ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА НОРМА ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВЕ $\overline{L}_2^m(K_n)$.

БОБОРАХИМОВА МАХБУБА ИХТИЁРОВНА (магистр БухГУ)

В настоящей работе получена верхняя оценка норма функционала погрешности кубатурных формул в пространстве $\overline{L}_2^m(K_n)$.

In this paper in the space $\overline{L}_2^m(K_n)$ *received an upper estimate for the norm of the error functional of cubature formulas*

Современная постановка проблемы оптимизации формул приближённого интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах, например [1] – [4].

В этих работах исследуется проблема оптимальности относительно некоторого определённого пространства. Большинство из них рассмотрены в пространстве Соболева [1].

В настоящей работе рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_{K_n} f(x)dx \approx \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right) \tag{1}$$

над пространством $\overline{L}_2^{(m)}(K_n)$,

где K_n - n - мерный единичный куб.

Кубатурной формулы (1) сопоставим обобщённую функцию

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{K_n}(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right), \tag{2}$$

и назовём её функционалом погрешности.

Определение. Пространства $\overline{L}_2^{(m)}(K_n)$ - определяется как пространство функций заданных на n - мерном единичном кубе K_n и имеющих обобщённые производные порядка m, суммируемые с квадратом в норме

$$\left\| f(x)/\overline{L}_2^{(m)}(K_n) \right\| = \left\{ \int_{K_n} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x^{m_n}} \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

со скалярным произведением

$$\left(f(x), \varphi(x)\right)\overline{L}_2^{(m)}(K_n) = \int_{K_n} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m} \right) \left(\frac{\partial^m \varphi(x)}{\partial x^m} \right) dx,$$

где $\partial x^m = \partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}$ $\quad m = m_1 + m_2 + \ldots m_n$, $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$.

Как известно [1], что норма функции в пространстве $L_2^{(m)}(K_n)$ определяется формулой:

$$\left\| f(x) / \overline{L}_2^{(m)}(K_n) \right\| = \left\{ \int_{K_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(D^{|\alpha|} f(x) \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ...\alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! ... \alpha_n!$ и $D^{|\alpha|} f(x) = \dfrac{\partial^{\alpha} f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Пусть в (4) положим $n = 2$ и $m = 2$, тогда отсюда получим, что

$$\int_{K_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m} \right)^2 dx = \int_{K_2} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2} \frac{2!}{\alpha_1! \alpha_2!} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right)^2 dx =$$

$$= \int_{K_2} \left[\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{2!}{1! \cdot 1!} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \right)^2 dx \right]. \tag{5}$$

При $n = 2$ и $m = 2$ равенство (3) принимает следующий вид

$$\left\| f(x) / \overline{L}_2^{(2)}(K_n) \right\|^2 = \int_{K_2} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} \right)^2 dx. \tag{6}$$

Очевидно, что для правая часть (6) меньше вычислений чем (5) и отсюда следует, что для нормы функции в пространстве $\overline{L}_2^{(m)}(K_2)$ количество вычислительных операций будет гораздо меньше чем в пространстве $L_2^{(2)}(K_2)$, так как в норме (6) участвует только смешенные производные.

Теперь докажем следующую теорему который является основным результатом.

Теорема. Если для функционала погрешности (2) весовой кубатурной формулы (1) над пространством $\overline{L}_2^{(m)}(K_n)$ выполняется условие

$$\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \cdot \ell_{N_2}(x_2) \cdot ... \cdot \ell_{N_n}(x_n)$$

и

$$\left\| \ell_{N_i}(x_i) / \overline{L}_2^{(m_i)}(0,1) \right\| \le c_i \frac{1}{N_i^{m_i}}, \quad c_i - \text{константы}, \tag{7}$$

т.е.

$$\left\| \ell_{N_i}(x_i) / \overline{L}_2^{(m_i)^*}(0,1) \right\| \le c_i O(h^{m_i}), \quad c_i - \text{константы}, (i = \overline{1,n}), \tag{8}$$

то

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le c \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} N_i^{m_i}}, \quad \text{c – константа}, \tag{9}$$

или

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le c \cdot O(h^m) \tag{10}$$

где $\qquad \ell_{N_i}(x_i)=\varepsilon_K(x_i)-\sum_{\lambda_i=1}^{N_i}c_{\lambda_i}\delta\left(x_i-x_i^{(\lambda_i)}\right)$

$c=\prod_{i=1}^{n}c_i$, $m=m_1+m_2+\ldots+m_n$ и m_i - произвольны $\left(i=\overline{1,n}\right)$ т.е. $0\le m_i\le m$

Доказательство ведём методом математической индукции.

