O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT TO`QIMACHILIK VA YENGIL SANOAT INSTITUTI

“OLIY MATEMATIKA” kafedrasi

REFERAT

Mavzu: Ikkita vektorning skalyar va vektor ko`paytmalari va ularning xossalari.

7-16 guruh

Bajardi: Sh.Abdushukurov

Tekshirdi: Sh.Ruzmanov

Toshkent 2016

REJA:

1. ***Vektorlar va ular ustida amallar.***

2. ***Vektorlarning skalyar ko'paytmasi.***

3. ***Ikki vektorning vektor ko'paytmasi.***

4. ***Vektorlarning xossalari.***

Vektorlar va ular ustida amallar. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi

Sonli qiymatlari bilan to'liq aniqlanadigan kattaliklar skalyar kattaliklar deb ataladi.

Ham sonli qiymati, ham yo'nalishi bilan aniqlanadigan kattaliklar vektor kattaliklar deyiladi.

Skalyar kattaliklar a, b, c,… kabi harflar bilan, vektor kattaliklar $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,… yoki bu harflarni qalin bo'yalganlari ***a, b, c,…*** bilan belgilanadi.

Geometrik nuqtayi nazardan vektorlar yo'naltirilgan kesmalar singari qaraladi. Boshi A nuqtada va oxiri B nuqtada bo'lgan yo'naltirilgan kesma bilan aniqlanadigan vektor $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Bunda A nuqta vektorning boshi, B nuqta esa vektorning uchi (oxiri) deyiladi. Bu yerda AB kesmaning uzunligi vektorning modulini ifodalaydi, ya'ni $|AB|=|\overrightarrow{AB}|$.

Har qanday ***a*** vektorning sonli qiymati uning moduli yoki uzunligi deyiladi va $|a|$ kabi belgilanadi.

Boshi va uchi bitta nuqtadan iborat bo'lgan vektor nol vektor deyiladi. Uning moduli $|0|=0$ boladi.

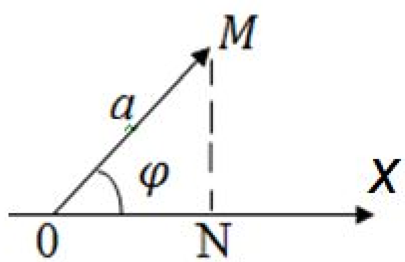
Bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda joylashgan vektorlar kollinear vektorlar deyiladi.

Nol vektor har qanday ***a*** vektorga kollinear deb hisoblanadi.

Quyidagi uchta shartlar bajarilganda ***a*** va ***b*** larni teng vektorlar deyiladi:

1. $a \parallel b$, ya'ni bu vektorlar kollinear;
2. $|a|=|b|$, ya'ni bu vektorlar bir xil uzunlikka ega;
3. a va b vektorlar bir xil yo'nalishga ega.

$\vec{a}$ vektor OX o'q bilan φ burchak tashkil etsin (1-chizma). U holda vektorning bu o'qdagi proyeksiyasi shu vektor uzunligini φ burchakning kosinusiga ko'paytmasiga teng bo'ladi. Ya'ni $pr_x=|a|\cdot cos\varphi=|a|\cdot\cos(\vec{a},\hat{}OX)$.



1-chizma

Bir necha vektor yig'indisining o'qdagi proyeksiyasi qo'shiluvchi vektorlar proyeksiyalarining yig'indisiga teng:

$$pr_x(\vec{a}+\vec{b}) = pr_x\vec{a} + pr_x\vec{b}.$$

Bitta yoki parallel tekisliklarda joylashgan uch va undan ortiq vektorlar *komplanar vektorlar* deyiladi.

