МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ ТЕКСТИЛЬНОЙ И ЛЁГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Кафедра «Автоматизация и управление технологических процессов и производств»

К.т.н., доц. Халматов Д.А.
Ст.пр. Хушназарова Д.Р.

Лекции по курсу

«ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ»

Для студентов бакалавриата по направлению
5311000- Автоматизация и управление производственными и технологическими процессами

Ташкент–2017

Материал предназначен для изучения и приобретения знаний и практических навыков в изучении математических основы теории систем. Концепции и понятия, которые подробно изложены в лекциях, позволят получить неоценимые сведения о системах, использование теории множеств и теории графов решение разных задач, дифференциальное уравнение векторных матриц, математическое выражение динамических систем, элементы логической алгебры и случайных процессов.

Лекционный материал предназначен для бакалавров специальностей 5311000–Автоматизация и управление производственными и технологическими процессами (для текстильной, лёгкой и хлопковой промышленности). Материал подготовлен в соответствии и типовой программы.

Лекционный курс может быть использован студентами для закрепления знании полученными в предметах «Основы теории систем» и «Современные системы управление».

Составители: К.т.н., доц. Халматов Д.А.
Ст.пр. Хушназарова Д.Р.

Рецензенты: д.т.н., проф. Сиддиков И.Х. (ТГТУ)
к.т.н., доц. Кадиров О.Х. (ТИТЛП)

Рассмотрено и утверждено на заседании учебно-методического совета ТИТЛП

Протокол № от 2017 года

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В исследованиях по созданию сложных систем управления и обработки информации в настоящее время находят широкое применение новые идеи и современные методы анализа и синтеза систем, развитые в результате активной исследовательской работы в течение последних лет. В связи с этим, в университетских, а также промышленных кругах ощущалась острая необходимость в учебнике по основы теории систем, разъясняющем и систематизирующем новые методы проектирования систем. В этом лекционном курсе рассматривается, математические основы теории систем на основе современных методов и своем новом подходе она отражает тенденции и направления исследований в этой области в настоящее время.

В данном лекционном курсе приведены сущность, методы, особенности, цель и задачи предмета «Основы теории систем». Даннаяый лекционный курс по предмету «Основы теории систем» разработана на основе требований текущего Государственного учебного стандарта. Предмет «Основы теории систем» имеет большую значительность в развитии уровня знаний квалифицированных кадров в республике. При этом качественное составление программы предмета имеет значительное место.

В лекционном материале содержатся сведения и задания к освоению лекционных занятий с применением математических аппаратов изучения основы теории множеств, построения графов, линеаризации дифференциальных уравнений и определения управляемости и наблюдаемости динамических систем. Лекционный курс предназначен для студентов, изучающих курсы «Основы теории систем», «Теория автоматического управления» и «Алгоритмизация и управление производственными процессами».

Лекция №1.

Цель и задачи курса. Объекты и методы и элементы предмета. Понятые о системы.

1. Цель и задачи курса.

2. Понятие о системы.

3. Виды систем.

Ключевые слова: система, элемент системы, структура системы, подсистема, связь, статика, динамика, обратная связь, внешняя среда, свойства системы, модель, равновесие, устойчивость, изолированная система, открытая система, абстрактные системы, технические системы, технологический системы.

1. Цель и задачи курса.

Современное производство характеризуется широким внедрением во все его сферы микроэлектроники, вычислительной техники, автоматики, систем автоматического управления. Все новейшие отрасли науки и техники так или иначе связаны с техникой автоматического управления, а некоторые из них совершенно немыслимы без широкого использования автоматического управления в технологических процессах. Это атомная энергетика, космические исследования, микроэлектроника и др. Особое место занимают автоматические системы, которые обеспечивают обработку больших потоков информации, надежность и экономическую эффективность производства. В настоящее время теория автоматических систем быстро развивается, ее идеи используются в таких научных направлениях как кибернетика, вычислительная техника, теория оптимального управления и др. Теоретической базой теории систем управления являются разделы математики, которые бурно развиваются: теория множеств, теория графов, математическая логика, теория конечных автоматов, теория случайных процессов и ряд других.

Цели и задачи курса. Цель изучения курса «Основы теории систем» – заключается в изучении способов современного технического анализа и синтеза, формирование способов решения разных математических задач, по теоретическим знаниям и практическим навыкам при изучении системы управления и теории современного управления.

Задачами предмета является:

- цель и задачи основы теории систем;
- основные понятие теории множества;
- теория графов;
- теория матриц;
- математическое выражение динамических систем;
- элементы алгебры-логики;
- непрерывное получение теоретических и практических знаний при изучении случайных процессов в системах управления.

Роль предмета в производстве. Знания и навыки полученные в процессе изучения курса «Основы теории систем» находят свое применение в различных областях промышленности, народного хозяйства, в основах теории систем с учётом знаний динамических свойств технологических объектов и в повышение точности контроля работы. Полученные знания по предмету могут способствовать повышению экономической эффективности производства и ресурсосбережения.

При изучении основы теории систем подготовка технологических процессов и принципы автоматизации технологических агрегатов должен быть действовать целесообразно. Поэтому этот предмет считается общепрофессионалым предметом и имеет большой роль в технологических системах в производстве.

2. Понятие о системы.

При исследовании объектов характерной чертой является то, что их представляют как систему.

Система – это совокупность элементов или устройств, находящихся в отношениях и связях между собой и образующих определенную целостность, единство.

Основные понятия, характеризующие строение и функционирование системы следующие.

Элемент системы – это простейшая неделимая часть системы. Любая система может быть рассмотрена как элемент системы более высокого порядка. Рассмотрение зависит от цели.

Основная характеристика всякой системы ее ***структура*** – она отражает наиболее существенные взаимоотношения между элементами и их группами (компонентами, подсистемами), которые мало изменяются при изменениях в системе и обеспечивают существование системы и ее основных свойств исходя из функций и целей, поставленных между ними.

Связь – понятие связь обеспечивает возникновение и сохранение структуры и целостных свойств системы. Это понятие характеризует одновременно и строение (статику), и функционирование (динамику) системы. Связь характеризуется направлением, силой и характером или видом.

Важную роль в системах играет понятие «обратной связи». Это понятие легко иллюстрируется на примерах технических устройств, его не всегда можно применить к организационным системам.

Внешняя среда – это множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему и находящихся под ее влиянием.

Для простоты математического описания внешнюю среду задают в той ее части, которая относится к формированию соответствующих воздействий на элементы системы.

Свойства системы – качества, позволяющие описывать систему и выделять ее среди других систем. Свойства характеризуются совокупностью параметров, одни из которых имеют количественную меру, другие выражаются лишь качественно.

Модель – описание системы, отражающее определенную группу ее свойств. Углубление описание – детализация модели. создание модели позволяет предсказывать поведение системы в определенном диапазоне условий.

Модель функционирования – модель, предсказывающая изменение состояния системы во времени.

Состояния системы – множество существенных свойств, которыми обладает система в настоящий момент времени.

Равновесие – это способность системы в отсутствие внешних возмущающих воздействий (или при постоянных воздействиях) сохранить свое состояние сколь угодно долго.

Устойчивость - способность системы возвращаться в состояние равновесия после того, как она была выведены из этого состояния под влиянием внешних возмущающих воздействий.

Система называется ***изолированной***, если она не имеет внешней среды.

Система, у которой есть внешняя среда, называется ***открытой***.

Если некоторый объект определен как открытая система, возникает вопрос: какие элементы включать в систему, а какие нет. Универсальных правил для ответа нет.

Внешняя среда воздействует на объект, а объект на внешнюю среду.

3. Виды систем.

Далее будем рассмотреть отдельные виды систем. В зависимости от происхождения системы делятся на естественные и искусственные (создаваемые, антропогенные).

Естественные системы - это системы, объективно существующие в действительности. в живой и неживой природе и обществе. Эти системы возникли в природе без участия человека. Примеры: атом, молекула, клетка, организм, популяция, общество, вселенная и т.п.

Искусственные системы - это системы, созданные человеком. Примеры:1. Холодильник, самолет, предприятие, фирма, город, государство, партия, общественная организация и т. п.

Кроме того, можно говорить о третьем классе систем — ***смешанных системах***, куда относятся эргономические (машина — человек-оператор), автоматизированные, биотехнические, организационные и другие системы.

Все системы можно разбить на две большие группы: реальные (материальные или физические) и абстрактные (символические) системы.

Реальные системы состоят из изделий, оборудования, машин и вообще из естественных и искусственных объектов.

Абстрактные системы, по сути, являются моделями реальных объектов - это языки, системы счисления, идеи, планы, гипотезы и понятия, алгоритмы и компьютерные программы, математические модели, системы наук. Иногда выделяют ***идеальные*** или ***концептуальные системы*** - системы, которые выражают принципиальную идею или образцовую действительность - образцовый вариант имеющейся пли проектируемой системы. Также можно выделить виртуальные системы - не существующие в действительности модельные или мыслительные представления реальных объектов, явлений, процессов (могут быть как идеальными, так и реальными системами).

Выделим из всего многообразия создаваемых систем действующие системы. Такие системы способны совершать операции, работы, процедуры, обеспечивать заданное течение технологических процессов, действуя по программам, задаваемым человеком.

Технические системы представляют собой материальные системы, которые решают задачи по программам, составленным человеком; сам человек при этом не является элементом таких систем. ***Техническая система*** — это совокупность взаимосвязанных физических элементов. В качестве связей в таких системах выступают физические взаимодействия (механические, электромагнитные, гравитационные и др.). Примеры: автомобиль, холодильник, компьютер.

Эргатические системы. Если в системе присутствует человек, выполняющий определенные функции субъекта, то говорят о эргатической системе. ***Эргатическая система*** - это система, составным элементом которой является человек-оператор. Частным случаем эргатической системы будет человеко-машинная система - система, в которой человек-оператор или группа операторов взаимодействует с техническим устройством в процессе производства материальных ценностей, управления, обработки информации и т.д. Примеры: 1. Шофер за рулем автомобиля. 2. Рабочий, вытачивающий деталь на токарном станке.

Технологические системы. Существуют два класса определения понятия «технология»: а) как некой абстрактной совокупности операций. б) как некой совокупности операций с соответствующими аппаратно-техническими устройствами или инструментами. Отсюда, по аналогии со структурой, можно говорить о формальной и материальной технологической системе. Технологическая система (формальная) - это совокупность операций (процессов) в достижении некоторых целей (решений некоторых задач). Структура такой системы определяется набором методов, методик, рецептов, регламентов, правил и норм. Элементами формальной технологической системы будут операции (действия) или процессы. Технологическая система (материальная) - это совокупность реальных приборов, устройств, инструментов и материалов (техническое, обеспечение системы), реализующих операции (процессное обеспечение системы) и предопределяющих их качество и длительность. Примеры. Технологические системы: производство бумаги, изготовление автомобиля, оформление командировки, получение денег в банкомате.

Централизованной системой называется система, в которой некоторый элемент играет главную, доминирующую роль в функционировании системы. Такой главный элемент называется ведущей частью системы или ее центром. При этом небольшие изменения ведущей части вызывают значительные изменения всей системы: как желательные, так и нежелательные. К недостаткам централизованной системы можно отнести низкую скорость адаптации (приспособления к изменяющимся условиям окружающей среды), а также сложность управления из-за огромного потока информации подлежащей переработке в центральной части систем.

Децентрализованная система - это система, в которой нет главного элемента. Важнейшие подсистемы в такой системе имеют приблизительно одинаковую ценность и построены не вокруг центральной подсистемы, а соединены между собой последовательно или параллельно. Примеры: Интернет является практически идеальной децентрализованной системой.

Контрольные вопросы

1. Объясните цель и задачи курса.
2. Что такое система?
3. Чем означается элементы системы?
4. Что такое связь?
5. Объясните свойства системы.
6. С чем означается способность системы?
7. Когда называется система изолированный?
8. Какие виды системы существует?

Лекция №2.

Элементы теории множеств: понятие множества, способы задания множеств. Предикаты и кванторы.

1. Основные определения.

2. Предикаты и кванторы.

3. Операции над множествами.

4. Тождество алгебры множеств.

Ключевые слова: множество, одноэлементное множество, под множество, рефлексивность, симметричность, транзитивность, предикат, квантор, диаграмма Эйлера-Венна.

1. Основные определения.

Особое место в этом ряду занимает теория множеств, являющаяся фундаментом всей математики и зародившаяся в работах немецкого математика Кантора в 1879 - 1884 гг. В настоящее время теория множеств представляет собой математический аппарат теоретико-множественного анализа систем управления.

Объекты, составляющие множество, называются ***элементами множества***. Принято обозначать множества прописными буквами, а элементы множества – строчными буквами латинского алфавита.

Если объект a является элементом данного множества A, то это записывается с помощью символа принадлежности следующим образом: $a \in A$ и читается как “a является элементом множества A”, или “a входит в A”.

Множество может быть задано по разному: 1) перечислением всех входящих в него объектов; 2) описанием свойств, которыми должны обладать все элементы данного множества. Например, множество, состоящее из трех человек: Иванов, Петров, Сидоров. Либо множество студентов третьего курса, занимающихся боксом.

Общим обозначением множества служит пара фигурных скобок, внутри которых перечисляются элементы множества. Например, $A = \{1, 2, 3, 4\}-$ множество A, элементами которого являются числа 1, 2, 3, 4. Пусть $M-$ множество студентов группы, $A-$ множество отличников этой группы, тогда можно записать так: $A = \{x \in M : x - \textit{отличник группы}\}-$ это описательный способ задания множества. В фигурных скобках слева от двоеточия указывается общее обозначение элементов данного множества и какому более объемлющему множеству они принадлежат, а справа от двоеточия указывается общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Множество может содержать лишь один элемент – ***одноэлементное множество.*** Например, $A=\{a\}$. Здесь следует различать a и $\{a\}$. a - элемент одноэлементного множества $\{a\}: a \in \{a\}$.

Пустое и универсальное множества. Пустым называется множество, не содержащее ни одного элемента. Обозначается пустое множество символом $\varnothing$.

Например, $\{x \in R : x2 - x + 1 = 0\} = \varnothing$, если $R-$ множество вещественных чисел. Пустое множество в алгебре множеств аналогично нулю в алгебре чисел.

Если в рассмотрении участвуют только элементы некоторого фиксированного множества J, то это самое большое множество J называется универсальным, или объемлющим, или полным множеством. В различных конкретных случаях роль универсального множества могут играть различные множества.

Под множеством понимают совокупность определенных, вполне различимых объектов, рассматриваемых как единое целое. Множество задано, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет. Примеры множеств: множество студентов в данной группе, множество книг в библиотеке, множество точек на прямой, множество людей на Марсе и т.д.

Множество X является подмножеством Y, если любой элемент множества X принадлежит и множеству Y. Для обозначения подмножества используются символы включения: $\subset$- строгое включение, $\subseteq$ - нестрогое включение. Например, $X \subset Y$ или $X \subseteq Y$. Эти записи означают, что X есть подмножество множества Y.

В первом случае в множестве Y обязательно есть элементы, не принадлежащие множеству X. Во втором случае таких элементов в Y может и не быть. Символически определение подмножества можно записать следующим образом:

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall(x)[x \in X \to x \in Y].$$

Любое множество всегда содержит в себе пустое множество в качестве подмножества и само является подмножеством универсального множества

$\forall(X)[\varnothing \subseteq X, X \subseteq J]$. Кроме того $X \subseteq X$.

Для любого множества X существует множество X^*, элементами которого являются подмножества множества X. Такое множество обозначается через $2X$ или $\exp X$ и называется множеством-степенью.

Если число элементов множества X равно n, то число элементов его множества-степени равно $2n$. Например, $X = \{1,2,3\}$, тогда

$$X^* = 2X = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\varnothing\}.$$

Как видно из примера в множество-степень включают также само множество X и пустое множество.

Множества бывают конечными и бесконечными. Множество называется ***конечным***, если число его элементов конечно, т. е. если существует натуральное число *N,* являющееся числом элементов множества. Множество называется ***бесконечным***, если оно содержит бесконечное число элементов.

Два множества называются ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. представляют собой одно и то же множество. Множества X и Y не равны ($X = Y$*)*, если либо в множестве X есть элементы, не принадлежащие Y, либо в множестве Y есть элементы, не принадлежащие X. Символ равенства множеств обладает свойствами:

$X = X$ — рефлексивность;

если $X = Y$ то $Y = X$ — симметричность;

если $X = Y$ и $Y = Z$, то $X = Z$ — транзитивность.

Из определения равенства множеств вытекает, что порядок элементов в множестве несуществен. Так, например, множества $\{3,4,5,6\}$ и $\{4,5,6,3\}$ представляют собой одно и то же множество.

Из определения множества следует, что в нем не должно быть неразличимых элементов. Поэтому в множестве не может быть одинаковых элементов. Запись $\{2,2,3,5\}$ следует рассматривать как некорректную и заменить ее на $\{2,3,5\}$. Так, множество простых делителей числа 60 равно $\{2,3,5\}$.

2. Предикаты и кванторы.

Пусть имеется универсальное множество J и некоторое высказывание, относительно его произвольного элемента. Высказывание, которое отображает наличие или отсутствие того или иного признака у предмета называют предикатом. Таким образом, предикат P задает множество X, каждый элемент которого $x \in X$ обладает определенным свойством. В общем виде некоторое множество X, состоящее из элементов x, обладающих определенным свойством, можно записать так: $X = \{x : P(x)\}$.

Могут быть предикаты, которые являются истинными для любого элемента x множества J, т.е. $P(x)$ может быть истинным при любом x. Для обозначения этого факта вводится символ $\forall$, который называется квантором общности. Запись $\forall(x)P(x)$ означает высказывание, что для любого $x \in J$ значение предиката $P(x)$ - истина.

Введем квантор существования $\exists$. Запись $\exists(x)P(x)$ означает, что среди всех $x \in J$ существует хотя бы один элемент, для которого предикат $P(x)$ принимает истинное значение.

К кванторам также как и к предикатам можно применять отрицание, которое обозначается чертой над соответствующим символом. Например, запись $\overline{\forall}(x)P(x)$ означает: не для всякого элемента x в множестве J $P(x)$ - истина. $(x)P(x)$ означает – не существует ни одного элемента x в J, для которого $P(x)$ - истина.

Пусть $P(x)$ представляет высказывание, заключающееся в том, что x обладает некоторым свойством. Тогда запись $\overline{P}(x)$ означает, что элемент x не обладает этим свойством. Запись $\forall(x)\overline{P}(x)$ имеет следующий смысл: для любого $x \in J$ $P(x)$ - ложь, а $\overline{P}(x)$ - истина.

Очевидны следующие записи:

$$\forall(x)P(x) \Leftrightarrow \exists(x)P(x), \overline{\forall}(x)P(x) \Leftrightarrow \exists(x)\overline{P}(x).$$

3. Операции над множествами.

Объединение множеств. Объединением множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат X или принадлежат Y. Объединение обозначается через $X \cup Y$. Суть операции легко понять, пользуясь диаграммами Эйлера-Венна. Пусть X - множество точек левого круга (Рис.1а), Y-множество точек правого круга. Тогда $X \cup Y$ - заштрихованная область.

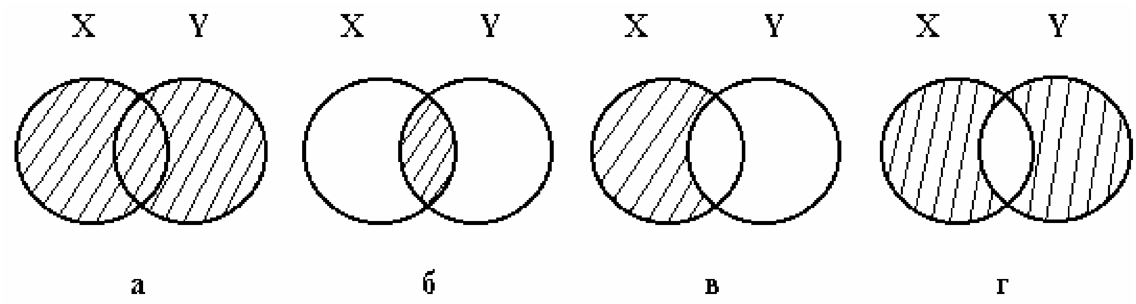


Рис.1. Диаграммы Эйлера-Венна

Пересечение множеств. Пересечением множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству X, так и множеству Y. Пересечение множеств обозначается через $X \cap Y$. На рис.1б пересечение множеств X и Y соответствует заштрихованной области. Если $X \cap Y = \varnothing$, то множество X и Y называются непересекающимися.

Разность множеств. Разностью множеств X и Y называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат X и не принадлежат Y. Обозначается разность множеств следующим образом: $X \setminus Y$. На рис1.в заштрихована область, соответствующая разности множеств X и Y.

Симметрическая разность множеств. Симметрической разностью множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат или множеству X, или множеству Y, но не обоим вместе. Обозначается симметрическая разность множеств следующим образом: $X \Delta Y$. На рис1.г заштрихованная область соответствует $X \Delta Y$.

Дополнение множества. Множество $\overline{X}$, определяемое из соотношения $\overline{X} = J \setminus X$ называется дополнением множества X. Пусть множество точек прямоугольника на рис.2 составляет универсальное множество J, X-ножество точек круга. Тогда $\overline{X}$ - множество точек заштрихованной области. Множества X и $\overline{X}$ не имеют общих элементов, поэтому $X \cap \overline{X} = \varnothing$. Кроме того не имеется элементов в множестве *J*, которые не принадлежали бы ни X, ни $\overline{X}$, т.к. те элементы, которые не принадлежат X принадлежат $\overline{X}$. Следовательно $X \cup \overline{X} = \mathrm{J}$.

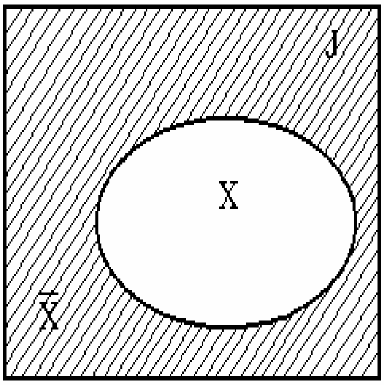


Рис.2. $\overline{X}$ - дополнение множества X

Разбиение множества. Некоторые множества можно представить как систему подмножеств. Так, например, множество студентов института составляют систему подмножеств факультетов, либо систему подмножеств курсов.

Рассмотрим некоторое множество M и систему множеств $S = \{X_1,\ X_2, ..., X_n\}$. Система множеств S называется разбиением множества M, если она удовлетворяет следующим условиям.

1. Любое множество $X_i\,(i = 1,2,...,n)$ из S является подмножеством множества $M - X_j \subset M$, т.е. $\forall X \in S : X \subset M$.

2. Любые два множества X_i и X_j из S являются непересекающимися - $X_i \cap X_j = \varnothing$, если $i \neq j$, т.е. $\forall X_i \in S$ и $\forall X_j \in S (i \neq j) : X_i \cap X_j = \varnothing$.

3. Объединение всех множеств, входящих в разбиение, равно множеству M.

$$\bigcup_{i=1}^{n} X = M$$

4. Тождества алгебры множеств

С помощью различных операций над множествами из множеств можно составлять различные алгебраические выражения. Пусть в результате некоторых операций над одними и теми же множествами X, Y, Z получены новые множества U и V, содержащие одни и те же элементы. Выражение $U = V$ представляет собой тождество алгебры множеств.

Рассмотрим наиболее важные тождества алгебры множеств.

1	$X \cup Y = Y \cup X$	Коммутативные
2	$X \cap Y = Y \cap X$	законы
3	$X \Delta Y = Y \Delta X$	
4	$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$	Ассоциативные
5	$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$	законы
6	$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$	Дистрибутивные
7	$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$	законы
8	$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$	Тождества де
9	$\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$	Моргана

Все приведенные тождества могут быть легко доказаны, например, с помощью диаграмм Эйлера-Венна. В качестве примера рассмотрим доказательство дистрибутивного закона (тождество 6).

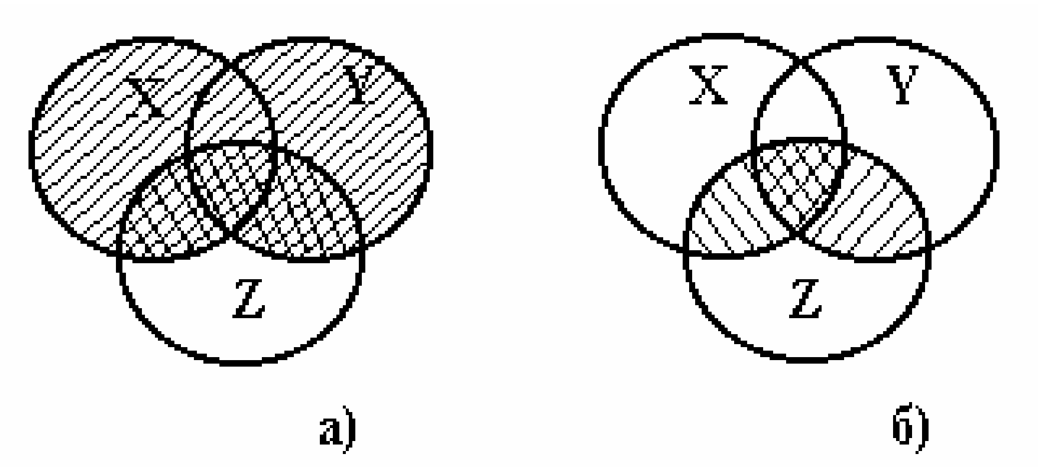


Рис.3. Геометрическая иллюстрация тождества 6

На рис.3а двойная штриховка соответствует выражению $(X \cup Y) \cap Z$ **,** на рис.3б заштрихованная область равна $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$. Из диаграмм видно, что оба выражения определяют одно и то же множество.

Контрольные вопросы

1. Что называется множеством?
2. Объясните элементы множества.
3. Какое множество называется равным. Приведите пример.
4. Какое множество называется конечным, а какое бесконечным?
5. Что называется под множеством?
6. Что такое предикат?
7. $\exists$(x)P(x) что означает этот запись?
8. Какие операции выполняется над множествами?

9. Пусть $l = \{x_1, x_2, x_3\}$ - универсальное множество, а $X = \{x_1, x_2\}$; $Y = \{x_2, x_3\}$; $Z = \{x_3\}$ - его подмножества. Определить перечислением следующие множества: $X \times X$; $Z \times Z$; $X \times Y$; $Y \times X$; $X \times Y \cap Y \times X$; $X \times Y \cup Y \times X$.

10. Чему равно множество $X \times Y$, если X и Y подмножество - R^2, причем $X = \{(x, y) ! 2x + y = 1\}$, $Y = \{(x, y) | x - y = 0\}$.

Лекция №3.

Упорядоченное множество и прямое произведение множеств. Соответствия, отображение, отношения и функция.

1. Упорядоченное множество и прямое произведение множеств.

2. Соответствия и отображение.

3. Отношения и её свойства. Виды отношения.

4. Понятие о функции.

Ключевые слова: упорядоченное множество, прямое произведение множество, проекции множество, соответствие, отображение, функционал, оператор, отношения, эквивалентность, толерантность, антисимметричность, несимметричность, антирефлексивность.

1. Упорядоченное множество и прямое произведение множеств.

Упорядоченное множество. Упорядоченным множеством или кортежем называется такое множество, в котором каждый элемент занимает определенное место. Число элементов кортежа называется длиной кортежа. Для обозначения кортежа используются круглые скобки. Например, $A = (a_1, a_2, a_3)$ - кортеж длины 3. Частным случаем кортежа является кортеж длины 1 - *(a)* и пустой кортеж длины 0, обозначаемый ( ) или $\wedge$. В отличие от простого множества в кортеже могут быть и одинаковые элементы.

Упорядоченное множество, элементами которого являются вещественные числа, можно рассматривать как координаты точки. Так, кортеж длины 2 можно рассматривать как точку на плоскости, либо вектор, проведенный из начала координат в данную точку. Кортеж длины 3 - точка, либо вектор в трехмерном пространстве, кортеж длины n - точка, либо вектор в n-мерном пространстве.

Прямое произведение множеств. Прямым произведением множества X на множество Y называется множество таких упорядоченных пар , что $x \in X$, а

$y \in Y$. Обозначается прямое произведение следующим образом: $X \times Y . X \times Y = \{(x, y) : x \in X\}$ ***и*** $y \in Y$.

Например: $X = \{1,2\}$, $Y = \{a, b\}$, $X \times Y = \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b)\}$.

Как следует из определения, прямое произведение множеств не обладает свойством коммутативности, т.е. $X \times Y \neq Y \times X$.

Если элементами множеств X и Y являются действительные числа, то элементы прямого произведения удобно изображать в виде точек, лежащих на плоскости и имеющих соответственно координаты x и y. Операция прямого произведения множеств может быть применена и к большему числу множеств. Прямым произведением множеств $X_1,\ X_2, \ldots, X_k$ называется множество, состоящее из кортежей длины k, первая компонента которых принадлежит X_1, вторая X_2, и т.д. Прямое произведение множеств обладает свойством дистрибутивности относительно операций объединения и пересечения:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C), \qquad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

Проекции множества. Рассмотрим сначала проекции кортежа. Проекцией кортежа на первую ось является первый элемент кортежа, проекцией на вторую ось - второй элемент и т.д. Пусть элементами множества M являются кортежи одинаковой длины. Тогда проекцией M на какую-либо ось будет множество проекций кортежей из M на ту же ось.

Пример 3.1. Пусть $M = \{(a,b,c),(x,x,x),(1,2,1)\}$.

Тогда Пр$_1$ $M = \{a, 1, x\}$; Пр$_{2,3}M = \{(b, \mathrm{c}),(2,1),(x, x)\}$.

Если $M = X \times Y$, то Пр$_1$ $M = X$; Пр$_2$ $M = Y$.

Если $Q \subseteq X \times Y$, то **Пр$_1$** $Q \subseteq X$; Пр$_2$ $Q \subseteq Y$.

2. Соответствия и отображение.

Соответствия. Пусть заданы два множества X и Y. Если каким-либо элементам $x \in X$ сопоставляются некоторые элементы $y \in Y$, образуя пары $(x, y) \subseteq X \times Y$, то говорят, что между множествами X и Y установлено соответствие. Чтобы задать соответствие, нужно указать множество X, множество Y и множество $Q \subseteq X \times Y$, определяющее закон, по которому осуществляется соответствие. Таким образом, соответствие q представляет собой упорядоченную тройку множеств $q = (X,Y,Q)$, где $Q \subseteq X \times Y$. Очевидно, что Пр$_1$ $Q \subseteq X$; Пр$_2$ $Q \subseteq Y$.

Множество X называется областью отправления соответствия.

Множество Y - областью прибытия соответствия.

Множество Q - графиком соответствия.

Пр$_1$ Q - областью определения соответствия.

Пр$_2$ Q - областью значений соответствия.

