmaydi.

**Isbot.** Agar  $n$ - darajali  $P(x)$  ko'phad  $n+1$  ta har xil  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$  ildizlarga ega bo'lganda, u  $n+1$ -darajali  $(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{k+1})$  ko'paytmaga qoldiqsiz bo'linardi. Lekin bunday bo'lishi mumkin emas.

Yuqorida qaralgan teoremalardan foydalanib, Fransua Viyet (fransuz olimi, 1540-1603) tomonidan berilgan hamda  $P(x)=0$  butun algebraik tenglamaning  $a_i$  haqiqiy koeffitsiyentlari va  $\alpha_i$  ildizlari orasidagi munosabatni ifodalovchi formulalarni keltiramiz:

1)  $a_2x^2+a_1x+a_0=b(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=bx^2-b(\alpha_1+\alpha_2)x+b\alpha_1\alpha_2$ . Agar  $x$  ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlari tenglashtirilsa,  $b=a_2$  bo'ladi. Natijada ushbu formulalar topiladi:

$$\alpha_1+\alpha_2=-a_1/a_2, \alpha_1\alpha_2=a_0/a_2;$$

2) shu tartibda  $P_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$  uchun:

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-a_2/a_3, \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=a_1/a_3, \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-a_0/a_3$  formulalar topiladi.

Hosil qilingan tengliklarning bajarilishi  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sonlarining  $P_n(x) = a_nx^n + \dots + a_0$  ko'phad ildizlari bo'lishi uchun zarur va yetarlidir. Agar  $P(x)$  ko'phad  $(x-\alpha)^k$  ga qoldiqsiz bo'linsa, lekin,  $(x-\alpha)^{k+1}$  ga qoldiqsiz bo'linmasa,  $\alpha$  soni  $P(x)$  uchun  $k$  karrali ildiz bo'ladi.

## 6-§.Algebraik tenglamalarning kompleks ildizlari.

Algebraning asosiy teoremasi (Gauss teoremasi):

*n*- darajali ( bu yerda  $n \geq 1$ ) har qanday ko'phad aqalli bitta kompleks ildizga ega.<sup>8</sup>

**Teorema.** Agar  $z = \alpha + \beta i$  kompleks soni haqiqiy koeffitsiyentli  $P(z)$  ko'phadning ildizi bo'lsa,  $z = \alpha - \beta i$  kompleks soni ham  $P(z)$  ko'phadning ildizi bo'ladi.

**Isbot.**  $z$  kompleks soni  $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$  ko'phadning ildizi bo'lsin. U holda

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad \text{yoki}$$

$\overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \overline{0}$  tenglik o'rinli bo'ladi. Kompleks songa qo'shma sonni topish amalining xossalaridan foydalansak,

$$a_0 (\bar{z})^n + a_1 (\bar{z})^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{z} + a_n = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Demak,  $\bar{z}$  soni ham  $P(z)$  ko'phadning ildizi. Teorema isbot bo'ldi.

**Natija.** *n*-darajali  $P_n(x)$  ko'phad  $x - \alpha$  ko'rinishidagi ikkihadlar va  $x^2 + px + q$  ko'rinishidagi manfiy diskriminantli kvadrat uchhadlar darajalarining ko'paytmasidan iborat:

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha)^k \dots (x^2 + px + q)^m \dots, \text{ bu yerda } k \in \{0, 1, 2, \dots\}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

---

<sup>8</sup> A.U Abduhamidov, H.A.Nasimov,U.M.Nosirov,J.H.Husanov: "Algebra va analiz asoslari" I qism,Akademik litseylar uchun darslik,T.: "O'qituvchi" Nashriyot-matbaa ijodiy uyi -2008.195-207-betlar.

### III-BOB. Ratsional sonlar maydoni ustidagi ko'phadlar va algebraik sonlar

#### 1-§. Butun koeffitsientli ko'phadning butun va ratsional ildizlari

Ratsional sonlar maydoni ustida berilgan har qanday  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  ko'phadning ildizi

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (1)$$

tenglamaning ham ildizi bo'ladi. Shuning uchun bundan So'ng biz faqatgina n-darajali tenglamaning ratsional ildizlarini topish bilan shug'ullanamiz.

1°. Kasr koeffitsiyentli tenglamani butun koeffitsiyentli tenglama bilan almashtirish mumkin.

**Isboti.** Buning uchun (1) tenglamaning ikki tomonini barcha  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  koeffitsiyentlarning umumiy maxrajiga ko'paytirish kifoya.

2°. Butun koeffitsiyentli tenglamani bosh koeffitsiyent 1 ga teng butun koeffitsiyentli tenglama bilan almashtirish mumkin.

**Isboti.** (1) tenglamaning koeffitsiyentlarini butun deb hisoblab,  $x = \frac{y}{a_0}$  almashtirishni bajarsak, (1) tenglama

$$\frac{y^n}{a_0^n} + \frac{a_1 y^{n-1}}{a_0^{n-1}} + \frac{a_2 y^{n-2}}{a_0^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1} y}{a_0} + a_n = 0$$

ko'rinishni oladi. Bundan ushbuni hosil qilamiz:

$$y^n + a_0 a_1 y^{n-1} + a_0 a_2 y^{n-2} + \dots + a_0^{n-2} a_{n-1} y + a_0^{n-1} a_n = 0$$

3°. Butun koeffitsientli

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (2)$$

tenglamaning ratsional ildizlari faqat butun sonlar bo'ladi.

**Isboti.** (2) tenglama  $\alpha = \frac{a}{b}$  ildizga ega bo'lsin ( $a$  va  $b$  — butun sonlar,  $b \neq 0$ ); bu kasrni qisqarmaydigan deb hisoblash mumkin;  $\alpha = \frac{a}{b}$  ildizni (2) tenglamaga qo'yib,

$$\frac{a^n}{b^n} + a_1 \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{a}{b} + a^n = 0$$

yoki

$$\frac{a^n}{b^n} = -(a_1 a^{n-1} + a_2 a^{n-1} b + \dots + a_n b^{n-1}) \quad (3)$$

tenglikni hosil qilamiz.  $\frac{a}{b}$  qisqarmaydigan kasrdir.

Shu sababli, (3) tenglikning bo'lishi mumkin emas, chunki qisqarmaydigan kasr butun songa teng bo'la olmaydi.

4°. (2) tenglamaning butun ildizi ozod hadning bo'luvchisidir.

**Isboti.**  $a$  ni (2) tenglamaning butun ildizi desak,

$$a^n + a_1 a^{n-1} + a_2 a^{n-2} + \dots + a_{n-1} a + a_n = 0$$

yoki

$$a_n = a(-a^{n-1} - a_1 a^{n-2} - \dots - a_{n-1})$$

tenglikka ega bo'lamiz; bu esa  $a_n$  ning  $a$  ga bo'linishini ko'rsatadi.

6°. (2) tenglamaning chap tomonini  $x-a$  ( $a$ —butun son) ga bo'lishdan chiqqan bo'linma butun koeffitsientli ko'phaddir.