$\vec{a}$ vektorni λ songa ko'paytmasi deb quyidagi uchta shart bilan aniqlanadigan yangi bir $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

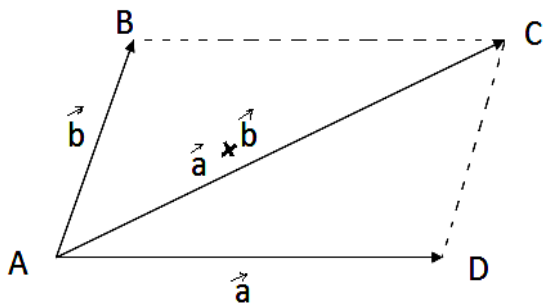
1. $|\vec{c}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, ya'ni $\vec{a}$ vektorning uzunligi $|\lambda|$ marta o'zgaradi.
2. $\vec{c}\parallel\vec{a}$, ya'ni bu vektorlar kollinear;
3. $\lambda>0$ bo'lsa, $\vec{c}$ va $\vec{a}$ vektorlar bir xil yo'nalgan, $\lambda<0$ bo'lsa, $\vec{c}$ va $\vec{a}$ vektorlar qarama-qarshi yo'nalgan.

Vektorlarning songa ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega:

1) $\lambda(\beta\vec{a})=\beta(\lambda\vec{a})$.; 2) $(\lambda\pm\beta)\vec{a}=\lambda\vec{a}\pm\beta\vec{a}$. 3) $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

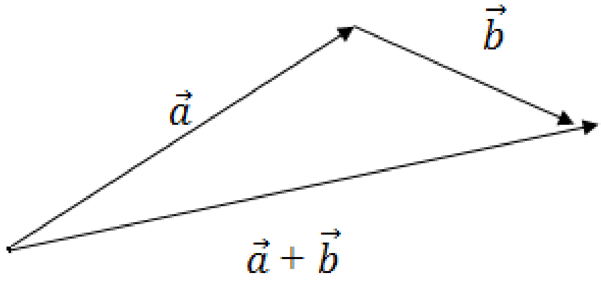
$(-1)\vec{a}$ vektor $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi va $-\vec{a}$ kabi belgilanadi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb *ABCD* parallelogrammning *A* uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi va $\vec{a}+\vec{b}$ kabi belgilanadi (parallelogramm qoidasi) (2-chizma).



2-chizma

Bu yig'indini uchburchak qoidasi deb ataladigan quyidagi usulda ham topish mumkin. Bunda dastlab parallel ko'chirish orqali $\vec{b}$ vektorning boshi $\vec{a}$ vektorning uchi ustiga keltiriladi (3-chizma). So'ngra $\vec{a}$ ning boshidan chiqib $\vec{b}$ ning uchida tugaydigan vektor hosil qilinadi va u $\vec{a}+\vec{b}$ yig'indini ifodalaydi.



3-chizma

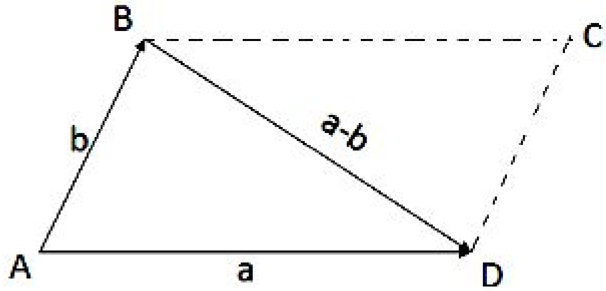
Bir nechta $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n$ (n≥3) vektorlarning yig'indisi parallelogramm qoidasini bir necha marta ketma-ket qo'llash bilan topiladi.

Vektorlarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{c}\right)+\vec{b}$.
3. $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.
4. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

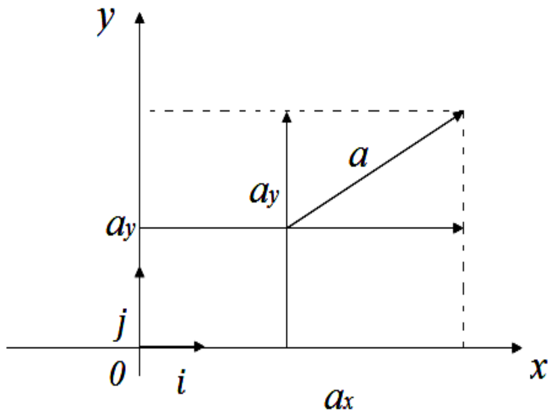
$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb $\vec{a}$ va -$\vec{b}$ vektorlarning yig'indisiga aytiladi va u $\vec{a}-\vec{b}$ kabi belgilanadi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasini ular asosida qurilgan *ABCD* parallelogrammning kichik *BD* diagonali sifatida ham qarash mumkin (4-chizma).