Пример 3.2: $X = \{\mathrm{x} : 0 \le \mathrm{x} \le 10\}$, $\mathrm{x} \in \mathrm{R}$, R - множество вещественных чисел; $Y = \{a,b,c,d,e\}$. Одним из возможных соответствий между элементами X и Y может быть $Q = \{(1,a),(5,a),(2,b),(5,d)\}$. Как видно из примера не обязательно, чтобы все элементы из X и из Y участвовали в соответствии. Кроме того, одному и тому же элементу из X могут соответствовать несколько элементов из Y, а один и тот же элемент из Y может сопоставляться с разными элементами из X**.**

Для каждого соответствия $q = (X,Y,Q)$, $Q \subseteq X \times Y$ можно построить обратное соответствие, которое определяется следующим образом: $q^{-1} = (Y,X,Q^{-1})$, где $Q^{-1} \subseteq X \times Y$.

Отображение. Если в некотором соответствии $q = (X,Y,Q)$, $Q \subseteq X \times Y$ область определения совпадает с областью отправления **Пр$_1$** $Q = X$;, то такое соответствие называется отображением. Отображение обозначают следующим образом: $\Gamma : X \to Y$, где $\Gamma \subseteq X \times Y$ - график отображения X в Y**.**

Множество тех элементов $y \in Y$**,** которые сопоставляются с каким-либо элементом $x \in X$ при отображении $\Gamma : X \to Y$, называется образом элемента ***x*** и обозначается Γx. Очевидно $\Gamma x \subseteq Y$.

Множество тех элементов $x \in X$, с которыми сопоставляется какой-либо элемент $y \in Y$, называется прообразом элемента $y : \Gamma^{-1} y \subseteq X$.

Пример 3.3: Пусть $X = \{1,2,3\}$; $Y = \{a,b,c,d,e\}$. Рассмотрим отображение X в Y, график которого имеет вид: $Г = \{(1,a),(1,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,d)\}$. Образами в этом отображении являются:

$Г_1 = \{a, b\}$ - образ элемента 1;

$Г_2 = \{c\}$ - образ элемента 2;

$Г_3 = \{a, b, d\}$ - образ элемента 3;

Прообразы: $Г^{-1}a = \{1,3\}$ - прообраз элемента a;

$Г^{-1}b = \{1,3\}$ - прообраз элемента b;

$Г^{-1}c = \{2\}$ - прообраз элемента c;

$Г^{-1}d = \{3\}$ - прообраз элемента d;

$Г^{-1}e = \varnothing$ - прообраз элемента e.

Однозначное отображение или отображение, при котором образ каждого элемента есть одноэлементное множество, называется функцией. Для функции принято обозначение $f : X \to Y$. Значение **y** в любой из пар $(x, y) \in f$ называется функцией от данного x и записывается в виде $y = f(x)$. Символ f при определении функции используется в двух смыслах:

1) f является множеством, элементами которого являются пары (x, y), участвующие в соответствии;

2) $f(x)$ является образом x, т.е. $f(x) = y$.

Однозначное отображение (функция), при котором прообраз каждого элемента также есть одноэлементное множество, называется взаимно однозначным, или инъекцией.

Если в функции область прибытия совпадает с областью значений, то она называется сюрьективной или сюрьекцией.

Сюрьективная инъекция называется биекцией. Таким образом, биекция есть взаимно однозначное отображение, в котором участвуют все элементы одного множества и все элементы другого множества.

Если в соответствии рассматривается множество функций с одной стороны и множество чисел с другой стороны, то оно называется ***функционалом***. Например,

$$J(x)=\int_a^b f(x)dx \tag{3.1}$$

Соответствие, установленное между двумя множествами, элементами которых являются функции, называется оператором. Например,

$f'(x)=\dfrac{df(x)}{d(x)}$ - оператор дифференцирования.

3. Отношения и её свойства. Виды отношения.

Отношения. Некоторые отображения, заданные между элементами одного и того же множества, называются отношениями. Для задания отношения нужно указать множество X**,** между элементами которого вводится отношение, и закон, по которому один элемент из X сопоставляется с другим. Например, отношение X,Γ, где $\Gamma\subseteq X^2$.

Пусть $y\in X$ есть образ элемента $x\in X$ при задании отношения (X,Γ). Тогда говорят, что элемент y находится в отношении Γ к элементу x, и записывают это в виде $y\Gamma$x.

Отношения характеризуются определенными свойствами. Перечислим важнейшие из них.

1. Рефлексивность. Пусть задано некоторое отношение Γ на множестве X. Если любой элемент $x\in X$ находится в том же отношении к самому себе, то это свойство называется рефлексивностью. Его можно записать следующим образом: $x\Gamma x$ - истинно.

2. Антирефлексивность. Это свойство выражается следующим образом: $x\Gamma x$ - ложно.

3. Симметричность. Это свойство заключается в том, что при рассмотрении двух элементов, связанных некоторым отношением, обладающих свойством симметричности, неважно, какой элемент рассматривать первым, а какой вторым, т.е. $x\Gamma y \to y\Gamma x$.

4. Антисмметричность. Это свойство заключается в следующем. Если два элемента ***x*** и ***y*** находятся в отношении, обладающим этим свойством, причем $x\Gamma y$ **-** истинно и $y\Gamma x$ - истинно, то из этого обязательно следует, что $x = y$ $x\Gamma y$ *и* $y\Gamma x \to x = y$.

5. Несимметричность. Это свойство определяется следующим образом. Если $x\Gamma y$ - истинно, то $y\Gamma x$ - ложно и наоборот.

6. Транзитивность. Свойство транзитивности означает, что если два элемента находятся в некотором отношении с этим свойством с третьим элементом, то это же отношение существует и между ними. В общем виде это свойство записывается следующим образом: $x\Gamma y$ и $y\Gamma \mathrm{z} \to x\Gamma \mathrm{z}$.

Виды отношений. В зависимости от того, какими свойствами обладают отношения, их делят на виды.

1. Отношение эквивалентности. Отношением эквивалентности называется такое отношение, которое обладает следующими свойствами: *рефлективность, симметричность, транзитивность.*

Отношение эквивалентности тесно связано с операцией разбиения множества на систему подмножеств. При этом каждое подмножество состоит из элементов в чем то подобных, эквивалентных друг другу, обладающих каким-либо общим свойством.

Пример: отношение “быть на одном курсе” на множестве студентов факультета; отношение равенства на множестве чисел; отношение подобия на множестве треугольников и т.д.

2. Отношение толерантности. Отношение толерантности удовлетворяет свойствам *рефлективности* и *симметричности*. В отличие от эквивалентности толерантность не обладает свойством транзитивности. Эквивалентность можно рассматривать как частный случай толерантности.

Пример: на множестве кортежей одинаковой длины толерантность можно задать различными способами, например, наличием в паре кортежей хотя бы одной общей компоненты.

3. Отношение нестрогого порядка. Это отношение обладает следующими свойствами: *рефлексивность, антисимметричность, транзитивность.*

Примеры: отношение “больше или равно” или “меньше или равно” на множестве чисел; отношение нестрогого включения на множествах; отношение “произойти не позже” или “произойти не раньше” на множестве состояний динамической системы.

4. Отношение строгого порядка. Это отношение определяется следующими свойствами: *антирефлексивность, несимметричность, транзитивность.*

Примеры: отношение “больше” или “меньше” на множестве чисел; отношение строгого порядка на множествах; отношение “произойти раньше” или “произойти позже” на множестве состояний динамической системы и т.п.

Оба отношения - нестрогого порядка и строгого порядка - определяют некоторый порядок расположения элементов множества. Множество, на котором определено отношение порядка, называют упорядоченным. Множество совершенно (линейно, просто) упорядочено, если для любых двух его элементов имеет место $x\Gamma y$ или $y\Gamma x$ (Γ - отношение порядка). В общем случае может оказаться, что для некоторых пар (x, y) ни одно из соотношений $x < y$ и $y < x$ не имеет места (такие элементы называют несравнимыми). Тогда говорят, что множество частично упорядочено. Примером частичного порядка является отношение нестрогого включения на множестве подмножеств некоторого множества. Среди всех подмножеств одного и того же множества имеются такие, что ни одно из соотношений $X \subseteq Y$ *и* $Y \subseteq X$ для них не имеет места.

5. Отношение доминирования. Это отношение определяется следующими свойствами: *антирефлексивность, несимметричность.*

Например: на множестве спортивных команд отношение “выиграть матч”.

4. Понятие о функции.

Рассмотрим некоторое отображение

$$f : X \to Y \tag{3.2}$$

Это отображение называется ***функцией***, если оно является однозначным, т.е. если для любых пар $(x_1, y_1) \in f$ и $(x_2, y_2) \in f$ из $x_2 = x_1$ следует $y_2 = y_1$.

Из определения отображения и из приведенных ранее примеров следует, что элементами множеств X и Y могут быть объекты любой природы. Однако в задачах кибернетики большой интерес представляют отображения, которые являются однозначными и множество значений которых представляет собой множество вещественных чисел R. Однозначное отображение f, определяемое (3.1), называется функцией с вещественными значениями, если $Y \subseteq R$.

Понятие функции является чрезвычайно широким, и изучению отдельных классов функций посвящены многие математические дисциплины (алгебра, тригонометрия и т. п.). Мы рассмотрим только некоторые общие наиболее фундаментальные свойства функции, не касаясь свойств конкретных классов функций.

Пример 3.4: Из данного города в другой можно проехать по железной дороге, автобусом или самолетом. Стоимость билета будет соответственно 7, 9 и 12 сум. Стоимость билета в этом примере можно представить как функцию от вида транспорта. Для этого рассмотрим множества

$$X = \{ж.д., сам.\}; \; Y = \{7,9,12\}.$$

Функция $f : X \to Y$, получаемая из условий примера, может быть записана в виде множества $f = \{ж.д.,7\}, \; (авт., \; 9),(сам., 12)\}$.

Значение y в любой из пар $(x,y)\in f$ называется функцией от данного x, что записывается в виде $y=f(x)$. Такая запись позволяет вести следующее формальное определение функции:

$$f=\{(x,y)\in X\times Y \mid y=f(x)\} \qquad (3.3)$$

Таким образом, символ f используется при определении функции в двух смыслах:

1) f является множеством, элементами которого являются пары (x,y), участвующие в соответствии;

2) $f(x)$ является обозначением для $y\in Y$, соответствующего данному $x\in X$.

Формальное определение функции в виде соотношения (3.3) позволяет установить способы задания функции.

1. Перечисление всех пар (x,y), составляющих множество f**,** как это было сделано в примере 3.4. Такой способ задания функции применим, если X является конечным множеством. Для большей наглядности пары (x,y) удобно располагать в виде таблицы.

2. Во многих случаях как X, так и Y представляют собой множества вещественных или комплексных чисел. В таких случаях очень часто под $f(x)$ понимается формула, т. е. выражение, содержащее перечень математических операций (сложение, вычитание, деление, логарифмирование и т. п.), которые нужно произвести над $x\in X$, чтобы получить $\boldsymbol{y}$.

Пример 3.5. Пусть $X=Y=R$ и $f=\{(x,y)\in R^2 \mid y=x^2\}$. Тогда $f(x)=x^2$.

Иногда для разных подмножеств множества X функции приходится пользоваться различными формулами. Пусть $A_1,\ldots,A_n$ - попарно непересекающиеся подмножества X. Обозначим через $f_i(x), i=\overline{1,n}$ формулу, определяющую $\boldsymbol{y}$ при $x\in A_i$. Тогда функция $f(x)$ будет определяться выражением

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x)\ при\ x\in A_1; \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ f_n(x)\ при\ x\in A_n \end{cases} \qquad (3.4)$$

Так функцию $y=f(x)=|x|$ можно задать в виде

$$y=\begin{cases} x\,при\ x\ge 0; \\ -x\,при\ x<0. \end{cases}$$

3. Если X и Y множества вещественных чисел, то элементы $(x,y)\in f$ можно изобразить в виде точек на плоскости R^2. Полная совокупность таких точек будет представлять собой *график* функции $f(x)$.

Если в выражении (3.2) $X=U\times V$ то приходим к функции от двух переменных u и v, обозначаемой через $f(u,v)$, где $u\in U$ и $v\in V$. Формальное определение функции двух вещественных переменных будет следующим:

$$f=\{(u,v,y)\in U\times V\times Y|y=f(u,v)\} \qquad (3.5)$$

Аналогично определяются функции от трех и большего числа переменных.

Свяжем с функцией еще одно понятие, называемое *сужением функции*. Пусть $f:X\to Y$ - произвольная функция и A — произвольное множество. Сужением функции f на множество A называется функция f_A, содержащая все те и только те пары $(x,y)\in f$, в которых $x\in A$, а значит, $(x,y)\in A\times Y$. Следовательно

$$f_A=f\cap(A\times Y) \qquad (3.5)$$

Операцию сужения функции часто используют для табличного задания функций с бесконечной областью определения X. В качестве множества A берут обычно выборку равноотносящих значений x множества X. Получаемое при этом сужение f_A функции f уже легко представить в виде таблицы. По этому принципу построены таблицы логарифмов, тригонометрических функций и некоторые другие.

Контрольные вопросы

1. Что называется кортежем или упорядоченным множеством?
2. Как выполняется прямое произведение в множествах?
3. Что называется соответствий?
4. Что называется отображений?
5. Какие свойства имеют отношение?
6. Приведите пример на виды отношения.
7. Что такое функция?
8. Как обозначается проекция во множествах?
9. Что называется функционалом?
10. С каким операциям в множествах связано отношение эквивалентности?

Лекция № 4

Основные понятие теории графов. Элементы теории графов. Способы задания графов.

1. Основные определения и элементы теории графов.

2. Способы задания графов.

Ключевые слова: граф, вершина, ребра, дуга, ориентированный, неориентированный, смежный, изолированный, нуль-граф, степень вершины, цепь, цикл, изоморф, эйлерова граф, эйлерова цикл, связный граф, несвязный граф, ранг графа, элементарный цикл.

1. Основные определения и элементы теории графов.

Графом $G(X,U)$ называется упорядоченная пара множеств: X и $U \subseteq X^2$. Элементы множества X называются ***вершинами*** графа, элементы множества U, представляющие собой пары $(x_i, y_j) \in U$ называются ***ребрами*** графа, либо, если пары упорядочены $(x_i, y_j) \in U$**,** то они называются ***дугами***.

Если указывается направление, то линии называются дугами, а граф называется ***ориентированным*** или ***направленным***.

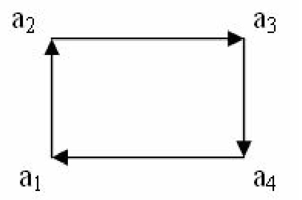


Рис. 4. Ориентированный граф

Если направление не указывается, то линии называются ***ребрами***, а граф - ***неориентированным*** (ненаправленным).

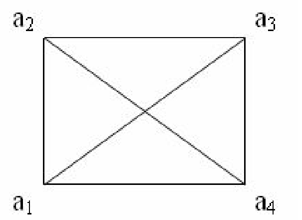


Рис. 5. Неориентированный граф

В неориентированном графе для любых двух вершин $x_i, y_j \in X$ справедливо $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$.

Две вершины $x_i, y_j \in X$ называются ***смежными***, если они определяют ребро (дугу).

Два различных ребра (дуги) называются ***смежными,*** если они имеют общую вершину.

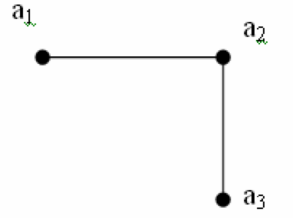


Рис. 6. Смежные ребра

Вершина x_i инцидента ребру (дуге) U_j, если она является началом или концом ребра (дуги). Аналогично ребро (дуга) U_j инцидентно вершине x_j, если оно входит или выходит из этой вершины.

Вершину, неинцидентную никакому ребру (дуге), называют ***изолированной***. Граф, состоящий только из изолированных вершин, называют ***нуль-графом*** и обозначают G_0.

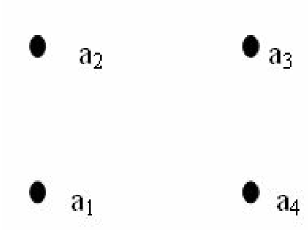


Рис. 7. Нуль-граф

Число ребер (дуг) инцидентных некоторой вершине x_j, называются ***степенью вершины*** и обозначают $p(x_j)$.

Пример 4.1: Определить входные и выходные степени, которое показано на рисунке 10.

$Гx_3 = \{x_1, x_3, x_4\}$

$\rho^-(x_3) = 3$

$\rho^+(x_3) = 2$

$\rho(x_3) = 3 + 2 = 5$

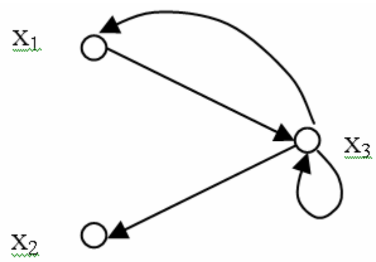


Рис. 8. Ориентированный граф для примера 4.1.

Граф называют однородным степени t, если степени всех его вершин равны t.

Граф, в котором, перемещаясь по ребру (дугам) из вершины в вершину, можно попасть в каждую вершину, называют ***связным***. Граф, состоящий из отдельных фрагментов, называют ***несвязным***, состоящим из отдельных компонентов связности.

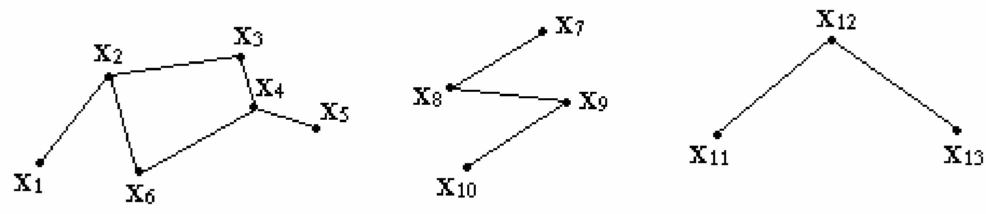


Рис. 9. Несвязный граф

Число, равное разности между числом вершин графа n и числом компонент связности P, называют ***рангом графа*** $R(G) = n - P$. На рис.9 $n = 13$, $P = 3$, $R(G) = 10$.

При изображении графа в виде геометрической фигуры допускается произвольное расположение вершин и ребер графа, т.е. один и тот же граф может иметь различную геометрическую реализацию. Два графа называются ***изоморфными***, если они имеют одинаковое число вершин и если каждой паре вершин, соединенных ребром (дугой), в одном графе соответствует такая же пара вершин, соединенных ребром (дугой), в другом графе. На рис.10 показан пример изоморфных графов.

Последовательность ребер, получаемая при переходе от одной вершины графа к другой, называют ***цепью***.

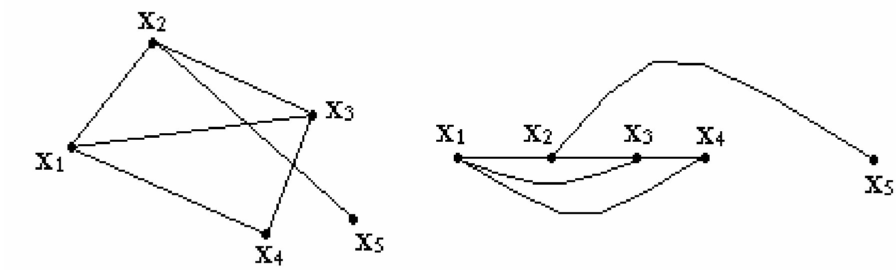


Рис. 10. Пример изоморфных графов

Замкнутая цепь называется ***циклом***. Причем каждое ребро цикла может войти в цикл не более одного раза. Цикл считают ***простым***, если в нем нет повторяющихся вершин, и ***сложным***, если такие имеются. Цикл называют ***элементарным***, если он не содержит в себе никаких других циклов.

Эйлеров цикл - это цикл, в котором содержатся все ребра графа. Граф, имеющий такой цикл, называют ***эйлеровым графом***. Достаточным условием наличия в конечном связном графе ***эйлерова цикла*** является четность степеней всех его вершин.

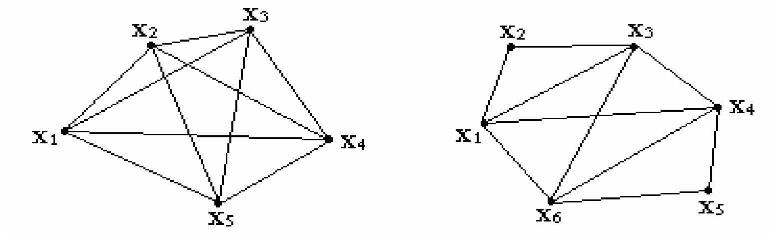


Рис. 11. Примеры эйлеровых графов

Гамильгонов цикл - это цикл, который содержит все вершины графа, причем каждая вершина входит в цикл один раз. На рис.12 приведены примеры гамильтоновых графов, т.е. графов, содержащих гамильтоновы циклы

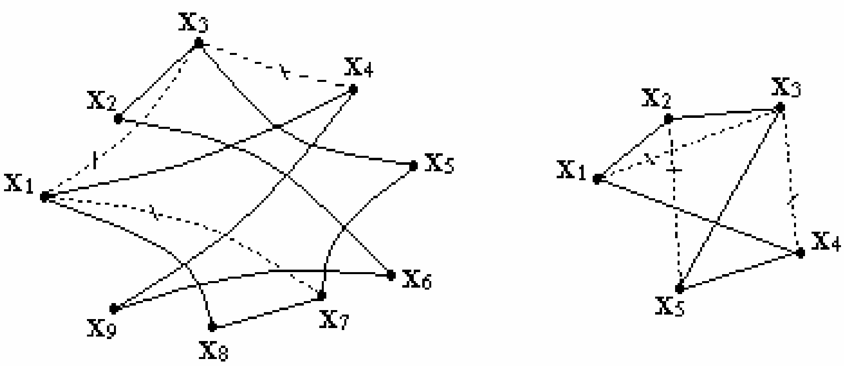


Рис. 12. Примеры гамильтоновых графов

2. Способы задания графов

Граф определяет некоторое отношение между элементами множества. Их можно изображать различными способами:

1. Геометрически граф можно представить в виде множества точек $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и множества линий, соединяющих эти точки. Точки представляют собой вершины графа, а линии, их соединяющие - ребра или дуги.

Пример:

$\Gamma : X \to X = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_4, x_8), (x_{4,}, x_9), (x_{5,}, x_2), (x_{5,}, x_6),$
$(x_{7,}, x_1), (x_{7,}, x_5), (x_8, x_9), (x_{9,}, x_8)\}$

2. Геометрический способ.

Граф определяет некоторое отношение между элементами множества **X**. То, что элемент $x_i \in X$ находятся в отношении Γ_{ij} к элементу $x_i \in X$**,** отображается на графе соединением элементов x_i **и** x_j линией (дугой или ребром).

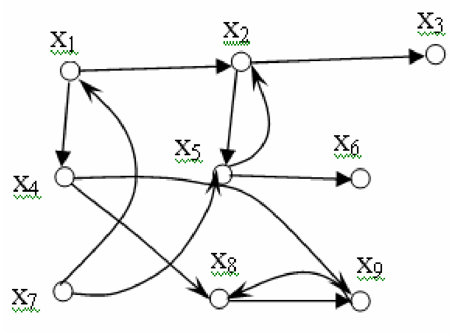


Рис. 13. Геометрическое изображение графа

3. Аналитический способ.

Аналитически любой ориентированный граф описывается системой алгебраических уравнений и наоборот, любая система алгебраических уравнений может быть представлена в виде направленного графа. Например, граф на рис. 8. определяет следующую систему уравнений:

$x_1 = \Gamma_{71} * x_7$

$x_2 = \Gamma_{12} * x_1 + \Gamma_{52} * x_5$

$x_3 = \Gamma_{23} * x_2$

$x_4 = \Gamma_{14} * x_1$

$x_5 = \Gamma_{25} * x_2 + \Gamma_{72} * x_7$

$x_6 = \Gamma_{56} * x_5$

$x_7 = \Gamma_{x7} = \varnothing$

$x_8 = \Gamma_{48} * x_4 + \Gamma_{98} * x_9$

$x_9 = \Gamma_{49} * x_9 + \Gamma_{89} * x_8$

Пример 4.2:

$x_1=\Gamma_{71}x_7$; $x_4=\Gamma_{14}x_1+\Gamma_{24}x_2$; $x_8=\Gamma_{78}x_7+\Gamma_{48}x_4+\Gamma_{98}x_9$;

$x_2=\Gamma_{12}x_1+\Gamma_{52}x_5$; $x_5=\Gamma_{85}x_8+\Gamma_{25}x_2$; $x_9=\Gamma_{89}x_8$.

$x_3=\Gamma_{23}x_2$; $x_6=\Gamma_{56}x_5+\Gamma_{96}x_9$;

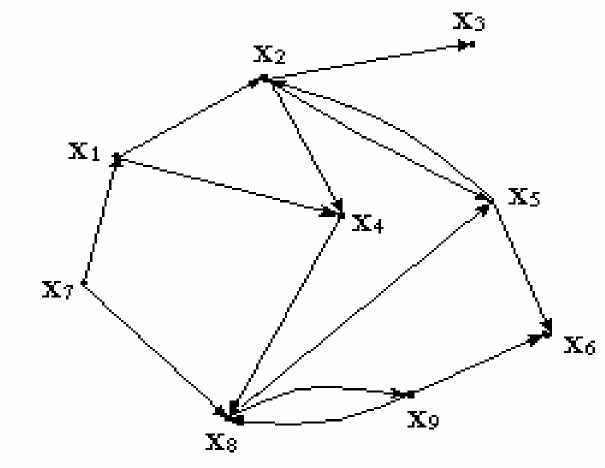


Рис. 14. Ориентированный граф для примера 4.2.

Контрольные вопросы

1. Что называется графом?
2. Когда называется граф ориентированным?
3. Объясните понятие ребра, вершина и дуга.
4. Когда вершины называется смежными?
5. Какой граф называется нуль-графом?
6. Как отличается друг от друга связные и несвязные графы?
7. Объясните разницу между эйлеровыми и гамильтоновыми циклами?
8. Как представляется граф в виде множества?
9. Как описывается граф с помощи алгебраических уравнений?
10. Постройте граф геометрическим способом по основе аналитических данных:

$$\Gamma : X \to X = \{(x_1, x_3), (x_1, x_5), (x_2, x_1), (x_2, x_4), (x_4, x_5), (x_{4,}, x_9), (x_{5,}, x_3), (x_{5,}, x_6),$$
$$(x_{6,}, x_1), (x_{7,}, x_5), (x_8, x_7), (x_{9,}, x_8)\}$$

Лекция 5

Пути и контуры графа. Способы задание графов в матричном виде.

1. Пути и контуры графа.

2. Структурное преобразование графа.

3. Способы задание графов в матричном виде.

Ключевые слова: путь, контур, матрица инцидентности, матрица смежности, матрица длины, петля, список ребер.

1. Пути и контуры графа

Путем в графе G называется такая последовательность дуг $\mu = (u_1,...,u_k)$, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом последующей. Путь μ, последовательными вершинами которого являются, вершины $a,b,...,m$ обозначается через $\mu = (a,b,...,m)$.

Длиной пути $\mu = (u_1,...,u_k)$ называется число $l(\mu) = k$, равное числу дуг, составляющих путь μ. Путь может быт бесконечным и конечным. В случае бесконечного пути полагаем $l(\mu) = \infty$.

Путь, в котором никакая дуга не встречается дважды, называется ***простым***.

Путь, в котором никакая вершина не встречается дважды, называется ***элементарным***.

Контур – это конечный путь $\mu = (x_1,...,x_k)$, у которого начальная вершина x_1 совпадает с конечной x_k.

При этом контур называется ***элементарным***, если все его вершины различны (за исключением начальной и конечной которые совпадают).

Контур единичной длины, образованной дугой вида называется (a,a) ***петлей***. Так как на рисунке 15 (e,d,c,b) - путь, (c,e,d,c) - контур, (d,d) - петля.

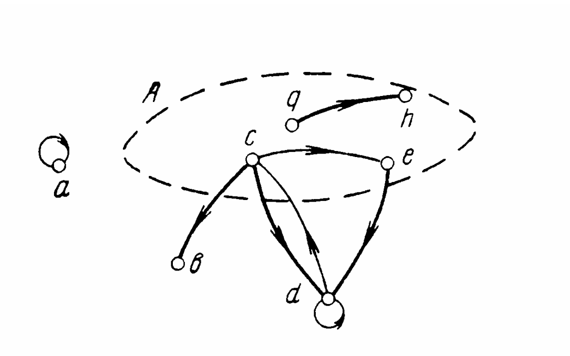


Рис. 15. Общий вид графа

2. Структурное преобразование графа.

Когда мы решаем задачи по основе графов иногда от нас требуется структурное преобразование графов. Эти операции осуществляется следующим образом:

Сложение

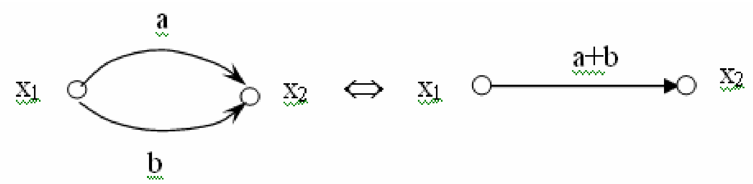


Рис.16. Сложение графов

Умножение

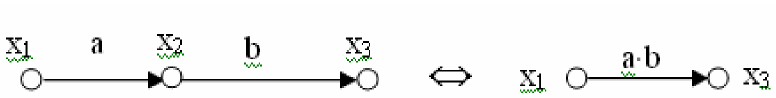
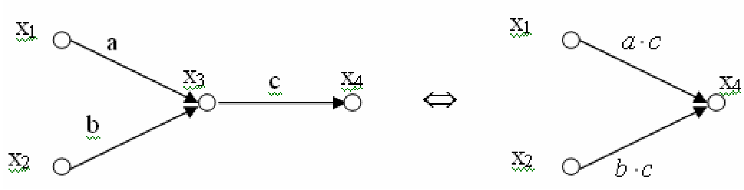


Рис.17. Умножение графов.

Разделить по противоположному направлению



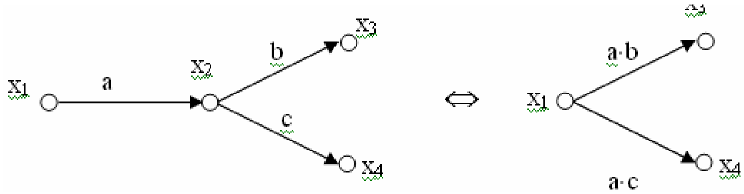


Рис.18. Разделение по противоположному направлению.

Создавать петли

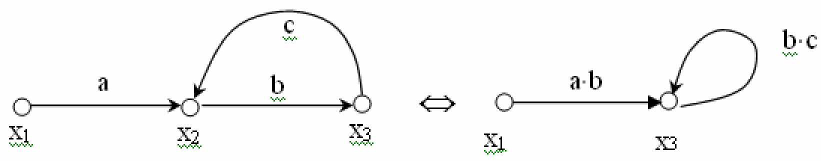


Рис. 19. Создавать петли.