**Isboti.** Gerner sxemasi bo'yicha bo'linmaning koeffitsientlari quyidagi butun sonlarga teng:

$$b_0 = a_0 = 1, \quad b_1 = a_1 + a, \quad b_2 = a_2 + a b_1, \dots, \quad b_{n-1} = a_{n-1} + a b_{n-1}.$$

6°. Agar  $a$  butun son (2) tenglamaning ildizi bo'lsa,  $\frac{f(1)}{a-1}$  va  $\frac{f(-1)}{a+1}$  ham butun sonlar bo'ladi.

**Isboti.** Haqiqatan,  $f(x) = (x-a)\varphi(x)$  tenglikdan  $\frac{f(x)}{a-x} = -\varphi(x)$  hosil bo'ladi, bunda, 5°-xossaga binoan,  $\varphi(x)$  butun koeffitsientli ko'phad. Demak,  $\frac{f(1)}{a-1} = -\varphi(1)$ ,  $\frac{f(-1)}{a+1} = -\varphi(-1)$  butun sonlar.

7°.  $a$  butun son (2) tenglamaning ildizi bo'lishi uchun

$$q_{n-1} = \frac{a_n}{a}, \quad q_{n-1} = \frac{a_{n-1} + q_{n-1}}{a}, \dots, \quad q_1 = \frac{a_2 + q_2}{a}, \quad q_0 = \frac{a_1 + q_1}{a} = 1 \quad (4)$$

nisbatlar butun son bo'lishi zarur va yetarli.

**Isboti.** *Zaruriyligi.*  $a$ —tenglamaning butun ildizi bo'lsin. Gorner sxemasidan foydalanib,  $f(x)$  ni  $x-a$  ga bo'lamiz. Bu holda bo'linmaning koeffitsientlari  $b_0=1, b_1=a_1+a, b_2=a_2+cb_1, \dots, b_{n-1}=$

$a_{n+1}+ab_{n-2}$  tengliklar bilan aniqlanib, qoldiq nolga teng bo'ladi, ya'ni  $0 = a_n+ab_{n-1}$ . Bu tengliklardan

$$-b_{n-1} = \frac{a_n}{a} - b_{n-2} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{a}, \dots, -1 = \frac{a_1 - b_1}{a}$$

kelib chiqadi. Agar  $-b_{n-1} = q_{n-1}, -b_{n-2} = q_{n-2}, \dots, -1 = q_0$  deb belgilasak, (4) tengliklarni hosil qilamiz.

*Yetarliligi.* Endi,  $a$  butun son bo'lgani uchun (4) tengliklar kuchga ega deylik. Bu tengliklarning so'nggisidan  $a_1+a=-q_1$  ni topamiz. Gorner sxemasiga asosan,  $a_1+a=b_1$ . Demak  $-q_1=b_1$ . Ikkinchi tenglikdan  $-q_2=a_2-aq_1=a_2+ab$  hosil bo'ladi. Demak, yana Gorner sxemasi bo'yicha topiladigan  $b_2=a_2+ab_1$  tenglikka asosan,  $-q_2=b_2$ . Bu jarayonni davom ettirib, birinchi tenglikdan  $a_n-aq_{n-1}=a_n+ab_{n-1}=0$  ni hosil qilamiz. Ammo Gorner sxemasi bo'yicha  $r = a_n+ab_{n-1}$ . Shu sababli  $r=0$ . Demak,  $f(x)$  ni  $x-a$  ga bo'lishdan chiqqan qoldiq nolga teng bo'lganidan,  $a$  butun son (2) tenglamaning ildizini ifodalaydi.

Shunday qilib, ratsional sonlar maydoni ustidagi tenglamaning ratsional ildizlarini hisoblash jarayoni quyidagidan iborat:

1) Avval tenglamani (2) ko'rinishga keltiramiz:

2) Ozod hadning bo'luvchilarini olib tekshiramiz;

3) Agar  $a$  ozod hadning bo'luvchisi bo'lsa,  $f(1)$  va  $f(-1)$  ning  $a-1$  va  $a+1$  ga bo'linish-bo'linmasligini tekshiramiz;

$\frac{f(1)}{a-1}$  va  $\frac{f(-1)}{a+1}$  nisbatlardan birontasi butun son bo'lmasa,  $a$  ildiz bo'lmaydi. Sinovdan o'tgan  $a$  ni olib, 7°- xossaning bajarilishini tekshiramiz. Buning uchun quyidagi sxemani tuzamiz:

$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	...	$a_1$	1
$q_{n-1}$	$q_{n-2}$	$q_{n-3}$	...	$q_0$	

Bunda  $q_{n-1}, q_{n-2}, \dots, q_1, q_0$  sonlar (4) tengliklarga asosan topiladi. Agar  $q_i$  butun son va  $q_0 = -1$  bo'lsagina,  $a$  ildiz bo'ladi.

**1-misol.** Ushbu tenglamani qaraylik:

$$x^5 - \frac{7}{10}x^4 + \frac{11}{10}x^3 - \frac{17}{10}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{1}{10} = 0$$

Avval butun koeffitsientli tenglamaga almashtiramiz:

$$10x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 17x^2 + 8x - 1 = 0$$

So'ngra tenglamani  $x = \frac{y}{10}$  almashtirish bilan (2) ko'rinishga keltiramiz:

$$f(y) = y^5 - 7y^4 + 110y^3 - 1700y^2 + 8000y - 10000 \quad (5)$$

Bunda 10000 ozod hadning bo'luvchilari juda ko'p. Shu sababli hisoblashni qisqartirish uchun avval haqiqiy ildizlarning chegaralarini topamiz.

Musbat ildizlarning chegaralari 0 va 16 ekanini aniqlaymiz. (5) tenglamaning manfiy ildizlari yo'q, chunki  $y = -z$  almashtirish natijasida hosil bo'lgan

$$z^5 + 7z^4 + 110z^3 + 1700z^2 + 8000z + 10000 = 0$$

tenglamaning chap tomoni  $z$  ning musbat qiymatlarida nol bo'lmagani uchun tenglamaning musbat ildizlari yo'q. Shunday qilib, 10000 ning 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16 bo'luvchilari bilan chegaralanish kifoya.

Endi  $f(-1) = 3596$ ,  $f(1) = 19818$  ekanini topamiz.

4 soni ildiz bo'la olmaydi, chunki  $f(-1)$  son  $a+1 = 4+1 = 5$   $a+1=5$  ga bo'linmaydi. Shunga o'xshash, 8, 10, 16 ham ildiz bo'la olmaydi. 2 va 5 ni olganimizda  $f(1)$  va  $f(-1)$ , mos ravishda,  $a-1 = 2-1 = 1$ ,  $a-1 = 1$ ,  $a-1 = 5-1 = 4$ ,  $a-1 = 4$  ga va  $a+1 = 2+1 = 3$ ,  $a+1 = 5+1 = 6$  ga bo'linadi. Shu sababli, 2 va 5 uchun 7°- xossani tekshirib ko'ramiz.

-10000	8000	-1700	110	-7	1
-5000	1500	-100	5	-1	

-10000	8000	-1700	110	-7	1
-2000	1200	-100	2	-1	

Demak, (5) tenglama  $y_1=2$  va  $y_2=5$  dan iborat ikkita butun ildizga ega. Shu sababli, berilgan tenglamaning ratsional ildizlari  $x_1 = \frac{1}{5}$  va  $x_2 = \frac{1}{2}$  bo'ladi.