4-chizma

Tekislikda *XOY* to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Bu tekislikda berilgan har qanday $\vec{a}$ vektorni sonlar juftligi orqali ifodalash mumkin. Buning uchun mos ravishda *OX* va *OY* koordinata o'qlarida joylashgan musbat yo'nalishga ega hamda uzunliklari birga teng bo'lgan ***i*** va ***j*** vektorlarni kiritamiz (5-chizma).



5-chizma

Kiritilgan $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlar birlik vektorlar yoki ortlar deyiladi. $\boldsymbol{a_x}$ va $\boldsymbol{a_y}$ lar $\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari bo'lib, $\vec{a}$ vektorni ular orqali $\vec{a}=a_x+a_y=x\vec{i}+y\vec{j}$ ko'rinishda yozish mumkin.

$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ ga $\vec{a}$ vektorning birlik ortlar bo'yicha yoyilmasi, x va y sonlari esa uning koordinatalari deyiladi.

Tekislikda boshi $A(x_1;y_1)$ va oxiri $B(x_2;y_2)$ nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari $\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$ bo'lib, u $AB\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$ kabi yoziladi.

Fazoda $XOYZ$ to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida berilgan $\vec{a}$ vektorning koordinatalarini aniqlash uchun kiritilgan $\boldsymbol{i}$ va $\boldsymbol{j}$ ortlarga qo'shimcha OZ o'qida uzunligi birga teng bo'lgan $\vec{k}$ vektorni olamiz. U holda $\vec{a}$ vektorni

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

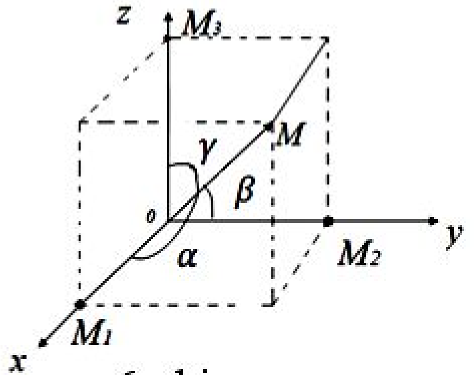
ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda x, y, z sonlar uchligi fazodagi $\vec{a}$ vektorning koordinatalari bo'lib uni $\vec{a}\{x;y;z\}$ kabi yoziladi.

Fazoda boshi $A(x_1;y_1;z_1)$ va oxiri $B(x_2;y_2;z_2)$ nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektor $\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$ ko'rinishda yoziladi.

$\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ va $\vec{b}\{x_2;y_2;z_3\}$ vektorlar teng bo'lishi uchun $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ va $z_1=z_2$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning yig'indisi, ayirmasi va songa ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi.

$\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}\pm\vec{b}\{x_2;y_2;z_3\}=\vec{c}\{x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2\}$, $\quad\lambda\vec{a}\{\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1\}$.

Fazodagi *XOYZ* to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida boshi *O(0;0;0)* nuqtada va oxiri *M(x;y;z)* nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{OM}$ vektorni qaraymiz. Odatda uni *M* nuqtaning $r=\overrightarrow{OM}$ radius vektori deyiladi (6-chizma).



6-chizma

Uning uzunligi $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ formula bilan aniqlanadi va $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar orqali $r = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ kabi yoziladi.

