

**O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim
vazirligi Guliston davlat universiteti**

Matematika kafedrası

Omonova Husnora Rustamovnaning

**5130100 – matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun**

**„Sobolev fazosidagi ayrim tengsizliklar va ularning tadbiqui”
Mavzusidagi**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**Rahbar: K.Jamuratov
fizika – matematika
fanlari nomzodi GulDU
kafedrası „matematika”
kata o'qituvchisi**

Guliston - 2016

REJA

I. Kirish.

II. Asosiy qism.

1-bob. Parametrga bog'liq integrallar.

- 1.1. Tekis yaqinlashuvchi integrallar.
- 1.2. Kuchsiz maxsulikka ega integral operatorlar.
- 1.3. O'rta funksiyalar va ularning xossalari.

2-bob. Sobolev fazolari. Fridriks va Puankare tengsizliklari.

- 2.1. Umumlashgan hosila tushunchasi, asosiy xossalari.
- 2.2. $W_p^{(k)}$ fazolari. Sabolevning integral ayniyati.
- 2.3. Sabolev fazolarida ekvivalent normalar. Fridriks va Puankare tengsizliklari.

III. Xulosa va takliflar.

IV. Foydalanilgan adabiyotlar va manbalar.

I.KIRISH.

Matematik fizikaning chegaraviy masalalarini yechishning zamonaviy usullaridan biri umumlashgan funksiyalar nazariyasidir.

Ko'pgina chegaraviy masalalarda berilganlar (tenglama koeffitsientlari, o'ng tomon, boshlang'ich va chegaraviy shartlarda qatnashgan funksiyalar) yetarlicha silliq bo'lmaydi, ya'ni tenglamada qatnashayotgan tartibdagi hosilalarga ega bo'lmaydi. Bu holda masala yechimi klasini (fazosini) kengaytiriwga ehtiyoj tug'iladi.

Son tushunchasini natural son, ratsianol son, haqiqiy son va nihoyat kompleks son tushunchasigacha umumlashtirishga ehtiyoj tug'ilganidek funksiya tushunchasini, funksiya hosilasini klassik ma'noda tushunish chegaraviy masalalar nazariyasining keyingi rivojlanishi uchun torlik qilishi va uni umumiyoq ma'noda tushuntirishga kengaytirishga ehtiyoj seziladi.

Shunday qilib o'tgan asr (XX asr)ning o'rtalarida yangi umumlashgan funksiya, umumlashgan hosila, umumlashgan yechim tushunchalari paydo bo'ladi. Bu yangilik asosida klassik matematika, xususan matematik analiz, funksional analiz, oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasi yotadi.

Mazkur bitiruv-malakaviy ish 2 ta bobdan iborat bo'lib, 1-bob "Parametrga bog'liq integrallar" deb nomlangan, unda integrallarning parametric bo'yicha tekis yaqinlashishi haqida bir necha teoremlar isboti bilan keltirilgan. Shuningdek $E_m - m$ o'lchovli Evklid fazosida kuchsiz maxsuslikka ega integral operatorlar bilan bog'liq faktlar va o'rtalovchi yadro, o'rta funksiyalar, ularning ajoyib xossalari bayon ettirilgan.

Ikkinchi bob "Sobolev fazolari. Fridriks va Puankare tengsizliklari" deb nomlanadi. Birinchi band (paragraf) va umumlashgan hosila tushunchasi jamlanuvchi funksiyalar uchun finit funksiyalar hamda asosiy funksiyalar klassida bo'laklab integrallash formulasi asosida ta'riflanadi. Holbuki umumlashgan hosila tushunchasi asosiy funksiyalar klassida aniqlangan chiziqli uzluksiz funksionallar sifatida ham qaralishi mumkin edi. Ikkinchi bob ikkinchi bandda biror $\Omega \subset E_m$ sohada k-tartibli umumlashgan hosilaga ega va bu hosilalar o'sha sohada p-darajasi bilan jamlanuvchi funksiyalar to'plamida norma kiritilgandan so'ng hosil bo'lgan $W_p^{(k)}(\Omega)$ -sobolev fazolarida turli differensial operatorlar o'rganilgan. Bu banda mashhur S.L.Sobolevning integral ayniyati deb ataluvchi

$$U(x) = \int_{\Omega} U(y) \frac{\partial^k z}{\partial r^k} \frac{dy}{r^{m-1}} + (-1)^{k-1} \int_{\Omega} z \frac{\partial^k}{\partial r^k} \frac{dy}{r^{m-1}} \quad (0.1)$$

ayniyat isbotlanadi.

Ma'lumki chegaraviy masalalar nazariyasida masala yechimining mavjudligini ko'rsatishdan tashqari bu yechimning yagonaligini ko'rsatish ham muhim edi. Shu bois E_m fazoda chegaraviy masalalar umumlashgan ma'nodagi yechimlarining

mavjudligi va yagonaligini ko'rsatishda o'ziga xos yondashish kerak bo'ladi. Xususan yechim yagonaligini ko'rsatish uchun Fridriks va Puankare tengsizliklariga suyanan holda ish ko'rish kerak bo'ladi. Ishning oxirgi bandida Sabolev fazolarida ekvivalent normalar kiritish yo'llari ko'rsatilgan va ularning bevosita tatbiq sifatida ikkita Fridriks va Puankare tengsizliklari isbotlangan:

$$\|U\|_2^2 = \int_{\Omega} U^2(x) dx \leq X \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right)^2 dx \quad (\text{Fridriks})$$

$$\|U\|_2^2 \leq C \left[\left(\int_{\Omega} U dx \right)^2 + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right)^2 dx \right] \quad (\text{Puankare})$$

Adabiyotlar tahlili. Bitiruv malakaviy ish mavzusi asosan uch ta fanning: matematik analiz, differensial tenglamalar (xususiylar) va funksional analizning tutashgan joyida bo'lgani uchun adabiyotlar ham matematik analiz, ham xususiylar differensial tenglamalarga ham funksional analizni o'z ichiga olgan darslik, qo'llanma va ilmiy jurnallarda elon qilingan maqolalardan iborat bo'ladi. Eng asosiy adabiyotlar ro'yxatiga [1] Azlarov.T.A. Mansurov.H. Matematik analiz. 1,2 tomlar, [10], [11] Владимиров В С уравнения математической физики" [12] Гельфад И М, Шилов Г Е. Обобщенные функции и действия над ними, [18]. Jo'rayev T, Abdunazarov S. Matematik fizika tenglamalari [20]. Колмогоров А.Н, Фомин С.В. элементы теории функции функционального анализа [22] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, 1, 2 томи [26]. Ладиженская О.А. Краевые задачи математической физики [30]. Михлин С.Г. Линейное уравнение в гасных производных [32]. Sohobiddinov M. Matematik fizik tenglamalari. [33]. Соболев С.Л. некоторые применения функционального анализа в математической физике kabilarni kiritish mumkin.

Mavzuning dolzarbligi. Umumlashgan funksiyalar, umumlashgan yechim, umumlashgan hosila tushunchalari fanga kiritilgandan so'ng chegaraviy masalalar yechimlari (ham klassik ham umumlashgan ma'nodagi) mavjudligi va yagonaligini ko'rsatishda Sobo;ev fazosida ish ko'rishga to'g'ri keladi, shuning uchun uchun ham Bitiruv – malakaviy ishi mavzusi dolzarb sanaladi.

Tadqiqot mavzusi. O'rganilmoqchi bo'lgan mavzuni qisqaroq qilib umumlashgan funksiyalar fazosidagi eng muhim ayniyat va tengsizliklarni isbotlash desa bo'ladi.

Tadqiqot maqsadi. Tadqiqot maqsadi umumiy holda ya'ni E_m –m o'lchovli Sobolev fazolarida natijalariga erishilib, xususiyl holda, ya'ni $m=2$ $p=1$ bo'lganda Fridriks va Puankare tengsizliklariga kelib qolishdan iboratdir.

Tadqiqot muammosi. Chegaraviy masalarning yechimi (klassik ma'nodagi) hamma vaqt ham (aniqrog'i ko'p vaqt) mavjud bo'lavermaydi, shuning uchun avvallari o'rganilmagan, ya'ni klassik ma'noda yechilmaydigan masalani umumlashgan ma'noda yechimi borligini ko'rsatish muammosi qaraladi.