Пусть $n=2$, тогда

$$x=(x_1,x_2),\quad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2,\quad m=m_1+m_2,\quad dx=dx_1dx_2,\quad f(x)=f(x_1,x_2),$$

$$\ell_N(x)=\ell_{N_1}(x_1)\cdot\ell_{N_2}(x_2).$$

Если полагать в (3) $n=1$ то, получим

$$\left\|f(x_i)/\overline{L}_2^{(m_i)}(0,1)\right\|=\left\{\int_0^1\left(\frac{\partial^m f(x_i)}{\partial x_i^{m_i}}\right)^2dx_i\right\}^{\frac{1}{2}},\qquad \left(i=\overline{1,n}\right).$$

Таким образом, имеем

$$\left|<\ell_N(x_1,x_2),f(x_1x_2)>\right|=\left|<\ell_{N_2}(x_1),f(x_1,x_2)>\right|\le$$
$$\left\|\ell_{N_2}(x_2)/\overline{L}_2^{(m_2)^*}(0,1)\right\|\cdot\left\|<\ell_{N_1}(x_1),f(x_1,x_2)>/\overline{L}_2^{(m_2)^*}(0,1)\right\| \qquad (11)$$

Вычислим следующую норму:

$$\left\|<\ell_{N_1}(x_1),f(x_1x_2)>/L_2^{(m_2)}(0,1)\right\|=\left\{\int_0^1\left|\frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}}<\ell_{N_1}(x_1),f(x_1,x_2)>\right|^2dx_2\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\{\int_0^1\left|<\ell_{N_1}(x_1),\frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}}f(x_1,x_2)>\right|^2dx_2\right\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\left\{\int_0^1\left[\left\|\ell_{N_1}(x_1)/\overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1)\right\|\cdot\left\|\frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}}f(x_1,x_2)/\overline{L}_2^{(m_1)}(0,1)\right\|\right]^2dx_2\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\|\ell_{N_1}(x_1)/\overline{L}_2^{(m)^*}(0,1)\right\|\cdot\left\{\int_0^1\left\{\int_0^1\left[\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}}f(x_1,x_2)\right]^2dx_1\right\}dx_2\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\|\ell_{N_1}(x_1)/\overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1)\right\|\cdot\left\|f(x)/\overline{L}_2^{(m)}(K_2)\right\|,$$ где $x=(x_1,x_2)$ и $m=m_1+m_2$. (12)

Таким образом, из (11) и (12) получим

$$\left|<\ell_N(x_1,x_2),f(x_1,x_2)>\right|\le\left\|\ell_{N_2}(x_2)/\overline{L}_2^{(m_2)^*}(0,1)\right\|\cdot$$

$$\cdot\left\|\ell_{N_1}(x_1)/\overline{L}_2^{(m)^*}(0,1)\right\|\cdot\left\|f(x)/\overline{L}_2^{(m)}(K_2)\right\|, \quad (13)$$

Имея в виду (3) из (13) получим

$$\left\|\ell_N(x)/\overline{L}_2^{(m)^*}(K_2)\right\|\le\left\|\ell_{N_1}(x_1)/\overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1)\right\|\cdot\left\|\ell_{N_2}(x_2)/\overline{L}_2^{(m_2)^*}(0,1)\right\|. \quad (14)$$

Учитывая (7) из (14) имеем

$$\left\|\ell_N(x)/\overline{L}_2^{(m)^*}(K_2)\right\|\le d_1\cdot d_2\cdot\frac{1}{N_1^{m_1}\cdot N_2^{m_2}}$$

т.е.

$$\left\|\ell_N(x)/\overline{L}_2^{(m)^*}(K_2)\right\|\le d_3 O\left(h^{m_1}\right)\cdot O\left(h^{m_2}\right), \quad (15)$$