Boshi $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ va oxiri $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ nuqtada bo'lgan $U=\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari mos ravishda

$X = x_2 - x_1, \qquad Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1$

bo'ladi. Uning uzunligi esa

$$U = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ga teng bo'ladi. Bu holda ham $U=\overrightarrow{AB}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$ deb yozish mumkin.

Agar $U=\overrightarrow{AB}$ vektor koordinata o'qlari bilan α, β, va γ burchaklar hosil qilsa, u holda

$$\cos\alpha=\frac{X}{U},\quad \cos\beta=\frac{Y}{U},\quad \cos\gamma=\frac{Z}{U}$$

bo'ladi va ular uchun

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

o'rinli bo'ladi. Bu yerdagi $\cos\alpha$, $\cos\beta$ va $\cos\gamma$ larni $\overrightarrow{AB}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb ularning modullari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasiga aytiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ larning skalyar ko'paytmasi $\vec{a}\cdot\vec{b}$ yoki (a,b) kabi belgilanadi. Demak, ta'rifga asosan,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.
3. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$.

4. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

5. Agar $\vec{a}\perp\vec{b}$ bo'lsa, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ bo'ladi.

Agar vektorlar $\vec{a}\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ va $\vec{b}\{b_x;\ b_y;\ b_z\}$ koordinatalar orqali berilgan bo'lsa, u holda skalyar ko'paytma quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Koordinatalari bilan berilgan ikki vektor orasidagi burchak quyidagi formuladan topiladi:

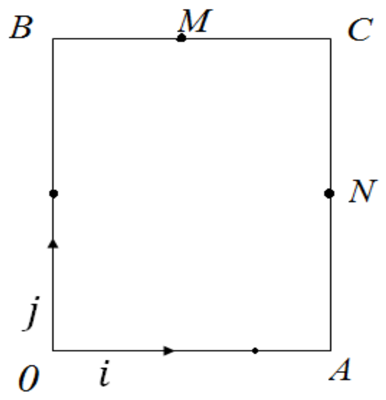
$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}$$

a) $\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$ ga ikki vektorning parallellik sharti;

b) $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$ ga ikki vektorning perpendikulyarlik sharti deyiladi.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1. $OACB$ to'g'ri to'rtburchakning (7-chizma) OA va OB tomonlariga $\boldsymbol{i}$ va j birlik vektorlar qo'yilgan. Agar OA ning uzunligi 3 ga,



7-chizma

OB ning uzunligi 4 ga teng bo'lsa, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$, va $\overrightarrow{BA}$, vektorlar i va j orqali ifodalansin.

Yechish: OA ning uzunligi 3 ga teng bo'lgani uchun $\overrightarrow{OA}=3i$ bo'ladi. AC ning uzunligi 4 ga teng bo'lgani uchun $\overrightarrow{AC}=4j$ bo'ladi. Lekin $\overrightarrow{CB}$ vektor $\overrightarrow{OA}$ vektorga qarama-qarshi yo'nalgan bo'lgani uchun $\overrightarrow{CB}=-3i$ bo'ladi. Xuddi shunday $\overrightarrow{BO}$= -4j bo'ladi. $\overrightarrow{OC}$ vektor esa $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlar yig'indisidan iborat. Demak, $\overrightarrow{OC}$=3i+4j bo'ladi. $\overrightarrow{BA}$ vektor esa $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OB}$ vektorlarning ayirmasidan iborat bo'lgani uchun $\overrightarrow{BA}$=3i-4j bo'ladi.

2. Boshi *A(5;-4;2)* va oxiri *B(7;1;0)* nuqtaga joylashgan vektorning koordinatalari topilsin.

Yechish: Ma'lumki, boshi $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, oxiri $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari $x=x_2-x_1;\ y=y_2-y_1;\ z=z_2-z_1$ bo'lar edi. Demak, $x=7-5=2,\ y=1-(-4)=5,\ z=0-2=-2$ bo'lib $\overrightarrow{AB}(2;5;-2)$ bo'ladi.