Удалить петли

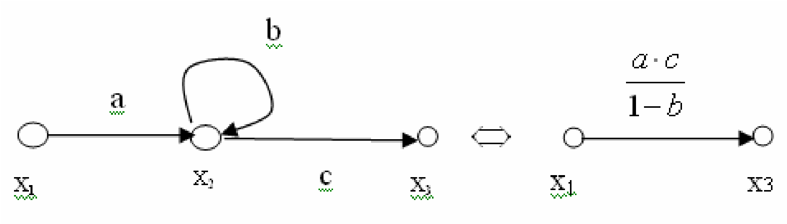


Рис. 20. Удалить петли.

3. Способы задание графов в матричном виде.

Список ребер (дуг) графа. В списке указываются все смежные вершины графа. Список удобно представлять в форме таблицы, в которой отмечаются парами смежные вершины. Причем, если граф ориентированный, то в каждой паре на первом месте указывается номер вершины, из которой дуга выходит, а на втором месте номер вершины, в которую дуга входит. Если в графе есть изолированные вершины, то они должны быть указаны отдельно. На рис.21 приведен список дуг графа, изображенного графически на рис.14)

1	1	2	2	2	4	5	5	7	7	8	8	9	9
2	4	3	4	5	8	2	6	1	8	5	9	6	8

Рис.21. Задание графа таблицей

Различают несколько видов матриц графа:

Матрица инцидентности. Пусть граф Γ неориентированный и конечный. Скажем, что $a_1,...,a_n$ ребра графа Γ. Тогда, $\|A_{ij}\|(i=1,m, j=1,n)$ матрица инцидентности будет иметь m строки и n столбца. Столбца матрицы A_{ij} соответственно вставляется узлы Γ графа, а строкам матрицы вставляется ребра Γ графа. Тогда, правила имеет следующий вид:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если } e_i \textit{ ребро инцидентно } a_j \textit{ вершины} \\ 0, \textit{иначе.} \end{cases} \tag{5.1}$$

Используя правила (5.1) создаём матрица инцидентности для неориентированного графа.

Пример-5.1: Пусть граф Γ (Рис.22) неориентированный. Постройте матрицы инцидентности:

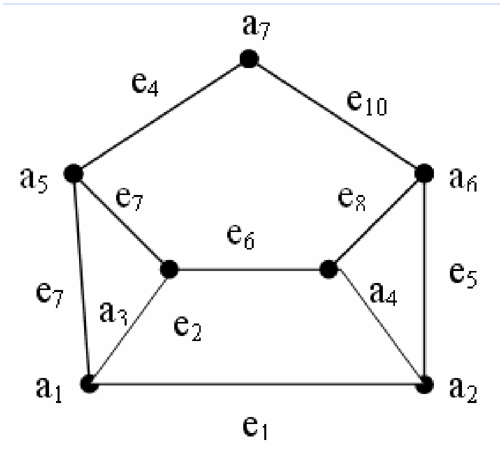


Рис.22. Неориентированный граф

Таблица 5.1

Таблица матрице инцидентности для неориентированного графа, показанного на рисунке 22.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
e_1	1	1	0	0	0	0	0
e_2	1	0	1	0	0	0	0
e_3	0	1	0	1	0	0	0
e_4	1	0	0	0	1	0	0
e_5	0	1	0	0	0	1	0

e_6	0	0	1	1	0	0	0
e_7	0	0	1	0	1	0	0
e_8	0	0	0	1	0	1	0
e_9	0	0	0	0	1	0	1
e_{10}	0	0	0	0	0	1	1

Если граф Γ ориентированный, тогда правила создания матрицы инцидентности имеет следующий вид:

$$A_{ij} = \begin{cases} -1, \ \textit{если } a_j \textit{ вершина является началой } e_i \textit{ ребра.} \\ 1, \ \textit{если } a_j \textit{ вершина конец } e_i \textit{ ребра.} \\ 0, \ \textit{если } a_j \textit{ вершина не инцидентно } e_i \textit{ ребра} \\ 2, \textit{если вершина является петлей и она инцидентна на } e_i \textit{ребра.} \end{cases} \tag{5.2}$$

Используя правила (5.2) создаём матрица инцидентности для ориентированного графа.

Пример-5.2: Пусть граф Γ (Рис.23.) ориентированный. Постройте матрицы инцидентности для ориентированного графа.

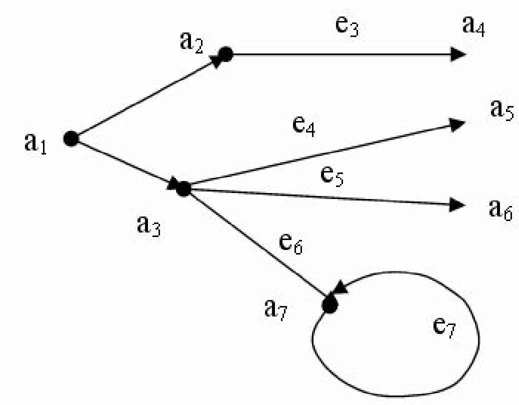


Рис. 23. Ориентированный граф.

Таблица 5.2

Таблица матрице инцидентности для ориентированного графа, показанного на рисунке 23.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
e_1	-1	1	1	0	0	0	0
e_2	-1	0	0	0	0	0	0

e_3	0	-1	0	-1	0	0	0
e_4	0	0	-1	0	1	0	0
e_5	0	0	-1	0	0	1	0
e_6	0	0	-1	1	0	0	1
e_7	0	0	0	0	0	0	2

Матрица смежности. Предполагаем, пусть граф Γ неориентированный. При создании матрице смежности графа соотносительно вставляется вершины графа по столбцам и по строкам A_{ij}. Тогда, правила имеет следующий вид:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если } a_i \textit{ и } a_j \textit{ вершины смежные} \\ 0, \textit{иначе.} \end{cases} \qquad (5.3)$$

Пример-5.3. Используя правила (5.3) создавайте матрица смежности для неориентированного графа, которого показано на рис.22.

Таблица 5.3

Таблица матрице смежности для неориентированного графа, показанного на рисунке 22.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	0	1	1	0	1	0	0
a_2	1	0	0	1	0	1	0
a_3	1	0	0	1	1	0	0
a_4	0	1	1	0	0	1	0
a_5	1	0	1	0	0	0	1
a_6	0	1	0	1	0	0	1
a_7	0	0	0	0	1	1	0

Пусть граф Γ ориентированный. Тогда, при создании матрице смежности вставляется вершины графа соотносительно по столбцам и по строкам A_{ij}. Тогда, правила имеет следующий вид:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } a_i \text{ вершина является началой } a_j \text{ вершины.} \\ 0, \text{если } a_i \text{ вершина несмежно на } a_j \text{ вершину и } a_l \\ \text{вершина является концой } a_j \text{ вершины.} \end{cases} \quad (5.4)$$

Пример-5.4. Используя правила (5.4) создавайте матрица смежности для неориентированного графа, которого показано на рис.23.

Таблица 5.4.

Таблица матрице смежности для ориентированного графа, показанного на рисунке 23.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	0	1	1	0	0	0	0
a_2	0	0	0	1	0	0	0
a_3	0	0	0	0	1	1	1
a_4	0	0	0	0	0	0	0
a_5	0	0	0	0	0	0	0
a_6	0	0	0	0	0	0	0
a_7	0	0	0	0	0	0	1

Контрольные вопросы

1. Что называется путем?
2. Как обозначается контуры?
3. Когда является контур элементарным?
4. Что называется петлей?
5. Какие структурные преобразовании можно осуществлять над графами?

6. Объясните правила создание матрице инцидентности для ориентированного и неориентированного графа?

7. Как создаётся матрица смежности для неориентированного графа?

8. Что указывается список ребер графа?

Лекция 6
Найти передаточную функцию 2х узлов у графов

1. **Операции над графами.**
2. **Найти передаточную функцию 2х узлов у графов. Формула Мезона.**

Ключевые слова: объединение графов, пересечение графов, вычитание графов, передаточная функция, формула Мезона, элементарные пути, элементарные контуры, вершина.

1. Операции над графами.

Объединение графов. Пусть заданы два графа $G_1(X_1,\Gamma_1)$ и $G_2(X_2,\Gamma_2)$. Объединение этих двух графов $G\ (X,\Gamma)$ определяется следующим образом:

$$G(X,\Gamma)=G_1(X_1,\Gamma_1)\cup G_2(X_2,\Gamma_2),\ \text{при этом}$$

$$X=X_1\cup X_2,\ \forall x_i\in X\left[\Gamma x_i=\Gamma_1 x_i\cup\Gamma_2 x_i\right]$$

т.е. отображение для каждой вершины графа $G\ (X,\Gamma)$ равно объединению отображений этой вершины для исходных графов. На рис. 24 показан пример объединения двух графов, где

$$X=X_1\cup X_2=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\};$$

$$\Gamma x_1=\Gamma_1 x_1\cup\Gamma_2 x_1=\{x_2,x_5,x_3,x_7\},$$

$$\Gamma x_2=\Gamma_1 x_2\cup\Gamma_2 x_2=\{x_1,x_3,x_5\}\ \text{и т.д.}$$

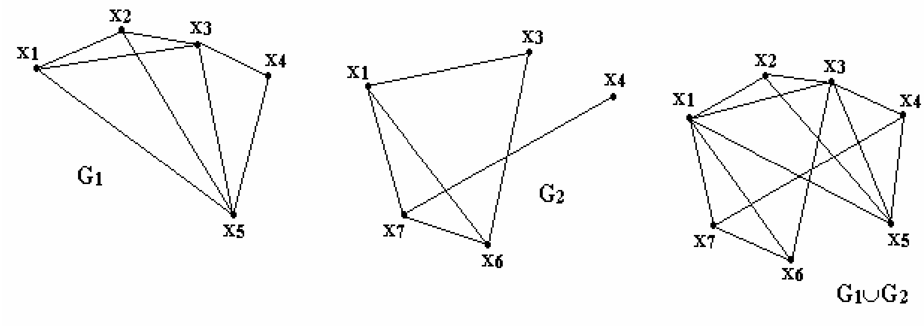


Рис. 24. Объединение графов

Пересечение графов. $G(X,\Gamma) = G_1(X_1,\Gamma_1) \cap G_2(X_2,\Gamma_2)$. Вершинами графа $G\,(X,\Gamma)$ является пересечение вершин исходных графов: $X = X_1 \cap X_2$. Отображение для каждой вершины графа $G\,(X,\Gamma)$ получается в результате пересечения отображений этой вершины для исходных графов: $\forall x_i \in X[\Gamma x_i = \Gamma_1 x_i \cap \Gamma_2 x_i]$ (см. рис. 25).

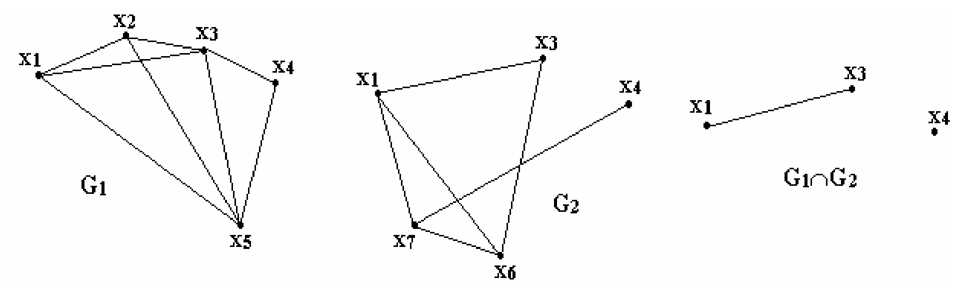


Рис. 25. Пересечение графов

$$X = X_1 \cap X_2 = \{x_1, x_3, x_4\},$$

$$\Gamma x_1 = \Gamma_1 x_1 \cap \Gamma_2 x_1 = \{x_3\} \text{ и т.д.}$$

Вычитание графов. $G(X,\Gamma) = G_1(X_1,\Gamma_1) \setminus G_2(X_2,\Gamma_2)$. Вершинами графа $G\,(X,\Gamma)$ является вершины графа $G_1(X_1,\Gamma_1)$, за исключением вершин, общих для исходных графов: $X = X_1 \setminus X_2$.

Отображение для каждой вершины графа $G\,(X,\Gamma)$ является пересечение множества вершин этого графа и отображения той же вершины в графе $G_1(X_1,\Gamma_1)$:

$$\forall x_i \in X\left[\Gamma x_i = X \cap \Gamma_1 x_i\right].$$

В примере на рис. 26. $X = X_1 \setminus X_2 = \{x_2, x_5\}$; $\Gamma x_2 = X \cap \Gamma_1 x_2 = \{x_5\}$ и т.д.

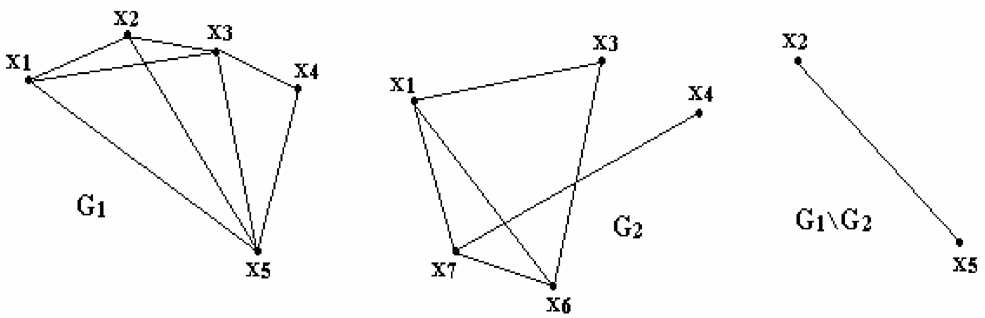


Рис. 26. Вычитание графов

2. Найти передаточную функцию 2х узлов у графов. Формула Мезона.

Формула Мезона служит для определения передачи, связывающей произвольную входную вершину с произвольно выбранной выходной вершиной. Эта формула описывается следующим образом:

$$W_{i,j} = \frac{\left\{\left(P_1^{ij} + P_2^{ij} + \ldots + P_n^{ij}\right) \cdot \left[(1-L_1)(1-L_2)\ldots(1-L_m)\right]^{*1}\right\}^{*2}}{\left[(1-L_1)\cdot(1-L_2)\ldots(1-L_m)\right]^{*2}} \tag{6.1}$$

Здесь:

W_{ij} – искомые передачи от вершины i к вершине j;

P_n^{ij} – сумма передач всех путей с i- вершины до j-вершин;

n – количество путей;

m – количество контуров;

L_m - сумма передач всех контуров между i и j вершин;

***1** – означает, что после раскрытия скобок необходимо отбросить слагаемые, содержащие произведения касающихся контуров. Два контура или контур с путем считаются касающимися, если они содержат хотя бы одну общую вершину;

***2** – означает, что после подстановки выражения для определителя графа и раскрытия скобок в полученном выражении необходимо отбросить слагаемые, содержащие произведения касающихся путей с контурами.

Напоминание: В формуле Мезона учитывается только элементарные пути и контуры.

Пример 6.1:Найдите передаточную функцию между вершинами x_1 и x_6 показано на рисунке 27.

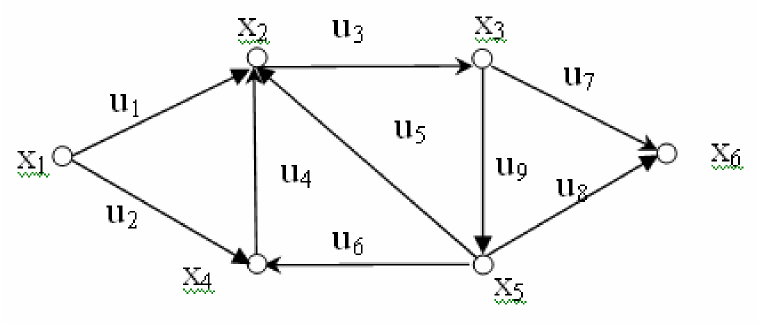


Рис.27. Граф для примера 6.1.

Решение:

Пути: 1) $P_1 = (x_1, x_2, x_3, x_6) = u_1 \cdot u_3 \cdot u_7$

2) $P_2 = (x_1, x_4, x_2, x_3, x_6) = u_2 \cdot u_4 \cdot u_3 \cdot u_7$

3) $P_3 = (x_1, x_4, x_2, x_3, x_5, x_6) = u_2 \cdot u_4 \cdot u_3 \cdot u_9 \cdot u_8$

4) $P_4 = (x_1, x_2, x_3, x_5, x_6) = u_1 \cdot u_3 \cdot u_9 \cdot u_8$

Контуры: 1) $L_1 = (x_2, x_3, x_5) = u_3 \cdot u_9 \cdot u_5$

2) $L_2 = (x_2, x_3, x_5, x_4) = u_3 \cdot u_9 \cdot u_6 \cdot u_4$

$$W_{x_1,x_6} = \frac{\left\{(P_1+P_2+P_3+P_4)\cdot\left[(1-L_1)\cdot(1-L_2)\right]^{*1}\right\}^{*2}}{\left[(1-L_1)\cdot(1-L_2)\right]^{*2}} = \frac{\left\{(P_1+P_2+P_3+P_4)\cdot\left[1-L_2-L_1+L_1\cdot L_2\right]^{*1}\right\}^{*2}}{\left[1-L_2-L_1+L_1\cdot L_2\right]^{*2}} =$$

$$= \frac{\left\{(P_1+P_2+P_3+P_4)\cdot(1-L_1-L_2)\right\}^{*}}{1-L_1-L_2} =$$

$$= \frac{P_1 - P_1L_1 - P_1L_2 + P_2 + P_2L_1 - P_2L_2 + P_3 - P_3L_1 - P_3L_2 + P_4 - P_4L_1 - P_4L_2}{1-L_1-L_2} =$$

$$= \frac{P_1+P_2+P_3+P_4}{1-L_1-L_2} = \frac{u_1 \cdot u_3 \cdot u_7 + u_2 \cdot u_4 \cdot u_3 \cdot u_7 + u_2 \cdot u_4 \cdot u_3 \cdot u_9 \cdot u_8 + u_1 \cdot u_3 \cdot u_9 \cdot u_8}{1 - u_3 \cdot u_9 \cdot u_5 - u_3 \cdot u_9 \cdot u_6 \cdot u_4}$$

***Пример 6.2*:** Найдите передаточную функцию системы (рис.28) с помощи формуле Мезона.

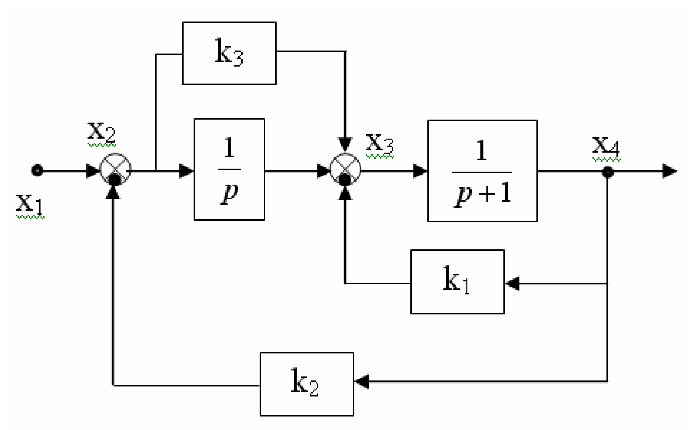


Рис.28. Структурная схема системы.

Чтобы найти передаточную функцию системы, сперва будем изобразить её как граф следующим образом:

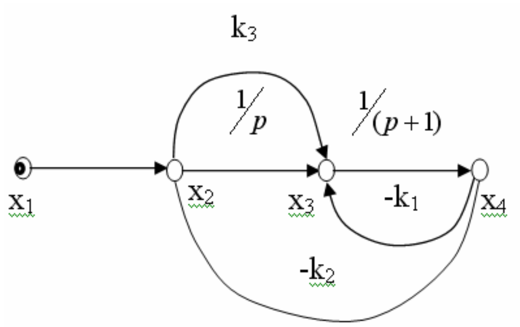


Рис.29. Графовый вид системы.

Решение задачи*:*

Пути: $p_1 = 1 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)}$ $\quad P_2 = 1 \cdot k_3 \cdot \frac{1}{p+1} = \frac{k_3}{p+1}$

Контуры: $L_1 = -\frac{-k_2}{p(p+1)}$ $\quad L_2 = -\frac{-k_1}{p+1}$ $\quad L_3 = -\frac{-k_2 \cdot k_3}{p+1}$

$$W_{x_1,x_4}=\frac{[(p_1+p_2)[(1-L_1)(1-L_2)(1-L_3)]^*]}{[(1-L_1)(1-L_2)(1-L_3)]^*}=$$

$$=\frac{[(p_1+p_2)[1-L_3-L_2+L_2\cdot L_3-L_1+L_1\cdot L_3-L_1\cdot L_2\cdot L_3]^*]}{[1-L_3-L_2-L_1+L_2\cdot L_3+L_1\cdot L_3-L_1\cdot L_2\cdot L_3]^*}=\frac{[(p_1+p_2)(1-L_3-L_2-L_1)]^*}{1-L_1-L_2-L_3}=$$

$$=\frac{p_1+p_2}{1-L_1-L_2-L_3}=\frac{\frac{1}{p(p+1)}+\frac{k_3}{p+1}}{\left(1+\frac{k_2}{p(p+1)}+\frac{k_1}{p+1}+\frac{k_2\cdot k_3}{p+1}\right)}=\frac{\frac{1+p\cdot k_3}{p(p+1)}}{\frac{p(p+1)+k_2+pk_1+p_2k_2\cdot k_3}{p(p+1)}}=$$

$$=\frac{1+p\cdot k_3}{p^2+p+k_2+pk_1+pk_2+pk_2\cdot k_3}$$

Контрольные вопросы

1. Как объединяется графы?
2. Каким образом выполняется пересечение и вычитание графов?
3. Как находятся передаточные функции между желаемых вершин графов?
4. Что означает значки *1 и *2 которое имеется в формуле?
5. Можно ли использовать в формуле Мезона любых видов контуров и путей?
6. Когда выбрасывается произведение контуров и путей?

Лекция 7
Найти кратчайшие пути в узлах графа. Алгоритм Дейкстры.

1. Постановка задачи.

2. Алгоритм решения задачи.

3. Найти кратчайший путь с помощи алгоритма Дейкстра.

Ключевые слова: кратчайшие пути, Алгоритм Дейкстри, вес ребра, постоянние метки, временные метки, дерево кратчайших путей.

1. Постановка задачи.

Графы даёт возможность рассматривание топологии системы. С помощью теория графов можно решить различные теоретические и практические задачи.

В практических приложениях имеет большое значение задача о нахождении кратчайшего пути между двумя вершинами. При этом нам даётся граф несколько вершинами и ребрами. Весы ребра описывается в виде матриц:

$$x = \left[x_{ij}\right], \quad i = \left[\overline{1, n}\right], \quad j = \left[\overline{1, n}\right]$$

В математике разработан ряд методов для решения подобных задач. Существует разные методы для решения задач о кратчайшем пути на графе. Сюда входить простой метод (рассмотрение всех путей), оптимизация по принципу Беллмана и алгоритм Дейкстры. Из них самым эффективным методом является алгоритм Дейкстры. Этот метод заключается в том, что вершинам графа присваиваются временные метки. В этом весы ребер должен удовлетворить $x_{ij} \geq 0$ условие, и все числи должны быть положительными.

2. Алгоритм решения задачи.

Алгоритм решения задачи. Будем использовать следующие обозначение:

1. Вершинам графа присваиваются временные метки, которые затем по определенным правилам заменяются на постоянные метки.

2. Начальная вершина графа имеет постоянную метку, а остальные имеет временную метку, тоист: $L(x) = 0, L(x_i) = \infty$.

Дальнейшем, используется следующие обозначение:

a) $L^*(x_i)$ - постоянная метка вершины x_i;

b) $L^н(x_i)$ - новая временная метка вершины x_i;

c) $L^c(x_i)$ - старая временная метка вершины;

d) R_{ij} - вес ребра, соединяющего вершины x_i и x_j.

3. Новая временная метка вычисляется по формуле:

$$L^н(x_j) = \min\left\{L^c(x_i), R_{ij} + L^*(x_i)\right\} \tag{7.1}$$

После этого из всех временных меток выбирается наименьшая, и она становится постоянной меткой. Действия продолжаются, пока не будут найдены постоянные метки для всех вершин графа. Результаты действий на каждом шаге будем заносить в таблицу. В предпоследний столбец заносим вершину, получившую постоянную метку, в последний столбец – величину этой метки (для данного шага).

3. Найти кратчайший путь с помощи алгоритма Дейкстра.

ЗАДАНИЕ 7.1. Найти кратчайшие пути в орграфе от первой вершины ко всем остальным, используя алгоритм Дейкстры. Постройте дерево кратчайших путей.

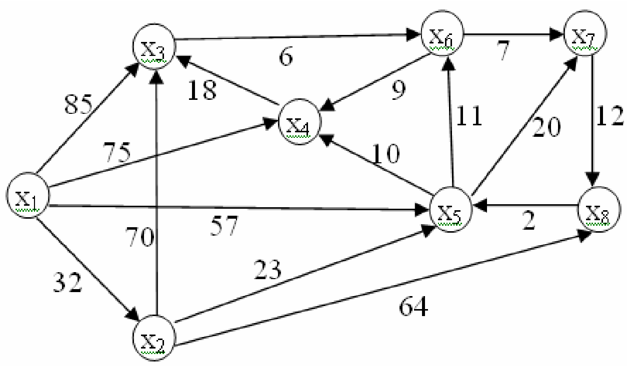


Рис.30. Орграф для задании 7.1.

Шаг 1. Начальная вершина x_1, имеет постоянную метку $L^*(x_1)=0$, остальные вершины имеют временную метку ∞.

Шаг 2. Определяем множество последователей вершины $\Gamma(x_1)=\{x_3,x_4,x_5,x_2\}$. Пересчитываем их временные метки по основной формуле:

$$L^н(x_3)=\min\{L^c(x_3), 85+0=85\},\ L^н(x_3)=85$$

$$L^н(x_4)=\min\{L^c(x_4), 75+0=75\},\ L^н(x_4)=75$$

$$L^н(x_5)=\min\{L^c(x_5), 57+0=57\},\ L^н(x_5)=57$$

$$L^н(x_2)=\min\{L^c(x_2), 32+0=32\},\ L^н(x_2)=32$$

Берем вершину 2 x с минимальной временной меткой 32, присваиваем этой вершине постоянную метку $L*(x_2)=32$.

Шаг 3. Определяем множество последователей вершины $Г(x_2)=\{x_3, x_5, x_8\}$.

Пересчитываем их временные метки по основной формуле:

$L^н(x_3)=\min\{85, 32+70\}=85,\quad L^н(x_3)=85$

$L^н(x_5)=\min\{57, 32+23\}=55,\quad L^н(x_5)=55$

$L^н(x_8)=\min\{32+64\}=96,\quad L^н(x_8)=96$

Берем вершину x_5 с минимальной временной меткой 55, присваиваем этой вершине постоянную метку $L*(x_5)=55$.

Шаг 4. Определяем множество последователей вершины $Г(x_5)=\{x_4, x_6, x_7\}$.

Пересчитываем их временные метки по основной формуле:

$L^н(x_4)=\min\{75, 55+10\}=65,\quad L^н(x_4)=65$

$L^н(x_6)=\min\{55+11\}=65,\quad L^н(x_6)=66$

$L^н(x_7)=\min\{55+20\}=75,\quad L^н(x_7)=75$

Берем вершину x_4 с минимальной временной меткой 65, присваиваем этой вершине постоянную метку $L^*(x_4)=65$.

Шаг 5. Определяем множество последователей вершины $Г(x_4)=\{x_3\}$. Пересчитываем их временные метки по основной формуле:

$L^н(x_3)=\min\{85, 65+18\}=83,\quad L^н(x_3)=83$

Берем вершину x_6 с минимальной временной меткой 66, присваиваем этой вершине постоянную метку $L^*(x_6)=66$.

Шаг 6. Определяем множество последователей вершины $Г(x_6)=\{x_4, x_7\}$. Пересчитываем их временные метки по основной формуле:

$L^н(x_7)=\min\{75, 66+7\}=73,\quad L^н(x_7)=73$

Берем вершину x_7 с минимальной временной меткой 73, присваиваем этой вершине постоянную метку $L^*(x_7)=73$.

Шаг 7. Определяем множество последователей вершины $\Gamma(x_7)=\{x_8\}$. Пересчитываем их временные метки по основной формуле:

$L^н(x_8)=\min\{96,73+12\}=85,\quad L^н(x_7)=85$

Берем вершину x_3 с минимальной временной меткой 83, присваиваем этой вершине постоянную метку $L^*(x_3)=83$.

Шаг 8. Определяем множество последователей вершины $\Gamma(x_3)=\{x_6\}$. Эта вершина уже имеет постоянную метку. Поэтому берем последнюю вершину x_8 с временной меткой 85, присваиваем этой вершине постоянную метку $L^*(x_8)=85$.

Таблица 7.1.

Шаги	**Вершины**								x_i	$L^* x_i$
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
1	**0**	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	x_1	0
2		**32**	85	75	57	∞	∞	∞	x_2	32
3			85	75	**55**	∞	∞	96	x_5	55
4			85	**65**		66	75	96	x_4	65
5			83			**66**	75	96	x_6	66
6			83				**73**	96	x_7	73
7			**83**					85	x_3	83
8								**85**	x_8	85

Кратчайшие пути найдены, их длина приведена в последних двух столбцах расчетной таблицы. Построим дерево кратчайших путей (ребра дерева обведены жирным**)** – ребра $(x_1,x_2),(x_2,x_5),(x_5,x_4),(x_4,x_3),(x_5,x_6),(x_6,x_7),(x_7,x_8)$.

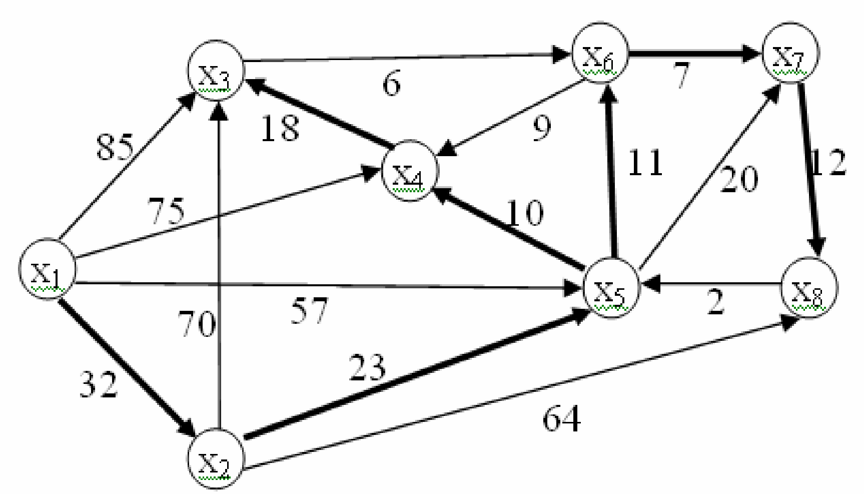


Рис.31. Дерево кратчайших путей для орграфа задании 7.1.

Контрольные вопросы

1. Какие методы существует для решения найти кратчайшие пути в графе?
2. Объясните последовательность алгоритма Дейкстри.
3. Какой формулой вычисляется новая временная метка?
4. Как заполняется расчетная таблица кратчайших путей?
5. Объясните последовательность построение кратчайших путей?
6. Можно ли использовать алгоритм Дейкстри для неориентированных графов?