Tadqiqot predmeti. Fridriks va Puankare tengsizliklarini keltirib chiqarishda dastlab ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning integral hisobini sinchiklab o'rganish, xususan parameterga bog'liq integrallar, integrallarning tekis yaqinlashishi, o'rtalovchi yadro, o'rta funksiyalar kabi tushunchalar bilan tanishmoq kerak bo'ladi. So'ngra umumlashgan hosila tushunchasini integral ayniyat orqali ta'riflashga kirishiladi. Va nihoyat funksional analiz elementlari- normallangan fazolar, xususan Sobolev S.L fazolari, ulardagi muhim ayniyat va tengsizliklarni isbotlash bilan yakunlanadi.

Tadqiqot farazi (gipotezasi). Matematik fizikaning chegaraviy masalalarini yechishning zomonauiy usullaridan biri- umumlashgan funksiyalar apparati metodining ayrim afzalliklarini asoslash va uni himoyaga olib chiqiladigan natija deb bilish kerak bo'ladi.

Tadqiqot vazifalari. Tadqiqot maqsadiga erishish uchun izlanuvchi – bakalavr darajasini oluvchi matematik analizni, funksional analizni, matematik fizikani chuqur o'rgangan va chegaraviy masalalarni yechishning klassik usullari bilan yaxshi tanish bo'lishini talab qiladi.

Tadqiqot yangiligi. Klassik funksiyalar fazosidan umumlashgan funksiyalar fazosiga kengaytirilgan jarayon qadamba qadam tushuntirilib borilgani va chegaraviy masalalar umumlashgan ma'noda yechimga ega bo'lish bo'lmasligini belgilaydi.

Fan uchun ahamiyati. Matematik analiz, differensial tenglamalar fanlarning rivojlantirishda Sobolev fazolarining kiritilishi o'ziga xos ahamiyatga ega ekanligini takidlash zarur.

Amaliyot uchun ahamiyati. Jisimlarda issiqlik tarqalishi, elektromagnit tolqinlarning, tebranishlarning, yer ostida suv, gaz, neft harakati va hakoza jarayonlar u yoki bu ko'rinishdagi chegaraviy masalalar ko'rinishda modellashtiriladi. Bunday amaliy masalalarda boshlang'ich va chegaraviy shartlarda ishtirok etgan funksiyalar- masalaning berilganlari sinov-tajriba natijalari bo'lgani uchun ma'lum xatoliklarga ega bo'lishi tabiiy. Yechimda ham bu xatoliklar o'z aksini topishi va ular yechimning turg'unligini ta'minlamasdan qolishi mumkin.

Mazkur ishda yuqorida eslatilgan nuxsonliklar umumlashgan yechim tushunchasini kiritish bilan bataraf etilgan.

1- Bob. Parametrغا bog'liq integrallar.

1.1. Tekis yaqinlashuvchi integrallar.

E_m fazodan o'lchovli chegaralangan D to'plam, E_n fazodan o'lchovli chegaralangan G to'plam berilgan bo'lsin.

Ta'rif. a) Agar har bir tayinlangan $x \in D$ uchun $f(x, y)$ funksiya G da y bo'yicha jamlanuvchi;

b) $\varepsilon > 0$ har qanday son bo'lganda ham shunday $\delta > 0$ son topilib agar $g \subset G$ hamda $\mu g < \delta$ bo'lganda

$$\left| \int_g f(x, y) dy \right| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa

$$\int_G f(x, y) dy \quad x \in D \quad (1.1.1)$$

integral D da tekis yaqinlashadi deyiladi.

Teorema. 1.1.1 Yuqoridagi (1.1.1) integral D da tekis yaqinlashib, integral ostidagi funksiya quyidagi shartni qanoatlantirsin: berilgan $\eta > 0$ son va berilgan $x_0 \in D$ nuqta uchun shunday $g(x_0, \eta) \subset G$ to'plam topilib, $\mu g(x_0, \eta) < \eta$ tengsizlik bajarilsin va integral ostidagi funksiya x_0 nuqtada uzliksiz hamda $y \in G \setminus g(x_0, \eta)$ to'plamda tekis uzluksiz bo'lsin. U holda (1.1.1) integral x ning funksiyasi sifatida D da uzliksiz bo'ladi.

Isbot. D dan ixtiyoriy x_0 nuqtani tanlab (1.1.1) integralning shu nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz.

Eslatilgan integral tekis yaqinlashuvchi bo'lgani uchun $\varepsilon > 0$ berilgan son har qanday bo'lganda ham shunday $\eta > 0$ son topiladiki

$$\left| \int_{g(x_0, \eta)} f(x, y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

shu tengsizlik bajariladi.

(1.1.1) Integralni $U(x)$ orqali belgilab olamiz, tabiiyki $U(x)$ D ning hamma joyida aniqlangan.

Quyidagi ayirmani tuzamiz:

$$\begin{aligned} U(x) - U(x_0) &= \int_{G \setminus g(x_0, \eta)} [f(x, y) - f(x_0, y)] dy \\ &+ \int_{g(x_0, \eta)} [f(x, y) - f(x_0, y)] dy \quad (1.1.2) \end{aligned}$$

Tayinlangan η son uchun $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sonni shunday tanlaymizki, $|x - x_0| < \delta$ va $y \in G \setminus g(x_0, \eta)$ bo'lganda

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{3\mu G}$$

bo'ladi, bundan

$$|U(x) - U(x_0)| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema isbot bo'ldi.

Teorema. 1.1.2.

$$U(x) = \int_G F(x, y) dy \quad x \in D \quad (1.1.3)$$

Bo'lsin. Bunda $D - E_m$ fazodagi chekli yopiq soha $G - E_m$ da chegaralangan o'lchovli to'plam va $F(x, y)$ barcha $x \in D$ lar uchun G da jamlanuvchi funksiya. So'ngra ixtiyoriy $x \in D$ nuqtalarda biror $j (1 \leq j \leq m)$ nomerdan uchun qariyb barcha $y \in G$ bo'lganda $f(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x_j}$ xususiy hosila mavjud va yetarlicha kichik h uchun Nyuton-Leybnist formulasi:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_m, y) - F(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m, y) \\ = \int_0^h f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_m, y) dt \quad (1.1.4)$$

o'rinli bo'lsin. Shuningdek $\partial F / \partial x_j$ hosila $D_x G$ da jamlanuvchi bo'lsin. U holda D ning qariyib hamma joyida $\partial U / \partial x_j$ hosila mavjud hamda integral belgisi ostida diffrensiallash

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = \int_G \frac{\partial F(x, y)}{\partial x_j} dy \quad (1.1.5)$$

o'rinli bo'ladi.

Isbot. Qisqalik uchun

$$x^t = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_m)$$

$$x = (x^0 = x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m)$$

Belgilashlarni kiritamiz. (1.1.4) formulaga ko'ra

$$\frac{U(x^h) - U(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_G \left\{ \int_0^h f(x^t, y) dt \right\} dy$$

Teorema shartiga ko'ra $f(x, y)$ $G \times D$ da jamlanuvchi funksiya. Fubini teoremasiga ko'ra bu funksiya qariyib hamma $x \in D$ lar uchun $[x, x^h] \times G$ to'plamda jamlanuvchidir. O'sha Fubini teoremasiga ko'ra, shunday x lar uchun integrallash tartibini o'zgartirish mumkin.

$$\frac{U(x^h) - U(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h \left\{ \int_G f(x^t, y) dy \right\} dt$$

Lebeg teoremasiga ko'ra oxirgi tenglikning o'ng tamoni qariyib ham $x \in D$ lar uchun limiti mavjud va bu limit

$$\int_G f(x, y) dy$$

ga teng.

Bitta xususiy holni qaraymiz.

$$W(x) = \int_G U(y)w(x,y)dy \quad (1.1.6)$$

Bunda $U(x)$ G da jamlanuvchi, $w(x,y)$ funksiyaning o'zi va l dan oshmaydigan tartibli barcha hosilalari ($x \in D$ nuqtaning koordinatalari bo'yicha) $D \times G$ da uzliksiz funksiyalar. Bu shartlar bajarilganda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi:

Teorema. 1.1.3. (1.1.6) integral D da l marta uzliksiz diffrensiallanuvchidir.

