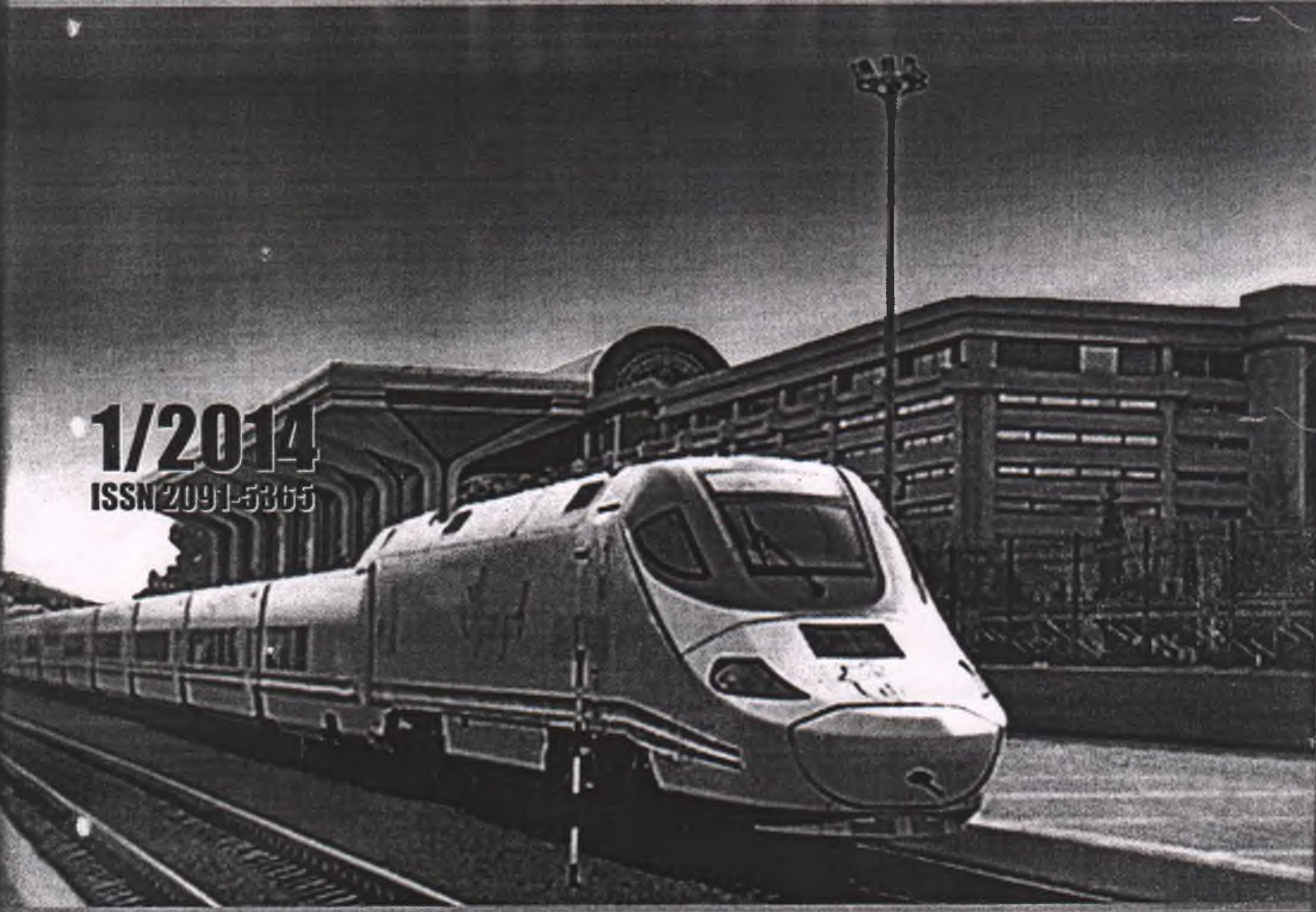
ToshTYMI

AXBOROTI

Chorak jurnali



1/2014
ISSN 2091-5365

ТашИИТ

ВЕСТНИК

Ежеквартальный журнал

УДК 539.3

Каримов А.М.,
к.т.н., доцент (ТашИИТ)

ИНТЕГРАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ ЛЭМБА В УПРУГОМ ВОЛОКНИСТОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Аннотация. Методом тензоров Грина получено интегральная формула для задачи о распространении упругих нестационарных волн в однонаправленном волокнистом полупространстве периодической структуры под действием сосредоточенней нагрузки. В основе метода лежит возможность интегрального представления решения исходной краевой задачи для тела с заданными упругими характеристиками через решение такой же задачи для тела такой же формы, что и исходное, но с эффективными упругими характеристиками.