Ratsional koeffitsiyentli har qanday  $a_n x^n + \dots + a_0 = 0$  tenglama unga teng kuchli butun koeffitsiyentli tenglamaga keltirilishi mumkin. Masalan,  $\frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 1 = 0$  tenglamaning ikkala qismi 6 ga ko'paytirilsa, unga teng kuchli butun koeffitsiyentli  $5x^3 + 4x^2 - 6x + 6 = 0$  tenglama hosil bo'ladi. Endi butun koeffitsiyentli tenglamalar bilan shug'ullanamiz.

Ushbu tenglamalarni ko'rib chiqaylik:

**2-misol.**  $2x^3 + x^2 - 4x - 2 = 0$  tenglamaning ratsional ildizlarini toping.

**Yechish.** Ozod hadning barcha butun bo'luvchilari: - 2; -1; 1; 2.

Bosh koeffitsiyentning barcha natural bo'luvchilari: 1; 2.

Tenglamaning ratsional ildizlarini quyidagi sonlar orasidan izlaymiz:

$$- 2; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; 2.$$

Bu sonlarni berilgan tenglamaga bevosita qo'yib ko'rish bilan, ularning ildiz bo'lish yoki bo'lmasligini aniqlaymiz.

Tekshirish ko'rsatadiki,  $-\frac{1}{2}$  soni berilgan tenglamaning ildizi, qolgan sonlar esa ildiz emas.

Shunday qilib, berilgan tenglama faqat bitta ratsional ildizga ega:  $x = -\frac{1}{2}$ .

**Javob:**  $-\frac{1}{2}$ .

**3-misol.** Tenglamaning butun ildizlarini toping:  $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = 0$

**Yechish.** Ozod hadning barcha butun bo'luvchilari: -2; -1; 1; 2.

Tenglamaning barcha butun ildizlarini shu sonlar orasidan izlaymiz.

Bu sonlarning har birini tenglamaga qo'yib ko'rib, ular orasidan faqat -1 soni tenglamaning yechimi ekanini aniqlaymiz. Demak, berilgan tenglama faqat bitta butun yechimga ega.

**Javob:**  $x = -1$ .

**4-misol.**  $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$  tenglamaning butun ildizlarini toping.

**Yechish.** Butun ildizlarini -1; 1 sonlari orasidan izlaymiz. Bu sonlarning ikkalasi ham tenglamaning ildizi emasligini ko'rish qiyin emas.

**Javob:** tenglama butun ildizga ega emas.

**5-misol.**  $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = 0$  ( $x \in R$ ) tenglamani yeching.

**Yechish.** Oldingi misollardan farqli, bu misolda tenglamaning barcha haqiqiy ildizlarini topish talab qilinyapti.

Dastlab, ratsional ildizlarni qaraymiz. Ratsional ildizlar (agar ular mavjud

bo'lsa) esa  $-2; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; 2$ . sonlari orasida bo'ladi.  $-1$  va  $\frac{1}{2}$  sonlar ratsional ildizlar ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Shuning uchun tenglamaning chap tomonidagi ko'phad  $(x+1)(x-\frac{1}{2}) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$  ga qoldiqsiz bo'linadi. Bo'lishni bajarib,  $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = 0 = (x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})(2x^2 - 2x + 4)$  ni hosil qilamiz. Tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})(2x^2 - 2x + 4) = 0.$$

$2x^2 - 2x + 4 = 0$  tenglamaga yangi haqiqiy ildizlarni bermaydi.

**Javob:**  $x_1 = -1$  va  $x_2 = \frac{1}{2}$ .

**6-misol.**  $2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$  tenglamaning  $\frac{p}{q}$  ratsional ildizlarini topamiz, bunda  $p$  va  $q$  lar o'zaro tub,  $B(p; q) = 1$ .

**Yechish.**  $p$  sonini ozod hadning,  $q$  ni esa bosh koeffitsiyentning bo'luvchilari orasidan izlaymiz. Ular  $\pm 1$  va  $\pm 2$ .

Demak, ratsional ildizlar  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$  sonlari ichida bo'lishi mumkin.

Bu sonlarni tenglamaga ketma-ket qo'yib hisoblash,  $\frac{1}{2}$  ning ildiz ekanini ko'rsatadi. Tenglamaning qolgan ildizlarini topish uchun uning chap qismini  $x - \frac{1}{2}$  ga yoki  $2x - 1$  ga bo'lamiz. Bo'linmada  $x^2 - 3x + 1$  uchhad hosil bo'ladi.

Uning ildizlari:  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ , ya'ni  $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$   $x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

**Javob:**  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ .

## 2-§. Tenglamalarning radikalarda yechilish tushunchasi

**1-ta'rif.** Agar

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_i \in \mathbb{Q}) \quad (1)$$

tenglamaning ildizlarini quyidagi ikki hadli kvadratik tenglamalar zanjirlarining ildizlari orqali ratsional (ya'ni qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish amallari yordamida) ifodalash mumkin bo'lsa, u holda  $f(x)$  ko'phad *kvadrat radikalda yechiladi* deyiladi:

$$x^2 - \alpha_0 = 0 \quad (\alpha_0 \in \mathbb{Q} = \mathcal{F}_0);$$

$$x^2 - \alpha_1 = 0 \quad (\alpha_1 \in \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0(\sqrt{\alpha_0}));$$

$$x^2 - \alpha_2 = 0 \quad (\alpha_2 \in \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1(\sqrt[3]{\alpha_1}));$$

- - - - -

$$x^2 - \alpha_{k-1} = 0 \quad (\alpha_{k-1} \in \mathcal{F}_{k-1} = \mathcal{F}_{k-2}(\sqrt{\alpha_{k-2}}))$$

Shunday qilib, (1) tenglamaning barcha ildizlari  $\sqrt{\alpha_0}, \sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_{k-1}}$  sonlar orqali ratsional ifodalanadi va  $(\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{k-1}(\sqrt{\alpha_{k-1}}))$  maydonga tegishli bo'ladi. Boshqacha aytganda,

$$\mathbb{Q} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_{k-1} \subseteq \mathcal{F}_k$$

o'suvchi sonli maydonlar zanjiri mavjud bo'lib bu zanjirdagi har bir  $\mathcal{F}$  maydon o'zidan oldingi  $\mathcal{F}_{i-1}$  maydonning kvadratik kengaytmasi bo'lsa va  $\mathcal{F}_k$  maydon (1) tenglamaning barcha ildizlarini o'z ichiga olsa, u holda (1) tenglama *kvadrat radikalda yechiladigan tenglama* deyiladi.