3. Uzunligi 6 ga teng bo'lgan $\vec{a}$ vektor *l* o'q bilan $\frac{2\pi}{3}$ ga teng burchak hosil qiladi. Shu vektorning *l* o'qdagi proyeksiyasi topilsin.

Yechish: Vektorning o'qdagi proyeksiyasini topish formulasidan foydalanamiz. Bizda $|\vec{a}|=6$, $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ bo'lganligi uchun

$$pr_c\vec{a}=\left||\vec{a}|\cdot cos\varphi\right| = \left|6\cdot cos\frac{2\pi}{3}\right| = \left|-6\cdot sin\frac{\pi}{6}\right| = 6\cdot\frac{1}{2} = 3.$$

4. $\vec{a}\{1;\ -3;\ 5\}$ va $\vec{b}\{x;\ 6;\ z\}$ vektorlar kollinear bo'lsa, noma'lum koordinatalar topilsin.

Yechish: Ikki vektorning kollinearlik sharti $\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = m$ dan foydalanamiz. Bizda $a_x=1,\ a_y=-3,\ a_z=5,\ b_x=x,\ b_y=6,\ b_z=z$. Bularni o'rinlariga qo'yamiz. U holda $\frac{x}{1} = \frac{6}{-3} = \frac{z}{5}$ bo'lib, undan $x=-2$ va $z=-10$ kelib chiqadi.

5. $\vec{a}\{4;\ -2;\ 1\}$ va $\vec{b}\{5;\ 9;\ 0\}$ vektorlar uchun $\vec{a}+\vec{b}$ va $\vec{a}-\vec{b}$ lar yozilsin.

Yechish: Ma'lumki, $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ va $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ lar uchun

$\vec{a}\pm\vec{b} = \vec{c}\{x_1\pm x_2;\ y_1\pm y_2;\ z_1\pm z_2\}$ edi. Bunga asosan,

$\vec{a}+\vec{b} = \vec{c}\{4+5;\ -2+9;\ 1+0\}=\vec{c}\{9;7;1\}$;

$\vec{a}-\vec{b} = \vec{c}\{4-5;\ -2-9;\ 1-0\}=\vec{c}\{-1;-11;1\}$.

6. $\vec{a}\{3;-4;1\}$ va $\lambda=4$ bo'lsa, $\lambda\vec{a}$ ni koordinatalari topilsin.

Yechish: $\vec{a}\{x;y;z\}$ vektorni λ soniga ko'paytmasi $\lambda\vec{a}=\{\lambda x;\ \lambda y;\ \lambda z\}$ bo'lganligi uchun $\lambda\vec{a}=4\vec{a}=\{4\cdot 3;\ 4\cdot(-4);\ 4\cdot 1\}=\{12;\ -16;\ 4\}$.

7. $\vec{a}\{3;4;12\}$ vektorning moduli topilsin.

Yechish: $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$ vektorning moduli $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ formuladan topilar edi. Bizda $x=3,\ y=4,\ z=12$. Demak, $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=\sqrt{169}=13$.

8. $\vec{a}\{1;\ 0;\ 1\}$ va $\vec{b}\{0;\ 1;\ 1\}$ vektorlar orasidagi φ burchak topilsin.

Yechish: Bizda $x_1=1,\ x_2=0,\ y_1=0,\ y_2=1,\ z_1=1,\ z_2=1$. Bularni ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasiga qo'yamiz:

$$\cos\varphi = \frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}\cdot\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}} = \frac{1\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 1}{\sqrt{1+0+1}\cdot\sqrt{1+0+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \varphi = 60°.$$

9. $\vec{a}\{3;-2;1\}$ va $\vec{b}\{5;7;-1\}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar ekanligi isbotlansin.

Isbot: Bizda $x_1=3,\ x_2=5,\ y_1=-2,\ y_2=7,\ z_1=1,\ z_2=-1$. Bularni ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga qo'yamiz:

$x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=3\cdot 5+(-2)\cdot 7+1\cdot(-1)=15-14-1=0.$

Demak, $a\perp b$ ekan.