Deystvitelno, (1.1.6) integral va

$$\int_G U(y)D_x^a w(x,y)dy \quad |a| = l \quad (1.1.7)$$

Ko'rinishdagi integral tekis yaqinlashuvchi. $g(x_0, \eta)$ (1.1.1 teoremadagi) to'plamni x_0 dan bog'liq qilmasdan quyidagicha tanlash mumkin: $\mu g(\eta) < \eta$ bo'ladigan qilib $g(\eta)$ to'plamni tanlash mumkin, faqat bu $U(y)$ funksiya $G \setminus g(\eta)$ to'plamda uzliksiz bo'lsin. Shundan so'ng $g(x_0, \eta) = g(\eta)$ deyilsa bo'ladi. 1.1.1 teoreмага ko'ra (1.1.6) va (1.1.7) integrallar D da uzliksiz. $F(x,y) = U(y)w(x,y)$ deb belgilab bu funksiyaning 1.1.2 teoremadagi barcha shartlarni qanoatlantirishini ko'ramiz. Shuning uchun (1.1.6) funksiya D da uzliksiz birinchi tartibli hosilalarga ega va ularni (1.1.6) formuladan integral ostida diffrensiallash yo'li bilan hosil qilish mumkin:

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x_j} = \int_G U(y) \frac{\partial w(x,y)}{\partial x_j} dy \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Xuddi shunday ixtiyoriy $|a| \leq l$ a multindeks uchun D da uzliksiz bo'lgan $D^a W(x)$ hosilalarni topish mumkin (ular mavjud!)

$$D^a W(x) = \int_G U(y)D_x^a w(x,y)dy \quad (1.1.8)$$

Sferik koordinatalar.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_m$ fazoning tayinlangan, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ esa o'zgaruvchan nuqtasi bo'lsin. Markazi x nuqtada bo'lgan sferik koordinatalar quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$y_1 = x_1 + r \cos v_1$$

$$y_2 = x_2 + r \sin v_1 \cos v_2$$

— — — — — — — — — —
 — — — — — — — — — —

$$y_{m-1} = x_{m-1} + r \sin v_1 \sin v_2 \dots \sin v_{m-2} \cos v_{m-1}$$

$$y_m = x_m + r \sin v_1 \sin v_2 \dots \sin v_{m-1}$$

Bu yerda $r = |y - x|$ ekanligini va $v_1, v_2, \dots, v_{m-2}$ burchaklar $[0, \pi]$ da v_{m-1} esa $[0, 2\pi]$ da o'zgarishini ko'rish qiyin emas.

Hajm elementi dy ni r radiusli sferaning yuzasi elementi dS_r ni sferik koordinatalardagi ifodasini topamiz.

Buni quyidagicha amalga oshirishimiz mumkin.

Avvalo yakobyanni hisoblaylik.

$$J_m = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}{D(r, v_1, v_2, \dots, v_{m-1})} =$$

$$\begin{vmatrix} \cos v_1 & -r \sin v_1 & 0 & \dots & 0 \\ \sin v_1 \cos v_2 & r \cos v_1 \cos v_2 & -r \sin v_1 \sin v_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi \cos v_{m-1} & r \Phi \operatorname{ctg} v_1 \cos v_{m-1} & r \Phi \operatorname{ctg} v_2 \cos v_{m-1} & \dots & -r \Phi \sin v_{m-1} \\ \Phi \sin v_{m-1} & r \Phi \operatorname{ctg} v_1 \sin v_{m-1} & r \Phi \operatorname{ctg} v_2 \sin v_{m-1} & \dots & -r \Phi \cos v_{m-1} \end{vmatrix} \quad (1.1.10)$$

qisqalik uchun oxirgi ikki satrda $\Phi = \sin v_2 \dots \sin v_{m-2}$ belgilash kiritilgan.

$\frac{\partial J_m}{\partial v_{m-1}} = 0$ bo'lishini ko'rsatish qiyin emas va J_m determinatni hisoblash uchun

$v_{m-1} = 0$ deb olish yetarli. Bu holat quyidagi recurrent formulaga olib keladi.

$J_m = r \sin v_1 \dots \sin v_{m-2} J_{m-1}$ Bu yerda m ni ketma-ket $m-1, m-2, \dots$ lar almashtirishlar bilan

$$J_m = r^{m-1} \sin^{m-2} v_1 \sin^{m-3} v_2 \dots \sin v_{m-2} \quad (1.1.10)$$

Tenglikga ega bo'lamiz. Shundan so'ng hajm elementini sferik koordinatalarda yoza olamiz.

$$dy = r^{m-1} \sin^{m-2} v_1 \sin^{m-3} v_2 \dots \sin v_{m-2} dr dv_1 \dots dv_{m-1} \quad (1.1.11)$$

Endi markazi sferik koordinatalar markazi bilan ustma-ust tushadigan va radiusi r ga teng sfera yuzasi elementini sferik koordinatalarda ifodalaymiz.

Difirensial geometryia kursidan ma'lumki harqanday Γ sirt uchun quyidagi formula o'rinli:

$$d\Gamma = \frac{dy_1 dy_2 \dots dy_{m-1}}{|\cos(v, y_m)|}$$

Bu yerda v - Γ sirtga o'tkazilgan normal.

S_r sfera uchun

$$|\cos(v, y_m)| = |\cos(r, y_m)| = \frac{|y_m - x_m|}{r} = \left| \prod_{k=1}^{m-1} \sin v_k \right|$$

Bu yerda r koordinata o'zgarmas, shuning uchun

$$dy_1 dy_2 \dots dy_{m-1} = \left| \frac{D(y_1 y_2 \dots y_{m-1})}{D(v_1, v_2, \dots, v_{m-1})} \right| dv_1 dv_2 \dots dv_{m-1}$$

Oxirgi formuladagi yakobyanni (1.1.10) determinatda birinchi ustun va oxirgi satirni o'chirib hosil qilish mumkin. Qolgan determinatda bosh dioganaldan yuqorida turgan barcha elementlar nolga teng, shuning uchun ham bu determinatning qiymati bosh dioganal elementlari k'paytmasiga teng bo'ladi. Bundan dS_r uchun formula juda osonlik bilan hosil bo'ladi:

$$dS_r = r^{m-1} \sin^{m-2} v_1 \sin^{m-3} v_2 \dots \sin v_{m-1} dv_1 dv_2 \dots dv_{m-1} \quad (1.1.12)$$

(1.1.12) va (1.1.11) formulalardan yana bir foidali formula hosil bo'ladi:

$$dS_r = r^{m-1} dS_1 \quad (1.1.13)$$

va

$$dy = dr dS_r = r^{m-1} dr dS_1 \quad (1.1.14)$$

(1.1.13) formulani integrallab yana bir formulaga ega bo'lamiz:

$$|S_r| = r^{m-1} |S_1|$$

Bunda S_1 birlik sfera (radiusi 1 ga teng) $|S_1|$ yuzani topamiz:

$$\begin{aligned} |S_1| &= \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^{m-2} v_1 \dots \sin v_{m-2} dv_1 \dots dv_{m-2} dv_{m-1} = \\ &= 2\pi \prod_{k=1}^{m-2} \int_0^\pi \sin^k v dv = 2\pi \prod_{k=1}^{m-2} 2 \int_0^{\pi/2} \sin^k v dv \end{aligned}$$

$\sin^2 v = t$ almashtirish

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k v \, dv = \int_0^1 t^{\frac{k-1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = B\left(\frac{k+1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}$$

ga olib keladi. Bu yerdan

$$|S_1| = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \quad (1.1.13)$$

Formula darhol kelib chiqadi. Bunda B va Γ – eylarning birinchi va ikkinchi tur integrallaridir. radiusi R ga teng shar hajmini topamiz. Bu sharni $\mathbb{I}_R$ deb belgilasak uning hajmi uchun:

$$|\mathbb{I}_R| = \int_{r < R} dy = \int_{S_1} \left\{ \int_0^R r^{m-1} dr \right\} dS_1 = \frac{|S_1| R^m}{m} \quad (1.1.14)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Soddalik uchun koordinatalar boshi $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ nuqta bilan ustma-ust tushadi deymiz.

Sferik koordinatalar ortogonal sistema bo'lishini ko'rsatish qiyin emas, yani

$$r = c_0, \quad v_1 = c_1, \dots, v_{m-1} = c_{m-1} \quad (1.1.15)$$

Sirtlar oilasidan olingan ixtiyoriy ikkitasi to'g'ri burchak ostida kesishadi, bunda $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ lar o'zgarmaslar.

(1.1.15) tenglamalar quyidagi ikkinchi tartibli

$$\sum_{k=1}^m y_k^2 - c_0^2 = 0, \quad v_1^2 y_1^2 - \sum_{k=2}^m y_k^2 = 0$$

$$v_2^2 y_2^2 - \sum_{k=3}^m y_k^2 = 0, \dots, v_{m-1}^2 y_{m-1}^2 - y_m^2 = 0$$

$$v_k = tg c_k$$

Ularning ortogonalligi differensial geometry kursidagi formuladan kelib chiqadi.