**2-ta'rif.** Agar (1) tenglama ildizlari quyidagi ikki kadli tenglamalar zanjirlarining ildizlari orqali ifodalansa, (1) *tenglama radikalda yechiladi* deyiladi:

$$x^{n_0} - \alpha_0 = 0 \quad (\alpha_0 \in \mathbb{Q} = \mathcal{F}_0);$$

$$x^{n_1} - \alpha_1 = 0 \quad (\alpha_1 \in \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0(\sqrt[n_0]{\alpha_0}));$$

$$x^{n_2} - \alpha_2 = 0 \quad (\alpha_2 \in \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1(\sqrt[n_1]{\alpha_1}));$$

$$x^{n_{k-1}} - \alpha_{k-1} = 0 \quad (\alpha_{k-1} \in \mathcal{F}_{k-1} = \mathcal{F}_{k-2}(\sqrt[n_{k-1}]{\alpha_{k-2}})).$$

Shunday qilib (1) tenglamaning barcha ildizlari,  $\sqrt[n_0]{\alpha_0} \sqrt[n_1]{\alpha_1} \dots \sqrt[n_{k-1}]{\alpha_{k-1}}$  sonlar orqali rastional ifodalanadi va  $(\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{k-1}(\sqrt[n_{k-1}]{\alpha_{k-1}}))$  maydonga tegishli bo'ladi.

Darajasi to'rttdan kichik bo'lmagan tenglamalarni kvadrat radikallarda yechilish sharti bilan shug'ullanaylik. Faraz qilaylik,  $f(x)$  ko'phad biror  $\mathcal{P}$  sonlar maydoni ustida berilgan bo'lsin.

**3-ta'rif.** Agar

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

tenglamaning ildizlari

$$f_i(x) = 0 \quad (i = \overline{1, k}) \tag{3}$$

teglamalarning ildizlari orqali rastional ifodalansa, u holda (2) tenglamani har birining darajasi ikkidan yuqori bo'lmagan *tenglamalar zanjiriga keltiriladi* deyiladi, (3) dagi har bir  $f_i(x)$  ko'phad uchun quyidagi ikkita hol yuz berishi mumkin.

- a) Ixtiyoriy  $f_i(x)$  lar birinchi darajali ko'phad;
- b)  $f_i(x)$  berilgan  $\mathcal{P}$  maydon ustidagi keltirilmaydigan ikkinchi darajali ko'phaddir.

Agar  $f_1(x)$  ning biror ildizini  $\alpha$  desak,  $f_2(x)$  ko'phad  $\mathcal{P}(\alpha)$  da keltirilmaydigan ikkinchi darajali ko'phad  $f_3(x)$  esa  $\mathcal{P}(\alpha)$  ga  $f_2(x)$  ning biror  $\beta$  ildizini kiritishdan hosil bo'ladigan  $\mathcal{P}(\alpha; \beta)$  keltirilmaydigan ikkinchi darajali ko'phaddir va hokazo.

**4-ta'rif.** Agar  $f(x)$  ko'phad  $\mathcal{P}$  ning biror kengaytmasida chiziqli ko'paytuvchilar ko'paytmasi shaklida yozilsa, u holda  $Q$  *normal maydon* deyiladi.

**1-teorema.** *Koeffitsientlari  $\mathcal{P}$  maydonga tegishli  $f(x)$  ko'phad uchun  $Q$  kengaytma normal kengaytma bo'lsa, u holda  $f(x) = 0$  tenglama kvadrat radikallarda yechilishi uchun ( $Q: \mathcal{P}$ ) =  $2^m$  bo'lishi zarur va yetarlidir.*

**Isboti.** 1. *Zaruriylik sharti.* Faraz qilaylik, (1) tenglama (2) kabi tenglamalar zanjiriga keltirilgan bo'lsin. U holda yuqoridagi kabi ikki hol bo'lishi mumkin.

a)  $f_i(x)$  larning barchasi birinchi darajali. Bunday holda birinchi darajali tenglamalarning ildizlarini  $\mathcal{P}$  ga kiritish bilan bu maydon o'zgarmaydi, ya'ni bu holda  $(Q: \mathcal{P})=2^0=1$  bo'lgani uchun  $Q=\mathcal{P}$  bo'ladi.

b)  $f_i(x)$  lar orasida darajasi ikkidan kichik bo'lmagan ko'phad mavjud bo'lsa, u holda  $\mathcal{P}$  ning shu  $\mathcal{P}$  ga nisbatan  $2^n$  darajali kengaytmasi hisoblangan  $\mathcal{P}_1$  kengaytma mavjud bo'ladi. U holda  $(Q: \mathcal{P})$  darajaga  $(\mathcal{P}_1: \mathcal{P})$  daraja bo'linadi. Bundan  $(Q: \mathcal{P})=2^m$  ekanligi kelib chiqadi.

2. *Yetarlilik sharti.* Endi  $(Q: \mathcal{P})=2^m$  deb olib,  $f(x)=0$  ni  $f_i(x)=0$  kabi tenglamalar zanjiriga kelishini ko'rsatamiz.

Bunda quyidagi uch hol bo'ladi:

1)  $m=0$ . Bunda  $(Q: \mathcal{P})=1$  bo'lgani uchun  $f_i(x)$  ko'phadlarning barchasi birinchi darajali bo'ladi. O'z-o'zidan ma'lumki, bunday holda  $f_i(x)=0$  tenglamalarning ildizlari  $\mathcal{P}$  maydonga tegishlidir.

2)  $m=1$  bo'lganda  $(Q: \mathcal{P})=2$  bo'lib,  $f(x)$  ning normasi, ya'ni  $Q$  maydon  $\mathcal{P}$  ga koeffitsientlari shu  $\mathcal{P}$  maydonga tegishli bo'lgan kvadrat tenglamaning ildizini kiritishdan hosil bo'ladi. Bunday holda  $f_i(x)=0$  zanjirdagi har bir tenglamaning darajasi albatta ikkidan yuqori bo'lmaydi.

3)  $m>1$  bo'lsin. U holda  $(Q: \mathcal{P})=2^m$  bo'lib,  $\mathcal{P}$  ning shu  $\mathcal{P}$  ga nisbatan ikkinchi darajali kengaytmasi hisoblangan  $\mathcal{P}_1$  kengaytma mavjud bo'ladi. Bu kengaytma uchun  $(Q: \mathcal{P}_1)=2^{m-1}$  bo'ladi.

Endi  $\mathcal{P}$  o'rniga  $\mathcal{P}_1$  ni olaylik. Unda  $\mathcal{P}_1$  va  $Q$  orasida shunday  $\mathcal{P}_2$  kengaytma mavjudki, uning uchun  $(Q: \mathcal{P}_2)=2^{m-2}$  bajariladi, ya'ni  $\mathcal{P}_2$  kengaytma  $\mathcal{P}_1$  ga nisbatan ikkinchi darajali bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib, har bir keyingisi oldingisi uchun ikkinchi darajali bo'lgan

$$\mathcal{P} \in \mathcal{F}_1 \in \mathcal{F}_2 \in \dots \mathcal{F}_m = \mathbb{Q}$$

chekli kengaytmalar ketma-ketligiga erishamiz. Natijada  $f(x)=0$  tenglamaning har biri ikkinchi darajali bo'lgan tenglamalar zanjiriga kelgirilganiga ishonch hosil qilamiz.

### Uchinchi darajali tenglamaning kvadrat radikalarda yechilish sharti

**Teorema.** *Ushbu*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

*rastional koeffitsientli uchinchi darajali tenglama kvadrat radikalda yechilishi uchun uning kamida bitta ildizi rastional son bo'lishi zarur va yetarli.*

**Isboti.** 1. *Yetarlilik sharti.*  $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$  ko'phad  $d$  rastional ildizga ega bo'lsin. U holda uni quyidagicha yozamiz:  $f(x)=(x-d)(x^2+mx+n)$ , bunda  $m, n \in \mathbb{Q}$ .

$$1) x^2 - d^2 = 0, d \in \mathbb{Q} = \mathcal{F}_0;$$

$$2) \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{m^2}{4}\right) = 0 \text{ yoki } y^2 - \alpha_1 = 0, \alpha_1 = \frac{m^2}{4} - n$$

munosabatlar o'rinli bo'lgani uchun (1) tenglama kvadrat radikalda yechiladi.