где $d_3=d_1\cdot d_2$

При $n=k$ имеем [6]

$$\left|<\ell_N(x),f(x)>\right|=\left|<\ell_N(x_1,x_2,...,x_k),f(x_1,x_2,...,x_n)>\right|=$$

$$\left|<\ell_{N_k}(x_k),<\ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}),...<\ell_{N_2}(x_2),<\ell_{N_1}(x_1),f(x_1,x_2,...,x_k)>,...,>\right|\le$$

$$\le\left\|\ell_{N_k}(x_k)/\overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1)\right\|\cdot\left\|\ell_{N_{k-1}}(x_{k-1})/\overline{L}_2^{(m_{k-1})^*}(0,1)\right\|...$$

$$\cdot\left\|\ell_{N_1}(x_1),f(x_1,x_2,...,x_k)/\overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1)\right\|\le$$

$$\le\left\|\ell_{N_k}(x_k)/\overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1)\right\|...\left\|\ell_{N_1}(x_1)/\overline{L}_2^{(m_1)^*}(x_1)\right\|\cdot\left\|f(x)/\overline{L}_2^{(m)}(K_k)\right\|. \quad (16)$$

Из (16) учитывая (3) имеем

$$\left\|\ell_N(x)/\overline{L}_2^{(m)^*}(K_k)\right\|\le\left\|\ell_{N_1}(x_1)/\overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1)\right\|...\left\|\ell_{N_k}(x_k)/\overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1)\right\| \quad (17)$$

Тогда имея в виду (7) из (17) получим

$$\left\|\ell_N(x)/\overline{L}_2^{(m)^*}(K_k)\right\|\le d\frac{1}{N_1^{m_1}\cdot N_2^{m_2}...N_k^{m_k}} \quad (18)$$

или учитывая (8) из (18) имеем

$$\left\|\ell_N(x)/\overline{L}_2^{(m)^*}(K_k)\right\|\le d\cdot O\left(h^{m_1}\right)...O\left(h^{m_k}\right), \qquad \text{где } d=\prod_{i=1}^{k}d_i$$

Используя из справедливость утверждения теорема при $n=k$ докажем, что утверждение выполняется при $n=k+1$.

Таким образом, пусть $n=k+1$, тогда учитывая (3) из (17) имеем

$$\left|<\ell_{N_{k+1}}(x_1,x_2,...,x_{k+1}),f(x_1,x_2,...,x_{k+1})>\right|=$$

$$=\left|<\ell_{N_1}(x_1),<\ell_{N_2}(x_2),<,...<\ell_{N_k}(x_k),<\ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}),f(x_1,x_2,...,x_{k+1})>...>\right|\le$$

$$\le\left\|\ell_{N_1}(x_1)/\overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1)\right\|...\left\|\ell_{N_k}(x_k)/\overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1)\right\|\cdot$$

$$\left\|<\ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}),f(x_1,x_2,...,x_{k+1})>/\overline{L}_2^{(m_{k-1})}(0,1)\right\| \quad (19)$$

Имея в виду (3) и (17) из (19) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_{k+1}) \right\| \le \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \ldots$$

$$\cdot \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}) / \overline{L}_2^{(m_{k+1})^*}(0,1) \right\|, \tag{20}$$

Используя (7) из (20) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_{k+1}) \right\| \le d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \ldots N_{k+1}^{m_{k+1}}}, \tag{21}$$

или учитывая (15) и (21) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_{k+1}) \right\| \le d \cdot O\left(h^{m_1}\right) \ldots O\left(h^{m_{k+1}}\right), \quad \text{где } d = \prod_{i=1}^{k+1} d_i .$$

В заключение отметим, что таким образом получим неравенство (9) и (10), т.е.

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \ldots N_n^{m_n}}, \qquad d - \text{константа}. \tag{22}$$

Или учитывая (8) из (22) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \cdot O\left(h^{m_1}\right) \ldots O\left(h^{m_n}\right) \tag{23}$$

где $d = \prod_{i=1}^{n} d_i$.

Так как $O\left(h^{m_1}\right) \ldots O\left(h^{m_n}\right) = O\left(h^{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}\right) = O\left(h^{m}\right)$, то из (23) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \cdot O\left(h^{m}\right), \qquad d - \text{константа}, \tag{24}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом мы получили оценку сверху для нормы функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) в пространстве $\overline{L}_2^{(m)^*}(K_n)$.

Литература

1. Соболев С.Л., Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. – 808с.
2. Салихов Г.Н., Кубатурные формулы для многомерных сфер. Ташкент: Фан, 1985 – 104 с.
3. Шарипов Т.Х. Некоторые вопросы теории приближенного интегрирования кандидатская диссертация. Ташкент 1975 – 102с.
4. Шодиметов Х.М. Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева. Докторская диссертация. Ташкент 202. - 218с.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы, т.1,М, Наука, 1973.