1.2. Kuchsiz maxsuslikga ega integral operatorlar.

Quyidagi

$$(K\rho)(x) = U(x) = \int_G \rho(y) \frac{A(x,y)}{r^\lambda} dy \quad r = |x-y| \quad x \in G \quad (1.2.1)$$

Ko'rinishdagi operatorlarni kuchsiz maxsuslikga ega integral operatorlar deymiz. Bunda $G \subset E_m$ – chegaralangan o'lchovli to'plam, $A(x,y) - G \times G$ da chegaralangan o'lchovli funksiya; λ – o'zgarmas va $0 \leq \lambda < m$.

Teorema. 1.2.1. agar G yopiq to'plam,

$\rho \in L_p(G), 1 < p \leq \infty$ va $\lambda p' < m, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ $A \in C(G \times G)$ bo'lsa, u holda (1.2.1) kuchsiz maxsuslik ega integral operator $L_p(G)$ ni $C(G)$ ga o'tkazuvchi to'la uzluksiz operator bo'ladi.

Eng avvalo keyinchalik kerak bo'ladigan tenglik haqida to'xtalamiz: Agar $\beta < m$ bo'lsa,

$$\int_{r < a} \frac{dy}{r^\beta} = \frac{|S_1| a^{m-\beta}}{m-\beta} \quad (1.2.2)$$

Bu formulaning to'g'riligini ko'rsatish uchun markzi x nuqtada bo'lgan sferik koordinatalar kiritish kifoya.

Dastlab $p < \infty$ holni qaraymiz. Agar $\rho \in L_p(G)$ bo'lsa ixtiyoriy tayinlangan $x \in G$ nuqtada $A(x,y)r^{-\lambda}\rho(y)$ funksiya G jamlanuvchi bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $N = \max |A(x,y)|$ deb Gelder tengsizligiga ko'ra (p belgi $L_p(G)$) ning normasini anglatadi.

$$\int_G \frac{|A(x,y)|}{r^\lambda} |\rho(y)| dy \leq N \|\rho\|_p \left\{ \int_G \frac{dy}{r^{\lambda p'}} \right\}^{\frac{1}{p'}}$$

bo'ladi.

G to'plamning diametric, yani ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofalar to'plamining aniq yuqori chegarasi H bo'lsin. Tabiiyki G to'plam $|y-x| < H$ sharda joylashgan bo'ladi va (1.2.2) ga ko'ra

$$\int_G \frac{dy}{r^{\lambda p'}} < \int_{r < H} \frac{dy}{r^{\lambda p'}} = \frac{|S_1| H^{m-\lambda p'}}{m - \lambda p'}$$

bo'ladi. Oxirgi o'zgarishni $Q^{p'}$ orqali belgilab,

$$\int_G \frac{|A(x, y)|}{r^{\lambda}} |\rho(y)| dy \leq NQ \|\rho\|_p < \infty \quad (1.2.3)$$

tengsizlikga ega bo'lamiz. Shunday qilib (1.2.1) integral ostidagi funksiya jamlanuvchi va 1.1. dagi a) shart bajarildi.

$\varepsilon > 0$ sonni tayinlab qo'yamiz. Agar $g-G$ to'plamning qismi bo'lsa, yuqoridagiga o'xshash

$$\left| \int_G \frac{A(x, y)}{r^{\lambda}} \rho(y) dy \right| \leq NQ \left\{ \int_G |\rho(y)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}}$$

bo'ladi. $\mu g < \delta$ bo'ladigan $\delta > 0$ sonni tanlasak, oxirgi tengsizlikning o'ng tamoni ε dan kichik bo'ladi, shunda 1.1. dagi teoremaning b) sharti ham bajariladi va demak (1.2.1) integral tekis yaqinlashadi.

G to'plamdan x_0 nuqtani ixtiyoriy tanlab va $g(x_0, \eta)$ to'plamni 1.1.1. teorema shartlari bajariladigan qilib tanlab olamiz.

Ochiq $g_1(\eta)$ to'plamni $\mu g_1(\eta) < \frac{\eta}{2}$ va $\rho(y)$ funksiya $G \setminus g_1(y)$ to'plamda uzluksiz bo'ladigan qilib tanlab olamiz.

$G \setminus g_1(\eta)$ to'plam yopiq va bu to'plamda $\rho(y)$ funksiya tekis uzluksiz bo'ladi. Markazi x_0 nuqtada, radiusi $\sigma = m(\frac{\eta}{2}) \cdot |S_1|^{1/m}$ ga teng sharni $g_2(x_0, \eta)$ deb belgilaymiz. U holda $\mu g(x_0, \eta) < \eta$ tengsizlik bajariladi.

$G(x_0, \eta) = g_1(\eta) \cup g_2(x_0, \eta)$ belgilash qilsak $\mu g(x_0, \eta) < \eta$ bo'ladi. Agar $y \in G \setminus g(x_0, \eta)$ to'plamda o'zgarasa va $|x - x_0| \leq \sigma/2$ bo'lsa (1.2.1) integral ostidagi funksiya x va y lar bo'yicha (to'plamida) tekis uzluksiz va $G \setminus g(x_0, \eta)$ to'plamda y bo'yicha tekis uzluksiz bo'ladi. 1.1.1. teoreмага ko'ra (1.2.1) integral bilan aniqlangan $U(x)$ funksiya G da uzluksiz bo'ladi.

Isbotlanganlardan shu narsa aniq bo'ladiki K operator $L_p(G)$ fazoga $C(G)$ fazoni mos qo'yar ekan. (1.2.3) formuladan esa bu operatorning chegaralanganligi va uning normasi

$$NQ = N \left[\frac{|S_1| H^{m-\lambda p'}}{m - \lambda p'} \right]^{1/p'} \quad (1.2.4)$$

miqdordan oshmasligi ko'rinadi.

Endi qaralayotgan operatorning to'la uzluksizligini isbotlaymiz. M orqali $L_p(G)$ dan olinga chegaralangan funksiyalar to'plamini belgilaylik.

$\forall \rho \in M \quad \|\rho\|_p \leq C = const$ bo'lsin. (1.2.3) tengsizlikdan KM, ham chegaralanganligi, yani $\forall U \in KM \quad \|U\|_{C(G)} \leq CNQ$ ekanligi kelib chiqadi. Bu to'plamdagi funksiyalarning teng darajali uzluksiz ekanligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $\eta > 0$ son uchun Gelder tengsizligiga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} |U(x + \Delta x, y) - U(x, y)| &= \left| \int_G \rho(y) \left[\frac{A(x + \Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x, y)}{r^\lambda} \right] dy \right| \leq \\ &\leq \|\rho\|_p \left[\int_G \left| \frac{A(x + \Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x, y)}{r^\lambda} \right|^{p'} dy \right]^{\frac{1}{p'}} \leq \\ &\leq C \left\{ \int_{G \setminus (r < \eta)} \left| \frac{A(x + \Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x, y)}{r^\lambda} \right|^{p'} dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{(r < \eta)} \left| \frac{A(x + \Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x, y)}{r^\lambda} \right|^{p'} dy \right\}^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

$$r_1 = |x + \Delta x, y|$$

Minkovski tengsizligini ketma-ket ikki marta qo'llab, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} |U(x + \Delta x, y) - U(x, y)| &\leq \\ &\leq C \int_{G \setminus (r < \eta)} \left[\left| \frac{A(x + \Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x, y)}{r^\lambda} \right|^{p'} dy \right]^{\frac{1}{p'}} + CN \left\{ \left[\int_{r < \eta} \frac{dy}{r_1^{\lambda p'}} \right]^{\frac{1}{p'}} \right. \\ &\quad \left. + \left[\int_{r < \eta} \frac{dy}{r^{\lambda p'}} \right]^{\frac{1}{p'}} \right\} \quad (1.2.6) \end{aligned}$$