2. *Zaruriylik sharti.* (1) tenglama kvadrat radikalda yechilsin va uning rastional ildizi yo'q deb faraz qilaylik. Shunday

$$\mathbb{Q} = \mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}_1 \in \mathcal{F}_2 \in \dots \in \mathcal{F}_{k-1} \in \mathcal{F}_k \quad (2)$$

kvadrat kengaytmalar zanjiri mavjudki, u holda (1) tenglamaning  $x_1, x_2, x_3$  ildizlaridan kamida bittasi  $\mathcal{F}_k / \mathcal{F}_{k-1}$  ga tegishli bo'ladi. Masalan,

$$x_1 \in \mathcal{F}_k / \mathcal{F}_{k-1} \quad (3)$$

va  $x_1, x_2, x_3$  ildizlardan hech biri  $\mathcal{F}_{k-1}$  ga tegishli emas, ya'ni

$$\{x_1, x_2, x_3\} \cap \mathcal{F}_{k-1} = \emptyset \quad (4)$$

bo'lsin deb faraz qilaylik.

$\mathcal{F}_k$  maydon  $\mathcal{F}_{k-1}$  maydonning kvadratik kengaytmasi bo'lgani uchun shunday  $\alpha \in \mathcal{F}_k / \mathcal{F}_{k-1}$  element mavjudki, natijada

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{k-1}(\alpha), \alpha \in \mathcal{F}_{k-1}, \alpha^2 \in \mathcal{F}_{k-1} \quad (5)$$

munosabat bajariladi. (3) va (5) ga asosan,

$$x_1 = p + q\alpha \quad (p, q \in \mathcal{F}_{k-1}, q \neq 0) \quad (6)$$

bo'ladi.

Endi  $p - q\alpha$  ifoda  $f(x)$  ko'phadning ildizi ekanini isbotlaymiz. Haqiqatan,

$$f(p + q\alpha) = (p + q\alpha)^3 + a(p + q\alpha)^2 + b(p + q\alpha) + c = A + B\alpha \quad (7)$$

bunda

$$\begin{cases} A = f(p) + 3pq^2\alpha^2 + aq^2\alpha^2 \\ B = 3p^2q + q^3\alpha^2 + 2apq + bq. \end{cases} \quad (8)$$

$A, B \in \mathcal{F}_{k-1}$  va  $\alpha \notin \mathcal{F}_{k-1}$  bo'lgani sababli

$$f(p + q\alpha) = A + B\alpha = 0 \quad (9)$$

tenglikdan

$$A = B = 0 \quad (10)$$

kelib chiqadi. (7), (8), (9) va  $A = B = 0$  ga ko'ra  $f(p - q\alpha) = A - B\alpha$  tenglik kelib chiqadi.

Demak,  $p - q\alpha$  ham  $f(x)$  ning ildizi ekan.  $x_2 = p - q\alpha$  bo'lsin. (6) munosabatga asosan  $x_1 - x_2 = 2q\alpha \neq 0$  bo'lgani uchun  $x_1 \neq x_2$ .

Viyet formulasiga asosan  $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ . (6) ga asosan  $x_1 + x_2 = 2p \in \mathcal{F}_{k-1}$ ,  $x_3 = -a - 2p \in \mathcal{F}_{k-1}$  Bu esa (4) farazga qarama-qarshi. Demak,  $f(x)$  ko'phad rastional ildizga ega ekan.

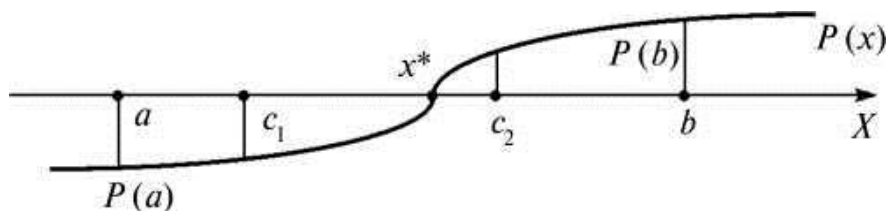
### 3-§. Tenglamalarni taqribiy yechish.

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \text{ bo'lsin, } P(x) = 0 \quad (1)$$

tenglamani taqribiy yechish deyilganda uning noma'lum  $x^*$  ildizi yotgan  $[a; b]$  oraliqni oldindan tayinlangan  $\varepsilon = |b - a|$  dan oshmaydigan kattalikda (qisqacha:  $\varepsilon$  gacha aniqlikda) topish tushuniladi.  $[a; b]$  da yotgan ixtiyoriy  $c$  nuqta ildizning taqribiy qiymati sifatida olinishi mumkin:  $x^* \approx c \pm \varepsilon$ .  $P(x)$  ko'phad grafigi absissalar o'qini  $x^*$  nuqtada kesib o'tishi tufayli unda  $P(x^*) = 0$ , nuqtaning ikki tomonida esa ko'phad qarama-qarshi ishoraga ega bo'ladi. Bunga qaraganda agar  $P(a)P(b) < 0$  (2) tengsizligi bajarilsa, shu oraliqda (1) tenglama ildizga ega.

Demak, hisoblashlarning 1- qadamida (2) shartdan foydalanib, ildiz yotgan  $[a; b]$  oraliq topiladi. Keyingi qadamlarda biror usul qo'llanilib, bu oraliq ketma-ket kichraytiriladi. Agar biror  $k$ - qadamda  $\varepsilon_k = |b_k - a_k| < \varepsilon$  aniqlikka erishilgan bo'lsa,  $[a_k; b_k]$  oralig'idagi ixtiyoriy  $c_k$  son, masalan,  $c_k = (b_k + a_k)/2$  o'rta qiymat ildiz uchun qabul qilinadi va hisoblashlar to'xtatiladi. Tenglamalarni taqribiy yechishning ikkita usuli bilan tanishamiz:

1) *kesmani teng ikkiga bo'lish (dixotomiya) usuli* qo'llanilganda  $[a; b]$  oraliq  $c_1$  nuqta bilan  $[a; c_1], [c_1; b]$  teng oraliqlarga ajratiladi (1 rasm). Ulardan (2) shart bajariladigani, demak, ildiz mavjud bo'lgani olinadi. Uni  $[a_1; b_1]$  orqali belgilaymiz. Uning uzunligi  $\varepsilon_1 = |b_1 - a_1| = \frac{|b-a|}{2}$ . Agar  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$  bo'lsa, masala hal, aks holda  $[a_1; b_1]$  oraliq ikkiga bo'linadi va hokazo;



1- rasm.