Лекция 8

Транспортные сети. Задача о максимальном потоке и минимальном разрезе. Алгоритм Форда-Фалкерсона.

1. **Основные понятие.**
2. **Теорема Форда-Фалкерсона.**
3. **Найти максимальный поток и минимальный разрез по алгоритму Форда-Фалкерсона.**

Ключевые слова: транспортные сети, максимальный поток, минимальный разрез, взвешенный орграф, прообраз, образ, пропускной способность дуги, поток, исток, сток, величина потока, насыщенная дуга, теорема Форда Фалкерсона, разрез сети.

1. Основные понятие.

Транспортной сетью называется пара $T=(G,C)$, где G - *взвешенный орграф*, удовлетворяющий следующим условиям:

а) нет петель;

б) существует только одна вершина, не имеющая ни одного прообраза - это исток;

в) существует только одна вершина, не имеющая ни одного образа - это сток;

C - *функция пропускных способностей дуг*, которая является положительной вещественной функцией, определенной на множестве дуг графа, т.е. каждой дуге v графа поставлено в соответствие положительное ***число*** $C(v)$, называемое ***пропускной способностью дуги*** V .

Вершина, не имеющая ни одного прообраза называется ***входом сети или источником*** и обычно обозначается v_0, а вершина, не имеющая ни одного образа называется ***выходом сети или стоком*** и обозначается U_0. В транспортной сети существует один исток и один сток. Случаи, когда имеется несколько источников или несколько стоков, могут быть сведены к рассматриваемому нами случаю введением обобщенных (фиктивны) источника и стока.

Потоком в транспортной сети T называется неотрицательная вещественная функция, определенная на множестве дуг, удовлетворяющая условиям:

1. ***ограниченности***: <u>поток</u> по любой дуге сети ***не превосходит*** <u>пропускной способности</u> этой дуги;

2. ***сохранения***: <u>суммарный поток , заходящий</u> в любую вершину сети (кроме истока и стока) **равен** <u>суммарному потоку , выходящему</u> из этой вершины.

Дуга сети называется ***насыщенной***, если поток по этой дуге ***равен*** пропускной способности этой дуги.

Поток по пути называется ***полным***, если хотя бы одна дуга пути насыщена.

Как упоминалось выше, ***поток в сети*** - это функция, определенная на множестве дуг. ***Величиной потока*** называется **сумма значений этой функции** по всем выходным дугам сети (выходные дуги сети - это дуги, инцидентные стоку). Понятия потока и величины потока в сети часто путают, однако между ними существует различие: поток - это функция, а величина потока - число. Советуем это запомнить.

Разрезом сети называется ***множество***, которому принадлежит исток, и не принадлежит сток. Т.е. ***разрез*** - это минимальное (в смысле отношения включения) множество дуг, удаление которых “разрывает” все пути, соединяющие исток и сток.

Пропускной способностью разреза называется число, равное сумме пропускных способностей дуг этого разреза. Разрез называется ***минимальным,*** если имеет наименьшую пропускную способность.

Отыскание минимального разреза - одна из основных задач анализа транспортных сетей.

В силу конечности графа минимальный разрез может быть найден перебором всех разрезов, но этот путь, конечно, неприемлим для достаточно больших графов. Оказывается, что минимальный разрез можно отыскать при помощи максимального потока сети на основании теоремы Форда-Фалкерсона.

2. Теорема Форда-Фалкерсона.

В любой транспортной сети величина любого ***максимального потока*** равна пропускной способности любого ***минимального разреза***.

Известно конструктивное доказательство этой теоремы, на основании которого построен изложенный выше алгоритм.

3. Найти максимальный поток и минимальный разрез в транспортной сети по алгоритму Форда-Фалкерсона.

Задание 8.1. Найти максимальный поток и минимальный разрез в транспортной сети, используя алгоритм Форда–Фалкерсона (алгоритм расстановки пометок) Построить граф приращений. Проверить выполнение условия максимальности построенного полного потока. Источник – вершина 1, сток – вершина 8.

Решение:

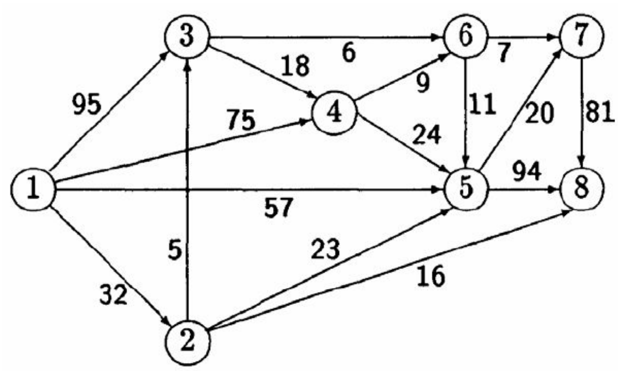
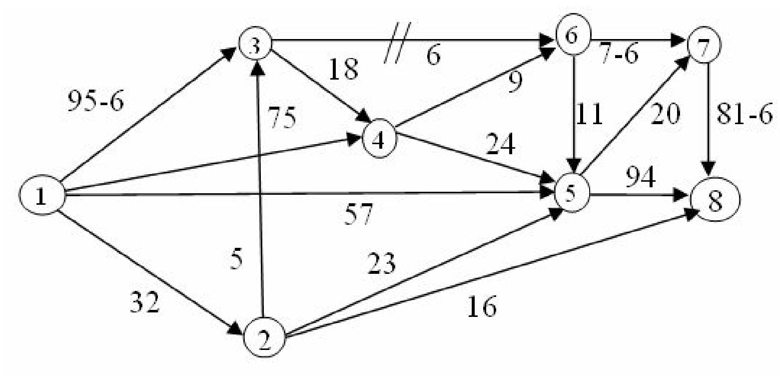


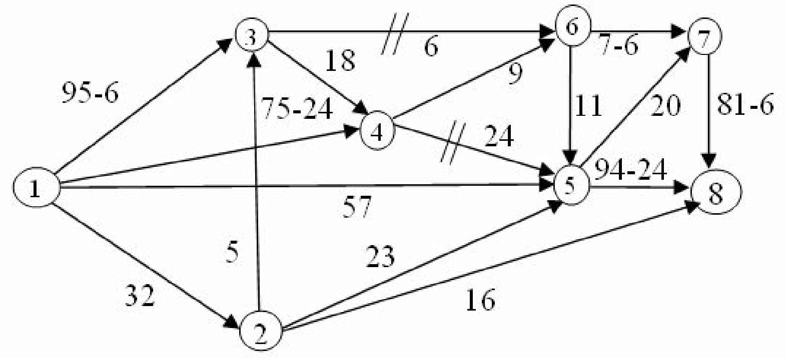
Рис.32. Орграф для задании 8.1.

Шаг 1. Выбираем произвольный поток, например, 1-3-6-7-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 6. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 6, насыщенную дугу 3-6 вычеркиваем.

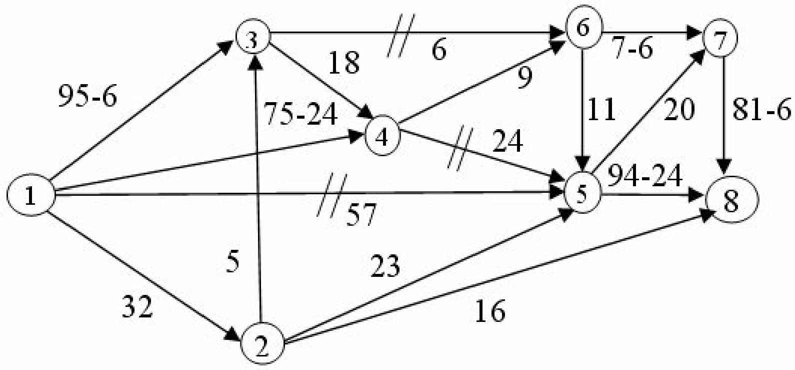


Шаг 2. Выбираем произвольный поток, например, 1-4-5-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в

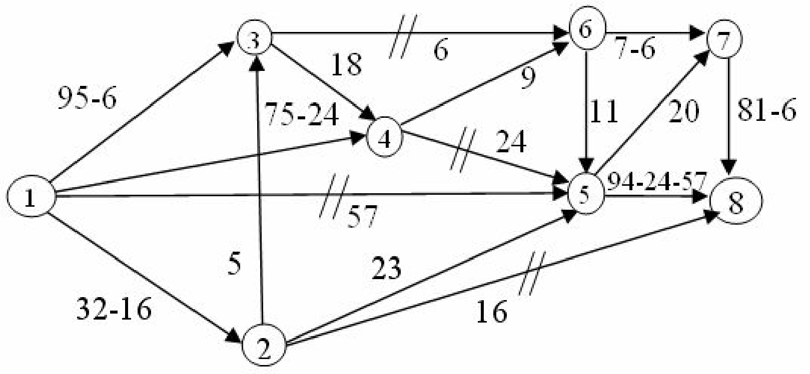
него дуг, то есть 24. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 24, насыщенную дугу 4-5 вычеркиваем.



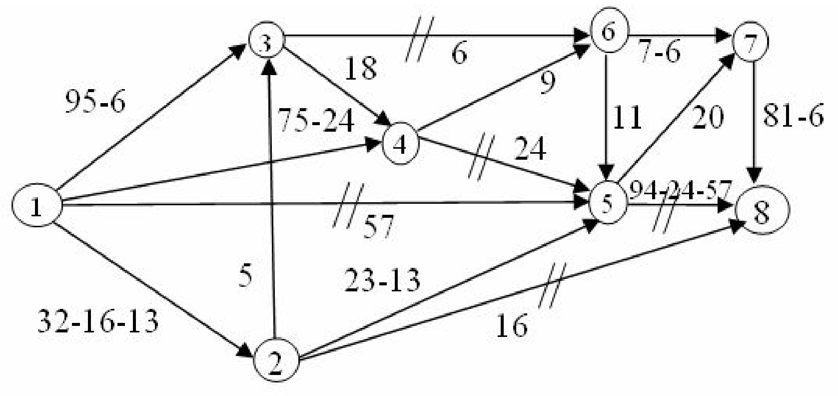
Шаг 3. Выбираем произвольный поток, например, 1-5-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 57. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 57, насыщенную дугу 1-5 вычеркиваем.



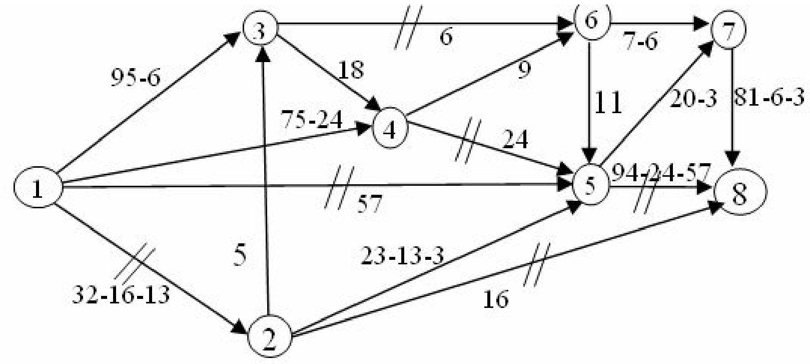
Шаг 4. Выбираем произвольный поток, например, 1-2-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 16. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 16, насыщенную дугу 2-8 вычеркиваем.



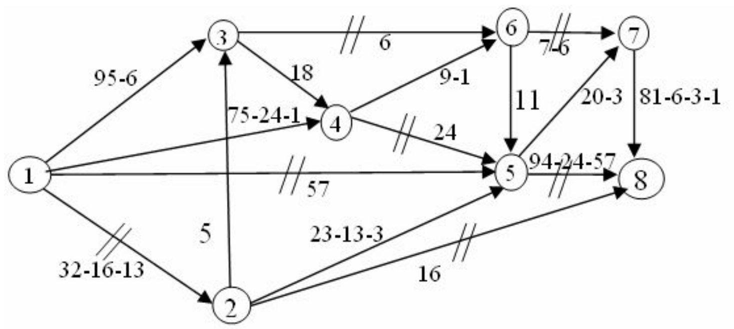
Шаг 5. Выбираем произвольный поток, например, 1-2-5-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 13. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 13, насыщенную дугу 5-8 вычеркиваем.



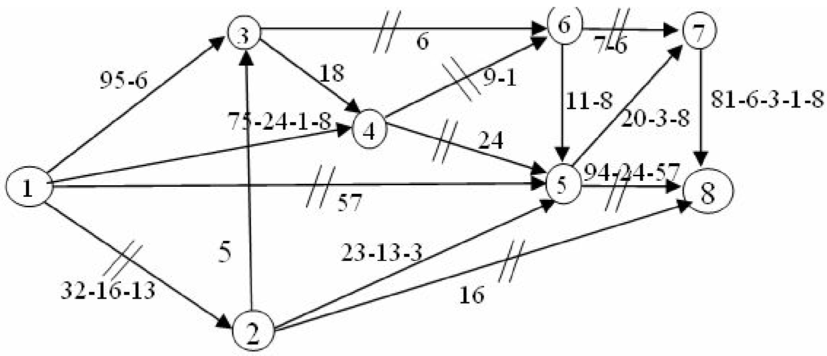
Шаг 6. Выбираем произвольный поток, например, 1-2-5-7-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 3. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 3, насыщенную дугу 1-2 вычеркиваем.



Шаг 7. Выбираем произвольный поток, например, 1-4-6-7-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 1. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 1, насыщенную дугу 6-7 вычеркиваем.



Шаг 8. Выбираем произвольный поток, например, 1-4-6-5-7-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 8. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 8, насыщенную дугу 4-6 вычеркиваем.



Больше путей нет. Суммарный поток 6+24+57+16+13+3+1+8=128

Начинаем расстановку пометок. Начальная вершина (источник) 1 имеет пометку 0. Из этой вершины в вершины 3 и 4 ведут ненасыщенные дуги (см. рисунок), поэтому присваиваем им пометки соответственно, +3 и +4. Больше пометки расставить нельзя.

Значит, максимальный поток найден, причем *A* = {2,5,6,7,8} (непомеченные вершины) образует разрез. Величина разреза 6+9+24+57+32=128.

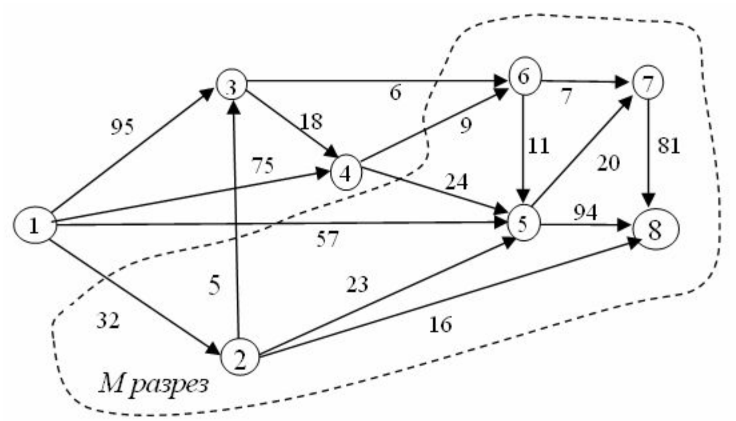


Рис.33. Граф с видом образующий разрез для задании 8.1.

Контрольные вопросы

1. Что называется транспортной сетью?
2. Как обозначается пропускная способность дуги?
3. Какая вершина является входом сети или источником?
4. Когда поток является полным?
5. Какие условии должны удовлетворять вещественная функция которая определенная на множество дуг?
6. Что называется величиной потока?
7. Когда является разрез минимальным?
8. Величина любого максимального потока всегда ли равна пропускной способности любого минимального разреза?

Лекция № 9

Понятие о теории матриц. Основные типы матрицы. Тождество матриц. Обратная матрица.

1. **Основные обозначение и типы матрицы.**
2. **Тождество матриц.**
3. **Обратная матрица.**

Ключевые слова: матрица, квадратная матрица, диагональная матрица, столбцевой матрица, строковая матрица, элементы матрицы, порядка матрицы, миноры, обратная матрица, тождество матриц, ранг матрицы, транспонированная матрица.

1. Основные обозначение и типы матрицы.

В работе техническими системами мы часто встречаемся система уравнений. Решение система уравнений в матричном виде значительно упрощает расчетные работы с ними. Решая этих уравнений мы имеем возможности определять свойств систем. По этому при исследований технических систем знание о понятии матриц имеет большую значимость. Выходя из итого сперва будем кратко осмотреть основные понятие о матриц.

Пусть дано некоторое числовое поле K. Числовом полем понимают любую совокупность чисел, в приделах которой всегда выполнимы и однозначные четыре операции: сложение, вычитание, умножение и деление на число, отличное от нуля. Примерами числовых полей могут служить совокупность всех рациональных чисел, совокупность всех действительных чисел или совокупность всех комплексных чисел.

Определение 9.1. Прямоугольную таблицу чисел из поля K

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{9.1}$$

Будем называть матрицей.

Если $m = n$, то матрица называется ***квадратной***, а число m, равное n, -её ***порядкам***.

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}_{mxn}$$

В общем же случае матрица называется ***прямоугольной*** (с размерами $m \times n$) или $m \times n$-матрицей. Числа, составляющие матрицу, называются ее ***элементами***.

Обозначения. При двух индексном обозначении элементов первый индекс всегда указывает номер строки, а второй индекс номер столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Наряду с обозначениями матрицы (9.1) будем употреблять и сокращенное обозначение:

$$\|a_{ik}\| \ (i = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, n).$$

Часто матрицу (9.1) будем обозначать также одной буквой, например, матрица A. Если A - квадратная матрица порядка n, то будем писать: $A = \|a_{ik}\|_1^n$. Определитель квадратной матрицы $A = \|a_{ik}\|_1^n$ будем обозначать так: $\|a_{ik}\|_1^n$ или A.

Введем сокращенные обозначение для определителей, составленных из элементов данной матрицы:

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_p \\ k_1 k_2 \dots k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \dots & a_{i_1k_p} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & \dots & a_{i_2k_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_pk_1} & a_{i_pk_2} & \dots & a_{i_pk_2} \end{vmatrix} \qquad (9.2)$$

Определитель (9.2) называется ***минором*** p-го порядка матрицы A, если $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le m$ и $1 \le k_1 < k_2 < \dots < k_p \le n$.

$m \times n$-матрица $A = \|a_{ik}\|$ имеет $C_m^p C_n^p$ миноров p-го порядка

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \le i_1 < i_2 < & \dots & < i_p \le m \\ 1 \le k_1 < k_2 < & \dots & < k_p \le n \end{pmatrix}; p \le m, n \tag{9.3}$$

Миноры (9.3), у которых $i_1 = k_1, i_2 = k_2, \dots, i_p = k_p$, называются ***главными***.

В обозначениях (9.2) определитель квадратной матрицы $A = \|a_{ik}\|_1^n$ запишется так:

$$|A| = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Наибольший из порядков отличных от нуля миноров, порождаемых матрицей, называется ***рангом*** матрицы. Если r - ранг прямоугольной матрицы A с размерами $m \times n$, то, очевидно, $r \le m, n$.

Прямоугольную матрицу, состоящую из одного столбца

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix},$$

мы будем называть ***столбцевой*** и обозначать так: $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Прямоугольную матрицу, состоящую из одной строки

$$\|z_1, z_2, ..., z_n\|,$$

мы будем называть ***строчной*** и обозначать так: $[z_1, z_2, ..., z_n]$.

Квадратную матрицу, у которой все элементы расположенные вне главной диагонали, равны нулю,

$$\begin{Vmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{Vmatrix}$$

мы будем называть ***диагональной*** и обозначать так: $\|d_i \delta_{ik}\|_i^n 1$или $\{d_1, d_2, ..., d_n\}$.

Единичной матрицей называется диагональная матрица, диагональные элементы которой равны единице.

$$I=\begin{pmatrix}1&0&...&0\\0&1&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&1\end{pmatrix}.$$

Транспонирование матрицы *A* – операция, при которой ее строки и столбцы меняются местами (A^T).

Пример 9.1:

$$A^T_{mxn}=C_{nxm} \qquad i=\overline{1,m} \qquad j=\overline{1,n}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\10&9&8\end{pmatrix}_{2x3} \qquad A^T=\begin{pmatrix}0&10\\1&9\\2&8\end{pmatrix}_{3x2}$$

Матрица, все элементы которой тождественно равны нулю, называется ***нулевой матрицей.***

2. Тождество матриц.

При выполнении разных операциях над матрицами уместны следующие тождества:

1. $A\cdot B\neq B\cdot A$
2. $A+B=B+A$
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$
4. $\alpha(A\pm B)=\alpha A\pm\alpha B$
5. $(\alpha_1\alpha_2)A=\alpha_1(\alpha_2 A)$
6. $(\alpha_1+\alpha_2)A=\alpha_1 A+\alpha_2 A$
7. $A(B\pm C)=A\cdot B\pm A\cdot C$
8. $(B\pm C)\cdot A=B\cdot A\pm C\cdot A$
9. $A\cdot E=E\cdot A=A$
10. $(\alpha\cdot A)^T=\alpha\cdot A^T$
11. $(A+B)^T=A^T+B^T$

12. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

3. Обратная матрица.

Линейные системы управления решается с одной цели, что решение таких систем приводят к определению свойства системы. Алгоритм нахождения обратной матрицы описывается следующим образом:

1) находятся $\det A$ заданной матрицы, если матрица только при $A \neq 0$ имеет решение, то тогда существует обратная матрица.

2) находятся миноры результатов выставлений i строки и j столбца;

3) создаётся новая матрица нахоженных миноров и транспонируется;

4) каждый элемент транспонированной матрицы делится детерминанту.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^T \qquad (4.4.1)$$

Пример 9.2:

Пусть дано матрица. Найдите обратную матрицу соответствующую для заданной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} - ?$$

detA=?

$$\triangle = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 5 & -4 & -2 \\ 5 & 1 & -6 & 5 & 1 \end{pmatrix} =24-75+8-20-10+72= -1$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = 12 - 5 = 7 \qquad A_{21} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = 18 + 2 = 20 \qquad A_{31} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = -19$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} = 24 - 25 = -1 \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = -12 + 10 = -2 \qquad A_{32} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = 10 - 8 = 2$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = -4 + 10 = 6 \qquad A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 15 = 17 \qquad A_{33} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = -4 + 12 = 16$$

$$A^{+1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ 20 & -2 & 17 \\ -19 & 2 & 16 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \bullet A^{-1} \qquad E = A^{-1}A$$

Контрольные вопросы

1. Что называется числовым полем?
2. Когда матрица называется квадратной?
3. Что называется минором?
4. Когда будет матрица столбцевой?
5. Какие тождество будет уместны операции над матрицами?
6. Объясните алгоритм нахождения обратной матрицы?

Лекция № 10

Норма матриц. Характеристические числа и характеристические вектора матриц. Теорема Кели-Гамельтона.

1. **Норма матриц.**
2. **Характеристические числа и характеристические вектора матриц.**
3. **Теорема Кели-Гамельтона.**

Ключевые слова: норма матриц, след матрицы, характеристические числа, характеристические вектора, теорема Кели-Гамельтона, многочлен матрицы.

1. Норма матриц

При исследования технических систем знать понятие о матриц и анализировать норма, ранг и след матрицы кроме простых операций имеет большое значение. Основываясь выше изложенным материалам подробно рассмотрим следующие понятия.

Пусть дано матрица:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{nxm} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (10.1)$$

В этом матрице существует три нормы:

1. A_1 норма – это равно на максимальное число суммы элементов строки:

$$A_1 = \max\left\{ \sum_{j=1}^{m} \left| a_{ij} \right| \right\} \quad i = \overline{1, n} \qquad (10.1.1)$$

2. A_2 нома – это равно на максимальное число суммы элементов столбца:

$$A_2 = \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij} \right| \right\} \quad j = 1, \overline{m} \qquad (10.1.2)$$

3. A_3 норма – это равно суммы квадратов матрицы:

$$A_3 = \max\left\{ \sum_{j=1}^{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \right\} \qquad (10.1.3)$$

Пример 10.1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \end{pmatrix} = 11$$

$$A_3 = 1 + 4 + 9 + 0 + 1 + 36 + 9 + 16 + 4 = 80$$

Суммы элементов диагонали называется ***следом матрицы.***

Пример 10.2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad T_r(A) = t_r \left\| a_{ij} \right\|$$

2. Характеристические числа и характеристические вектора матриц.

От характеристических значений системы зависит ее динамические свойства. При нахождений характеристические числа и характеристические вектора матриц используется квадратная матрица. Пусть нам дано квадратная матрица:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Характеристическим числом этой матрицы называется решение характеристического уравнения детерминанта матрицы $\det(A-\lambda \cdot I)\ y = A_x$, то есть:

$$\det(A-\lambda \cdot I)=0 \tag{10.2}$$

Здесь I - единичная матрица.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}-\lambda \end{pmatrix} \tag{10.3}$$

$$\lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \tag{10.4}$$

Это уравнение называется ***характеристической уравнений***, а решения характеристической уравнений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называется характеристической числом характеристического уравнения (характеристическое число матрицы).

Сумма характеристических чисел матрицы равно суммы диагональных элементов A матрицы.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ...+ \lambda_n = a_{11} + a_{22} + ...+ a_{nn} \qquad (10.5)$$

Характеристическом вектором называется $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ вектор, которое удовлетворяет условию $AX = \lambda X$, и можно будет его найти решая следующую систему уравнению:

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \qquad A \cdot x - \lambda \cdot x = 0$$
$$(A - \lambda) \cdot x = 0 \qquad (A - \lambda \cdot I) \cdot x = 0$$

Выходя из этого мы получаем ниже изложенную уравнению:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \qquad (10.6)$$

Здесь характеристические вектора может быть в количестве n.

Пример 10.3: Найти характеристические числа и характеристические вектора заданной матрицы: $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Решение:

$\det(A - I\lambda) = 0$

$$\det = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -\lambda & 4 \\ 2 & 3 & -\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 8\lambda + \lambda^2 - 8 = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$$

$D = 64 - 28 = 36$

$$\lambda_1 = \frac{8-6}{2} = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{8+6}{2} = 7$$

Решения уравнений (1;7) соответственно называется характеристическим числом.

Дальше будем находить характеристический вектор матрицы:

$\begin{pmatrix} 5-7 & 4 \\ 2 & 3-7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$ - первый характеристический вектор;

$\begin{pmatrix} 5-1 & 4 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ - второй характеристический вектор;

$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 & 1) -4x_2 + 4x_2 \\ 2x_1 = 4x_2 & x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$ решение 0.

$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 = -4x_2 / 2 \\ -2x_2 + 2x_2 = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \end{cases}$

Значит, $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$ - характеристический вектор.

3. Теорема Кели-Гамельтона.

Теорема 10.1. Любая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Если A ***квадратная матрица*** и $c(\lambda)$ её ***характеристический многочлен,*** то $c(A) = 0$.

Непосредственная проверка оправдывает это утверждение для матрицы порядка 2.

Характеристический многочлен

$$c(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \tag{10.7}$$

тогда

$$\begin{aligned} c(A) = A^2 - (a_{11} + a_{22})A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - (a_{11} + a_{22}) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \\ + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{10.8}$$

1. Теорема Гамильтона - Кэли обуславливает существование аннулирующего многочлена.

2. Теорема Гамильтона - Кэли эквивалентна утверждению, что характеристический многочлен делится без остатка на минимальный многочлен.

Доказательство.

Рассмотрим присоединённую (союзную) λ-матрицу $(A-\lambda E)^*$, где E - единичная матрица, тогда согласно определению присоединённой матрицы

$$(A-\lambda E)^*(A-\lambda E) = (A-\lambda E)(A-\lambda E)^* = \det(A-\lambda E)E = c(\lambda)E.$$

Это означает, что λ - матрица $c(\lambda)E$ делится без остатки на $(A-\lambda E)$, а значит, согласно следствию из теоремы Безу для λ матриц $c(A)E=0$, и следовательно $c(A)=0$. От этой мы сможем писать характеристическое уравнение матрицы:

$$c(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda\ -\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n) = 0 \tag{10.9}$$

$$c(A) = (A-I\ )(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_n I) = 0 \tag{10.10}$$

Пример 10.4: Дано матрица $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Найти $C(A)$, здесь $\mathrm{C(A)} = 2\mathrm{A}^4 + \mathrm{A}^3 + \mathrm{A} + 3$.

Решение:

$$|A-\lambda I| = \left[\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}-1-\lambda & 0\\ 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}\right] = (-1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\mathrm{A}^2 = 2\mathrm{A} + 3$$

$$\mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^2\mathrm{A} = (2\mathrm{A}+3)\mathrm{A} = 2\mathrm{A}^2 + 3\mathrm{A} = 2(2\mathrm{A}+3) + 3\mathrm{A} = 4\mathrm{A} + 6 + 3\mathrm{A} = 7\mathrm{A} + 6$$

$$\mathrm{A}^4 = \mathrm{A}^3\mathrm{A} = (7\mathrm{A}+5)\mathrm{A} = 7\mathrm{A}^2 + 6\mathrm{A} = 7(2\mathrm{A}+3) + 6\mathrm{A} = 14\mathrm{A} + 21 + 6\mathrm{A} = 20\mathrm{A}\text{ - }21$$

Контрольные вопросы

1. Как определяется норма матрицы?
2. Что называется характеристической числом?
3. Что называется характеристической вектором?
4. Какое значение имеет характеристическое число и характеристический вектор в работе с техническими системами?
5. Объясните сущность теоремы Кели-Гамельтона.

Лекция № 11

Понятие о непрерывных динамических систем. Способы построение дифференциальных уравнений. Линеаризация уравнений.

1. Представление непрерывных систем в виде дифференциальных уравнений.

2. Преобразование системы дифференциальных уравнений.

3. Способы построение дифференциальных уравнений. Линеаризация уравнений.

Ключевые слова: динамические системы, дифференциальная уравнения, выходная величина, линеаризация, вход, выход, операторное уравнение.

1. Представление непрерывных систем в виде дифференциальных уравнений.

Классическим методом описания линейной системы считается записанная при помощи дифференциального или разностного уравнения связь между ее входом и выходом. Дифференциальное уравнение применяется для описания непрерывных систем, а уравнение в конечных разностях — для дискретных систем.

Непрерывную систему часто описывают дифференциальным уравнением относительно ее выхода y(t) и входа r(t). В общем виде уравнение представляется так:

$$a_n \frac{d^n y}{d t^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d t^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{d y}{d t} + a_0 y = b_m \frac{d^m v}{d t^m} + \ldots + b_1 \frac{d v}{d t} + b_0 v \qquad (11.1)$$

Предполагая, что входной сигнал $v(t)$ известен, правую часть уравнения можно представить как $F(t)$, называемую часто вынуждающей функцией,

$$a_n \frac{d^n y}{d t^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d t^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{d y}{d t} + a_0 y = F(t) \qquad (11.2)$$

Для линейных систем a_i и b_i не являются функциями v или y но могут зависеть от времени t.

Для линейных систем с постоянными параметрами эти коэффициенты должны быть постоянными.

Дифференциальное уравнение системы может быть задано или должно быть найдено на основе модели системы, в последнем случае модель дает непосредственно систему дифференциальных уравнений.