(1.2.2) formulaga ko'ra (1.2.6) dagi oxirgi integral

$$\frac{|S_1| \eta^{m - \lambda p'}}{m - \lambda p'}$$

ga teng. Ikkinchin integralni baholaymiz $|\Delta x| < \frac{\eta}{2}$ bo'lsin. U holda $r_1 < r + \frac{\eta}{2}$ bo'ladi, ammo $r < \eta$ va shuning uchun $r_1 < 3\frac{\eta}{2}$. Demak $r < \eta$ shar $r_1 < 3\frac{\eta}{2}$ sharga joylashadi, bundan esa

$$\int_{r < \eta} \frac{dy}{r_1^{\lambda p'}} < \int_{r_1 < \frac{3\eta}{2}} \frac{dy}{r_1^{\lambda p'}} = \frac{|S_1| \frac{3\eta}{2}^{m-\lambda p'}}{m - \lambda p'}$$

bo'ladi. Endi quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|U(x + \Delta x, y) - U(x, y)| \leq C \left[\int_{G \setminus (r < \eta)} \left| \frac{A(x + \Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x, y)}{r^\lambda} \right|^{p'} dy \right]^{\frac{1}{p'}} + \gamma \eta^{\frac{m-\lambda p'}{p'}}$$

$$\lambda = \frac{|S_1| \left[1 + \frac{3}{2}^{m-\lambda p'} \right] C N}{m - \lambda p'}$$

η miqdorni $\gamma \eta^{\frac{m-\lambda p'}{p'}} < \varepsilon/2$ tengsizlik bajariladigan qilib tanlaymiz va uni tayinlab qo'yamiz. Shundan so'ng $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sonni $\delta < \frac{\eta}{2}$ bajariladigan qilib tanlab, $|\Delta x| < \delta$ bo'lganda

$$C \left[\int_{G \setminus (r < \eta)} \left| \frac{A(x + \Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x, y)}{r^\lambda} \right|^{p'} dy \right]^{\frac{1}{p'}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik ham bajarilsin deymiz. U holda $|\Delta x| < \delta$ bo'lganda $|U(x + \Delta x, y) - U(x, y)| < \varepsilon$ bo'ladi. bundan yani δ ning $\rho(y)$ funksiyani tanlashdan bog'liq bo'lmagani uchun, KM funksiyalar to'plami teng darajali uzluksiz bo'ladi. Arsel teoremasiga ko'ra bu to'plam $C(G)$ da kompakt va K operator to'la uzluksizdir.

$p = \infty$ bo'lsin, u holda $p' = 1$ bo'lib $\lambda p' < m$ bajariladi. Bu holda

$$\|\rho\|_p = \|\rho\|_\infty = \sup_{x \in G} \text{ess } |\rho(x)|$$

(sup ess – muhim yuqori chegara). Shunda

$$|U(x + \Delta x, y) - U(x, y)| \leq \|\rho\|_{\infty} \int_G \left[\frac{A(x + \Delta x, y)}{r_1^{\lambda}} - \frac{A(x, y)}{r^{\lambda}} \right] dy$$

(1.2.5) integralga nisbatan yuritilgan mulohazalarni takrorlab, KM to'plamdagi funksiyalarning teng darajali uzluksiz bo'lishini qaraymiz.

Natija. Agar G yopiq to'plam, va $A \in C(G \times G)$ bo'lsa (1.2.1) operator $C(G)$ da to'la uzluksiz bo'ladi.

Bu natija $p = \infty$ hol uchun tearemadan bevosita kelib chiqadi (va shuningdek $C(G)$ ning $L_p(G)$ fazo uchun fazo osti bo'lishligidan ham kelib chiqadi).

Teorema 1.1.3. (1.2.1) integralda $\lambda p' \geq m$ va S butun son $m - (m - \lambda)p < S \leq m$ tengsizlikni qanoatlantirsin. U holda (1.2.1) integral G to'plamni S o'lchovga ega tekislik bilan kesgandagi G_S kesimning qariyb hamma joyida aniqlangan (E_S dagi Lebeg ma'nosidagi o'lchov ma'nosida) funksiyani aniqlaydi. (1.2.1) formula bilan aniqlangan K operator $L_p(G)$ ni $L_q(G_S)$ ga o'tkazadigan chegaralangan operator bo'ladi. Bunda q quyidagi

$$1 \leq q < q_0 = \frac{Sp}{m - (m - \lambda)p} \quad (1.2.7)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy son.

Isbot. Dastlab $p \leq q < q_0$ holni qaraymiz.

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0} \right)$$

bo'lsin; tabiiyki $\sigma > 0$. U holda

$$\lambda = \frac{m}{p'} + \frac{S}{q} - 2\sigma$$

(1.2.1) integralni baholaymiz

$$|U(x)| \leq N \int_G \frac{|\rho(y)|}{r^{\lambda}} dy = N \int_G |\rho(y)|^{\frac{p}{q}} \cdot r^{\sigma - \frac{S}{q}} |\rho(y)|^{1 - \frac{p}{q}} \cdot r^{\sigma - \frac{m}{p'}} dy \quad (1.2.8)$$

$$p_1 = q, \quad p_2 = \frac{pq}{q - p}, \quad p_3 = p'$$

deb belgilaylik. Bu holda

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$$

bo'ladi va (1.2.8) integraldagi uchta ko'paytuvchiga Gyolder tengsizligini qo'llab

$$|U(x)| \leq N \left\{ \int_G |\rho(y)|^{p r^{\sigma q - s}} dy \right\}^{\frac{1}{q}} \times \left\{ \int_G |\rho(y)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \left\{ \int_G r^{p' \sigma - m} dy \right\}^{\frac{1}{p'}}$$

O'ng tamondagi ikkinchi ko'paytuvchi $\|\rho\|_p^{1 - \frac{p}{q}}$ ga teng, agar $G \subset (r < H)$ ekanligini hisobga olsak, uchunchi ko'paytuvchi osongina baholanadi. (shuningdek (1.2.2) formuladan foidalansak). Natijada

$$|U(x)| \leq \frac{N |S_1|^{\frac{1}{p'}} \cdot H^q}{(p' \sigma)^{\frac{1}{p'}}} \|\rho\|_p^{1 - \frac{p}{q}} \left\{ \int_G |\rho(y)|^{p r^{\sigma q - s}} dy \right\}^{\frac{1}{q}}$$

ga ega bo'lamiz. Bundan esa

$$\int_{g_s} |U(x)|^q d_s x \leq C \|\rho\|_p^{q-p} \int_G |\rho(y)|^p \left\{ \int_{g_s} r^{\sigma q - s} d_s x \right\} dy \quad (1.2.9)$$

kelib chiqadi, bu yerda $C = \text{const}$.

(1.2.9) tengsizlikda ichki integral osongina baholanadi. Koordinata o'qini shunday tanlaymizki, g_s kesim yotadigan S-o'lchovli tekislik

$x_{s+1} = x_{s+2} = \dots = x_m = 0$ tenglamalar bilan aniqlansin. U holda g_s da

$$r^2 = \sum_{k=1}^s (x_k - y_k)^2 + \sum_{k=s+1}^m y_k^2 \geq \sum_{k=1}^s (x_k - y_k)^2$$

oxirgi yig'indini r_s^2 orqali belgilaymiz; ko'rinib turibdiki, $r \geq r_s$ $\sigma q < S$ va demak

$$\int_{g_s} \frac{d_s x}{r^{s - \sigma q}} \leq \int_{g_s} \frac{d_s x}{r_s^{s - \sigma q}} < \int_{r_s < H} \frac{d_s x}{r^{s - \sigma q}}$$

(1.2.2) formuladan foydalanib, undagi m ni S ga almashtirib, topamiz

$$\int_{g_s} \frac{d_s x}{r^{s-\sigma q}} < \frac{2\pi^{\frac{s}{2}} H^{\sigma q}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sigma q}$$

Shundan so'ng (1.2.8) tengsizlikdan

$$\|U\|_{L_q(g_s)} = \left\{ \int_{g_s} |U(x)|^q d_s x \right\}^{\frac{1}{q}} \leq C' \|\rho\|_{L_q(\sigma)} \quad C' = \text{const} \quad (1.2.10)$$

tengsizlik hosil bo'ladi va $q \geq p$ hol uchun teorema isbot bo'ladi.