2) endi *Jamshid ibn Ma'sud G'iyosiddin al-Koshiy (ko'pincha G'iyosiddin al-Koshiy nomi bilan mashhur)* (Mirzo Ulug'bek ilmiy maktabi namoyandalaridan biri, Ulug'bekning ustoz, Samarqandda ijod etgan, 1430- yilda vafot etgan) ning taqribiy qiymatlarni ildizga *ketma-ket yaqinlashtirishlar(iteratsiya)* usulini keltiramiz. Al-Koshiy  $x^3-kx+m = 0$ ,  $k \neq 0$  ko'rinishdagi tenglamani yechish uchun uni teng kuchli

$$x = \frac{m+x^3}{k} \quad (3)$$

ko'rinishga keltiradi.  $\frac{m}{k} = q_1$  (qoldiqda  $r_1$ ), ya'ni  $m=kq_1+r_1$ , bo'lganidan, (3) tenglik

$$x = \frac{kq_1+r_1+x^3}{k} \quad \text{yoki} \quad x = q_1 + \frac{r_1+x^3}{k} \quad (4)$$

ko'rinishga keladi. 1- yaqinlashish uchun  $x_1=q_1$  qabul qilinadi. (4) tenglikning o'ng qismiga  $x=x_1$ , qo'yiladi,  $\frac{r_1+x_1^3}{k}=q_2$  (qoldiqda  $r_2$ ) bo'yicha  $r_1=kq_2+r_2-x_1^3$  topiladi. Natijada

$$x = q_1 + q_2 + \frac{r_2+(x^3-x_1^3)}{k} \quad (5)$$

Ikkinchi yaqinlashish:  $x_2=q_1+q_2$  va hokazo. Amalda biz  $r$  qoldiqlarni hisoblab o'tirmay, Al-Koshiy usulining ushbu nisbatan sodda modifikatsiyasidan (ko'rinishi o'zgartirilgan rekurrent formuladan) foydalanamiz:

$$q_n = \frac{(x_{n-1}^3-x_{n-2}^3)}{k}, \quad x_{n+1}=x_n+q_n \quad (6)$$

Bu formulalar bo'yicha topilgan har qaysi  $x_n$  yaqinlashish xatosi (ya'ni uning izlanayotgan ildizdan farqi)  $\varepsilon_n < x_n - x_{n-1} = q_n$  bo'ladi va  $q_1 > q_2 > \dots > q_n > \dots$  bo'lganidan xato qiymati keyingi qadamlarda kamayib boradi.

#### 4-§.Ba'zi yuqori darajali tenglamalarni yechish.

Ba'zi yuqori darajali tenglamalar ko'paytuvchilarga ajratish, tenglamadagi ozod hadning bo'luvchilarini tenglamaga qo'yish va shu kabi yo'llar bilan yechilishi mumkin. Bunday tenglamalardan quyida bir nechtasini yechib ko'rsatamiz<sup>9</sup>.

**1-misol.**  $x^3-2x+4=0$  tenglama yechilsin.

**Yechish.** Ozod had 4 ning bo'luvchilari  $\pm 1; \pm 2; \pm 4$  dir. Bularni birin-ketin tenglamadagi  $x$  ning o'rniga qo'yilganda, ulardan tenglamani qanoatlantirgani tenglamaning ildizi bo'ladi. Keyin Bezu teoremasining 2-natijasidan foydalanish kerak. Bu misolda  $x = -2$  uni qanoatlantiradi. Bezu teoremasining 2-natijasiga asosan  $x^3-2x+4$  ko'phad  $(x+2)$ ga qoldiqsiz bo'linadi, ya'ni berilgan tenglamani

$$x^3-2x+4 = (x+2)(x^2-2x+2) = 0$$

shaklda yozish mumkin. Endi  $x^2-2x+2=0$  tenglamani yechib,  $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$  ekanini topamiz. Demak,  $x_1 = -2, x_{2,3} = 1 \pm i$ .

Endi bu tenglamani boshqa yo'l bilan yechilishini quyidagilardan ko'rish oson:

$$\begin{aligned} x^3-2x+4=0 ; \quad x^3-2x+4 &= x^3-4x+2x+4 = x(x^2-4)+2(x+2) = (x+2)(x(x-2)+2) = \\ &= (x+2)(x^2-2x+2) = 0 \end{aligned}$$

bundan:  $x+2=0, x_1=-2; x^2-2x+2=0$  dan  $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$

**2-misol.**  $x^4-3x^3+3x^2-x=0$  tenglama yechilsin.

**Yechish.**  $x^4-3x^3+3x^2-x = x(x^3-3x^2+3x-1) = x(x-1)^3 = 0$ . Bundan  $x_1=0; x_{2,3,4}=1$ .

---

<sup>9</sup> Muhamedov K: "Elementar matematikadan qo'llanma", oliy o'quv yurtlariga kiruvchilar uchun. Toshkent "O'qituvchi" -1976.117-118-betlar.

**3-misol.**  $x^5 - 3x^4 + 2x^3 = x^3(x^2 - 3x + 2) = 0$  bundan  $x^3 = 0$  va  $x^2 - 3x + 2 = 0$ ,

$$x_{1,2,3} = 0 \text{ va } x_{4,5} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}; \quad x_4 = 2; \quad x_5 = 1.$$

**4-misol.**  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  tenglama yechilsin.

**Yechish.** 6 ning bo'luvchilari  $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$  ni yuqoridagidek tenglamaga qo'yib tekshiramiz.

$x=1$  tenglamani qanoatlantiradi. Bezu teoremasining xossasiga asosan:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

Endi,  $x^2 - 5x + 6 = 0$  tenglamadan  $x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ .

**5-misol.**  $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 16 = 0$  tenglama yechilsin.

**Yechish.**  $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \dots$  larni tenglamaga qo'yib tekshirib ko'ramiz,

$x = -2$  uni qanoatlantiradi. Bezu teoremasining 2- natijasiga asosan:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 16 = (x+2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$$

Demak, qolgan ildizlarni topish uchun  $x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$  tenglama hosil bo'ldi. Buning chap qismini gruppalab, ko'paytuvchilarga ajratib yechish qulay, ya'ni  $x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = x^2(x+2) + 4(x+2) = (x+2)(x^2 + 4) = 0$ . Bundan  $x+2=0$  va  $x^2+4=0$ . Demak,  $x_1 = -2$ , va  $x_{2,3} = \pm 2i$ .

**6-misol.**  $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$  tenglama yechilsin.

**Yechish.**  $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = x^5 - x^4 - 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + x + 2x - 1 = x^4(x-1) - 2x(x^3-1) + 4x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 4x^2 + 1) = 0$

Bundan:

$x-1=0$  va  $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$ .  $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = x^4 - x^3 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = x^3(x-1) - (x^3-1) + 2x(x-1) = (x-1)(x^3 - x^2 + x - 1) = (x-1)(x-1)(x^2+1) = 0$ .

Bundan:  $x-1=0$ ,  $x-1=0$ ,  $x^2+1=0$ .

Demak,  $x_{1,2,3} = 1$ ,  $x_{4,5} = \pm i$ .

**7- misol.**  $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$  tenglamani yeching.

Bu **bikvadrat tenglama** deb ataluvchi  $ax^4+bx^2+c=0$  ( $a \neq 0$ ) tenglamaning xususiy holidir. Bunday ko'rinishdagi tenglamalarni yechish uchun  $x^2=y$  almashtirishni bajarish kerak. Bu almashtirish berilgan tenglamani  $y^2 -9y + 20 = 0$  kvadrat tenglamaga olib keladi. Biz berilgan tenglamani ko'paytuvchilarga ajratish usuli bilan yechamiz.