« MOODLE » TIZIMI VA UNDA STATISTIK MA'LUMOTLARNI BOSHQARISH

***KARIMOV ROZIQ** (BuxDU magistr talabasi)*

Bugungi kunning talablaridan biri bo'lgan masofaviy ta'limni tatbiq etish borasida olib borilgan tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, masofaviy ta'lim berish tizimida elektron vositalardan foydalanish muhim ahamiyatga ega bo'lmoqda. Mamlakatimizda ta'lim sohasidagi islohotlar, yangilanish jarayonlari pedagogik kadrlar tayyorlash bugungi

Бухоро давлат университети магистрантларининг илмий мақолалар тўплами

2016

ТАФАККУР ВА ТАЛҚИН

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ МАГИСТРАНТОВ * COLLECTION OF SCIENTIFIC ARTICLES OF BUKHARA STATE UNIVERSITY POST-GRADUATE STUDENTS

modellashtirish ....

AMIROV SH.Y. Quyosh quritgichlarining yangi modeli va uning qisqacha tavsifi …

БОЛТАЕВ С.А., РЎЗИЕВ Т.Р. Кўп мақсадли қуёш мева қуритгич қурилмасининг синов натижалари ....

AHMADOV X.S., NAZAROV E.S. Iste'molda ishlatiladigan moylarning spektral xarakteristikalari ....

МИРЗАЕВ.Ш.М, АХМАТОВА С.Р. Касб-ҳунар коллежларида физика фанини ўқитишдаги намунавий ўқув дастурни янада такомиллаштириш тўғрисида мулоҳазалар

АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА ВА АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ

JUMAYEV J.,QOBILOV K.H. Turbulentlik tushunchasi va uni matematik modellashtirish ....

АБДУЛЛАЕВ Б.Р. Об одной весовой оптимальной по порядку сходи-мости кубатурной формуле в пространстве $L_p^{(m)}(K_n)$..

БОБОРАХИМОВА М.И. Верхняя оценка норма функционала погрешности кубатурных формул в пространстве $\overline{L}_2^{m}(K_n)$ ....

KARIMOV R. « MOODLE » tizimi va unda statistik ma'lumotlarni boshqarish ......

МАВЛЯНОВ А.З. О проекте программной системы морфологического анализа узбекского языка ....

ЖИСМОНИЙ МАДАНИЯТ

КАДИРОВ Р.Х., УЗОҚОВ Ф.,ТОШЕВ М. Жисмоний тарбия педагогикасида математик таҳлил модели ....

МУНИРОВ Н. Касб-ҳунар коллежларида жисмоний таълимнинг услубий принциплари ....

БОШЛАНҒИЧ ТАЪЛИМ

ЮСУФЗОДА Ш., ҚОСИМОВ Ф.Ф. Масаланинг турли ечимини излаш ....

ХАЛИЛОВА Г. Бошланғич синф она тили таълимида мустақил ишларни ташкил этиш ....

RAJABOVA N. Boshlang`ich sinf "o`qish" darsliklarida istiqlol davri bolalar she`riyati ifodasi ....

ИСРОИЛОВА Р.С. Она тили таълимида нутқ ва тил мутаносиблиги ....

LUQMONOVA S.G. Boshlang'ich sinf o'qish darslarida vatanparvarlik tuyg'ularini shakllantirish ....

ОМОНОВА Д. Адабий тил таълимида баркамол шахсни тарбиялаш муаммолари ....

SAIDOVA U.J., HASANOVA M. Boshlang'ich sinflarda miqdorlarni o'rgatishning umumiy masalalari ....

ПЕДАГОГИКА НАЗАРИЯСИ ВА ТАРИХИ

ОЛИМОВ Ш.Ш., РАХИМОВА Н.А. Малака ошириш жараёнида семинар-тренингларни ташкил этиш – педагогик технологияларни ўрганиш ва тадбиқ қилишнинг муҳим воситаси ....

ИЗБУЛЛАЕВА Г.В., ЖЎРАЕВ Б.Т. Маънавий тарбиянинг илмий-назарий асослари ....

НУСРАТОВ А.Н., БАХРОНОВА М. Ўзбекистонда ривожланган осиё давлатларидаги педагогик технологияларининг психо-дидактик асослари .....