Quyidagi izohdan teoremaning $q \leq p$ bo'lgan hol uchun osongina isbot bo'ladi. $\Omega \in E_k$ – o'lchovli chegaralangan to'plam bo'lsin, $1 < q < q_1$ va $U \in L_q(\Omega)$. $\frac{q_1}{q}$ ko'rsatkich bilan olingan Gyolder tengsizligini qo'llab

$$\|U\|_q^q = \int_{\Omega} |U(x)|^q dx \leq \left\{ \int_{\Omega} |U(x)|^{q_1} dx \right\}^{\frac{q}{q_1}} \cdot \left\{ \int_{\Omega} |U(x)|^{\frac{q_1}{q_1-q}} dx \right\}^{\frac{q_1-q}{q_1}}$$

tengsizlikni olamiz. Yoki

$$\|U\|_q \leq (\mu\Omega)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}} \|U\|_{q_1} \quad (1.2.11)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Endi agar $q < p$ bo'lsa u holda $p \leq q_1 < q_0$ bo'ladigan biror q_1 son olib (1.2.10) (1.2.11) formulalarni hisobga olib

$$\|U\|_{L_q(g_s)} \leq (\mu g_s)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}} C' \|\rho\|_{L_p(G)}$$

tengsizlikka kelamiz. Bu $q < p$ bo'lgan hol uchun teoremaning isbotidir.

1.3. O'rta funksiyalar va uning hossalari.

1. O'rtalovchi yadro.

O'rtalovchi yadro va u bilan chambarchas bog'liq o'rta funksiya funksiya tushunchasi dastlab В.А.Стеклов tomonidan kiritilgan. Bu tushunchalar keyinchalik С.Л.Соболев tomonidan rivojlantirildi. Biz ham С.Л.Соболев ning olgan natijalarini bayon qilmoqchimiz.

Faraz qilaylik x va $y \in E^m$ evkilid fazosining ixtiyoriy nuqtalari, h -ixtiyoriy musbat son, $r = |x - y|$ masofa bo'lsin.

Ta'rif-1. Quyidagi 1), 2) shartlarni qanoatlantiruvchi $w_h(r)$ funksiyani o'rtalovchi yadro deymiz:

- 1) $w_h(r)$ funksiya x va y dekart koordinatalar bo'yicha cheksiz ko'p marta differensiollanuvchi. Bu talab $r \neq 0$ bo'lganda eslatilgan funksiyaning r bo'yicha cheksiz ko'p marta differensiollanuvchi bo'lishiga teng kuchli.
- 2) $w_h(r) > 0$ $r < h$ bo'lsa, $w_h(r) = 0$ $r \geq h$ bo'lsa;

$$3) \int_{r < h} w_h(r) dy = \int_{r < h} w_h(r) dx = 1$$

Bunday (o'rtalovchi yadrolar) funksiyalar to'plami bo'sh emasligini quyidagi misol tasdiqlaydi:

Misol.

$$w_h(r) = \begin{cases} C_h e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} & r < h \\ 0 & r \geq h \end{cases} \quad C_h = \text{const} > 0 \quad (1.3.1)$$

Ta'rif-1. Dagi 2) shartning bajarilishiga shubha yo'q.
Agar

$$C_h = \left\{ \int_{r < h} e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} dy \right\}^{-1} \quad (1.3.2)$$

Deb olinsa, 3) shart ham bajariladi.

1)-shart bajarilishini ko'rsatamiz. (1.3.1) tenglik bilan aniqlangan funksiyaning $r < h$ da cheksiz ko'p marta differensiollanuvchi ekanligiga shubha yo'q, shuningdek $r > h$ bo'lganda barcha hosilalar mavjud va nolga teng. Shuning uchun ham (1.3.1) funksiyaning $r = h$ bo'lganda ixtiyoriy (r bo'yicha) tartibli hosilslarga ega va bu hosilalarning nolga tengligini va $r < h$ da hisoblangan hosilalarning $r \rightarrow h$ da nolga intilishini ko'rsatish yetarli.

Isbotni birinchi tartibli hosila uchun olib boramiz; yuqori tartiblilar uchun isbot shunga o'xshash bo'ladi.

- a) $w_h(r)$ funksiya $r = h$ da uzluksiz. Haqiqatdan ham (1.3.1) formuladan ko'rinadiki

$$w_h(h+0) = 0 = w_h(h)$$

$$w_h(h-0) = \lim_{r \rightarrow h-0} C_h e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} = 0 \quad \text{chunki} \quad -\frac{h^2}{h^2-r^2} \xrightarrow{r \rightarrow h-0} -\infty$$

b) $w_h(h)$ mavjud va nolga teng. Haqiqatdan ham,

$$\lim_{r \rightarrow h-0} \frac{w_h(r) - w_h(0)}{r - h} = \lim_{r \rightarrow h-0} \frac{e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}}}{r - h} = 0 = w'_h(h)$$

oxirgi natijaga Lopital qoidasini qo'llab olindi.

c) Lopital qoidasiga muvofiq:

$$\lim_{r \rightarrow h-0} w'_h(r) = \lim_{r \rightarrow h-0} C_k \frac{2rh^2}{(h^2-r^2)^2} e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} = 0$$

Shunday qilib birinchi tartibli $w'_h(r)$ hosila mavjud va barcha r larda uzluksiz. Huddi shunday boshqa hosilalarning ham mavjudligi va uzluksizligini ko'rsatish qiyin emas.

2. O'rtalovchi funksiyalar.

$\Omega - E_m$ fazodagi biror chekli soha, $U(y) - \Omega$ da jamlanuvchi funksiya. Bu funksiyaning Ω sohaning tashqarisida nolga teng qilib davom ettiramiz. $x - E_m$ fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

$$U_h(x) = \int_{\Omega} w_h(r) U(y) dy \quad (1.3.3)$$

Bu yerda 1), 2), 3) shartlarni qanoatlantiruvchi biror o'rtalovchi yadro, U_h ni U funksiyaga nisbatan o'rta funksiya deymiz. h sonini esa o'rtalash radiusi deyiladi. o'rta funksiyalarni yana uch xil ko'rinishda ta'riflash mumkin:

1) $y \in \Omega$ da $U(y) = 0$ ekanligini etiborga olib (1.3.3) integralni butun E_m fazogacha tarqatsak bo'ladi, u holda

$$U_h(x) = \int_{E_m} w_h(r) U(y) dy \quad (1.3.3a)$$

2) O'rtalovchi yadroning 2) hossasiga ko'ra butun E_m fazo bo'yicha integrallashning o'rniga, markazi x nuqtada va h radiusli shar bo'yicha integrallash kifoya, yani

$$U_h(x) = \int_{r < h} w_h(r) U(y) dy \quad (1.3.3b)$$

- 3) Nihoyat integrallashni $\Omega \cap (r < h)$ kesishma bo'yicha amalga oshirish yetarli, chunki bu kesishmaning tashqarisida integral ostidagi funksiyaning yo birinchi yo ikkinchi ko'paytuvchisi nolga teng. U holda

$$U_h(x) = \int_{\Omega \cap (r < h)} w_h(r) U(y) dy \quad (1.3.3c)$$

2. O'rta funksiylarning soda xossalari.

- 1) O'rta funksiylar butun E_m fazoda cheksiz ko'p marta differensiallanuvchidir. Uning ixtiyoriy tartibli hosilasini (1.3.3)-(1.3.3c) formulalarning istalgan biridan integral ostida differensiallash yo'li bilan hosil qilish mumkin.

$$D^a U_h(x) = \int_{\Omega} U(y) D_x^a w_h(r) dy \quad (1.3.4)$$

Bu yerda a – ixtiyoriy multindeks $|a| = a_1 + a_2 + \dots + a_m = m$ shuningdek (1.3.4) formuladagi Ω sohani E_m $r < h$ $\Omega \cap (r < h)$ sohaning istalgan biri bilan almashtirish mumkin.

- 2) Ω gacha bo'lgan masofasi h dank am bo'lmagan ixtiyoriy nuqtalarda o'rta funksiya nolga teng. Haqiqatdan ham bu holda $r < h$ shar butunlay Ω sohadan tashqarida bo'ladi va integral ostidagi funksiya (1.3.3b) ga asosan $U(y) \equiv 0$.

Shunday qilib, o'rta funksiylar shunday sohalardagina aynan nol bo'lmaydi, qaysiki bu sohalar $\Omega^{(h)}$ deb belgilanib, quyidagicha yasaladi: Ω sohaning har bir x nuqtasini markaz deb hisoblab, h radiusli sharlar chizamiz, xuddi shu sharlar birlashmasi Ω^h sohaning o'zi bo'ladi. Tabiiyki $\Omega^{(h)} \supset \Omega$ agar masalan Ω R radiusli shar bo'lsa, $\Omega^{(h)}$ $R + h$ radiusli Ω shar bilan konsentrik shar bo'ladi.

3. O'rta funksiylarning yaqinlashishi.

Teorema 1.3.1. Agar $U \in C(\Omega)$ bo'lsa, u holda o'rta funksiya $U_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} U(x)$ yaqinlashishi Ω sohaning harqanday ichki to'plam ostida tekis bo'ladi.