Постановка задачи. Пусть, полупространство является композитом, состоящее из однонаправленного (вдоль оси x_3) волокнистого композита (радиус каждого волокна R), имеющего периодическую структуру. Материал матрицы и волокна является изотропным. Тензор модулей упругости C_{ijkl} и плотность ρ рассматриваемой среды являются периодическими функциями координат x_1, x_2 и имеют вид

$$C_{ijkl} = \lambda(x_1;x_2)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(x_1;x_2)(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad \rho = \rho(x_1;x_2)$$

Где

$$\{\lambda(x_1;x_2);\mu(x_1;x_2);\rho(x_1;x_2)\} = \begin{cases} \lambda_1;\mu_1;\rho_1 & \text{при } (x_1;x_2) \in \text{Матрица} \\ \lambda_2;\mu_2;\rho_2 & \text{при } (x_1;x_2) \in \text{Волокно} \end{cases}$$

$\lambda_\beta, \mu_\beta, \rho_\beta$ $(\beta = 1,2)$ - параметры Ламе и плотность материалов матрицы и волокна, соответственно. δ_{ij} – дельта Кронекера.

В рассматриваемом случае, решая задачи на ячейки периодичности, получим эффективные характеристики в виде

$$h_{11\beta\beta} + h_{22\beta\beta} = \langle C_{11\beta\beta} + C_{22\beta\beta}\rangle - 2\pi R \frac{\gamma(1)}{\mu_1}\frac{\chi_2 - 1}{\chi^*} c_1$$
$$h_{11\beta\beta} - h_{22\beta\beta} = \langle C_{11\beta\beta} - C_{22\beta\beta}\rangle + 2\pi R((1+\chi_1)a_1 + \gamma_1(\beta)R)$$

где

$$\gamma_1(\beta) \equiv (C^1{}_{22\beta\beta} - C^2{}_{22\beta\beta} - C^1{}_{11\beta\beta} + C^2{}_{11\beta\beta})/2$$
$$\gamma_2(\beta) \equiv (C^1{}_{11\beta\beta} - C^2{}_{11\beta\beta} + C^1{}_{22\beta\beta} - C^2{}_{22\beta\beta})/2$$

$\chi_\beta = 3 - 4\nu_\beta$, ν_β - коэффициенты Пуассона компонентов композита.

$$\chi^* \equiv \frac{\mu_2}{\mu_1}, \gamma = \pi R^2$$

Коэффициенты a_k определяются из следующих систему уравнений

$$a_k + A_0 a_1 \delta_{1k} + \sum_{n=1}^{\infty}{}^{*} \left(A r_{nk} + B G_{nk} + C \eta_{n1} \eta_{n2} \right) a_n = P \gamma_2(\beta) R \eta_{1k} + E \gamma_1(\beta) R \delta_{1k}$$

Здесь

$$\eta_{nk} \equiv C_{-n}^{k} R^{n+k} S_{n+k}, G_{nk} \equiv -n\left(C_{n+k+2}^{n+1} R^{n+k+2} S_{n+k+2} - C_{n+k}^{n} R^{n+k} T_{n+k} \right). r_{nk} \equiv \sum_{l=3}^{\infty} \eta_{nl} \eta_{lk}.$$

$$C_k^l \equiv \frac{k!}{l!(k-l)!}. C_{-k}^{l} \equiv -C_{k+l-1}^{l}. S_{k+l} \equiv \sum_{m,n} (m+in)^{-k-l} \ (k+l \ge 3). T_{k+l} \equiv \sum_{m,n} \frac{m-in}{(m+in)^{k+l+1}} \ (k+l \ge 3).$$

$$B \equiv \frac{1-\chi^*}{1+\chi^*\chi_1}. A_0 \equiv B\left(\chi_1 + \frac{5S_4}{\pi^2} \right)\gamma. A \equiv B\frac{\chi^*\chi_1 - \chi_2}{\chi^* + \chi_2}. C \equiv B\left(1 + \chi^*\chi_1 - \chi^* - \chi_2 \right)/\alpha_0. P \equiv B\frac{\chi_2 - 1}{2\alpha_0}.$$

$$E \equiv -\frac{1}{1+\chi^*\chi_1}.$$

$$\alpha_0 \equiv \chi^*(1-\gamma) + (\chi_2 - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\chi_1 - 1} \right).$$

$c_1 = \frac{\chi^*}{2\alpha_0}\left((\chi_1+1)\sum_{n=1}^{\infty} \eta_{n1} a_n + (1-\gamma)\gamma_2(\beta) R \right)$. Σ^* - суммирование по нечетным значением индекса. $\sum_{m,n}$ - суммирование по всем целым m и n.