10. Uchburchakning uchlari $A(1;2), B(3;4)$, va $C(6;2)$ nuqtalarda. Uning A uchidagi ichki burchagi hisoblansin.

Yechish: Uchburchakning A uchidagi ichki burchagi φ $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlar orasidagi burchakdan iborat. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarning koordinatalarini topamiz.

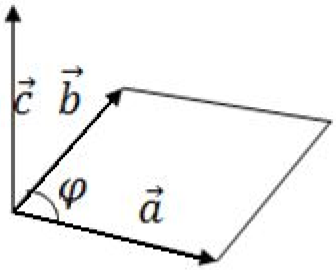
$\overrightarrow{AB}\ \{3-1;4-2\}=\overrightarrow{AB}\ \{2:2\};\ \ \overrightarrow{AC}\ \{6-1;2-2\}\ =\overrightarrow{AC}\ \{5:0\}$. Bularni ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasiga qo'yamiz:

$$\cos\varphi=\frac{a_x\,b_x+a_y\,b_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2}}=\frac{2\cdot 5+2\cdot 0}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{25+0}}=\frac{10}{2\sqrt{2}\cdot 5}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Demak, $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$ bo'lib, undan $\varphi=45°$ kelib chiqadi.

Ikki vektorning vektor ko'paytmasi

Fazodagi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektorial ko'paytmasi deb, quyidagi uchta shart bilan aniqlanuvchi yangi $\vec{c}$ vektorga aytiladi (1-chizma).



1-chizma

1. $\vec{c}$ vektorning mo'duli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuziga teng bo'lib, $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\varphi$ formula bilan aniqlanadi. Bunda φ berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni ifodalaydi.

2. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yotgan tekkislikka perpendikulyar, ya'ni $c \perp a$ va $c \perp b$ bo'ladi.

3. $\vec{c}$ vektor shunday yo'nalganki, uning uchidan qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng qisqa burilish soat mili harakatiga teskari bo'ladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $a \times b$ yoki $[a, b]$ kabi belgilanadi.

Vektor ko'patma quyidagi xossalarga ega:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$

2. $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$

3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

4. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ kollinear vektorlar bo'lsa, ularning vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ bo'ladi. Aksincha, noldan farqli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ bo'lsa, bu vektorlar kollinear bo'ladi.

5. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

6. Birlik ortlar uchun $\vec{i} \times \vec{i} = 0,\ \vec{j} \times \vec{j} = 0,\ \vec{k} \times \vec{k} = 0,\ \vec{i} \times \vec{j} = k,$ $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},\quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},\quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$

7. $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ va $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ vektorlarning vektorial ko'paytmasini determinant orqali

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$ formula yordamida topiladi.

$\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ va $\vec{b}\{x_{2;}y_{2;}z_2\}$ vektorlardan hosil qilingan parallelogrammning yuzi

$$S=|a\times b|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2}$$

formuladan, uchburchakning yuzi esa $s=\frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|$ dan topiladi.

$\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ va $\vec{b}$ $\{x_2;y_2;z_2\}$ vektorlar kolinear bo'lishi uchun $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$ shart bajarilishi kerak.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1. $(\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$ ko'paytmani soddalashtiring.

Yechish: $(\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-4\vec{b}\times\vec{a}-2\vec{b}\times\vec{b}=$ $=2\cdot 0+\vec{a}\times\vec{b}-4\cdot\vec{b}\times\vec{a}-0=\vec{a}\times\vec{b}+4\vec{a}\times\vec{b}=5\vec{a}\times\vec{b}$

2. $\vec{a}\{2;3;-1\}$ va $\vec{b}$ $\{3;-1;-4\}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

Yechish: $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini determinant orqali topish formulasidan foydalanib topamiz. Bizda $x_1=2,\ y_1=3,\ z_1=-1,\ x_2=3,\ y_2=-1,\ z_2=4,\ z_2=-4$ bo'lgani uchun

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=-12\vec{i}-2\vec{k}-3\vec{j}-$$

$-9\vec{k}-\vec{i}+8\vec{j}=-13\vec{i}+5\vec{j}-11\vec{k}.$

Demak, $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\,(-13;5;-11)$

3. $\vec{a}\{2;3;-1\}$ va $\vec{b}\{3;-1;-4\}$ vektorlarga yasalgan parallelogramning yuzini toping.