Isboti. $\Omega' - \Omega$ sohaning ichki soha osti bo'lsin. Ω'' sohani shunday tuzamizki, bu birinchidan Ω soha osti va ikkinchidan Ω' uning uchun ichki soha osti bo'lsin.

Ω' va Ω'' sohalarning chegaralarini mos ravishda Γ' va Γ'' orqali belgilaylik, $h_0 - \Gamma'$ va Γ'' chegaralar nuqtalari orasidagi eng kichik masofa bo'lsin.

$h < h_0$ bo'ladigan h ni olamiz (1.3.3b) formulaga va o'rtalovchi yadroning 3) xossasiga ko'ra

$$U_h(x) - U(x) = \int_{r < h} [U(y) - U(x)] w_h(r) dy \quad (1.3.5)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $x \in \bar{\Omega}$ bo'lsa, u holda (1.3.5) integrelda $x \in \bar{\Omega}''$ bo'ladi. Yopiq Ω'' sohada uzluksiz bo'lgan U funksiya shu sohada tekis uzluksiz ham bo'ladi, shuning uchun yetarlicha kichik h var $r \leq h$ lar uchun $|U(y) - U(x)| < \varepsilon$ bajariladi, bu yerda ε - ixtiyoriy musbat son. $w_h(r) \geq 0$ va (1.3.5) formuladan

$$|U_h(x) - U(x)| \leq \varepsilon \int_{r < h} w_h(r) dy = \varepsilon$$

hosil bo'ladi. Bu yerda o'rtalovchi yadroning 2) xossasidan ham foidalaniladi.

Teorema 1.3.2. p ning $1 \leq p \leq \infty$ oraliqdagi har qanday qiymatida $L_p(\Omega)$ fazo normasi bo'yicha o'rtalash paytida $U(x)$ funksiya o'suvchi bo'lmaydi.

Isboti. $U \in L_p(\Omega)$ va $1 < p < \infty$ bo'lsin. Gyolder tengsizligiga ko'ra

$$\begin{aligned} |U_h(x)|^p &= \left| \int_{\Omega} U(y) w_h(r) dy \right|^p = \left| \int_{\Omega} U(y) w_h^{\frac{1}{p}}(r) w_h^{\frac{1}{p'}}(r) dy \right|^p \leq \\ &\leq \int_{\Omega} |U(y)|^p w_h(r) dy \left\{ \int_{\Omega} w_h(r) dy \right\}^{\frac{p}{p'}} \leq \int_{\Omega} |U(y)|^p w_h(r) dy \quad (1.3.6) \end{aligned}$$

O'rtalovchi yadroning 2) xossasiga ko'ra

$$\int_{\Omega} w_h(r) dy = \int_{\Omega \cap (r < h)} w_h(r) dy \leq \int_{r < h} w_h(r) dy = 1$$

(1.3.6) tengsizlikni Ω soha bo'yicha integrallab

$$\|U\|_p^p = \int_{\Omega} |U(x)|^p dx \leq \int_{\Omega} |U(y)|^p \left\{ \int_{\Omega} w_h(r) dx \right\} dy \leq \int_{\Omega} |U(y)|^p dy = \|U\|_p^p$$

Qolgan $p = 1$ $p = \infty$ holatlar osongina ko'rsatiladi, agar o'rtalovchi yadro xossalariidan foidalansak.

Teorema 1.3.3. Agar $U \in L_p(\Omega)$ bo'lsa, u holda $1 \leq p \leq \infty$ bo'ladigan p lar uchun $\|U - U_h\|_p(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ bo'ladi.

Isboti. Ma'lumki $U \in L_p(\Omega)$ bo'lsa, har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun $\|U - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ bo'ladigan f ko'phad topiladi. Norma aksiomalaridagi uchburchak aksiomasiga ko'ra (biz normadagi f belgini soddalik uchun tashlab yozamiz):

$$\|U - U_h\| \leq \|U - f\| + \|f_h - U_h\| + \|f - f_h\|$$

Teorema 1.3.2. ga ko'ra $\|f_h - U_h\| \leq \|f - U\|$ bo'ladi shuning uchun ham

$$\|U - U_h\| \leq 2\|f - U\| + \|f - f_h\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|f - f_h\|$$

Ω_1 sohani Ω soha uncha qat'iy ichki soha osti bo'ladigan qilib tanlaymiz. f ko'phad Ω_1 da uzluksiz, shuning uchun ham $f_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} f$ yaqinlashish Ω_1 sohaning ixtiyoriy soha ostida xususan Ω da ham tekis bo'ladi. Ammo yopiq soxada tekis yaqinlashishdan o'rtacha yaqinlashish kelib chiqadi, ya'ni yetarlicha kichik h uchun

$$\|f - f_h\|_{L_p(\Omega)} < \frac{1}{3}\varepsilon$$

bo'ladi. Bu yerdan esa bizning tasdiq kelib chiqadi.

Teorema 1.3.4. Ω sohada finit funksiyalar to'plami $L_p(\Omega)$ $1 \leq p \leq \infty$ fazoda zich to'plam bo'ladi.

Isboti. Buning uchun ixtiyoriy $U \in L_p(\Omega)$ funksiyani $L_p(\Omega)$ ning metrikasida finit funksiya bilan ixtiyoriy aniqlikda approssimatsiyalash mumkinligini ko'rsatish kifoya.

Ω_δ poloskaning o'lchovi yetarlicha kichik bo'ladigan δ ni tanlaymiz: $\varepsilon > 0$ songa ko'ra δ ni shunday tanlaymiz

$$\int_{\Omega_\delta} |U(x)|^p dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

tengsizlik bajarilsin.

$$v(x) = \begin{cases} U(x) & x \in \frac{\Omega}{\Omega_\delta} \\ 0 & x \in \Omega_\delta \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlangan $v(x)$ funksiyani qaraymiz. Tabiiyki, $v \in L_p(\Omega)$. Shuning uchun

$$\|U - v\|^p = \int_{\Omega_\delta} |U(x)|^p dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

va demak,

$$\|U - v\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.3.7)$$

bajariladi. $h < \frac{\delta}{2}$ qilib tanlab $v_h(x)$ o'rta funksiyani qaraymiz. Ular Ω da finit, chunki cheksiz ko'p differensiallanuvchi va $\Omega_{\delta-h}$ chegaraviy poloskada nolga teng. (o'rta funksiyalarning 1,2 – xossalriga ko'ra) h_0 sonni shunday tanlaymizki $h < h_0$ bo'lganda

$$\|v - v_h\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.3.8)$$

tengsizlik bajarilsin.

Uchburchak tengsizligidan va (1.3.7) (1.3.8) munosabatlardan

$$\|U - v_h\| \leq \|U - v\| + \|v - v_h\| < \varepsilon \quad h < h_0$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Natija. 1.3.2. $M \subset L_p(\Omega)$ – Ω da finit bo'lgan barcha funksiyalar to'plami bo'lsin, u holda $1 \leq p < \infty$ bo'lganda M $L_p(\Omega)$ fazoda zich to'plam bo'ladi.

2-bob. Sobolev fazolari. Fridriks va Puankare tengsizliklari.

2.1. umumlashgan hosila tushunchasi, asosiy xossalari.

Dastlab integral hisobda bo'laklab integrallash deb nomlangan formula ustida to'xtalamiz.

Ω — m o'lchovli evkild fazosidagi silliq Γ sirt bilan chegaralangan chekli soha bo'lsin.