Пусть, на поверхности $x_3 = 0$ рассматриваемого полупространства, вдоль линии

$$x_\beta q_\beta = 0 (\beta = 1,2)$$

равномерно приложен мгновенный сосредоточенный вектор усилия

$$\vec{S}(x_\beta, t) = \vec{S}^0 \delta(t) \delta(x_\beta q_\beta)$$

где $\vec{S}^0$ – постоянный вектор, $\vec{q}(q_1;q_2)$ – единичный вектор, $\delta(t)$ – функция Дирака. Имеются нулевые начальные данные. А также решения затухают на бесконечности.

Тензор перемещений $u_i^{(k)}$, деформаций $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ Грина рассматриваемой начально-краевой задачи удовлетворяют уравнениям

$$\sigma_{ij,j}^{(k)}\left(\vec{x}, \vec{\zeta}, t-\tau \right) + \delta_{ik} \delta\left(\vec{x} - \vec{\zeta} \right) \delta(t-\tau) = \rho(x_3) \frac{\partial^2 u_i^{(k)}\left(\vec{x}, \vec{\zeta}, t-\tau \right)}{\partial t^2}$$

$$\sigma_{ij}^{(k)}\left(\bar{x},\bar{\zeta},t-\tau\right)=C_{ijmn}\left(x_3\right)\varepsilon_{mn}^{(k)}\left(\bar{x},\bar{\zeta},t-\tau\right)$$
$$\varepsilon_{mn}^{(k)}\left(\bar{x},\bar{\zeta},t-\tau\right)=\frac{1}{2}\left(\delta_{mp}\delta_{nq}+\delta_{mq}\delta_{np}\right)u_{p,q}^{(k)}\left(\bar{x},\bar{\zeta},t-\tau\right)$$

нулевым граничным условиям

$$\sigma_{ij}^{(k)}\left(\bar{x},\bar{\zeta},t-\tau\right)n_j\Big|_{x_3=0}=0$$
$$u_i^{(k)}\left(\bar{x},\bar{\zeta},t-\tau\right)\Big|_{x_3=0}=0$$

и нулевым начальным данным

$$u_i^{(k)}\left(\bar{x},\bar{\zeta},0\right)=0\,,\quad \frac{\partial u_i^{(k)}\left(\bar{x},\bar{\zeta},0\right)}{\partial t}=0$$

Вектор перемещений $\vartheta_i\left(\bar{x},t\right)$ для сопутствующей начально-краевой задачи для однородного анизотропного полупространства с эффективным модулем упругости h_{ijkl}^0 и эффективной плотностью ρ^0 удовлетворяют уравнениям

$$h_{ijkl}^0\vartheta_{k,lj}+X_i=\rho^0\frac{\partial^2\vartheta_i}{\partial t^2}$$

граничным условиям

$$h_{ijkl}^0\vartheta_{k,l}n_j\Big|_{x_3=0}=S_i\left(x_\beta,t\right)$$
$$\vartheta_i\left(\bar{x},t\right)\to 0 \text{ при } \left|\bar{x}\right|\to\infty$$

и начальным данным

$$\vartheta_i=0,\ \frac{\partial\vartheta_i}{\partial t}=0 \text{ при } t=0\,.$$

Используя интегральное тождество Бетти, а также теоремы Гаусса-Остроградского и то обстоятельство, что исходные данные в рассматриваемой и сопутствующей задаче одинаковы, а начальные и краевые значения тензора Грина нулевые, получим интегральную формулу

$$u_k\left(\bar{x},t\right)=\vartheta_k\left(x,t\right)+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\varepsilon_{mn}^{(k)}\left(\bar{x},\bar{\zeta},t-\tau\right)\left(h_{mnij}^0-C_{mnij}\left(\zeta_3\right)\right)v_{i,j}\left(\bar{\zeta},\tau\right)d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3+$$
$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\varepsilon_i^{(k)}\left(\bar{x},\bar{\zeta},t-\tau\right)\left(\rho^0-\rho\left(\zeta_3\right)\right)\frac{\partial^2\vartheta_i\left(\bar{\zeta},\tau\right)}{\partial\tau^2}d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$$

по которой решение задачи Лэмба выражается через решение сопутствующей задачи с тензорами эффективных модулей упругости и тензором Грина.

Выводы. Для задачи Лэмба удается формально точно представить решение исходной системы уравнений теории упругости с переменными коэффициентами через решение задачи Лэмба для уравнений с постоянными коэффициентами.

Литература

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1991.
2. Победря Б. Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. М.: Физматгиз, 2006.
3. Горбачев В. И. Метод малого геометрического параметра и метод тензоров Грина в механике композитов. Современные проблемы механики. Том II, Вып. 2, М.: Изд-во МГУ, 2009.
4. Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1989.
5. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М. Изд-во МГУ. 1984
6. Каримов А. М. Задача Лэмба для волокнистого композита периодической структуры. Узбекский журнал проблемы механики, №5, 2003.
7. Абдусатторов А., Юлдашев Т. Методы решения задач теории упругости и пластичности. Т.: Узбекистан, 2013, с. 153.