**Yechish.** Tenglamaning chap qismini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$\begin{aligned} x^4 - 9x^2 + 20 &= (x^4 - 4x^2) - (5x^2 - 20) = x^2(x^2 - 4) - 5(x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^2 - 5) = \\ &= (x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0. \end{aligned}$$

Endi  $x-2 = 0$ ,  $x + 2 = 0$ ,  $x-\sqrt{5} = 0$ ,  $x + \sqrt{5}=0$  tenglamalarni yechib, berilgan tenglama yechimlarini topamiz:

**Javob:**  $\{-2; 2; -\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ .

**8- misol.**  $x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0$  tenglamani yeching.

**Yechish.** Tenglamaning chap tomonida 4-darajali ko'phad turibdi. Uni kvadrat uchhadlar ko'paytmasi shaklida tasvirlashga harakat qilamiz:

$$x^4 - 4x^2 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 + px + q)(x^2 + bx + c).$$

Chap va o'ng tomonlarda turgan ko'phadlarning mos koeffitsientlarini tenglashtiramiz:

Bu sistemaning biror butun qiymatli yechimini topamiz.  $qc = -14$  dan  $q$  va  $c$  lar 14 ning bo'luvchilari ekanini ko'rish qiyin emas. Demak, ular uchun  $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$  larni sinab ko'rish kerak.

Agar  $q = 1$  bo'lsa,  $c = 14$  bo'ladi. Ikkinchi va uchinchi tenglamalar

$$\begin{cases} pb = 3, \\ -14p + b = 37 \end{cases} \text{ sistemani beradi. Bu sistemadan } b \text{ uchun}$$

$b^2 - 37b - 42 = 0$  tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama esa yechimga ega emas.

Shuning uchun,  $q = 1$  da sistema butun yechimga ega emas.

Agar  $q = 2$  bo'lsa,  $c = -7$  ga ega bo'lamiz. Bu holda sistema  $q = 2, c = -7, b = 1, p = -5$  lardan tuzilgan butun yechimga ega bo'ladi (tekshirib ko'ring).

Shunday qilib,

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = (x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7).$$

Demak, berilgan tenglama  $x^2 - 5x + 2 = 0$  va  $x^2 + x - 7 = 0$  tenglamalarga ajraladi.

Bu tenglamalarni yechib, berilgan tenglamaning ham yechimlari bo'ladigan

$$\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} \text{ sonlarni topamiz.}$$

**9- misol.**  $(x^2 + x + 4)^2 + 3x(x^2 + x + 4) + 2x^2 = 0$  tenglamani yeching.

**Yechish.** Chap tomonni  $y = x^2 + x + 4$  ga nisbatan kvadrat uchhad sifatida qarab, ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$y^2 + 3xy + 2x^2 = (y + x)(y + 2x).$$

Bundan  $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 0$  tenglama hosil bo'ladi. Oxirgi tenglama yechimga ega emas. Demak, berilgan tenglama ham yechimga ega emas.

**10- misol.**  $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = -30$  tenglamani yeching.

**Yechish.**  $(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = (x + 1)(x + 2)(x - 4)(x - 5) =$   
 $= [(x + 1)(x - 4)] [(x + 2)(x - 5)] = (x^2 - 3x - 4) \cdot (x^2 - 3x - 10)$  bo'lgani uchun berilgan tenglamani quyidagicha yozib olish mumkin:

$$(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 10) = -30.$$

Bu tenglamada  $y = x^2 - 3x$  almashtirish orqali yangi o'zgaruvchi  $y$  ni kiritamiz:

$$(y + 1)(y - 4)(y - 10) = -30,$$

Bu tenglamadan  $y_1 = 5$ ,  $y_2 = 4 + \sqrt{30}$ ,  $y_3 = 4 - \sqrt{30}$  larni topib, quyidagi uchta kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz:

$$x^2 - 3x = 5; \quad x^2 - 3x = 4 + \sqrt{30}; \quad x^2 - 3x = 4 - \sqrt{30}.$$

Bu tenglamalarni yechsak, berilgan tenglamaning barcha ildizlari hosil bo'ladi:

$$\frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}; \quad \frac{3 \pm \sqrt{25 + 4\sqrt{30}}}{2}; \quad \frac{3 \pm \sqrt{25 - 4\sqrt{30}}}{2}.$$

**11- misol.**  $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$  tenglamani yeching.

**Yechish.**  $\sqrt{2} = a$  deb,  $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$  tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani  $a$  ga nisbatan kvadrat tenglama sifatida qarab, uning  $a = x^2 - x$ ,  
 $a = x^2 + x + 1$  ildizlarini topamiz.  $a = \sqrt{2}$  bo'lgani uchun quyidagi tenglamalarga ega bo'lamiz:

$$x^2 - x = \sqrt{2}; \quad x^2 + x + 1 = \sqrt{2}.$$

Bu tenglamalar berilgan tenglamaning barcha ildizlarini aniqlash imkonini beradi:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}; \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$$

**12- misol.**  $\frac{4x}{x^2+x+3} + \frac{5x}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{2}$  tenglamani yeching.

**Yechish.**  $x=0$  soni tenglamaning yechimi emas. Shu sababli berilgan tenglama quyidagi tenglamaga teng kuchli:

$$\frac{4}{x + \frac{3}{x} + 1} + \frac{5}{x + \frac{3}{x} - 5} = -\frac{3}{2}$$

$y = x + \frac{3}{x}$  almashtirish olsak,  $\frac{4}{y+1} + \frac{5}{y-5} = -\frac{3}{2}$  tenglama hosil bo'ladi. Bu

tenglama  $y_1 = -5, y_2 = 3$  ildizlarga ega bo'lgani uchun berilgan tenglama

$$x + \frac{3}{x} = -5, \quad x + \frac{3}{x} = 3$$

tenglamalar majmuasiga teng kuchli. Ularni yechib, berilgan tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Yechilgan bu tenglama  $\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c} + \frac{Bx}{ax^2+b_2+c} = D$

ko'rinishdagi tenglamaning xususiy holidir. Shunday ko'rinishdagi barcha tenglamalar, shuningdek ,

$$\frac{ax^2b_1x+c}{ax^2+b_2x+c} + \frac{ax^2b_3x+c}{ax^2+b_4+c} = A \quad \text{va} \quad \frac{ax^2b_1x+c}{ax^2+b_2x+c} = \frac{Ax}{ax^2+b_3+c}, A \neq 0$$

ko'rinishdagi ( bu yerda  $ac \neq 0$  ) tenglamalar ham 12- misol kabi yechiladi.

Chetki hadlaridan bir xil uzoqlikdagi hadlar koeffitsientlari teng  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + a = 0$  ko'rinishdagi tenglama to'rtinchi darajali **qaytma tenglama** deyiladi. Bunday tenglamalarni yechish uchun uning ikkala qismini  $x^2$  ga

bo'lib,  $x + \frac{1}{x} = z$  almashtirishni bajaramiz:

$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$ , bunda  $z^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$  bo'lganidan,

$a(z^2 - 2) + bz + c = 0$  tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning ikkala ildizi

bo'yicha  $x + \frac{1}{x} = z_1$ ,  $x + \frac{1}{x} = z_2$  tenglamalar tuzilib, bu tenglamalar

yechiladi.