Оператор p, обозначающий часто операцию дифференцирования, определяется как

$$p[v(t)] = \frac{d}{dt}[v(t)] \qquad (11.3)$$

Если c_1 и c_2 - постоянные величины, то

$$p^m (p^n v) = p^{m+n} v = \frac{d^{m+n} v}{d t^{m+n}} \qquad (11.4),$$

$$p^m (c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 p^m v_1 + c_2 p^m v_2 \qquad (11.5),$$

$$(p + c_1)(p + c_2) v = \left[p^2 + (c_1 + c_2) p + c_1 c_2 \right] v \qquad (11.6),$$

где n и m неотрицательные целые числа. Как правило, с оператором p можно оперировать как с алгебраическим числом. Существенным исключением является то, что он в общем случае некоммутативен с функциями

$$p(tv) \neq t(pv)$$

$$p(v_1 v_2) \neq v_1(pv_2).$$

При помощи оператора p уравнения (11.1) и (11.2) приводятся к виду

$$\left(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0\right) y(t) = \left(b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0\right) v(t) = F(t) \qquad (11.7)$$

стоящие в скобках перед y и v элементы сами являются операторами.

Для стационарных систем, коэффициенты которых постоянны, последнее выражение записывается символически как

$$A(p) y(t) = B(p) v(t) = F(t)$$

Для линейных систем с переменными параметрами, коэффициенты которых являются функциями времени, A и B - зависящие от времени операторы. Это учитывается выражением

$$A(p,t) y(t) = B(p,t) v(t) = F(t).$$

Формальное определение операторов A и B следует из сравнения последних трех выражений.

2. Преобразование системы дифференциальных уравнений.

Непрерывная модель может быть описана математически системой дифференциальных уравнений. Один класс уравнений служит главным образом для характеристики отдельных составляющих, а другой - для описания связей между этими составляющими. При математическом описании модели указанные два типа уравнений обычно сочетаются с экспериментальной проверкой. Полученная система уравнений может быть затем сведена к одному уравнению, связывающему вход и выход системы, хотя подобное преобразование не всегда элементарно. Решение системы уравнений с постоянными коэффициентами гораздо проще чем системы уравнений с переменными коэффициентами, а потому рассматривается в первую очередь.

Пример11.1: Для цепи изображенной на рисунке запишем уравнение, связывающее напряжение на выходе e_2 с напряжением источника e_1. Суммируя токи, выходящие соответственно из узлов 3 и 2, получим

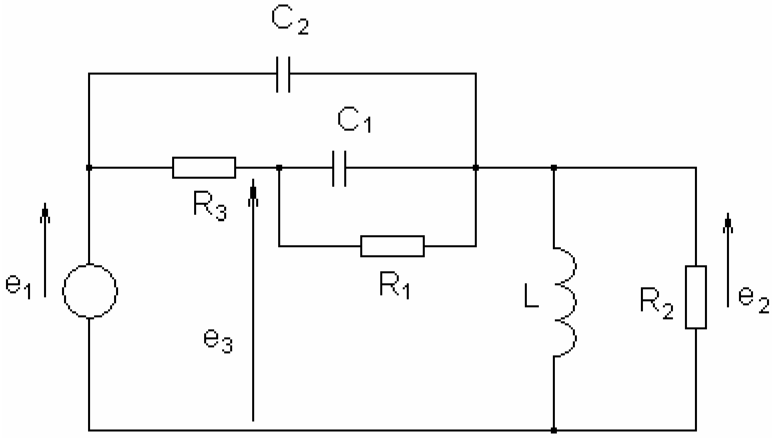


Рис.34.Цепь связывающее напряжение.

$$\left[c_1\frac{de_3}{dt}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right)e_3\right]-\left[c_1\frac{de_2}{dt}+\frac{1}{R_1}e_3\right]=\frac{1}{R_3}e_1$$

$$-\left[c_1\frac{de_3}{dt}+\frac{1}{R_1}e_3\right]+\left[\left(c_1+c_2\right)\frac{de_2}{dt}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)e_2+\frac{1}{L}\int e_2\,dt\right]=c_2\frac{de_1}{dt}.$$

Дифференцируя второе уравнение, чтобы избавиться от интеграла, и вводя оператор $p-d/dt$, приводим уравнения к виду

$$(p+2)e_3-(p+1)e_2=e_1,$$

$$-\left(p^2+p\right)e_3+\left(2p^2+2p+1\right)e_2=p^2e_1.$$

Предполагается, для простоты, что все сопротивления, емкости и индуктивности равны соответственно 1 ом, 1 фарада, 1 генри. Помножим каждый из членов первого уравнения на оператор p^2+p, а каждый из членов второго уравнения – на $p+2$ и сложим затем эти уравнения. Поскольку

$$\left(p^2+p\right)(p+2)e_3=(p+2)\left(p^2+p\right)e_3,$$

то выражение, содержащее e_3 уничтожится. Тогда

$$(p+2)\left(2p^2+2p+1\right)e^2-\left(p^2+p\right)(p+1)e_2=\left[\left(p^2+p\right)+p^2(p+2)\right]e_1$$

или

$$\left(p^3 + 4p^2 + 4p + 2\right)e_2 = \left(p^3 + 3p^2 + p\right)e_1,$$

что и является искомым результатом.

Процедура, используемая в данном примере, справедлива для любых двух дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Если L означает оператор, являющийся функцией только p, то уравнения можно символически записать как

$$\begin{aligned} &L_{11}(p)y_1(t) + L_{12}(p)y_2(t) = F_1(t), \\ &L_{21}(p)y_1(t) + L_{22}(p)y_2(t) = F_2(t) \end{aligned} \tag{11.8}$$

Умножим первое уравнение на L_{21}, а второе на L_{11} и вычтем одно из другого. Так как $L_{21}L_{11}y_1 = L_{11}L_{21}y_1$, то

$$\left(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}\right)y_2 = L_{21}F_1 + L_{11}F_2 \tag{11.9}$$

Аналогично,

$$\left(L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}\right)y_1 = L_{22}F_1 + L_{12}F_2 \tag{11.10}$$

Каждое из последних двух уравнений содержит лишь одну независимую переменную.

Изложенный материал ограничивался дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Получение дифференциального уравнения, связывающего вход и выход, для систем с переменными коэффициентами гораздо сложнее. Предположим, что система описывается уравнениями

$$t(py_1) + p\left(t^2 y_2\right) = F_1(t),$$
$$p(ty_1) + t(py_2) = F_2(t).$$

Чтобы исключить y_1, из этих уравнений, можно попытаться умножить первое из них на pt, а второе на tp и затем вычесть одно из другого. Если это выполнено, то

$$pt^2(py_1) + pt(pt^2 y_2) = ptF_1(t),$$
$$p(pty_1) + tp(tpy_2) = tpF_2(t).$$

Однако $pt^2(py_1) = (t^2 p^2 + 2tp)y_1$, а $tp(pty_1) = t(tp^2 + 2p)y_1$. Следовательно, исключить y_1 вычитанием нельзя.

Для систем с переменными параметрами уравнения (11.9) и (11.10) несправедливы, так как

2. Способы построение дифференциальных уравнений. Линеаризация уравнений.

Известно, что любое движение, процессы передачи, обмена, преобразования энергии и вещества математически можно описать в виде дифференциальных уравнений (ДУ). Любые процессы в АСР также можно описать дифференциальными уравнениями, которые определяют сущность происходящих в системе процессов независимо от ее конструкции и т.д. Решив ДУ, можно найти характер изменения регулируемой переменной в переходных и установившихся режимах при различных воздействиях на систему.

Для упрощения задачи нахождения ДУ, описывающего работу АСР в целом, систему разбивают на ее отдельные элементы, переходные процессы в которых описываются достаточно простыми ДУ. Так как ДУ описывают работу системы независимо от физической сущности протекающих в ней процессов, то при декомпозиции системы нет необходимости учитывать их физическую целостность. Для каждого элемента структурной схемы необходимо составить ДУ, определяющее зависимость изменения выходной величины от входной.

Так как выходная величина предыдущего элемента является входной для последующего, то, определив ДУ отдельных элементов, можно найти ДУ системы.

Однако такой метод применим только в частных случаях. Дело в том, что в большинстве случаев в реальных элементах системы связь между входной и выходной величинами является нелинейной и часто задается в графической форме. Поэтому, даже если ДУ системы и будет получено, оно будет нелинейным. А аналитическое решение нелинейных ДУ возможно далеко не всегда.

Для решения этой проблемы учитывают, что в процессе регулирования отклонения всех изменяющихся величин от их установившихся значений малы, и поэтому возможна замена нелинейных ДУ приближенными линейными ДУ, то есть возможна линеаризация дифференциальных уравнений.

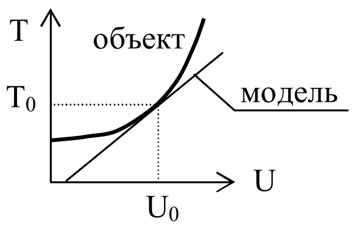


Рис. 35. Сущность процесса сушильного шкафа.

Рассмотрим сущность процесса линеаризации на примере сушильного шкафа. Зависимость температуры объекта от подаваемого напряжения в большинстве случаев нелинейна и имеет вид, представленный на рисунке 35.

Графически линеаризацию некоторого уравнения от двух переменных $F(x,y)=0$ в окрестности некоторой точки (x_0,y_0) можно представить как замену рассматриваемого участка кривой на касательную (см. рисунок 35), уравнение которой определяется по формуле

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y=0,$$

где $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ - частные производные от F по x и y. Данное уравнение называется уравнением в приращениях, поскольку значения x и y здесь заменены на приращения $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0$.

Линеаризация ДУ происходит аналогично, отличие состоит только в том, что необходимо искать частные производные по производным $\left(\frac{\partial F}{\partial x'},\frac{\partial F}{\partial x''},\frac{\partial F}{\partial x'''}\right)$, и т.д. Итоговое уравнение в приращениях будет содержать приращения производных: $\Delta x' = x' - x'_0$, $\Delta x'' = x'' - x''_0$, ..., $\Delta y' = y' - y'_0$, $\Delta y'' = y'' - y_0$, и т.д.

***Пример 11.2*:** Линеаризация нелинейного ДУ.

$$3xy - 4x^2 + 1{,}5\frac{dx}{dt}y = 5\frac{dy}{dt} + y$$

Данное ДУ является нелинейным из-за наличия произведений переменных x и y. Линеаризируем его в окрестности точки с координатами $x_0 = 1, x'_0 = 0, y'_0 = 0$. Для определения недостающего начального условия y_0 подставим данные значения в ДУ:

$3y_0 - 4 + 0 = 0 + y_0$, откуда $y_0 = 2$.

Введем в рассмотрение функцию

$$F = 3xy - 4x^2 + 1{,}5x'y - 5y' - y$$

и определим все ее производные при заданных начальных условиях:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0 = (3y - 8x)|_0 = 3*2 - 8*1 = -2,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 = (3x + 1.5x' - 1)|_0 = 3*1 + 1{,}5*0 - 1 = 2,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x'}\right|_0 = (1{,}5y)|_0 = 1{,}5*2 = 3,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_0 = -5.$$

Теперь, используя полученные коэффициенты, можно записать окончательное линейное ДУ:

$$-5\Delta y' + 2\Delta y + 3\Delta x' - 2\Delta x = 0.$$

Линеаризация ДУ, заданного в явном виде относительно y, т.е. $y = F(x)$ производится по формуле

$$y = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial x'}\Delta x' + \frac{\partial F}{\partial x''}\Delta x'' + \ldots,$$

то есть в данном случае нет необходимости искать производные по y.

Контрольные вопросы

1. Что такое динамические системы?
2. Как выполняется линеаризация системы?
3. Для чего составляется дифференциальное уравнение системы?
4. Как преобразуется дифференциальное уравнение?

Лекция № 12

Преобразование Лапласа. Свойства преобразование Лапласа. Обратное преобразование Лапласа.

1. **Преобразование и обратное преобразование Лапласа.**
2. **Свойства преобразование Лапласа.**
3. **Примеры по преобразование Лапласа.**

Ключевые слова: преобразование Лапласа, обратное преобразование Лапласа, операторное уравнение, изображение, оригинал.

1. Преобразование Лапласа.

Исследование АСР существенно упрощается при использовании прикладных математических методов операционного исчисления, поскольку позволяет от решения ДУ перейти к решению алгебраических уравнений. Например, функционирование некоторой системы описывается ДУ вида

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \qquad (12.1)$$

где x и y - входная и выходная величины. Если в данное уравнение вместо $x(t)$ и $y(t)$ подставить функции $X(s)$ и $Y(s)$ комплексного переменного s такие, что

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt \qquad \text{и} \qquad Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt, \tag{12.2}$$

то исходное ДУ при нулевых начальных условиях равносильно линейному алгебраическому уравнению

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_1 X(s) + b_0 X(s)$$

Такой переход от ДУ к алгебраическому уравнению называется ***преобразованием Лапласа***, формулы (12.2) соответственно ***формулами преобразования Лапласа***, а полученное уравнение - ***операторным уравнением***.

Новые функции $X(s)$ и $Y(s)$ называются ***изображениями*** $x(t)$ и $y(t)$ по Лапласу, тогда как $x(t)$ и $y(t)$ являются ***оригиналами*** по отношению к $X(s)$ и $Y(s)$.

Переход от одной модели к другой достаточно прост и заключается в замене знаков дифференциалов $\frac{d^n}{dt^n}$ на операторы s^n, знаков интегралов $\int ...dt$ на множители $\frac{1}{s}$, а самих $x(t)$ и $y(t)$ - изображениями $X(s)$ и $Y(s)$.

Преобразования Лапласа

Таблица 12.1

Оригинал $x(t)$	**Изображение** $X(s)$
δ -функция	1
1	$\frac{1}{s}$

t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\alpha\, x(t)$	$\alpha\, X(s)$
$\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} X_i(s)$
$x(t-\alpha)$	$X(s)e^{-\alpha_s}$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$
$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$

Формулы обратного преобразования Лапласа (дополнение)

Таблица 12.2

Изображение $X(s)$		**Оригинал** $x(t)$
$\frac{M}{s+a}$	$a \in R$, $M \in R$ (a и M - действительные числа)	$M\, e^{-\alpha_t}$
	$a = \alpha + j\,\omega$ $M = C + j\,D$ (a и M - комплексные числа)	$2\, e^{\alpha * t}[C\cos(\omega\, t) - D\sin(\omega\, t)]$ для пары комплексных корней

Для обратного перехода от операторного уравнения к функциям от времени используется метод ***обратного преобразования Лапласа***. Общая формула обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega, \qquad (12.3)$$

где $f(t)$- оригинал, $F(j\omega)$- изображение при $s = j\omega$, j- мнимая единица, ω-частота.

Эта формула достаточно сложна, поэтому были разработаны специальные таблицы (см. таблицы 12.1 и 12.2), в которые сведены наиболее часто встречающиеся функции $F(s)$ и их оригиналы $f(t)$. Они позволяют отказаться от прямого использования формулы (12.3).

2. Свойства преобразование Лапласа.

Для этого существует несколько теорем преобразования Лапласа.

Теорема 1. Теорема линейности. Изображение суммы функций равно сумме изображений, то есть, если f_1 имеет изображение $F_1(s)$ (или более кратко $f_1 \leftrightarrow F_1(s)$), $f_2 \leftrightarrow F_2(s)$ и т.д., то

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n \leftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) + \ldots + a_n F_n(s).$$

Теорема 2. Теорема дифференцирования. Если $f(t)$ имеет изображение $F(s)$, то при нулевых начальных условиях (т.е. при $f(0)=0$, $f'(0)=0$ и т.д.) производные $f(t)$ будут иметь изображения:

$f'(t) \leftrightarrow sF(s)$ - для первой производной,

$f''(t) \leftrightarrow s^2F(s)$ - для второй производной,

$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^nF(s)$ - для n -й производной.

При ненулевых начальных условиях:

$f'(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0)$ - для первой производной,

$f''(t) \leftrightarrow s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ - для второй производной,

$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$ - для n-й.

Теорема 3. Теорема смещения.

$$f(t)e^{\alpha_t} \leftrightarrow F(s-\alpha).$$

Например, если $1(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ (см. таблицу 12.1), то $1e^{\alpha_t} \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha}$.

Теорема 4. Теорема запаздывания.

$$f(t-\tau) \leftrightarrow F(s)e^{\tau_s},$$

где τ - запаздывание по времени.

Например, если $1(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$, то $1(t-\tau) \leftrightarrow \frac{1}{s}e^{-\tau \cdot s}$.

Теорема 5. Теорема интегрирования.

$$\int f(t)dt \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}.$$

Теорема 6. О начальных и конечных значениях.

$$\lim_{t\to 0} f(t) = f(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F(s),$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f_{уст} = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s),$$

где $f(0)$ - начальное значение функции (при $t=0$),

$f_{уст}$ - конечное (значение в установившемся режиме).

Закон изменения выходного сигнала обычно является функцией, которую необходимо найти, а входной сигнал, как правило, известен. Здесь приводятся их изображения:

единичное ступенчатое воздействие имеет изображение $X(s)=\frac{1}{s}$,

дельта-функция $X(s)=1$,

линейное воздействие $X(s)=\frac{1}{s^2}$.

3. Примеры по преобразование Лапласа.

Пример 12.1: Решение ДУ с использованием преобразований Лапласа.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y=2\frac{dx}{dt}+12x$$

Допустим, входной сигнал имеет форму единичного ступенчатого воздействия, т.е. $x(t)=1$. Тогда изображение входного сигнала, согласно таблице 12.1, имеет вид $X(s)=\frac{1}{s}$.

Производим преобразование исходного ДУ по Лапласу и подставляем $X(s)$:

$$s^2 \cdot Y(s)+5 \cdot s \cdot Y(s)+6 \cdot Y(s)=2 \cdot s \cdot X(s)+12 \cdot X(s),$$

$$s^2 \cdot Y(s)+5 \cdot s \cdot Y(s)+6 \cdot Y(s)=2 \cdot s\frac{1}{s}+12\frac{1}{s},$$

$$Y(s)\cdot\left(s^3+5s^2+6s\right)=2 \cdot s+12.$$

Определяется выражение для Y:

$$Y(\mathrm{s})=\frac{2s+12}{s^3+5s^2+6s}.$$

Оригинал полученной функции отсутствует в таблице оригиналов и изображений. Для решения задачи его поиска дробь разбивается на сумму простых дробей с учетом того, что знаменатель может быть представлен в виде $s(s+2)(s+3)$:

$$Y=\frac{2s+12}{s^3+5s^2+6s}=\frac{2s+12}{s(s+2)(s+3)}=\frac{2}{s}-\frac{4}{s+2}+\frac{2}{s+3}$$

Теперь, используя табличные функции (см. таблицы 12.1 и 12.2), определяется оригинал выходной функции:

$$y(t)=2-4 \cdot e^{-2t}+2 \cdot e^{-3t}.$$

При решении ДУ с использованием преобразований Лапласа часто встает промежуточная задача разбиения дроби на сумму простых дробей. Существуют два пути решения этой задачи:

- путем решения системы уравнений относительно коэффициентов числителей,

- путем расчета коэффициентов числителей по известным формулам.

Общий алгоритм разбиения дроби на сумму простых дробей:

шаг 1 – определяются корни знаменателя s_i (знаменатель дроби приравниватся к нулю и решается полученное уравнение относительно s);

шаг 2 – каждому корню ставится в соответствие простая дробь вида $\frac{M_i}{s-s_i}$, где $\mathrm{M_i}$- неизвестный коэффициент; если имеет место кратный корень с кратностью k, то ему ставится в соответствие k дробей вида $\frac{M_{ij}}{(s-s_i)^j}$, $j=\overline{1,k}$;

шаг 3 – определяются коэффициенты $\mathrm{M_i}$ по одному из вариантов расчета.

Первый вариант. Определение $\mathrm{M_i}$ с помощью системы уравнений.

Все дроби приводятся к одному знаменателю, затем путем сравнения коэффициентов при равных степенях s числителя полученной дроби и числителя исходной определяется система из n уравнений, где n-степень знаменателя (количество корней s_i и коэффициентов $\mathrm{M_i}$). Решение системы относительно $\mathrm{M_i}$ дает искомые коэффициенты.

Пример 12.2: Декомпозиция дроби из предыдущего примера. В исходной дроби $n=3$, поэтому решение уравнения $s^3+5s^2+6s=0$ дает 3 корня: $s_0=0,\ s_1=-2$ и $s_2=-3$, которым соответствуют знаменатели простых дробей вида s, $(s-s_1)=(s+2)$ и $(s-s_2)=(s+3)$. Исходная дробь декомпозируется на три дроби:

$$Y=\frac{2s+12}{s^3+5s^2+6s}=\frac{2s+12}{s(s+2)(s+3)}=\frac{M_0}{s}=\frac{M_1}{s+2}=\frac{M_2}{s+3}.$$

Далее дроби приводятся к общему знаменателю:

$$=\frac{(M_0+M_1+M_2)s^2+(5M_0+3M_1+2M_2)s+6M_0}{s(s+2)(s+3)}.$$

Сравнивая получившуюся дробь с исходной, можно составить систему из трех уравнений с тремя неизвестными (при 2-й степени s в исходной дроби стоит 0, при 1-й стоит 2, свободный член равен 12):

$$\begin{cases} M_0 + M_1 + M_2 = 0 \\ 5M_0 + 3M_1 + 2M_2 = 2 \\ 6M_0 = 12 \end{cases} \to \begin{cases} M_0 = 2 \\ M_1 = -4 \\ M_2 = 2 \end{cases}$$

Следовательно, дробь можно представить как сумму трех дробей:

$$Y = \frac{2s + 12}{s^3 + 5s^2 + 6s} = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

Второй вариант. Определение коэффициентов $\mathrm{M_i}$ по формулам.

Также как и в 1-м варианте необходимо найти корни знаменателя исходной дроби вида $Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$. Для определения $\mathrm{M_i}$ существуют формулы для каждого вида корней:

- Для нулевого корня $s_i = 0$ знаменатель исходной дроби можно записать в виде $A(s) = sA_1(s)$; тогда коэффициент $\mathrm{M_i}$ можно определить как $M_i = \left.\frac{B(s)}{A_1(s)}\right|_{s=0}$.

- Для ненулевого некратного корня (действительного или комплексного) s_i:

$$M_i = \left.\frac{B(s)}{A'(s)}\right|_{s=s_i},$$

где $A'(s)$ - производная знаменателя по s.

Примечание - Комплексные корни при решении уравнений появляются комплексно-сопряженными парами вида $s_i = \alpha_i \pm j \cdot \omega_i$, где α_i - действительная часть корня, ω_i - мнимая часть, j - мнимая единица. Поэтому коэффициенты для этих корней также будут комплексно-сопряженными: $M_i = c_i \pm d_i$. То есть достаточно определить коэффициент только для одного корня, для парного корня он будет комплексно-сопряженным.

- Для корня s_i кратности k исходная дробь может быть представлена в виде

$$Y(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{(s-s_i)^k\cdot A_1(s)};$$

данному корню соответствуют k дробей вида

$$\frac{M_{ij}}{(s-s_i)^{k+1-j}},\ j=\overline{1,k},$$

коэффициенты которых определяются по формуле

$$M_{\substack{i,k+1-j\\ j=\overline{1,k}}}=\frac{1}{(j-1)!}\cdot\lim_{s\to s_i}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left\{\frac{B(s)}{A_1(s)}\right\}.$$

Пример 12.3: Декомпозиция дроби. Рассматривается та же дробь, имеющая три корня: $s_0=0$, $s_1=-2$ и $s_2=-3$.

Для корня $s_0=0$ имеем $B(s)=2\cdot s+12$, $A_1(s)=s^2+5s+6$,

$$M_0=\left.\frac{B(s)}{A_1(s)}\right|_{s=0}=\left.\frac{2\cdot s+12}{s^2+5\cdot s+6}\right|_{s=0}=\frac{12}{6}=2.$$

Для корня $s_1=-2$ имеем $A'(s)=3\cdot s^2+10\cdot s+6$ и

$$M_1=\left.\frac{B(s)}{A'(s)}\right|_{s=s_1}=\left.\frac{2\cdot s+12}{3\cdot s^2+10\cdot s+6}\right|_{s=-2}=\frac{8}{-2}=-4.$$

Для корня $s_2=-3$ имеем аналогично

$$M_2=\left.\frac{B(s)}{A'(s)}\right|_{s=s_{21}}=\left.\frac{2\cdot s+12}{3\cdot s^2+10\cdot s+6}\right|_{s=-3}=\frac{6}{3}=2.$$

Видно, что коэффициенты $\mathrm{M_i}$, полученные разными методами, совпадают.

Пример 12.4: Случай обратного преобразования Лапласа при наличии комплексных корней.

Изображение выходного сигнала имеет вид

$$Y(s)=\frac{5{,}75}{s(1{,}8s^3+5{,}22s^2+4{,}3s+6{,}75)}.$$

Корни знаменателя включают нулевой корень, действительный и пару комплексных корней: $s_0=0$; $s_1=-2{,}54$; $s_{2,3}=-0.18\pm j*1.20$.

Изображение $Y(s)$ разбивается на сумму четырех дробей:

$$Y(s)=Y_0(s)+Y_1(s)+Y_{2,3}(s)=\frac{M_0}{s}+\frac{M_1}{s-s_1}+\left(\frac{M_2}{s-s_2}+\frac{M_3}{s-s_3}\right).$$

Тогда оригинал y(t), согласно таблицам 12.1 и 12.2, имеет вид

$$y(t)=y_0(t)+y_1(t)+y_{2,3}(t)=M_0+M_1*e^{S_1t}+2e^{\alpha_t}\left[C\cdot\cos(\omega\cdot t)-D\cdot\sin(\omega\cdot t)\right],$$

где α и ω - действительная и мнимая части пары комплексных корней $s_{2,3}$ C и D – действительная и мнимая части пары коэффициентов M_2 и M_3.

Для корня $s_0=0$:

$$M_0=\frac{B(0)}{A_1(0)}=\left.\frac{5{,}75}{1{,}8s^3+5{,}22s^2+4{,}3s+6{,}75}\right|_{S=0}=\frac{5{,}75}{6{,}75}=0{,}85,$$

$$Y_0(s)=\frac{M_0}{s}=\frac{0{,}85}{s},$$

$$y_0(t)=M_0=0{,}85.$$

Для корня $s_1=-2{,}54$:

$$M_1=\left.\frac{B(s)}{A'(s)}\right|_{S=S1}=\left.\frac{5{,}75}{(1{,}8s^4+5{,}22s^3+4{,}3s^2+6{,}75s)'}\right|_{S=S1}=,$$

$$=\left.\frac{5{,}75}{7{,}2s^3+15{,}66s^2+8{,}6s+6{,}75}\right|_{S=S1}=-0{,}18,$$

$$Y_1(s)=\frac{M_1}{s-s_1}=\frac{-0{,}18}{s+2{,}54},$$

$$y_1(t)=M_1*e^{S_1t}=-0{,}18*e^{-2{,}54t}.$$

Для корней $s_{2,3}=-0.18\pm j*1.20$:

$$M_2=\left.\frac{B(s)}{A'(s)}\right|_{S=S2}=\left.\frac{5{,}75}{(1{,}8s^4+5{,}22s^3+4{,}3s^2+6{,}75s)'}\right|_{S=S2}=,$$

$$=\left.\frac{5{,}75}{7{,}2s^3+15{,}66s^2+8{,}6s+6{,}75}\right|_{S=S2}=-0{,}34+j*0{,}24,$$

$$Y_{2,3}(s)=\frac{M_2}{s-s_2}+\frac{M_3}{s-s_3}=\frac{-0{,}34+j\cdot 0{,}24}{s+0{,}18+j\cdot 1{,}20}+\frac{-0{,}34-j\cdot 0{,}24}{s+0{,}18-j\cdot 1{,}20},$$

$$y_{2,3}(t)=2e^{-0.18t}\left[-0{,}34\cos(1{,}20t)-0{,}24\sin(1{,}20t)\right].$$

В итоге получаем оригинал:

$$y(t)=0{,}85-0{,}18e^{-2{,}54t}-2e^{-0{,}18t}\left[0{,}34\cos(1{,}20t)+0{,}24\sin(1{,}20t)\right].$$

Контрольные вопросы

1. Для чего используются преобразование Лаплас?
2. Что такое операторное уравнение?
3. Для чего используется обратное преобразование Лаплас?
4. Какие свойства имеет преобразование Лаплас?
5. Как отличается теорема дифференцирования?

Лекция № 13

Выражать динамических систем по виду пространство состояние. Построение алгебраическое структура системы. Переходная матрица.

1. **Анализ систем управления методами пространства состояний.**
2. **Понятие пространство состояний.**
3. **Дифференциальные уравнения состояния.**
4. **Построение алгоритмическую структуру системы. Переходная матрица.**

Ключевые слова: анализ, синтез, дифференциальное уравнение, пространства состояний, пространство выхода, пространство входа, функция времени, алгоритмическая структура, переходная матрица, вектор состояния.

1. Анализ систем управления методами пространства состояний.

При исследовании систем управления с научными или инженерными целями в большинстве случаев приходится иметь дело с двумя типами задач. К первому типу можно отнеси задачи ***анализа***, когда требуется определить характеристики заранее заданной системы; ко второму типу – задачи ***синтеза***, когда требуется спроектировать систему, обладающую заданными характеристиками. Существует два основных подхода к анализу и синтезу линейных систем управления. Общепринятый подход сводится по существу к составлению блок-схемы или структурной схемы и определению передаточных функций отдельных элементов и всей системы. Задача конструктора состоит в выборе регулятора, обеспечивающего получение требуемых статических и динамических характеристик системы.

Второй подход основан главным образом на возможности описания поведения системы некоторым количеством дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных состояния с начальными условиями, определяемыми из уравнений переходных состояний. Переменные состояния при таком описании системы аналогичны обобщенным координатам в классической механике. Решение задачи при использовании этого подхода обычно начинают с составления схемы системы, в переменных состояния. Методы анализа и синтеза систем управления, использующие этот способ описания поведения системы, принято называть ***методами пространство состояний.*** Этот подход лежит в основе современной теории управления.

2. Понятие пространство состояний.

Анализ и синтез систем управления во временной области основан на понятии состояния системы. ***Состояние системы – это совокупность таких переменных, знание которых наряду с входными функциями и уравнениями, описывающими динамику системы, позволяет определить её будущее состояние и выходную переменную.***

Методы анализа и синтеза систем управления и обработки информации, использующие теоретико-множественный подход к описанию поведения динамических систем, получили быстрое развитие в течение нескольких последних лет. В рассматриваемой области эти методы стали применяться сравнительно недавно, хотя положенные в их основу идеи уже длительное время использовались в классической механике, в теории конечных автоматов, теории дифференциальных уравнений, а также в других областях.

С точки зрения анализа и синтеза систем представляется целесообразным разделить все переменные характеризующие систему или имеющие определенное к ней отношение на три группы:

1) входные переменные или входные воздействия m_i, представляющие сигналы, генерируемые системами, внешними по отношению к исследуемой, и влияющие на поведение системы;

2) выходные переменные или переменные, характеризующие реакцию системы y_i, позволяющие описать некоторые аспекты поведения системы, представляющие интерес для исследователя;

3) переменные (координаты) состояния или промежуточные переменные x_k, характеризующие динамическое поведение исследуемой системы.