Yechish: Yuqoridagi misoldan $\vec{a}\times\vec{b} = -13\vec{\imath}+5\vec{\jmath}-11\vec{k}$ ekanligi ma'lum. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vekorlarga yasalgan parallelogrammning yuzi

$$S = |\vec{a}\times\vec{b}| = |-13\vec{\imath}+5\vec{\jmath}-11\vec{k}| = \sqrt{169+25+121} = \sqrt{315} = 3\sqrt{35}$$

4. $\vec{a}\{m;3;2\}$ va $\vec{b}\{4;6;n\}$ vektorlar m va n parametrlarning qanday qiymatlarda kollinear bo'lishini aniqlang.

Yechish: Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinearlik sharti $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ dan foydalanamiz.

Bizda $x_1 = m$, $x_2 = 4$, $y_1 = 3$, $y_2 = 6$, $z_1 = 2$, $z_2 = n$ bo'lganligi uchun $\frac{m}{4} = \frac{3}{6} = \frac{2}{n} \Rightarrow m = 2,\ n = 4$.

5. Uchlari $A(1;1;0)$, $B(1;0;1)$ va $C(0;1;1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzi topilsin.

Yechish: *ABC* uchburchakning *S* yuzi $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarda yasalgan parallelogramm yuzining yarmiga teng. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarning koordinatalarini aniqlaymiz.

$$\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1;\ y_2-y_1; z_2-z_1\} = \overrightarrow{AB}\{1-1;0-1;1-0\} = \\ = \overrightarrow{AB}\{0;-1;1\};$$

$$\overrightarrow{AC}\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\} = \overrightarrow{AC}\{0-1;1-1;1-0\} = \overrightarrow{AC}\{-1;0;1\}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i+0-j-k-0-0 = -i-j-k.$$

Shunday qilib $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\sqrt{1+1+1}| = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

6. Agar $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ va $\vec{a}\perp\vec{b}$ bo'lsa, $(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$ vektorning uzunligi topilsin.

Yechish: Vektor ko'paytmaning xossasidan foydalanamiz. Unga asosan,

$$(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b}) = 2\vec{a}\times\vec{a}+2\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b} = \\ = 0+2\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}-0 = 3\vec{a}\times\vec{b}.$$

$$2\vec{a}\times\vec{a}+2\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b} = 0+2\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}-0 = 3\vec{a}\times\vec{b}.$$

Shunday qilib

$$|(2\vec{a}\text{-}\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})| = 3|\vec{a}\times\vec{b}| = 3|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin 90° = 3|\vec{a}\times\vec{b}| == 3|\vec{a}|\cdot \\ |\vec{b}|\cdot\sin 90° = 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 6$$

Mavzu bo'yicha foydalanilgan adabiyotlar:

1. Abdalimov B. Oliy matematika. – T.: O'qituvchi, 1994.(59-68 betlar)
2. Soatov Yo.O'. Oliy matematika. 1-jild. - T.:O'qituvchi, 1995. (8-23 betlar)
3. Abdalimov B. va boshqalar. Oliy matematikadan masalalar yechish bo'yicha qo'llanma. – T.: O'qituvchi, 1985. (80-85 betlar)
4. Davronov P.Z. Oliy matematika. – Samarqand, 2003. (194-206 betlar)
5. Davronov P.Z. Elementar matematika, chiziqli algebra, analitik geometriya va vektorlar algebrasidan masalalr yechish bo'yicha uslubiy ko'rsatmalar va topshiriqlar. – Samarqand, 2006. (155-172 betlar)
6. www.edu.uz internet sayti, ZIYO sahifasi
7. www.referat.uz sayti "oily matematika" sahifasi