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , ko'rinishdagi kub tenglamalar uchun quyidagi tengliklar o'rinli<sup>10</sup>.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Kub tenglamani chap qismini ko'paytuvchilarga ajratish usuli bilan yechamiz.

**1(99-10-6).** Ushbu  $x^3 - px^2 - qx + 4 = 0$  tenglamaning ildizlaridan biri 1 ga teng. Shu tenglama barcha koeffitsientlarini yig'indisini toping.

**Yechish.**  $f(x) = x^3 - px^2 - qx + 4$  ko'phadning barcha koeffitsientlari yig'indisi uning  $x=1$  dagi qiymatiga teng. Haqiqatdan,  $f(1) = 1 \cdot 1^3 - p \cdot 1^2 - q \cdot 1 + 4 = 1 - p - q + 4$ .  $x=1$  soni  $f(x)$  ko'phadning ildizi bo'lganligi sababli  $f(1) = 0$  bo'ladi. Demak,  $1 - p - q + 4 = 0$ .

**Javob:** 0

**2(97-1-12).** Tenglamaning ildizlari yig'indisini toping.

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$$

**Yechish.** 1-usul. Tenglamani chap qismini ko'paytuvchilarga ajrataylik.

$$x^2(x+2) - 9(x+2) = 0, \quad (x+2)(x-3)(x+3) = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -3$$

U holda  $x_1 + x_2 + x_3 = -2$  bo'ladi.

**Javob.** -2

2-usul. Viyet teoremasiga asosan bu tenglamaning ildizlarining yig'indisi qarama-qarshi ishora bilan olingan  $x^2$  oldidagi koeffitsientga teng bo'ladi. Bundan  $x^2$  oldidagi koeffitsientning qarama-qarshisi -2. **Javob.** -2

---

<sup>10</sup> Qurbonov N.X.: "Maxsus yo'l bilan yechiladigan algebraik masalalar", Toshkent "O'zbekiston milliy ensiklopediyasi" Davlat ilmiy nashriyoti-2008. 11-12-betlar.

## Xulosa

Ushbu bitiruv malakaviy ishini yozishda ko'pgina murakkab misol va masalalarni yechish usullari haqida to'xtalib o'tildi. Jumladan, Qaytma tenglamalar, ya'ni boshidan o'rta hadigacha bo'lgan koeffitsiyentlar o'rta haddan keyin teskarisiga takrorlanadigan yuqori darajali tenglamalarni qanday usullarda yechish, kvadrat tenglamani ba'zi xususiy hollariga oid misollarni yechish, uchinchi darajali tenglamalarni Kardano formulasi yordamida yechish, to'rtinchi darajali tenglamalarni Ferrari usulida yechish, kvadrat tenglamaga keltiriladigan yuqori darajali tenglamalar, Bezu teoremasi, Gerner sxemasi, ko'phadning ildizlari, algebraik tenglamalarning kompleks ildizlari, butun koeffitsientli ko'phadning butun va rastional ildizlari, tenglamalarning radikallarda yechilish tushunchasi va tenglamalarni taqribiy yechish haqida asosiy tushunchalar keltirib o'tilgan va ularga oid misollardan namunalar yechib ko'rsatildi.

Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, bitiruv malakaviy ishi natijalaridan umumta'lim maktab matematika o'qituvchilari, yuqori sinf o'quvchilari, akademik litsey va kasb - hunar kolleji talabalari keng foydalanishi mumkin hamda "Matematika o'qitish metodikasi" ta'lim yo'nalishi talabalari ham ayniqsa, birinchi va ikkinchi kurs talabalariga bu ish "Qaytma tenglamalarni yechish usullari, yuqori darajali tenglamalarning xususiy hollari: kvadrat tenglama va uning bir necha ko'rinishlarini yechish yo'llari, uchinchi darajali tenglamalarni Kardano formulasi yordamida yechish, to'rtinchi darajali tenglamalarni Ferrari usulida yechish, kvadrat tenglamaga keltiriladigan yuqori darajali tenglamalar, Bezu teoremasi, Gerner sxemasi, ko'phadning ildizlari, algebraik tenglamalarning kompleks ildizlari, butun koeffitsientli ko'phadning butun va ratsional ildizlari, tenglamalarning radikallarda yechilish tushunchasi va tenglamalarni taqribiy yechish haqida kengroq tasavvur qilishga yordam beradi, degan umiddaman.

O'ylanmanki, ushbu bitiruv malakaviy ishimdan kelajakda ish faoliyatimda albatta foydalanaman.

### **Foydalanilgan adabiyotlar:**

1. Prezident Islom Karimovning O‘zbekiston Respublikasi mustaqilligining yigirma ikki yilligiga bag‘ishlangan tantanali marosimdagi nutqidan. “Xalq so‘zi”,2013,64-son,1-3 betlar.
2. Karimov I.A.”O‘zbekiston buyuk kelajak sari” asari.T.:”O‘zbekiston” nashriyoti-1999,289-bet.
3. Karimov I.A. “Sog‘lom bola yili” davlat dasturidan.”Xalq so‘zi”,2014,39-son,1-3 betlar
4. Usmonov F.R, Isomov R.D, Xo‘jayev B.O:”Matematikadan qo‘llanma”  
1-qism Toshkent :“Yangi asr avlodi” -2006. 120-131-betlar.
5. A.U Abduhamidov, H.A.Nasimov,U.M.Nosirov,J.H.Husanov: “Algebra va analiz asoslari” I qism,Akademik litseylar uchun darslik,T.:”O‘qituvchi” Nashriyot-matbaa ijodiy uyi -2008.195-207-betlar.
6. Nazarov R.N,Toshpo‘latov B.T,Do‘simbetov A.D: “Algebra va sonlar nazariyasi” 2-qism, Toshkent :“O‘qituvchi” -1995. 229-233-betlar.
- 7.To‘laganov T. R: “Elementar matematika” ,Toshkent: “O‘qituvchi” -1997.217-226-betlar.
8. Jumaniyozov Q, Muxamedova G: “Matematikadan misol va masalalar yechish metodikasi”, Toshkent-2014.82-85-betlar.
- 9.Muhamedov K: ”Elementar matematikadan qo‘llanma”,oliy o‘quv yurtlariga kiruvchilar uchun, Toshkent: “O‘qituvchi” -1976.117-118-betlar.
10. Qurbonov N.X:”Maxsus yo‘l bilan yechiladigan algebraik masalalar”, Toshkent:”O‘zbekiston milliy ensiklopediyasi”Davlat ilmiy nashriyoti-2008.11-12-betlar.
- 11.DTM.Axborotnoma. Oliy o‘quv yurtlariga kirish uchun test savollari. Toshkent-2003.1996-2003 yilgi sonlari.
- 12.[www.google.uz](http://www.google.uz)
- 13.[www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz)
- 14.[www.uzedu.uz](http://www.uzedu.uz)
- 15.[www.ziyouz.com](http://www.ziyouz.com)