Схематически система может быть изображена в виде «черного ящика» с некоторым числом входных и выходных каналов, как показано на рис. 36. входные каналы в этом рисунке представляют совокупность выходных переменных или входных воздействий m_i; выходные каналы – совокупность выходных переменных или выходных координат y_i системы. Промежуточные переменные или координаты состояния x_k отнесены к содержимому «черного ящика» и, таким образом, скрыты от наблюдателя. Величины m_i, y_i и x_k предполагаются функциями времени и $m_i(t)$, $y_i(t)$ и $x_k(t)$ обозначают соответственно значения величин m_i, y_i и x_k в момент времени t.

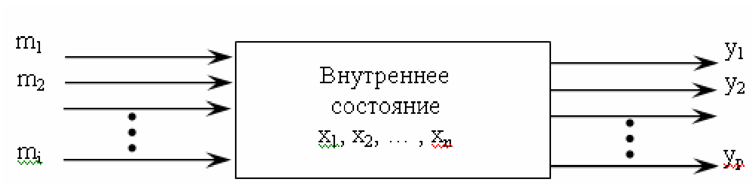


Рис.36. К описанию системы переменными состояния

Для удобства оперирования с многомерными величинами совокупность входных переменных представим в виде ***вектора входа***

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_i \end{bmatrix} \quad (13.1)$$

совокупность выходных переменных – в виде ***вектора выхода***

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \quad (13.2)$$

и совокупность переменных состояния – в виде ***вектора состояния***

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (13.3).$$

Согласно понятию векторного пространства, которые может принять вектор входа m в момент t, образует ***пространство входа*** системы. Аналогично, множества всех значений, которые может принять вектор выхода y в момент t, образует ***пространство выхода*** системы, и множество всех значений, которые может принять вектор состояния x в момент t, образует ***пространство состояний*** системы.

В любой момент времени t состояние системы является функцией начального состояния $x(t_0)$ и вектора входа $m(t_0, t)$, т.е.

$$x(t) = F[x(t_0);\ m(t_0, t)] \quad (13.4)$$

где F - однозначная функция своих аргументов.

Вектор выхода в момент времени t является также функцией $x(t_0)$ и $m(t_0, t)$ и может быть записан как

$$y(t)=\psi\left[x(t_0);\ m(t_0,t)\right]. \tag{13.5}$$

Уравнения (13.4) и (13.5) часто называют уравнениями состояния системы. Для систем, описываемых дифференциальными уравнениями, уравнения (13.4) и (13.5) могут быть записаны в следующей общей форме:

$$\dot{x}(t)=F\left[x(t);\ m(t)\right]; \tag{13.6}$$

$$y(t)=\psi\left[x(t);\ m(t)\right]. \tag{13.7}$$

Для систем, которые являются конечными автоматами, уравнения состояния принимают вид

$$x(n)=F\left[x(n-1);\ m(n-1)\right]; \tag{13.8}$$

$$y(n)=\psi\left[x(n);\ m(n)\right]. \tag{13.9}$$

Если система описывается линейными дифференциальными уравнениями, то уравнения состояния системы сводятся к следующим:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+D(t)m(t); \tag{13.10}$$

$$y(t)=B(t)x(t)+C(t)m(t), \tag{13.11}$$

где $A(t)$ - матрица коэффициентов;

$B(t)$ - матрица управления;

$D(t)$ - матрица выхода;

$C(t)$ - матрица обхода системы.

Для линейной системы со случайными параметрами уравнения состояния могут быть записаны в виде

$$\dot{x}(t)=A(r)x(t)+D(r)m(t), \tag{13.12}$$

где матрицы A и D являются функциями вектора случайных параметров r.

Вывод уравнения состояния, полностью характеризующих систему, является начальным этапом анализа синтеза систем в современной теории управления.

3. Дифференциальные уравнения состояния

Состояния системы описывается дифференциальными уравнениями первого порядка относительно каждой из переменных состояния. Эти уравнения в общем случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \ldots + b_{1m}u_m \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \ldots + b_{2m}u_m \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \ldots + b_{nm}u_m
\end{aligned} \qquad (13.13)$$

где $\dot{x} = dx/dt$. Эту же систему дифференциальных уравнений можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_m \end{bmatrix} \qquad (13.14)$$

Матрица столбец, состоящая из переменных состояния, называется ***вектором состояния*** и имеет вид

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

где полужирное начертание символа означает вектор. Вектор входных сигналов обозначается как u. Тогда систему можно описать в компактном виде ***дифференциальным уравнением состояния***

$$\dot{x} = Cx + Bu \tag{3.16}$$

Уравнение (3.16) часто называют просто уравнением состояния.

От выше излагаемых видно, что изменение состоянии системы связано с выходным сигналом и первоначальным состоянием системы.

А выходной сигнал системы связано с состоянием системы и входным сигналом.

$$\dot{\vec{x}} = f[\vec{x}, \vec{u}] \qquad \vec{y} = f[\vec{x}_0, \vec{u}]$$

4. Построение алгоритмическую структуру системы. Переходная матрица.

Алгоритмическая структура системы. Общем виде можно выражать динамики системы следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{A}\vec{x} + \vec{B}\vec{u} \\ \vec{y} = \vec{C}\vec{x} + \vec{D}\vec{u} \end{cases}$$

По основе этой уравнений можно построить алгоритмическую структуру системы:

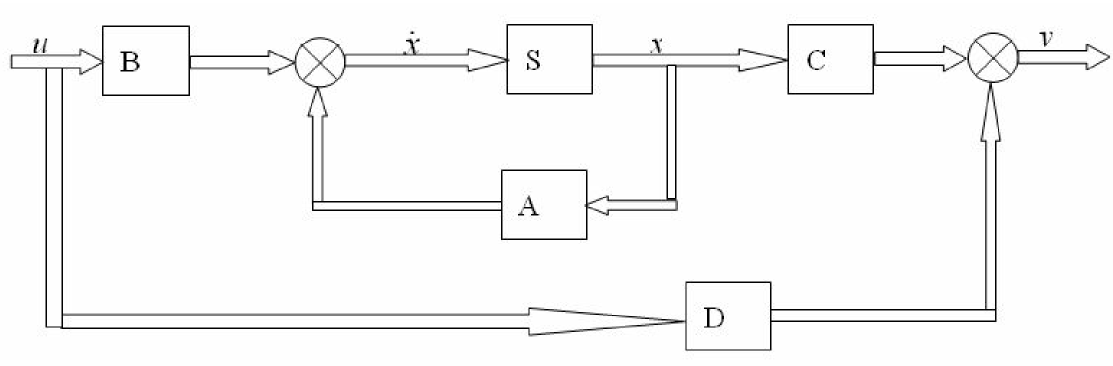


Рис.37. Общая алгоритмическая структура системы

При схематической изображений этой схемы будем использовать следующие обозначение:

1. Операция интегрирование.

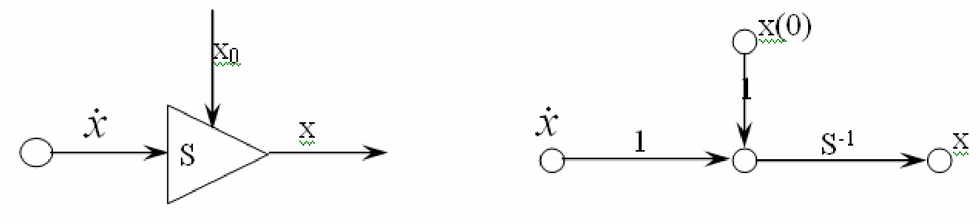


Рис. 38. Операция интегрирование.

2. Суммирование.

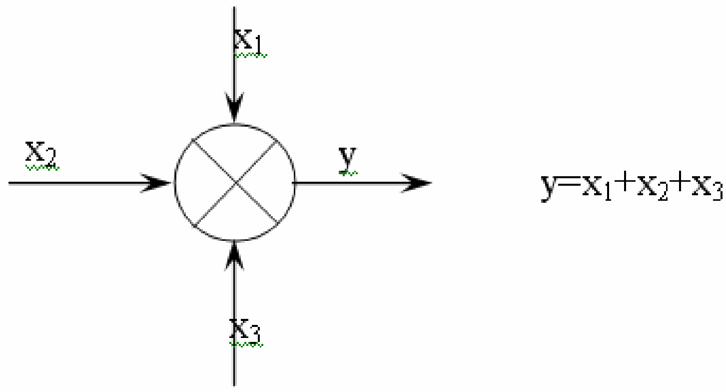


Рис. 39. Операция суммирование.

3. Пропорциональность.

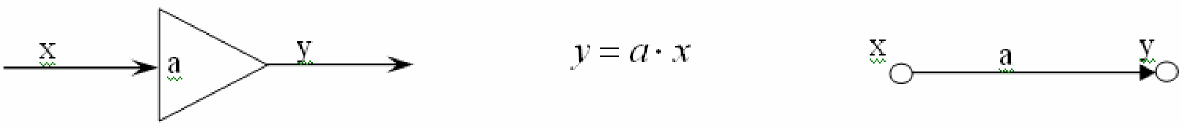


Рис. 40. Операция пропорциональности.

Пример 13.1: Пусть будет написан динамика системы с дифференциальным уравнением 2-го порядка. Построить алгоритмический структуру и графический модель системы.

$$y'' + ay' + by = ku$$
$$y'' = ku - ay' - by$$

Решение:

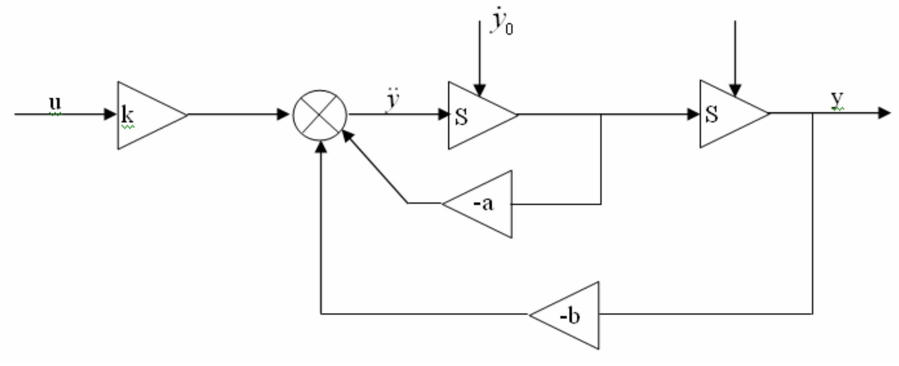


Рис.41. Алгоритмическая структура системы

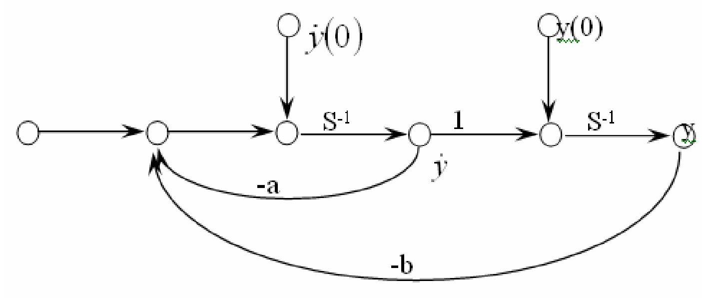


Рис. 42. Графический модель

Переход с дифференциальной уравнений на уравнения состояния системы. Переход с дифференциальной уравнений на уравнения состояния системы будем рассмотреть следующими примерами:

Пример 13.2: Построить уравнения состояния от заданной дифференциальной уравнений системы.

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = u_1 - 3\dot{y}_1 - 2y_2 \\ \ddot{y}_2 = u_2 - y_2 - \dot{y}_1 \end{cases}$$

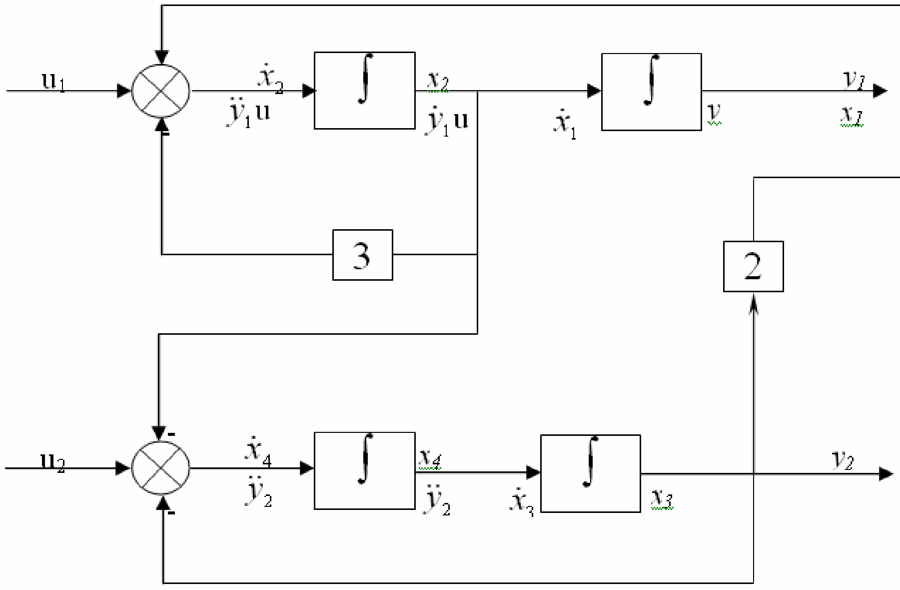


Рис. 43. Структурный вид системы

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1- & 0\end{bmatrix}}_{A}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{B}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{C}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

Контрольные вопросы

1. Скажите отличие анализа и синтеза?
2. Что называется состоянием системы?
3. Что называется вектором входа и выхода?
4. Как обозначается матрица коэффициентов, матрица управления, матрица выхода и матрица обхода системы?
5. Как записывается уравнения состояния со случайными параметрами для линейной системы?
6. Объясните матричной вид дифференциальных уравнений системы?
7. Какие схематические обозначение принимается при алгоритмических изображений систем?

Лекция № 14

Наблюдаемость и управляемость динамических систем.

1. **Управляемость. Управляемость системы.**
2. **Наблюдаемость. Наблюдаемость системы.**

Ключевые слова: управляемость, наблюдаемость, матрица управляемости, граф, вектор столбец, вектор строка, матрица наблюдаемости.

1. Управляемость. Управляемость системы.

Говорят, что система, описываемая матрицами (A,B), является ***управляемой***, если существует такое неограниченное управление u, которое может перевести систему из произвольного начального состояния $x(0)$ в любое другое заданное состояние $x(t)$. Управляемость системы, описываемой уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Можно определить, исследуя алгебраическое условие

$$\textit{ранг}\left[B\; AB\; A^2 B \ldots A^{n-1}B\right] = n \tag{14.1}$$

Для системы с одним входом и одним выходом вводится понятие ***матрицы управляемости*** P_c, которое выражается через A и B как

$$P_c = \left[B\; AB\; A^2\, B \ldots A^{n-1}B\right] \tag{14.2}$$

и имеет размерность $n \times n$. Если определитель матрицы P_c, отличен от нуля, то система является управляемой.

Пример 14.1: Управляемость системы. Рассмотрим систему, описываемую передаточной функцией

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = T(s) = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

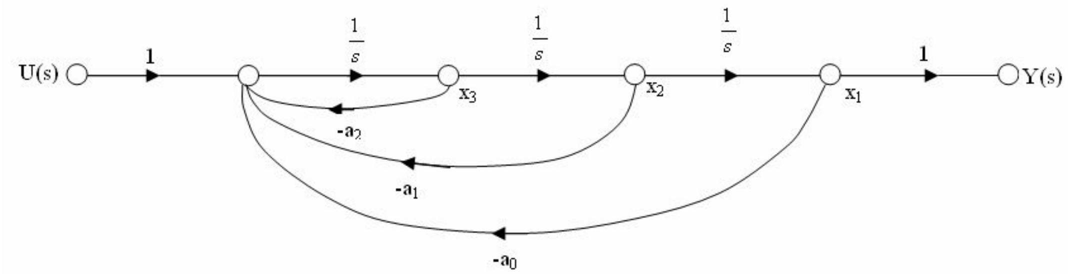


Рис.44. Модель системы третьего порядка в виде графа

Модель этой системы в виде графа изображен на рис.44. видно, что существует пути от $u(t)$ ко всем переменным состояния, следовательно, система является управляемой. Матричное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Отсюда имеем:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{bmatrix}, \; A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_2 \\ (a_2^2 - a_1) \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & (a_2^2 - a_1) \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы P_c отличен от нуля, тем самым мы ещё раз убеждаемся, что система управляема.

Пример 14.2: Управляемость системы с двумя переменными состояния.

Рассмотрим систему, переменные состояния которой описываются дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = -2x_1 + u, \quad x_2 = -3x_2 + dx_1,$$

и найдем условие, при котором система будет управляемой. Из графа системы, представленного на рис.45. видно также, что $y = x_2$. Анализ графа показывает, что система будет управляемой, если $d \neq 0$. При $d = 0$ сигнал u не имеет пути к переменной x_2. Подтвердим этот вывод, образовав матрицу P_c.

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \; AB = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ d \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -d \end{bmatrix},$$

определитель этой матрицы равен *d,* и он будет отличен от нуля, только если $d \neq 0$.

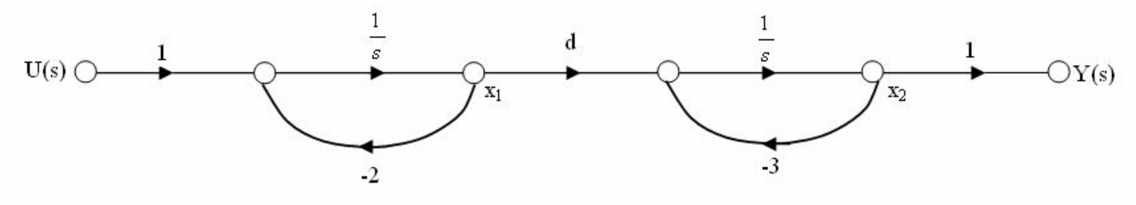


Рис.45. Граф к примеру 14.2.

2. Наблюдаемость. Наблюдаемость системы

Все корни характеристического уравнения можно разместить в заданных точках s - плоскости только в том случае, когда система является наблюдаемой и управляемой. Наблюдаемость связана со способностью оценивать переменные состояния. Говорят, что система может быть наблюдаемой, если каждая переменная состояния вносит свой вклад в выходной сигнал системы. Это эквивалентно тому, что на модели системы в виде графа от каждой переменной состояния существуют путь к выходной переменной.

Система является наблюдаемой тогда и только тогда, если существует конечное время T такое, что начальное состояние $x(0)$ может быть определено в результате наблюдения выходной переменной $y(t)$, $t \in T$, при заданном управлении $u(t)$. Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, описываемую уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases},$$

где C есть вектор-строка, а x - вектор столбец. Система является наблюдаемой, если определитель матрицы Q размерности $n \times n$ (называемой матрицей наблюдаемости) отличен от нуля, где

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{14.1}$$

Система, структура которой представлена в форме фазовой переменной, всегда является наблюдаемой.

Пример 14.3: Наблюдаемость системы. Рассмотрим систему из примера 14.1, модель которой в виде графа приведена на рис. 44. Видно, что от каждой переменной состояния существует путь к $y(t)$, поэтому система может быть наблюдаема.

Подтвердим это, образовав матрицу Q.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \text{ и } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } CA^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\det Q = 1$.т.е.система является наблюдаемой.

Пример 14.4: Наблюдаемость системы с двумя переменными состояния. Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \text{ и } y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Модель этой системы в виде графа изображена на рис 46. анализ графа говорит о том, что, казалось бы, система является управляемой и наблюдаемой. Проверим, так ли это, образовав матрицы P_c и Q.

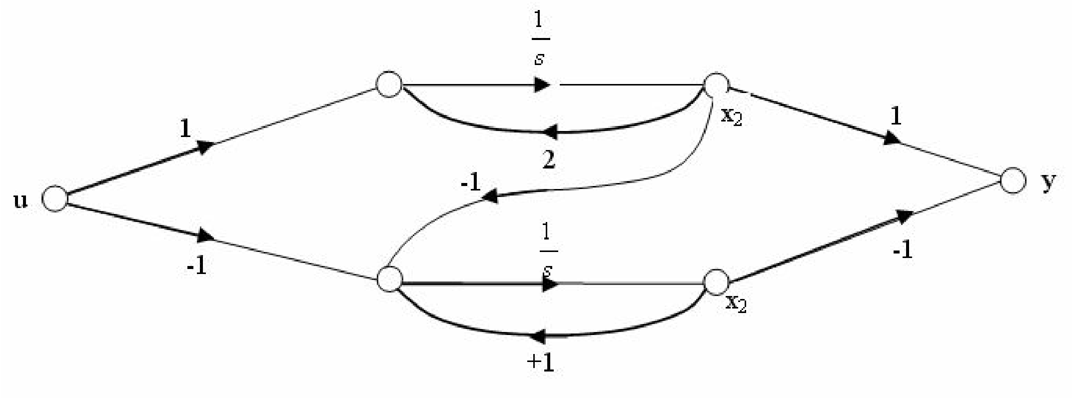


Рис.46. Граф к примеру 14.4.

Имеем

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ и } AB = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$\det P_c = 0$.т.е. система не является управляемой.

Далее,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } CA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\det Q = 0$.т.е. система не является наблюдаемой.

Попробуем разобраться, почему это так. Если ещё раз посмотреть на граф системы, то можно заметить, что

$$y = x_1 + x_2 .$$

Однако

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2x_1 + (x_2 - x_1) + u - u = x_1 + x_2 .$$

Таким образом, переменные состояния не зависят от u, и система неуправляема. Аналогично, выход $y = x_1 + x_2$ зависит от суммы $x_1(0) + x_2(0)$, а это позволяет определить раздельно $x_1(0)$ и $x_2(0)$. Поэтому система ненаблюдаема.

Контрольные вопросы

1. Что такое управляемость?
2. Как определяется управляемость системы?
3. Что такое наблюдаемость?
4. Как определяется наблюдаемость системы?
5. Когда система является управляемой?
6. Когда система является наблюдаемой?

Лекция № 15

Элементарные логические функции. Способы задания логических функций. Построение логических формул по таблице истинности.

1. Элементарные логические функции.

2. Принцип суперпозиции. Законы и тождества алгебры логики.

3. Способы задания логической функции.

4. Конституенты единицы и нуля. Составление логической формулы по таблице истинности.

5. Функционально полные системы элементарных булевых функций.

6. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы булевых функций

7. Минимизация булевых функций.

Ключевые слова: принцип суперпозиции, таблица истинности, дизъюнктивные функции, конъюнктивные функции, минимизация, монотонность, линейность, самодвойственность, конституента.

1. Элементарные логические функции

Одним из основных понятий в математической логике является понятие высказывания. Под высказыванием понимается всякое предложение, относительно которого имеет смысл утверждать о его истинности или ложности. Например, 8 - четное число, 2 больше 10, сегодня воскресенье, и т.д.

Из простейших высказываний путем соединения их с помощью логических связок можно составлять новые, более сложные высказывания. Истинность или ложность новых высказываний определяется истинностью или ложностью составляющих высказываний и тем, какими логическими связками они соединены.

Абстрагируясь от конкретного содержания высказывания можно рассматривать его как некоторую величину, которая может иметь какое-либо одно значение из двух возможных значений: истина или ложь. При этом сложное высказывание, составленное из простых высказываний, в математической логике рассматривается как некоторая функция от высказываний-аргументов. Множество значений, которые может принимать функция, тоже состоит из двух элементов: истина и ложь.

В дальнейшем высказывания будем обозначать прописными буквами латинского алфавита. Значение истинности обозначают через 1, а значение лжи через 0.

Логика, которая оперирует лишь с объектами (высказывания, функции), принимающими одно из двух возможных значений, называется двузначной или булевой. Простые высказывания называются логическими или булевыми переменными, а их функции - логическими или булевыми функциями, либо функциями алгебры логики (ФАЛ).

Булева функция, зависящая от n аргументов, называется n-местной и является полностью заданной, если указаны ее значения для всех наборов значений аргументов. Так как число возможных значений каждого аргумента равно 2, то при числе аргументов n количество различных наборов 2^{2^n} значений аргументов равно 2^n. Каждому набору может соответствовать одно из двух возможных значений функций. Следовательно, количество различных булевых функций от **n** переменных равно

Функции одной и двух логических переменных называются элементарными.

Логические функции одной переменной. Для одной переменной число функций равно 4. Все эти функции F_1, F_2, F_3, F_4 представлены в таблице 15.1, которая называется таблицей истинности логических функций. Значение функций F_1 и F_2 не зависят от значения аргумента X. Это константы $F_1 = 1$ и $F_1 = 0$. Значение функции F_3 повторяют значения аргумента X, $F_3 = X$. Наконец, значения функции F_4 противоположны значениям аргумента.

Логические функции

Таблица 15.1

x	F1	F2	F3	F4
0	1	0	0	1
1	1	0	1	0

Функции F_1, F_2, F_3 являются тривиальными и практического интереса не представляют. Функция F_4 называется отрицанием или инверсией и обозначается $\bar{x}$.

Логические функции

Таблица 15.2.

X	1	0	1	0	Название функции	Обозначение	«Замечательные» свойства				
Y	1	1	0	0			1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	Константа 0	0	X			X	X
1	0	0	0	1	Стрелка Пирса	$X \downarrow Y$					
2	0	0	1	0	Запрет по Y	$X \Delta Y$	X				
3	0	0	1	1	Инверсия Y	$\overline{Y}$			X		X
4	0	1	0	0	Запрет по X	$Y \Delta X$	X				
5	0	1	0	1	Инверсия X	$\overline{X}$			X		X

6	0	1	1	0	Сумма по модулю 2	$X \oplus Y$	X				X
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера	X / Y					
8	1	0	0	0	Конъюнкция, умножение	$X \cdot Y$, $X \wedge Y$ $X \& Y$	X	X		X	
9	1	0	0	1	Эквивалентность	$X \sim Y$		X			
10	1	0	1	0	Переменная X	X	X	X	X	X	X
11	1	0	1	1	Импликация от Y к X	$X \to Y$		X			
12	1	1	0	0	Переменная Y	Y	X	X	X	X	X
13	1	1	0	1	Импликация от X к Y	$X \to Y$		X			
14	1	1	1	0	Дизъюнкция, сложение	$X + Y$, $X \vee Y$	X	X		X	
15	1	1	1	1	Константа 1	1		X		X	X

Логические функции двух переменных. Для двух переменных число всех возможных функций равно $2^4 = 16$. Полный набор функций двух переменных, их обозначения и названия приведены в табл.2. Из таблицы видно, что восемь функций могут быть получены из других восьми путем применения операции отрицания.

Некоторые логические функции обладают определенными свойствами, получившими название “замечательные” свойства. Всего различают пять “замечательных” свойств. В табл.15.2 эти свойства отмечены номерами: 1- свойство сохранять нуль, 2- свойство сохранять единицу, 3-

самодвойственность, 4-монотонность, 5-линейность. Более подробно об этих свойствах сказано дальше.

2. Принцип суперпозиции. Законы и тождества алгебры логики

Выражения, построенные из конечного числа логических переменных, знаков логических функций, а также констант 0 и 1 называют булевыми формулами. Каждая булева формула может рассматриваться как некоторая булева функция от логических переменных, значение которой на каждом наборе переменных можно получить, если подставить значения переменных (0 или 1) на этом наборе в формулу и произвести указанные логические операции.

В логическую формулу вместо любой ее буквы можно подставить как независимую переменную, так и переменную, являющуюся функцией других переменных. В этом заключается принцип суперпозиции, т.е. подстановки булевых функций вместо аргументов в другую булеву функцию. С помощью принципа суперпозиции любая булева функция может быть представлена как некоторая комбинация функций двух переменных, полный набор которых представлен в табл.15.2.

Могут быть построены различные логические функции $A(X,Y,Z,...)$ и $B(X,Y,Z,...)$ от одних и тех же логических переменных $X,Y,Z,...$ которые имеют одни и те же значения на всех одинаковых наборах переменных, т.е. $A(X,Y,Z,...)=B(X,Y,Z,...)$

Такое соотношение называется логическим тождеством. Для проверки тождества можно строить таблицы истинности для левой и для правой частей и сравнивать значения функций на всех наборах переменных.

Например, рассмотрим тождество $(X \to Y)+\overline{X}Y=\overline{X}+Y$. Построим таблицу истинности для левой и для правой частей выражения и сравним их значения на всех наборах переменных X и Y (табл.15.3). Из таблицы видно, что это выражение представляет собой тождество.

Таблица истинности

Таблица 15.3

X	Y	$\overline{X}$	$X \to Y$	$\overline{X}Y$	$(X \to Y)+\overline{X}Y$	$\overline{X}+Y$
0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1

Рассмотрим важнейшие тождества алгебры логики.

$X \cdot X = X$, $\left.\begin{matrix} X \cdot X \cdot X \ldots X = X \\ X + X + X \ldots X = X \end{matrix}\right\}$ Законы идемпотентности.

$X + X = X$,

$\left.\begin{matrix} X + Y = Y + X \\ X \cdot Y = Y \cdot X \end{matrix}\right\}$ Коммутативные законы.

$\left.\begin{matrix} (X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z) \\ (X + Y) + Z = X + (Y + Z) \end{matrix}\right\}$ Ассоциативные законы.

$\left.\begin{matrix} (X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z \\ (X \cdot Y) + Z = (X + Z) \cdot (Y + Z) \end{matrix}\right\}$ Дистрибутивные законы.

$X + 1 = 1,$ $X + 0 = X$

$X \cdot 1 = X$, $X \cdot 0 = 0$.

$X + \overline{X} = 1.$ Закон исключенного третьего.

$X \cdot \overline{X} = 0$. Закон противоречия.

$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$, Законы де Моргана.

$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$.

$\overline{\overline{X}} = X$. Закон двойного отрицания.

Рассмотрим еще несколько тождеств, в которых логические выражения, содержащие различные функции, приравниваются к выражениям, содержащим лишь функции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

$$X \oplus Y = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}.$$

$$X \to Y = \overline{X} + Y.$$

$$X \sim Y = X \cdot Y + \overline{X} \cdot \overline{Y}.$$

Если некоторая логическая функция тождественно равна единице, то она называется тавтологией. Если нулю - противоречием.

3. Способы задания логической функции

Существует ряд способов задания логической функции. Рассмотрим важнейшие из них.

1. Формула, указывающая последовательность логических операций, которые нужно произвести над высказываниями - аргументами, чтобы получить значение функции. Например, $F(X_1, X_2, X_3) = X_1 \cdot \overline{X_2} \to X_3$.

2. Таблица истинности. В таблице указываются значения функции в зависимости от значений истинности аргументов. Если функция зависит от n аргументов, то число всех наборов аргументов равно 2^n.

В таблице истинности указываются все наборы и значение функции на каждом наборе.

3. Числовой способ задания функции. Каждой независимой переменной-аргументу функции ставится в соответствие число $2^k\ (k = 0,1,2,...)$. Аргументы функции записываются в виде упорядоченного множества, например, $F(X_1, X_2, X_3)$. При этом переменная, записанная крайней справа, получает коэффициент $2^0 = 1$, переменная, стоящая рядом слева, получает коэффициент $2^1 = 2$ и т. д. Так, для функции $F(X_1, X_2, X_3)$ независимые переменные получают следующие коэффициенты: $X_3 - 1, X_2 - 2, X_1 - 4$. Для каждого набора независимых переменных определяется число номер **N** по формуле

$$N = 4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3$$

При задании функции указывают номера тех наборов, на которых функция равна единице, и перед списком номеров единичных наборов ставят знак дизъюнкции. Можно также указать те номера наборов, на которых функция равна нулю, но при этом перед списком нулевых наборов ставят знак конъюнкции. Например, функция, заданная таблицей истинности (табл.4) может быть записана следующим образом: $F(X,Y,Z,) = \vee(0,1,4,7) = \wedge(2,3,5,6)$.

Таблица истинности

Таблица 15.4

N	X	Y	Z	F
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

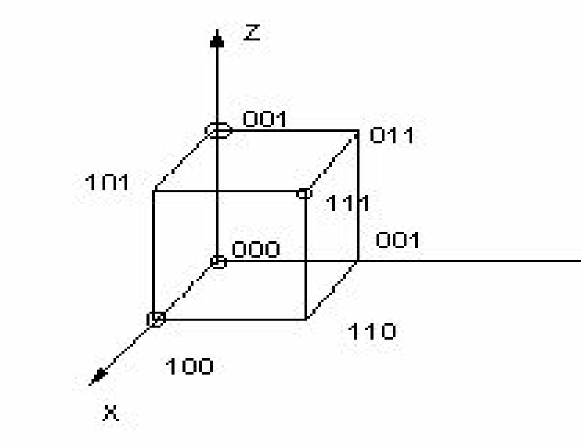


Рис.47. Геометрический способ задания логической функции

4. Геометрический способ задания логической функции. Для функции n - независимых логических переменных рассматривается единичный n-мерный куб. Вершины куба соответствуют наборам независимых переменных. Каждой вершине приписывают значение функции на соответствующем наборе. На рисунке единичные наборы помечают, например, кружками. (рис.47).

5. Логическая схема, представляющая собой условное графическое обозначение логических функций. На рис.48 показаны графические обозначения некоторых элементарных логических функций. На рис.49 показан пример логической схемы.

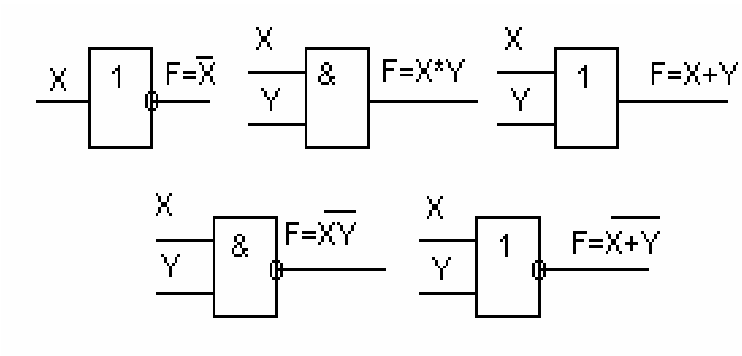


Рис.48. Графические обозначения элементарных логических функций.

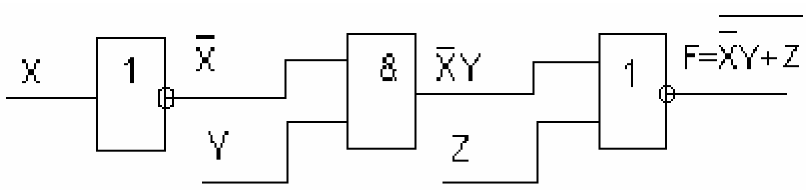


Рис.49. Логическая схема.

4. Конституенты единицы и нуля. Составление логической формулы по таблице истинности

Конъюнкция любого количества различных независимых переменных, входящих в нее в утвердительной или инверсной форме не более одного раза, называется элементарной конъюнкцией. Например, $ABC\overline{D}, X, \overline{X}\,\overline{Y}$. Выражения $(A+B)C, ABC\overline{A}, \overline{XYZ}$ не являются элементарными конъюнкциями.

Дизъюнкция любого количества различных независимых переменных, входящих в нее в утвердительной или инверсной форме не более одного раза, называется элементарной дизъюнкцией. Например, $A+B+C+D, A+B$. Выражения $AB+C+D, \overline{A+B}+C, A+\overline{A}+B$ не являются элементарными дизъюнкциями.

Пусть задана некоторая логическая функция n независимых переменных $F(X_1, X_2, ..., X_n)$. Элементарная конъюнкция, в которую входят все n независимые переменные, называется конституентой единицы.

Элементарная дизъюнкция, в которую входят все n независимые переменные, называется конституентой нуля.

Очевидно, для функции n независимых переменных общее число всех конституент единицы также как и общее число всех конституент нуля равно 2^n.

Пример. Для функции трех переменных $F(X_1, X_2, X_3)$ выпишем все конституенты единицы и все конституенты нуля.

Конституенты единицы: $X_1 X_2 X_3$, $\overline{X}_1 X_2 X_3$, $X_1 \overline{X}_2 X_3$, $X_1 X_2 \overline{X}_3$, $\overline{X}_1 \overline{X}_2 X_3$, $\overline{X}_1 X_2 \overline{X}_3$, $X_1 \overline{X}_2 \overline{X}_3$, $\overline{X}_1 \overline{X}_2 \overline{X}_3$.

Конституенты нуля: $X_1 + X_2 + X_3$, $\overline{X}_1 + X_2 + X_3$, $X_1 + \overline{X}_2 + X_3$, $X_1 + X_2 + \overline{X}_3$, $\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + X_3$, $\overline{X}_1 + X_2 + \overline{X}_3$, $X_1 + \overline{X}_2 + \overline{X}_3$, $\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \overline{X}_3$.

Каждая конституента единицы равна единице лишь на одном, вполне определенном наборе значений переменных. Для каждого набора имеется своя конституента, принимающая значение 1 на этом наборе и значение 0 на всех остальных наборах. Например, конституента единицы $\overline{X}_1 \overline{X}_2 X_3$ равна единице на наборе $X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1$.

Любая булева функция может быть представлена в виде дизъюнкции всех тех конституент единицы, которые равны единице на тех же наборах, что и данная функция.

Рассмотрим функцию $F(X_1, X_2, ..., X_n)$. Пусть $K_{m1}, K_{m2}, ..., K_{mi}$, конституенты единицы, которые равны единице на наборах $m_1, m_2, ..., m_i$, совпадающих с единичными наборами функции. Рассмотрим выражение

$$F(X_1, X_2, ..., X_n) = K_{m1}, K_{m2}, ..., K_{mi}. \tag{15.1}$$

Покажем, что (1) есть тождество. Действительно, на каждом из наборов с номерами $m_1, m_2, ..., m_i$ равна единице только одна конституента, стоящая в правой части (1), а остальные равны нулю. Следовательно, на этих наборах и только на них правая часть (1) принимает значение, равное единице. Но на этих же наборах и левая часть (1) равна единице, а на остальных она равна нулю. Следовательно, выражение (1) есть тождество. Отсюда следует правило записи формулы булевой функции по заданной таблице истинности.

Чтобы булеву функцию, заданную таблицей истинности, представить в виде дизъюнкции ее конституент единицы, нужно составить дизъюнкцию тех конституент единицы, которые равны единице на тех же наборах, что и данная функция. При этом, если в наборе, для которого $F = 1$, какая-либо переменная равна единице, то ее нужно записать в конституенте единицы в утвердительной форме, если какая-либо переменная равна нулю, то ее нужно записать в конституенте единицы с отрицанием. Такая форма записи логической функции называется - совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ).

Любую логическую функцию можно также представить в виде конъюнкции тех конституент нуля, которые равны нулю на тех же наборах, что и данная функция.

Чтобы булеву функцию, заданную таблицей истинности, представить в виде конъюнкции ее конституент нуля нужно составить конъюнкцию тех конституент нуля, которые равны нулю на тех же наборах, что и данная функция. При этом, если в наборе, для которого $F = 0$, какая-либо переменная равна единице, то ее нужно записать в конституенте нуля с отрицанием, если какая-либо переменная равна нулю, то ее нужно записать в утвердительной форме. Такая форма записи логической функции называется - совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).

Пример. Рассмотрим функцию, таблица истинности которой приведена в табл.4. Для этой функции СДНФ и СКНФ имеют вид:

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z + X\overline{Y}\,\overline{Z} + XYZ = \text{СДНФ}$$

$$= (X + \overline{Y} + Z)(X + \overline{Y} + \overline{Z})(\overline{X} + Y + \overline{Z})(\overline{X} + \overline{Y} + Z)\ \text{СКНФ}.$$

5. Функционально полные системы элементарных булевых функций

Система элементарных булевых функций называется функционально полной (или же полная система функций), если произвольную булеву функцию можно представить суперпозицией функций этой системы. Полная система функций образует базис. Минимальным базисом называется такой, в котором при удалении хотя бы одной функции, образующей этот базис, нарушается его полнота.

Теорема о функциональной полноте. Для того, чтобы система булевых функций была функционально полной, необходимо и достаточно, чтобы эта система включала:

хотя бы одну функцию, не сохраняющую нуль;

хотя бы одну функцию, не сохраняющую единицу;

хотя бы одну несамодвойственную функцию;

хотя бы одну немонотонную функцию;

хотя бы одну нелинейную функцию.

Доказательство этой теоремы основано на том, что суперпозиция любого числа функций, образующих замкнутый класс, представляет собой функцию этого же класса. Можно предположить, что наибольшее число функций, образующих базис, равно пяти. Однако ввиду того, что многие булевы функции удовлетворяют одновременно нескольким требованиям, предъявляемым теоремой о функциональной полноте, количество независимых булевых функций, образующих минимальный базис, меньше пяти.

В функционально полную систему элементарных логических функций двух аргументов в соответствии с теоремой о функциональной полноте должны входить такие функции, которые совместно перекрывают клетками без крестиков колонки 1-5 табл. 2. Из функций, представленных в табл. 2, можно составить различные функционально полные системы. Рассмотрим некоторые из них.

1. $F = X / Y$. Эта функция не обладает ни одним из “замечательных” свойств, следовательно, она одна образует минимальный базис.

2. $F = X \downarrow Y$. Так же как и “штрих Шеффера” эта функция не обладает ни одним из указанных свойств и поэтому образует минимальный базис.

3. $F_1 = X \to Y$ и $F_2 = 0$, или $F_1 = Y \to X$ и $F_2 = 0$.

4. $F_1 = X \oplus Y$, $F_2 = X \cdot Y$, $F_3 = 1$. Функции этого базиса входят в полином Жегалкина.

Из всего многообразия возможных функционально полных систем булевых функций в технике наибольшее распространение получил базис, содержащий три функции: конъюнкция, дизъюнкция и отрицание. Этот базис не является минимальным, но использование всех трех указанных функций совместно с константами 0 и 1 позволяет сравнительно легко строить сложные логические устройства на электронных элементах.

6. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы булевых функций

Различают две основные формы представления логических функций в базисе И, ИЛИ, НЕ - дизъюнктивную и конъюнктивную. Форма определяется той операцией, которая выполняется последней. При этом очередность выполнения операций следующая: сначала выполняют те операции, которые заключены в скобки, затем отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию. Например, $F_1 = X_1 X_2 (X_3 + X_4)$, $F_2 = X_1 X_2 X_3 + X_4$. F_1 - конъюнктивная, F_2 - дизъюнктивная форма.

Дизъюнкцию элементарных конъюнкций называют дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Конъюнкцию элементарных дизъюнкций называют конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

Любая булева функция может быть представлена как в ДНФ, так и в КНФ. Для того, чтобы произвольную функцию представить в ДНФ или в КНФ нужно:

1. Пользуясь соответствующими тождествами алгебры логики перевести заданную функцию в базис **И, ИЛИ, НЕ**.

2. Используя законы де-Моргана и дистрибутивные законы преобразовать функцию в нужную форму.

При преобразованиях логических формул может возникнуть необходимость перейти от конъюнктивной формы к дизъюнктивной и наоборот. В первом случае задача сводится к раскрытию скобок, что аналогично соответствующей операции в алгебре чисел.

При переходе от дизъюнктивной формы к конъюнктивной нужно использовать второй дистрибутивный закон, не имеющий места в алгебре чисел:

$$AB + C = (A + C)(B + C).$$

Например, преобразуем функцию F_2 из предыдущего примера в **КНФ**:

$$X_1X_2X_3 + X_4 = (X_1 + X_4)(X_2X_3 + X_4) = (X_1 + X_4)(X_2 + X_4)(X_3 + X_4).$$

Любая булева функция может быть представлена как в **СДНФ** так и в **СКНФ**. Как записать ту или иную форму по таблице истинности уже было сказано ранее. Рассмотрим теперь, как можно получить эти формы записей булевых функций, не прибегая к таблице истинности, а путем аналитических преобразований заданной формулы.

Пусть булева функция задана в **ДНФ**. Для преобразования ее в **СДНФ** нужно каждую элементарную конъюнкцию, в которой не хватает каких-либо $(X_i + \overline{X}_i)(X_k + \overline{X}_k)(X_n + \overline{X}_n)$ переменных данной функции (например, X_i, X_k, X_n) умножить на выражение, тождественно равное единице, а затем раскрыть скобки. После приведения подобных членов получим дизъюнкцию элементарных конъюнкций, каждая из которых содержит все переменные данной функции, т.е. является конституентой единицы, а все выражение - СДНФ. Например,

$$X_1X_2 + X_2X_3 = X_1X_2(X_3 + \overline{X}_3) + X_2X_3(\overline{X}_1 + X_1) = X_1X_2X_3 + X_1X_2\overline{X}_3 + \overline{X}_1X_2X_3.$$

Пусть булева функция задана в **КНФ**. Для преобразования ее в **СКНФ** нужно к каждой элементарной дизъюнкции, в которой не хватает каких-либо переменных данной функции (например, X_i, X_k, X_n) прибавить выражение, тождественно равное нулю $X_i\overline{X}_i + X_k\overline{X}_k + X_n\overline{X}_n$, а затем проделать последовательно преобразования по второму дистрибутивному закону. В результате получится конъюнкция элементарных дизъюнкций, каждая из которых будет содержать все переменные данной функции, т.е. конъюнкция конституент нуля - **СКНФ**. Пример:

$$F=(X_1+X_2)(X_2+X_3)=(X_1+X_2+X_3\overline{X}_3)(X_2+X_3+X_1\overline{X}_1)=$$
$$(X_1+X_2+X_3)(X_1+X_2+\overline{X}_3)(\overline{X}_1+X_2+X_3)$$

7. Минимизация булевых функций

Задача минимизации булевой функции состоит в том, чтобы найти эквивалентную ей формулу, имеющую минимальную сложность. Под сложностью формулы понимают количество входящих в нее букв. Наиболее хорошо разработаны методы минимизации белевых функций, представленных в **ДНФ**. Эти методы основаны на понятии простой импликанты.

Если некоторая булева функция φ равна нулю на тех же наборах, на которых равна нулю другая функция F, а также и на некоторых других наборах, то говорят, что функция φ входит в функцию F и является ее импликантой. Условие вхождения записывается следующим образом: $\varphi \subset F$. Например, рассмотрим функцию $F = X \oplus Y$. Ее импликантами являются функции $G_1 = X\overline{Y},\ G_2 = \overline{X}Y,\ G_3 = 0$.

Простыми импликантами булевой функции F называют такие элементарные конъюнкции, которые сами входят в данную функцию, но ни какая собственная часть этих конъюнкций в функцию F не входит. Собственной частью называют произведение, полученное путем исключения из данного произведения одного или нескольких сомножителей. Например, произведение $X\overline{Y}Z$ имеет такие собственные части: $X\overline{Y}, \overline{Y}Z, XZ, X, Y, Z$.

Например, для $F = X \oplus Y\ \overline{X}Y \subset F,\ X\overline{Y} \subset F,\ Y \not\subset F,\ X \not\subset F,\ \overline{Y} \not\subset F$. Значит $\overline{X}Y$ и $X\overline{Y}$ являются простыми импликантами функции F.

Простые импликанты представляют собой самые короткие элементарные конъюнкции, входящие в данную булеву функцию.

Любая булева функция может быть представлена в виде дизъюнкции всех своих простых импликант. Дизъюнкция всех простых импликант называется сокращенной ДНФ булевой функции. Существует несколько алгоритмов получения сокращенной ДНФ булевой функции. Одним из наиболее хорошо разработанных является метод Квайна.

Метод Квайна. Этот метод основан на преобразовании СДНФ с помощью операции неполного склеивания и поглощения.

Операция склеивания (полного) определяется соотношением

$$XY + X\overline{Y} = X .$$

Говорят, что два члена XY и $X\overline{Y}$ склеиваются по переменной Y.

Операция неполного склеивания определяется формулой

$$XY + X\overline{Y} = X + XY + X\overline{Y} .$$

В правой части кроме члена X, получающегося в результате склеивания, записываются оба члена, участвующие в склеивании.

Операция поглощения определяется соотношением

$$X + XY = X .$$

Теорема Квайна. Если в **СДНФ** булевой функции провести все операции неполного склеивания, а затем все операции поглощения, то получится сокращенная ДНФ этой функции, т.е. дизъюнкция всех ее простых импликант.

Действительно, пусть F задана в **ДНФ**; например, $F = F_1 + F_2 + F_3$. Предположим, что F_1, F_2 и F_2, F_3 попарно склеиваются, т.е. $F_1 + F_2 = G_1,\ F_2 + F_3 = G_2$, тогда $G_1 + G_2 = F_1 + F_2 + F_3 = F$.

Покажем, что $G_1, G_2 \subset F$. Действительно, из того, что $F = 0$ следует, что $G_1 = 0$ и $G_2 = 0$. Если $F = 1$, то может быть либо $G_1 = 0$ и $G_2 = 1$, либо $G_1 = 1$ и $G_2 = 0$, либо $G_1 = 1$ и $G_2 = 1$. Значит G_1 и G_2 равны нулю на всех тех наборах, на которых равна нулю функция F и на некоторых других наборах.

Практически сокращенную **ДНФ** удобно находить в такой последовательности.

Провести в **СДНФ** все возможные операции неполного склеивания конституент единицы и все возможные операции поглощения.

Затем провести все возможные операции неполного склеивания и поглощения членов с $(n-1)$ буквой.

Провести все возможные операции неполного склеивания и поглощения членов с числом букв, равным $(n-2)$ и т. д.

Пример.

$$F=\overset{1}{\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3X_4}+\overset{2}{\overline{X}_1\overline{X}_2X_3X_4}+\overset{3}{\overline{X}_1X_2\overline{X}_3X_4}+\overset{4}{\overline{X}_1X_2X_3X_4}+\overset{5}{X_1X_2X_3\overline{X}_4}+\overset{6}{X_1X_2X_3X_4}\ .$$

Проводим все возможные операции неполного склеивания и поглощения с четырехбуквенными конъюнкциями. Результат вносим в таблицу:

Неполная склеивания

Таблица 15.5

Номера склеиваемых конъюнкций	Результат склеивания
1 – 2	$\overline{X}_1\overline{X}_2X_4$
1 – 3	$\overline{X}_1\overline{X}_3X_4$
2 – 4	$\overline{X}_1X_3X_4$
3 – 4	$\overline{X}_1X_2X_4$
4 – 6	$X_2X_3X_4$
5 – 6	$X_1X_2X_3$

Записываем сокращенную формулу, в которую должны войти конъюнкции, полученные в результате склеивания, и те исходные конституенты единицы, которые не склеились:

$$F=\overset{1}{\overline{X}_1\overline{X}_2X_4}+\overset{2}{\overline{X}_1\overline{X}_3X_4}+\overset{3}{\overline{X}_1X_3X_4}+\overset{4}{\overline{X}_1X_2X_4}+\overset{5}{X_2X_3X_4}+\overset{6}{X_1X_2X_3}\ .$$

В полученном выражении выполняем снова все возможные операции склеивания и поглощения:

1 – 4 $\qquad\qquad$ $\overline{X}_1X_4$

2 – 3 $\qquad\qquad$ $\overline{X}_1X_4$

Первый и четвертый, второй и третий члены попарно склеиваются. Пятый и шестой члены остаются. Таким образом, получим:

$$F = \overline{X}_1 X_4 + X_2 X_3 X_4 + X_1 X_2 X_3$$

В этом выражении нет членов, которые склеиваются, поэтому оно является сокращенной дизъюнктивной нормальной формой. Для того, чтобы найти минимальную дизъюнктивную форму, можно воспользоваться импликантной матрицей. В импликантной матрице столбцы помечаются конституентами единицы заданной функции, а строки - импликантами, полученными в результате склеивания (табл. 5).

Результаты склеивания

Таблица 15.6

Простые импликанты	Конституенты единицы					
	$\overline{X}_1 \overline{X}_2 \overline{X}_3 X_4$	$\overline{X}_1 \overline{X}_2 X_3 X_4$	$\overline{X}_1 X_2 \overline{X}_3 X_4$	$\overline{X}_1 X_2 X_3 X_4$	$X_1 X_2 X_3 \overline{X}_4$	$X_1 X_2 X_3 X_4$
$\overline{X}_1 X_4$	+	+	+	+		
$X_2 X_3 X_4$				+		+
$X_1 X_2 X_3$					+	+

Если импликанта является собственной частью некоторой конституенты единицы, то клетка матрицы, соответствующей этой импликанте и конституенте единицы, помечается крестиком. Чтобы получить минимальную дизъюнктивную нормальную форму заданной функции, нужно найти минимальное число импликант, которые совместно накрывают крестиками все колонки импликантной матрицы. В приведенном примере минимальная дизъюнктивная форма заданной функции имеет вид

$$F = \overline{X}_1 X_4 + X_1 X_2 X_3 .$$

Может оказаться, что функция имеет несколько различных минимальных форм одинаковой сложности.

Контрольные вопросы

1.Объясните математическую логику?

2.Как обозначается таблица истинности?

3. Как определяется логическая функция двух переменных?

4. Объясните принцип суперпозиции.

5. Какие законы и тождества алгебры логики существует?

6. Какие способы задания существует?

7.Как составляется функция по таблице истинности?

8. Какие функций называется функционально полной?

9. Какие нормальные формы булевых функций существует?

10. Как решается задача минимизации булевых функций?

Лекция № 16

Случайные процессы. Основные свойства случайных величин. Интегральный и дифференциальный закон распределения. Момент и свойства случайных величин.

1. **Случайные величины и их основные характеристики.**
2. **Интегральный закон распределения (функция распределения).**
3. **Дифференциальный закон распределения (плотность вероятности).**
4. **Моменты случайных величин и их свойства**

Ключевые слова: случайные величины, случайные процессы, интегральный закон распределения, дифференциальный закон распределения, момент случайных величин, математическое ожидание, дисперсия.

1. Случайные величины и их основные характеристики

Случайная величина - это величина, которая в результате испытаний принимает различные случайные значения из множества возможных значений (но только одно в данном испытании). Для полной характеристики случайной величины необходимо знать все значения, которые она может принимать, и вероятности каждого из этих значений.

Случайные величины могут быть дискретными либо непрерывными.

Случайная величина называется дискретной, если ее возможные значения дискретны.

Случайная величина называется непрерывной, если она может принять любое значение из некоторого определенного интервала.

2. Интегральный закон распределения (функция распределения)

Важной характеристикой случайной величины является функция распределения. Функцией распределения называется вероятность того, что случайная величина принимает значение, меньшее некоторого заданного значения X. $F(X) = P(x < X)$,

где x - текущее значение случайной величины X.

Рассмотрим дискретную случайную величину, представляющую собой число очков на верхней грани игральной кости при ее случайном бросании. Как видно из рис.50 функция распределения этой случайной величины является ступенчатой функцией. Величина ступеньки на каждом значении случайной величины равна вероятности этого значения величины.

Для дискретной случайной величины функция распределения представляет собой ступенчатую неубывающую функцию. Скачки функции соответствуют значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений.

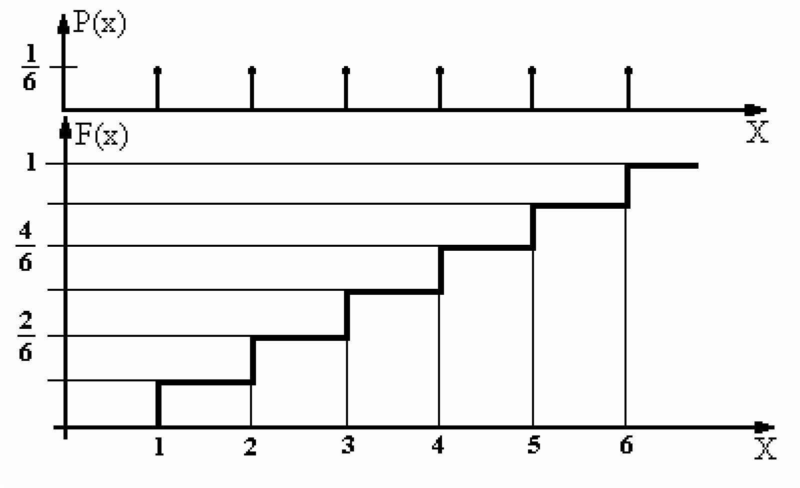


Рис.50. Функция распределения

По мере увеличения числа возможных значений число скачков увеличивается, сами скачки уменьшаются. В пределе для бесконечного числа возможных значений (непрерывная случайная величина) функция распределения становится непрерывной.

Свойство функции распределения

Для любой случайной величины $F(-\infty)=0,\ F(\infty)=1$.

Для непрерывной случайной величины $F(X)$ есть монотонная неубывающая функция от X.

Вероятность того, что случайная непрерывная величина примет определенное числовое значение X, бесконечно мала. Вероятность того, что она окажется в некотором промежутке $X_1 < X_2 < X_3$, будет иметь конечное значение.

Так как $F(X_1)=P(x<X_1)$ и $F(X_2)=P(x<X_2)$, то $F(X_2)-F(X_1)=P(X_1 \le x \le X_2)$.

3. Дифференциальный закон распределения (плотность вероятности)

Плотностью вероятности $f(X)$, либо дифференциальным законом распределения называется величина

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

$$f(x) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{F(X + \Delta x) - F(X)}{\Delta x} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{P(X \le x < X + \Delta x)}{\Delta x}$$

Из последнего выражения видно, что $f(X)\Delta x$ представляет собой с точностью до малых высшего порядка вероятность для случайной величины x находиться в бесконечно малом интервале $(X < x < X + \Delta x)$. Очевидно, что $P(X < x < X + dx) = f(x)dx$.

Вероятность того, что случайная величина содержится между значениями $X_1 < x < X_2$ определяется формулой:

$$P(X_1 < x < X_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Кроме того

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(X).$$

4. Моменты случайных величин и их свойства

Начальным момента порядка k случайной величины X, определенной в области $-\infty < X < \infty$ ($a < X < b$ в частном случае) и имеющей плотность вероятности $f(x)$ называется число, определяемое следующим образом:

$V_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$ для непрерывной случайной величины;

$V_k = \sum_{I=1}^{\infty} X_I^k P(X_I)$ для дискретной случайной величины.

$V_1 = \int_{-\infty}^{\infty} Xf(x)dx = M(X) = mx = \tilde{x}$ - среднее значение (математическое ожидание) случайной величины.

$V_2 = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f(x)dx = M(X^2) = \tilde{x}^2$ - средний квадрат случайной величины.

$\sqrt{V_2^2}$ - среднеквадратическое значение случайной величины X.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется число

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \widetilde{x})^k f(x) dx .$$

Для дискретной случайной величины

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x - \widetilde{x})^k P(x_i) .$$

Центральный момент порядка k случайной величины есть математическое ожидание k - ой степени отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Наибольшее значение имеет центральный момент второго порядка, называемый дисперсией.

$$\mu_2 = D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \widetilde{x})^2 f(x) dx = (x - \widetilde{x})^2 = M[(x - \widetilde{x})^2]$$

$\sqrt{D_x} = \sigma_x$ - среднеквадратичное отклонение.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C) = C$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = CM(X)$.

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Замечание: две случайные величины называют независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла другая величина.

4. Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

5. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

Свойства среднеквадратичных отклонений

1. Пусть случайная величина U равна сумме независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$. Определим связь между дисперсией случайной величины U и дисперсиями слагаемых $X_1 .....X_n$.

Имеем

$$U = X_1 + X_2 + ... + X_n \tag{16.1}$$

Учитывая, что среднее суммы случайных величин равно сумме их средних, можно записать

$$\widetilde{U} = \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 + ... + \widetilde{X}_n \tag{16.2}$$

Отнимаем (16.2) из (16.1):

$$U - \widetilde{U} = (X_1 - \widetilde{X}_1) + (X_2 - \widetilde{X}_2) + ... + (X_n - \widetilde{X}_n) \tag{16.3}$$

Возведем в квадрат (3) и возьмем среднее для левой и правой частей:

$$\overline{(U - \widetilde{U})^2 = (X_1 - \widetilde{X}_1)^2 + (X_2 - \widetilde{X}_2)^2 + ... + 2(X_1 - \widetilde{X}_1)(X_2 - \widetilde{X}_2) + ...}$$

Рассмотрим выражение $\overline{(X_i - \widetilde{X}_i)(X_j - \widetilde{X}_j)}$. Раскрыв скобки и воспользовавшись свойством среднего, получим:

$$\overline{(X_i - \widetilde{X}_i)(X_j - \widetilde{X}_j)} = \overline{X_i X_j} - \overline{\widetilde{X}_i X_j} - \overline{X_i \widetilde{X}_j} + \overline{\widetilde{X}_i \widetilde{X}_j} = \widetilde{X}_i \widetilde{X}_j - \widetilde{X}_i \widetilde{X}_j - \widetilde{X}_i \widetilde{X}_j + \widetilde{X}_i \widetilde{X}_j = 0$$

Следовательно

$$D_U = D_{x1} + D_{x2} + ... + D_{xn} \tag{16.4}$$

Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Взяв корень квадратный от левой и правой частей (4), получим:

$$\sigma_U = \sqrt{\sigma^2{}_{x1} + \sigma^2{}_{x2} + \ldots + \sigma^2{}_{xn}} \ .$$

Эта формула часто применяется в измерительной технике и автоматике для вычисления среднеквадратичных ошибок.

2. Пусть имеется n случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с одинаковыми средними значениями $\widetilde{X}$ и с одинаковыми законами распределения. Тогда их среднее арифметическое

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n}$$

тоже будет случайной величиной с тем же самым средним значением $\widetilde{Y} = \widetilde{X}$, но среднеквадратическое отклонение его будет в $\sqrt{n}$ раз меньше, чем для каждой из составляющих (для независимых случайных величин).

Докажем, что $D_y = D_x / n$. Имеем:

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n} \text{ и } \widetilde{Y} = \widetilde{X} .$$

Отнимем от левой части $\widetilde{\mathbf{Y}}$, а от правой - $\widetilde{\mathbf{X}}$:

$$Y - \widetilde{Y} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{X \cdot n}{n} = \frac{(X_1 - \widetilde{X}) + (X_2 - \widetilde{X}) + \ldots + (X_n - \widetilde{X})}{n}$$

Возводим в квадрат обе части равенства и возьмем средние значения для левой и правой частей. В результате получим:

$$\overline{(Y - \widetilde{Y})^2} = \frac{\overline{(X_1 - \widetilde{X})^2} + \overline{(X_2 - \widetilde{X})^2} + \ldots + \overline{(X_n - \widetilde{X})^2}}{n^2}$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ - это отдельные значения случайной величины X. При расчете дисперсий их можно обозначить через X.

$$\overline{(Y - \widetilde{Y})^2} = \frac{\overline{(X_1 - \widetilde{X})^2} + \overline{(X_2 - \widetilde{X})^2}}{n^2} = \frac{n\overline{(X - \widetilde{X})^2}}{n^2} \text{, т.е.} \quad D_y = D_x / n$$

Например, если производится n измерений одной и той же физической величины, то их среднее арифметическое Y, хотя тоже является случайной величиной, имеет во много раз меньше среднеквадратичное отклонение, т.е. всегда надежнее, чем каждое измерение в отдельности. Среднее арифметическое большого числа взаимно независимых величин обладает во много раз меньшим рассеянием, чем каждая из этих величин в отдельности.

Контрольные вопросы

1. Что называется случайной величиной?
2. Когда называется случайная величина дискретной?
3. Объясните интегральный закон распределения?
4. Какие свойства имеет функция распределения?
5. Объясните дифференциальный закон распределения?
6. Как образуется начальный момент порядка?
7. Как образуется центральный момент порядка?
8. Какие свойства имеет математическое ожидание?

Лекция № 17

Векторные случайные процессы.

1. Векторные случайные величины.

2. Функция распределения и плотности вероятности двумерного случайного вектора.

3. Моменты системы случайных величин.

4. Случайные функции. Многомерные законы распределения

Ключевые слова: векторные случайные процессы, функция распределения, случайные функции, многомерные законы распределения.

1. Векторные случайные величины

При совместном изучении нескольких случайных величин их рассматривают как систему случайных величин, либо как случайный вектор, компонентами которого являются отдельные случайные величины. Система двух случайных величин (X, Y) геометрически интерпретируется как случайный вектор на плоскости $X0Y$ (рис.51), направленный из начала координат в точку (X, Y) или как случайная точка на плоскости $X0Y$ с координатами (X, Y). Система трех случайных величин может рассматриваться как вектор в трехмерном пространстве, система n случайных величин - как вектор в n- мерном пространстве. Далее ограничимся рассмотрением системы двух случайных величин.

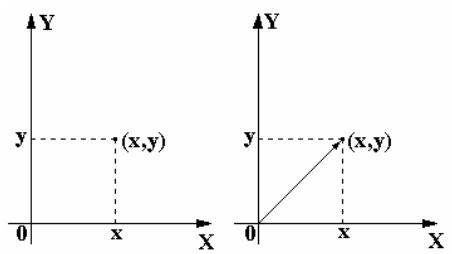


Рис.51. Двумерный случайный вектор

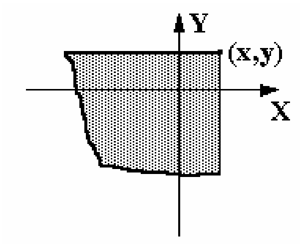


Рис.52. Двумерная функция распределения - вероятность попадания случайной точки в заштрихованную область

2. Функция распределения и плотности вероятности двумерного случайного вектора

Функция распределения системы двух случайных величин (двумерного случайного вектора)- это вероятность совместного выполнения двух неравенств $X < x$ и $Y < y$

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Геометрически - это вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрат с вершиной (x, y), лежащий левее и ниже ее (рис.52). Определим общие свойства функции распределения системы двух случайных величин.

1. Функция распределения $F(x,y)$ является неубывающей функцией двух аргументов, т.е.

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y) \text{ при } x_2 > x_1;$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1) \text{ при } y_2 > y_1.$$

2. Повсюду на -∞ функция распределения равна нулю:

$$F(x,-\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty,-\infty) = 0.$$

3. При одном из аргументов, равном ∞, функция распределения системы превращается в функцию распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x,\infty) = F_1(x); \quad F_1(\infty, y) = F_2(y).$$

4. Если оба аргумента равны ∞, функция распределения системы равна единице:

$$F(\infty,\infty) = 1.$$

Для системы двух случайных величин можно поставить задачу о вероятности попадания случайной точки (X,Y) в некоторую область на плоскости $X0Y$. Чтобы упростить задачу, будем рассматривать область в виде прямоугольника: (рис.53):

$$P(x_1 \leq X < x_2,\ y_1 \leq Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

(нижняя и левая границы включены в прямоугольник, а верхняя и правая - не включены).

Функция плотности вероятности двумерного случайного вектора. Рассмотрим систему двух случайных величин X,Y. На плоскости $X0Y$ выделим прямоугольник со сторонами Δx и Δy, примыкающий к точке с координатами (x,y) (рис.53). Вероятность попадания в этот прямоугольник равна:

$$P[x \leq X < (x+\Delta x),\ y \leq Y < (y+\Delta y)] = F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x, y).$$

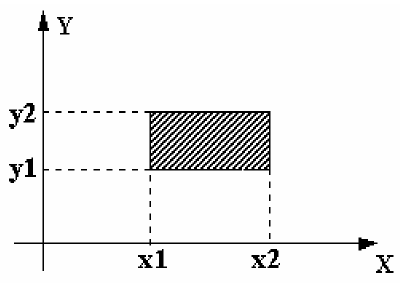


Рис.53

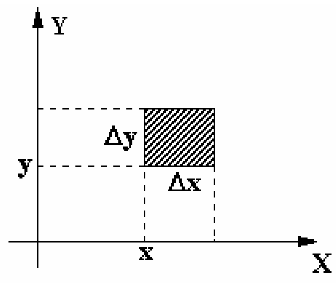


Рис.54

Разделим эту вероятность на площадь прямоугольника и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$;

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x,y)}{\Delta x \Delta y} = F''_{xy}(x,y).$$

Если $F(x,y)$ непрерывна и дифференцируема, то правая часть представляет собой вторую смешанную частную производную функции $F(x,y)$ по x и по y:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F''_{x,y}(x,y).$$

Функция $f(x,y)$ называется плотностью распределения (плотностью вероятности) системы случайных величин.

Для системы случайных величин элемент вероятности $f(x,y)\ dxdy$ - вероятность попадания случайной точки в элементарный прямоугольник со сторонами dx, dy, примыкающий к точке (x,y). Эта вероятность равна объему элементарного параллелепипеда, ограниченного сверху поверхностью $f(x,y)$ и опирающегося на элементарный прямоугольник $dxdy$. Вероятность попадания случайной точки в произвольную область D равна интегралу элементов вероятности по всей области D.

$$P[(x,y) \in D] = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник, ограниченный абсциссами X_1, X_2 и ординатами Y_1, Y_2 равна

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dxdy \ .$$

$$P(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy \, .$$

Рассмотрим основные свойства плотности вероятности.

1. Плотность вероятности системы случайных величин - функция неотрицательная

$$f(x,y) \geq 0 \, .$$

Это ясно из того, что плотность вероятности есть предел отношения двух неотрицательных величин: вероятности попадания в прямоугольник и площади прямоугольника.

2. Двойной интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности системы двух случайных величин равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1 \, .$$

3. Одномерные плотности вероятности по двумерной плотности можно определить с помощью следующих формул:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \, , \qquad f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Зависимые и независимые случайные величины. При изучении системы случайных величин часто возникает необходимость выяснить характер взаимной зависимости этих величин.

Случайная величина Y называется независимой от случайной величины X, если закон распределения величины Y не зависит от того, какое значение приняла случайная величина X. Зависимость величин всегда взаимная. Если величина Y не зависит от X, то и величина X не зависит от Y. Зависимость между случайными величинами можно охарактеризовать с помощью условных законов распределения.

Условным законом распределения величины Y, входящей в систему XY называется ее закон распределения при условии, что другая величина X приняла определенное значение. Условный закон распределения можно задавать как функцией распределения, так и плотностью вероятности. Условная функция распределения случайной величины **y** обозначается $F(y/x)$. Условная плотность вероятности - $f(y/x)$.

Для независимых случайных величин $f(x,y) = f(x)\cdot f(y)$.

3. Моменты системы случайных величин

Начальный момент порядка k случайной величины X может быть определен по формуле

$$M[X^k] = \overline{X^k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X^k f(x,y)dxdy.$$

Для величины **Y**:

$$M[Y^k] = \overline{Y^k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y^k f(x,y)dxdy.$$

Центральные моменты порядка **k** определяются формулами:

$$M[(X-\widetilde{X})^k] = \overline{(X-\widetilde{X})^k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (X-\widetilde{X})^k f(x,y)dxdy.$$

$$M[(Y-\widetilde{Y})^k] = \overline{(Y-\widetilde{Y})^k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (Y-\widetilde{Y})^k f(x,y)dxdy.$$

Например, средние значения для каждой из величин X и Y равны:

$$\widetilde{X} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Xf(x,y)dxdy, \qquad \widetilde{Y} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Yf(x,y)dxdy.$$

Дисперсии величин X и Y могут быть подсчитаны по формулам:

$$D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (X-\widetilde{X})^2 f(x,y)dxdy, \qquad D_y = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (Y-\widetilde{Y})^2 f(x,y)dxdy.$$

Смешанным моментом порядка r, s системы случайных величин X, Y называется математическое ожидание величины $x^r y^s$:

$$M[x^r \cdot y^s] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot y^s f(x,y)dxdy.$$

Очевидно, что при $s=0$, либо $r=0$ формула дает моменты случайной величины X и Y по отдельности.

Смешанным центральным моментом порядка $r,\ s$ случайных величин X, Y называется математическое ожидание величины $(x-\tilde{x})^r \cdot (y-\tilde{y})^s$.

$$\mu_{rs} = M[(x-\tilde{x})^r \cdot (y-\tilde{y})^s].$$

Очевидно, что при $s=0$ или $r=0$ формула дает центральные моменты случайных величин X и Y по отдельности.

Особую роль играет центральный смешанный момент первого порядка μ_{11}, который называется корреляционным моментом:

$$K_{xy} = M[(x-\tilde{x})\cdot(y-\tilde{y})] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\tilde{x})\cdot(y-\tilde{y})f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\cdot f(x,y)dxdy - \tilde{x}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(x,y)dxdy - \tilde{y}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x,y)dxdy +$$

$$+ \widetilde{xy}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \widetilde{xy} - \tilde{x}\cdot\tilde{y} - \tilde{x}\cdot\tilde{y} + \tilde{x}\cdot\tilde{y} = \widetilde{xy} - \tilde{x}\cdot\tilde{y}$$

Коэффициентом корреляции случайных величин X, Y называется безразмерная величина

$$R_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{\delta_x \delta_y}}.$$

Важным свойством коэффициента корреляции является следующее:

$$|R_{xy}| \le 1.$$

Коэффициент корреляции и корреляционный момент независимых случайных величин равен нулю. Случайные величины X и Y называются коррелированными, если их корреляционный момент отличен от нуля. Они называются некоррелированными, если $K_{xy} = R_{xy} = 0$. Независимые величины всегда некоррелированы. Зависимые величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. При ряде обычных законов распределения понятия некоррелированные и независимые совпадают. В частности, для того, чтобы две величины, подчиненные нормальному закону, были взаимно независимы, необходимо и достаточно, чтобы $R_{xy} = 0$.

Величина R_{xy} определяет степень коррелированности (связанности) случайных величин. Если абсолютное значение $|R_{xy}| = 1$, то случайные величины являются полностью коррелированными. При этом случайные величины X и Y связаны между собой линейной зависимостью. Знак R_{xy} определяет характер связанности случайных величин. Положительный знак R_{xy} означает, что при отклонении одной из случайных величин от ее математического ожидания другая случайная величина будет иметь в среднем тенденцию к отклонению от своего математического ожидания по знаку в ту же сторону, что и первая случайная величина. Эта тенденция будет проявляться тем сильнее, чем ближе к единице будет значение R_{xy}. Наоборот, отрицательное значение R_{xy} означает, что при отклонении одной из случайных величин от ее математического ожидания другая случайная величина будет иметь в среднем тенденцию к отклонению от своего математического ожидания по знаку в другую сторону по сравнению с первой случайной величиной. Эта тенденция будет проявляться тем сильнее, чем ближе $k-1$ будет значение R_{xy}.

4. Случайные функции. Многомерные законы распределения

Случайной функцией (процессом) называется функция, значения которой при каждом данном значении аргумента являются случайной величиной. В результате опытов случайная функция принимает различные конкретные формы - это реализации случайной функции. Случайную функцию можно рассматривать как бесконечную совокупность случайных величин, зависящих от одного или нескольких непрерывно изменяющихся параметров. Случайные функции времени называются стохастическими процессами. Случайный процесс не есть определенная кривая (рис.51). Это такая функция времени, значения которой в каждый момент времени являются случайной величиной. Предсказать протекание одной реализации случайного процесса нельзя. Можно сделать лишь предсказание статистического характера относительно множества реализаций, протекающих в одинаковых условиях, т.е. случайный процесс может быть оценен некоторыми вероятностными характеристиками, например, законами распределения. Так как при каждом данном значении аргумента t

значение случайной функции $x(t)$ является случайной величиной, то полной вероятностной характеристикой этого значения является его закон распределения, который называется одномерным законом распределения. Этот закон зависит от t как от параметра и может быть задан одномерной плотностью вероятности $f(x,t)$. Это функция времени, ибо вероятностное распределение с течением времени может меняться.

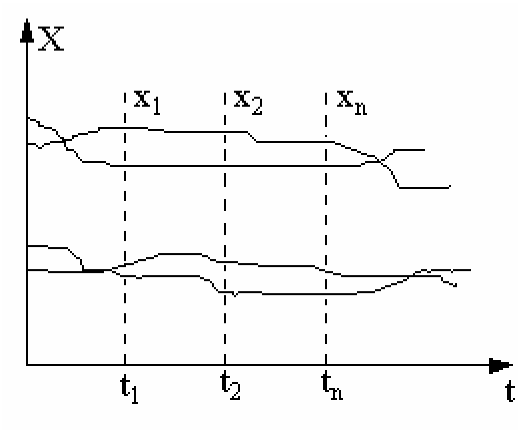


Рис.51. Реализации случайного процесса

Произведение $f(x,t)dx$ дает вероятность того, что в момент времени t величина **X** находится в интервале $(x < X < x + dx)$. Эту величину можно найти приближенно экспериментальным путем, если наблюдать в момент времени t ряд систем, находящихся в одинаковых условиях. Для каждого данного t в отдельности будет свой закон распределения, причем для каждого из них

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dx = 1.$$

Одномерный закон распределения случайной функции является достаточной характеристикой случайной функции для тех задач, в которых значения случайной функции при различных значениях аргумента рассматриваются изолировано друг от друга. Для того, чтобы определить связь между возможными значениями случайной функции $x(t)$ в различные моменты времени, вводится двумерный закон распределения, который задается двумерной плотностью вероятности: $f(x_1, x_{2,} t_1, t_2)$. Это характеристика системы двух случайных величин $x(t_1)$, $x(t_2)$- двух сечений случайной функции $x(t)$ в произвольные моменты времени t_1 и t_2.

Контрольные вопросы

1. Что называется векторной случайной величины?
2. Как обозначается функция распределения?
3. Как обозначается функция плотности вероятности двумерного случайного вектора?
4. Какие основные свойства имеет плотности вероятности?
5. Как характеризуется зависимые и независимые случайные величины?
6. Что называется случайным процессом?

Лекция № 18

Характеристика случайных функций. Операции над случайными функциями.

1. **Характеристики случайных величин.**
2. **Операции над случайными функциями.**

Ключевые слова: случайная функция, дисперсия случайной функции, корреляционная функция, математическое ожидание.

1. Характеристики случайных функций

Для случайных функций вводят простейшие основные характеристики, аналогичные числовым характеристикам случайных величин. Для случайных величин числовые характеристики представляют собой некоторые числа. Характеристики случайных функций в общем случае - функции.

Математическим ожиданием (средним по множеству или по ансамблю) случайной функции $X(t)$ называется такая функция, значения которой при

$$\widetilde{x}(t) = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f(x,t) dx$$

каждом данном значении аргумента t равна математическому ожиданию значений случайной функции x при этом t:

Таким образом, для нахождения $x(t)$ случайной функции необходимо задать ее одномерный закон распределения. Математическое ожидание случайной функции представляет собой некоторую среднюю линию, около которой группируются и относительно которой колеблются все возможные реализации случайной функции. Это есть среднее значение, определенное на основании наблюдений над многими однотипными системами, находящимися при одинаковых условиях в одни и те же моменты времени. Эта величина зависит от момента времени t, для которого она определяется, и иногда называется статистическим средним.

Дисперсия случайной функции. Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $Dx(t)$, значения которой для каждого значения аргумента t совпадает со значением дисперсии соответствующего сечения случайной функции:

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) - \overline{x(t)}\right]^2 \cdot f(x,t) dx ,$$

Эта функция характеризует разброс возможных реализаций случайной функции относительно математического ожидания.

Для описания тесноты связи между значениями случайной функции в различные моменты времени t_1, t_2 служит корреляционная функция.

Корреляционная функция. Корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_x(t_1, t_2)$,

$$K_x(t_1, t_2) = M[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)]$$

которая при каждой паре значений t_1 и t_2 равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной

где $\dot{X}(t_1) = X(t_1) - m_x(t_1), \quad \dot{X}(t_2) = X(t_2) - m_x(t_2)$

Раскрыв символ математического ожидания, получим:

$$K_x(t_1, t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m_x(t_1)) \cdot (x_2 - m_x(t_2)) \cdot f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2 .$$

Положим $t_1 = t_2$, тогда

$$K_x(t, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 \cdot f(x, t)^2 \cdot dx \cdot dx = M\left[\dot{X}^2(t)\right] = Dx(t),$$

т.е. при равенстве аргументов корреляционная функция превращается в дисперсию случайной функции.

В качестве основных характеристик случайной функции достаточно рассматривать ее математическое ожидание и корреляционную функцию.

Поскольку корреляционный момент двух случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$ не зависит от порядка, в котором рассматриваются эти величины, то корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1).$$

Вероятностные характеристики, определенные как средние по множеству реализаций, характеризуют случайный процесс в целом. Различают еще характеристики, как средние по времени, которые характеризуют одну какую-либо реализацию случайного процесса.

Пусть $X_1(t)$ - одна реализация процесса. Тогда ее среднее значение по времени будет равно:

$$\overline{x}_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_1(t)dt .$$

Таким же образом можно определить и все другие вероятностные характеристики для одной реализации. Например, средний квадрат $X_1(t)$ равен:

$$\overline{x}_1^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_1^2(t)dt .$$

Дисперсия одной реализации случайного процесса равна:

$$\overline{Dx_1} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x_1(t) - \overline{x_1}]^2 \cdot dt .$$

2. Операции над случайными функциями

Суммирование случайной и детерминированной функций. Пусть к случайной функции $X(t)$ прибавляется неслучайное слагаемое $\varphi(x)$:

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t) ,$$

где $Y(t)$**-** новая случайная функция.

Посмотрим, как изменяется математическое ожидание и корреляционная функция случайного процесса. Пусть случайная функция $X(t)$ имеет одномерную функцию плотности вероятности $f(x,t)$. Если к случайной величине добавить неслучайную $X(t)+\varphi(t)$, то закон распределения не изменится. Действительно, $\varphi(t)$ означает, что при заданном $t-\varphi(t)$ имеет вполне определенное значение. Поэтому при одном и том же t значения $X(t)$ и $X(t)+\varphi(t)$ будут иметь одну и ту же вероятность. От прибавления в момент t постоянной величины к $X(t)$ закон распределения только лишь сместится по оси **X.**

$$f(y,t) = f[x+\varphi(t)] .$$

Рассмотрим выражение

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t) \tag{18.1}$$

где Y - случайная величина, X - случайная величина, φ - константа (при заданном t).

Найдем дифференциал от левой и правой частей (5): $dy = dx$ (при фиксированном t).

Умножаем (5) на $f(y,t)dy$ и интегрируем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y,t)dy = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x+\varphi,t) \cdot dx + \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x+\varphi,t) \cdot dx .$$

Так как пределы интегрирования $\varphi \pm \infty$, то $\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\varphi,t) \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) \cdot dx = 1$.

Отсюда следует: $m_y = m_x + \varphi(t)$.

Итак, при прибавлении к случайной функции неслучайного слагаемого к ее математическому ожиданию прибавляется то же неслучайное слагаемое.

Корреляционную функцию случайной функции $y(t)$ можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}
&K_y(t_1,t_2) = M\left[\dot{Y}(t_1)\dot{Y}(t_2)\right] = M\left[(Y(t_1) - m_y(t_1)) \cdot (Y(t_2) - m_y(t_2))\right] = \\
&= M\left[(X(t_1) + \varphi(t_1) - m_y(t_1)) \cdot (X(t_2) + \varphi(t_2) - m_y(t_2))\right] = \\
&= M\left[(X(t_1) + \varphi(t_1) - m_x(t_1) - \varphi(t_1)) \cdot (X(t_2) + \varphi(t_2) - m_x(t_2) - \varphi(t_2))\right] = \\
&= M\left[(X(t_1) - m_x(t_1)) \cdot (X(t_2) - m_x(t_2))\right] = K_X(t_1,t_2).
\end{aligned}$$

Таким образом, при прибавлении неслучайного слагаемого к случайной функции корреляционная функция случайной функции не меняется.

Интегрирование случайной функции. Пусть $Y(t) = \int_0^t Xd(\tau)d\tau$ Запишем интеграл как предел суммы:

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau = \lim_{\Delta T \to 0} \sum_i X(\tau_i) \cdot \Delta\tau .$$

Применим к последнему выражению операцию математического ожидания:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = \lim_{\Delta T \to 0} \sum_i M[X(\tau_i)] \cdot \Delta\tau = \lim_{\Delta T \to 0} \sum_i m_x(\tau_i) \cdot \Delta\tau = \int_0^t m_x(\tau) \cdot d\tau .$$

Математическое ожидание интеграла от случайной функции равно интегралу от ее математического ожидания.

Определим корреляционную функцию $K_y(t_1,t_2)$. По определению корреляционной функции

$$K_y(t_1,t_2) = M\left[\dot{Y}(t_1)\cdot\dot{Y}(t_2)\right], \quad \text{где} \quad \dot{Y}(t_1) = \int_0^{t_1}\dot{X}(\tau_1)\cdot d\tau_1; \quad \dot{Y}(t_2) = \int_0^{t_2}\dot{X}(\tau_2)\cdot d\tau_2$$

Перемножив последние выражения, получим:

$$\dot{Y}(t_1)\cdot\dot{Y}(t_2) = \int_0^{t_1}\dot{X}(\tau_1)\cdot d\tau_1\cdot\int_0^{t_2}\dot{X}(\tau_2)\cdot d\tau_2 .$$

Последнее выражение можно переписать в виде двойного интеграла:

$$\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\dot{X}(\tau_1)\cdot\dot{X}(\tau_2)\cdot d\tau_1\cdot d\tau_2 .$$

Применив операцию математического ожидания и меняя ее в правой части с операцией интегрирования, получим:

$$K_y(t_1,t_2) = M\left[\dot{Y}(t_1)\cdot\dot{Y}(t_2)\right] = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}M\left[\dot{X}(\tau_1)\cdot\dot{X}(\tau_2)\cdot d\tau_1\cdot d\tau_2\right].$$

что дает окончательно $K_y(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}K_x(\tau_1,\tau_2)\cdot d\tau_1\cdot d\tau_2$.

Следовательно, чтобы получить корреляционную функцию интеграла от случайной функции, необходимо дважды проинтегрировать корреляционную функцию исходной случайной функции - первый раз по одному аргументу, затем по другому.

Дифференцирование случайной функции. Пусть

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

Найдем характеристики случайной функции $Y(t)$: $m_y(t)$ и $K_y(t_1,t_2)$.

Запишем $Y(t)$ как предел отношения

$$Y(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

Применяя операцию математического ожидания, получим:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_x(t+\Delta t) - m_x(t)}{\Delta t} = \frac{dm_x(t)}{dt}.$$

Таким образом, математическое ожидание производной от случайной функции равно производной от ее математического ожидания.

Будем искать корреляционную функцию $K_y(t_1,t_2)$.

По определению $K_y(t_1,t_2) = M\left[\dot{Y}(t_1)\cdot\dot{Y}(t_2)\right]$

Подставим выражения для $\dot{Y}(t_1)$ и $\dot{Y}(t_2)$

$$K_y(t_1,t_2) = M\left[\frac{d\dot{X}(t_1)}{dt_1}\cdot\frac{d\dot{X}(t_2)}{dt_2}\right]$$

Выражение в квадратных скобках представим в виде второй смешанной частной производной:

$$\frac{d\dot{X}(t_1)}{dt_1}\cdot\frac{d\dot{X}(t_2)}{dt_2} = \frac{\partial^2 \dot{X}(t_1)\cdot\dot{X}(t_2)}{\partial t_1\cdot\partial t_2}.$$

Так как математическое ожидание производной равно производной математического ожидания, получим:

$$K_y(t_1,t_2) = M\left[\frac{\partial^2 \dot{X}(t_1)\cdot\dot{X}(t_2)}{\partial t_1\cdot\partial t_2}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t_1\cdot\partial t_2}M\left[\dot{X}(t_1)\cdot\dot{X}(t_2)\right] = \frac{\partial^2}{\partial t_1\cdot\partial t_2}\cdot K_x(t_1,t_2).$$

Следовательно, чтобы найти корреляционную функцию производной случайного процесса, нужно дважды продифференцировать корреляционную функцию исходной случайной функции: сначала по одному аргументу, затем по другому.

Сложение случайных функций. Если на вход динамической системы поступает не одна случайная функция $X(t_1)$, а две или больше, то возникает задача сложения случайных функций. Точнее эту задачу можно определить как задачу определения характеристик суммы по характеристикам слагаемых.

Если складываемые случайные функции не коррелированны между собой, задача решается просто. В случае зависимости функций - слагаемых для решения задачи необходимо знать еще одну характеристику - взаимную корреляционную функцию.

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов t_1 и t_2, которая при каждой паре значений t_1 и t_2 равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции $X(t)$ и случайной функции $Y(t)$:

$$K_{xy}(t_1,t_2) = M\left[\dot{X}(t_1)\cdot\dot{Y}(t_2)\right]$$

Взаимная корреляционная функция, как и автокорреляционная функция, не изменяется при прибавлении к случайным функциям любых неслучайных слагаемых, а значит и при центрировании случайных функций. Из определения следует важное свойство взаимной корреляционной функции: $K_{xy}(t_1,t_2) = K_{yx}(t_2,t_1)$.

Случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ называются некоррелированными, если взаимная корреляционная функция равна нулю при всех значениях t_1, t_2. При решении практических задач о некоррелированности случайных функций судят в большинстве случаев не по равенству взаимной корреляционной функции нулю. Наоборот, взаимную корреляционную функцию полагают равной нулю, если на основании соображений о физических свойствах процессов их можно считать независимыми. Если известны математические ожидания и корреляционные функции двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$, а так же их взаимная корреляционная функция, то можно определить характеристики суммы этих двух случайных функций:

$$Z(t) = X(t) + Y(t).$$

В соответствии с теоремой сложения математических ожиданий

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t),$$

т.е. математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме их математических ожиданий. Найдем корреляционную функцию

$$K_z(t_1, t_2) = M\left[\dot{Z}(t_1) \cdot \dot{Z}(t_2)\right].$$

Учитывая, что $Z(t) = X(t) + Y(t)$, после подстановки получим:

$$K_z(t_1, t_2) = M\left[\left(\dot{X}(t_1) + \dot{Y}(t_1)\right) \cdot \left(\dot{X}(t_2) + \dot{Y}(t_2)\right)\right] =$$
$$= M\left[\dot{X}(t_1) \cdot \dot{X}(t_2)\right] + M\left[\dot{Y}(t_1) \cdot \dot{Y}(t_2)\right] + M\left[\dot{X}(t_1) \cdot \dot{Y}(t_2)\right] + M\left[\dot{Y}(t_1) \cdot \dot{X}(t_2)\right]$$

или

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2) + K_{xy}(t_1, t_2) + K_{yx}(t_1, t_2)$$

Если случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ не коррелированны, выражение $K_z(t_1, t_2)$ принимает вид: $K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2)$.

Корреляционная функция суммы двух не коррелированных случайных функций равна сумме их корреляционных функций.

Контрольные вопросы

1. Какие характеристики имеет случайные функции?
2. Что называется дисперсия случайной функции?
3. Как определяется корреляционная функция?
4. Какие операции выполняется над случайными функциями?
5. Что представляет собой случайная функция математического ожидания?
6. Как определяется дисперсия случайных функций?

Литература

1. Каримов И.А. Узбекистон в пороге независимости. Ташкент- “Узбекистон” – 2012-440 с.

2. Методи классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004г.

3. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. для вузов. /В.Н.Афанасьев, В.Б.Колмановский, В.Р.Носов. – М.:Висш.шк., 2003. – 614 с.

4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примери с подробними решениями: Учебное пособие. – М.:Едиториал УРСС, 2003. – 176 с.

5. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: Учеб. пособие для вузов. – М.:Высш.шк., 2001. – 445 с.

6. Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 504с.

7. Бородакий Ю.В., Лободинский Ю.Г. Основы теории систем управления. Исследование и проектирование. – М.: Изд-во: Радио и связь, 2004.

8. Певзнер Л.Д., Чураков Е.П. Математические основы теории систем. – М.: Издательство: Высшая школа, 2009.

9. Качала В.В. Основы теории систем и системного анализа. –М.: Изд-во: Горячая Линия - Телеком, 2007.

10. Антонов А.В. Системный анализ: Учебник для вузов. - 2-е изд., стереотип. - М.: Высшая школа, 2006. - 452 с.

11. Павлов С.Н. Теория систем и системный анализ. - Томск: ТМСДО, 2003. - 134 с.

12. Основы системного анализа: Учебник / Феликс Иванович Перегудов, Феликс Петрович Тарасенко. - 3-е изд. - Томск: Издательство научно-технической литературы, 2001. - 390 с.

13. Системный анализ и принятие решений: словарь-справочник: учебное пособие для вузов/ ред. В.Н. Волкова, ред. В.Н. Козлов. - М.: Высшая школа, 2004. - 613 с.

14. Тимаков С.О. Теория систем и системный анализ. - Томск: ТМСДО, 2003. - 35 с.

15. Роналд А. Рокрер. Introduction to Systems Theory. – Department of Electrical Engineering University of California, Berkeley, New York, 2012.- 458с.

16. Заде Л.А., Десоер С.А. Linear System Theory, The State Space Approach, McGraw-Hill, N.Y., 2011.

17. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики: Учеб. пособие для вузов.- М.:Энергоатомиздат, 2007.- 496 с.;ил.

Интернетные данные

1. www.twirpx.ru
2. www.infanata.ru
3. www.boors.ru
4. www.library.ru
5. www.rudocs.exdat.com