Gauss-Ostrogradskiy formulasini eslaylik

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_k} dx = \int_{\Gamma} p \cos(v; x_k) d\Gamma$$

Bu yerda v Ω sohaga nisbatan Γ sirtga o'tkazilgan tashqi narmal. $P(x)$ funksiyadan $C^{(1)}(\bar{\Omega})$ klassga tegishli bo'lishini talab qilish yetarli.

$$\int_{\Omega} P \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = \int_{\Omega} P \frac{\partial}{\partial x_k} (PQ) dx - \int_{\Omega} Q \frac{\partial P}{\partial x_k} dx$$

integralni qaraymiz. Bu yerda $P, Q \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$. O'ng tamondagi birinchi integralni Gauss-Ostrogradskiy formulasini bo'yicha almashtirsak bo'laklab integrallash formulasiga kelamiz:

$$\int_{\Omega} P \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = - \int_{\Omega} Q \frac{\partial P}{\partial x_k} dx + \int_{\Gamma} p \cos(v; x_k) d\Gamma$$

Agar P va Q funksiyalardan biri Γ sirtga nolga aylansa, u holda sirt integrali yo'qoladi va quyidagi soda formulaga kelamiz:

$$\int_{\Omega} P \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = - \int_{\Omega} Q \frac{\partial P}{\partial x_k} dx$$

Murakkabroq ko'rinishdagi integralni qaraymiz:

$$\int_{\Omega} P \frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx$$

Agar P funksiya keragicha uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, yuqoridagi integralni K marta bo'laklab (bo'laklashni Q funksiyani hajmi bo'yicha olingan integral ostida differensiallashdan ozod bo'lguncha davom ettirib) quyidagi formulaga kelamiz:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} P \frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx &= - \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^{k-1} Q}{\partial x_1^{k_1-1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx + \\ &+ \int_{\Gamma} P \frac{\partial^{k-1} Q}{\partial x_1^{k_1-1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} \cos(\nu, x_1) d\Gamma = - - - \\ &= (-1)^k \int_{\Omega} Q \frac{\partial^k P}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx + \int_{\Gamma} R(P, Q) d\Gamma \end{aligned}$$

bu yerda $R(P, Q)$ ifoda o'z ichida P, Q va ularning $k-1$ tartibgacha hosilalarini saqlaydi.

Faraz qilaylik Ω biror soha va $U, w \in L_{loc}(\Omega)$ yani Ω sohada xususan Ω ning ixtiyoriy ichki soha ostida jamlanuvchi bo'lsin.

Ω – biror soha, k – butun son, $1 \leq k < \infty$ bo'lsin. $m^{(k)}(\Omega)$ orqali Ω da k marta uzluksiz differensiallanuvchi, hamda har bir funksiya o'zi biror chegaraviy poloskada nolga aylanadigan funksiyalar to'plamini belgilaymiz.

Agar Ω – cheksiz soha bo'lsa, qo'shimcha har bir funksiya dan biror shardan tashqarida aynan nolga teng bo'lishi talab qilinadi.

Tabiiyki, $m^{(k)}(\Omega) \subset m^{(k-1)}(\Omega)$.

$m^{(\infty)}(\Omega)$ klassdagi funksiyalarni Ω da finit funksiyalar deymiz.

Faraz qilaylik ixtiyoriy $\varphi \in m^{(k)}(\Omega)$ funksiya uchun

$$\int_{\Omega} U D^a \varphi dx = (-1)^k \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad k = |a| \quad (2.1.1)$$

tenglik (ayniyat) o'rinli bo'lsin, bu yerda $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ – biror multindeks.

Ta'rif 2.1.1. (2.1.1) ayniyatni qanoatlantiruvchi v funksiyani $U(x)$ funksiya dan Ω soha bo'yicha olingan k tartibli umumlashgan funksiya deymiz.

Umumlashgan funksiyani belgilash uchun ham odatdagi simvol ishlatiladi:

$$v(x) = D^a U = \frac{\partial^{|a|} Q}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_m^{a_m}} \quad (2.1.2)$$

Teorema 2.1.1. (2.1.2) ko'rinishdagi umumlashgan funksiya yagonadir.

Agar $U(x) \quad v_1(x) \quad v_2(x) \in L_{loc}(\Omega)$ va ixtiyoriy $\varphi \in m^{(k)}(\Omega)$ funksiyalar uchun

$$\int_{\Omega} U D^a \varphi dx = (-1)^k \int_{\Omega} v_1 \varphi(x) dx \quad (2.1.3)$$

$$\int_{\Omega} U D^a \varphi dx = (-1)^k \int_{\Omega} v_2 \varphi(x) dx$$

ayniyatlar o'rinli bo'lsa, u holda $v_1 \equiv v_2$ bo'ladi. Bu yerda a – multindeks va $k = |a|$.

(2.1.3) tengliklarning birinchisidan ikkinchisini ayirib, $w(x) = v_1(x) - v_2(x)$ belgilash qilsak quyidagi ayniyatga kelamiz.

$$\int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx = 0 \quad (2.1.4)$$

Bu yerda $\varphi \in m^{(k)}(\Omega)$. Ko'rsatish mumkin (2.1.4) ayniyat biror chegaraviy poloskada nolga teng bo'lgan ixtiyoriy chegaralangan o'lchovli $\varphi(x)$ funksiya uchun o'rinli bo'ladi. $\varphi(x)$ – shunday funksiya bo'lib, δ qalinlikga olib $\varphi_h(x)$ o'rta funksiya ko'ramiz. Bu funksiya $\delta - h$ qalinlikdagi poloskada nolga teng cheksiz ko'p marta differensiallanuvchidir. Shuning uchun ham $\varphi_h \in m^{(\infty)}(\Omega)$ va yana $\varphi_h \in m^{(k)}(\Omega)$. Bunday funksiya uchun

$$\int_{\Omega} w(x) \varphi_h(x) dx = 0 \quad (2.1.5)$$

Ko'rish qiyin emaski harqanday h uchun $\varphi_h(x)$ funksiya yagona doymiy (o'zgarmas) bilan chegaralangan: agar $|\varphi(x)| < N < \text{const}$ u holda

$$|\varphi_h(x)| = \left| \int_{r < h} \varphi(y) w_h(r) dy \right| \leq N \int_{r < h} w_h(r) dy = N$$

Ω sohada chegaralangan o'lchovli φ funksiya hech bo'lmaganda Ω da kvadrati bilan jamlanuvchi bo'ladi. 1.3.3. teorema ko'ra

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

O'rtacha ma'noda yaqinlashuvchi ketma-ketliklar haqidagi teorema ko'ra, shunday $h_n \rightarrow 0$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo'ladiki, ular uchun Ω to'plamning qariyb hamma joyida $\varphi_{h_n} \rightarrow \varphi(x)$ yaqinlashish o'rinli bo'ladi.

(2.1.5) ayniyatda $h = h_n$ deymiz. (2.1.5) formuladagi integral ostidagi funksiya $N|w(x)|$ jamlanuvchi funksiya oshmaydi va $n \rightarrow \infty$ da qariyb hamma joyida $w(x)\varphi(x)$ funksiya intiladi. Lebeg integrali ishorasi ostida limitga o'tish haqidagi teorema ko'ra

$$\int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx = 0$$

bo'ladi, xuddi shuni ko'rsatmoqchi edik. (2.1.4) formulada (ayniyatda)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \in \Omega_{\frac{\delta}{2}} \text{ bo'lsa} \\ \text{sign} w(x) & x \in \Omega' = \frac{\Omega}{\Omega_{\frac{\delta}{2}}} \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

$$\int |w(x)| dx = 0$$

deb olamiz, u holda Ω'

va demak $w(x) = 0$ $x \in \Omega'$ chunki $\delta > 0$ ixtiyoriy sonligidan $w(x) \equiv 0$ bo'ladi $x \in \Omega$ bo'lganda.

Agar $U(x)$ o'zining barcha k – tartibli hosilalarigacha Ω da uzluksiz bo'lsa, u holda uning k – tartibli umumlashgan hosilalari mavjud va oddiy k – tartibli hosilaga teng bo'ladi.

Haqiqatdan ham (2.1.1) formulaning chap tamoni integralda k marta bo'laklab integrallasak sirt bo'yicha olingan integrallar yo'qoladi sababi Ω soxaning chegarasida φ va uning $(k-1)$ – tartibgacha hosilalari nolga teng. Natijada

$$\int_{\Omega} U \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx = (-1)^k \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial^k U}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx \quad (2.1.6)$$

tenglikka ega bo'lamiz. (2.1.6) ning o'ng tamoni U funksiyaning oddiy (uzluksiz) hosilasi turibdi.

(2.1.6) tenglikdan ko'rinadiki, bu holda umumlashgan hosila mavjud va u uzluksiz

$$\frac{\partial^k U}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}}$$

hosilaga teng.

Misollar.

1. Ω soha $(-1, 1)$ interval bo'lsin. $U = |x|$ funksiya $U'(x) = \text{sign}x$ umumlashgan hosilaga ega bo'ladi.

Haqiqatdan ham $\varphi(x) \in m^{(1)}(-1, 1)$ bo'lsin, u holda $\varphi(x)$ funksiyalar $[-1, 1]$ sigmentda uzluksiz differensiallanuvchi va $\varphi(1) = \varphi(-1) = 0$

$$\int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^0 x \varphi'(x) dx + \int_0^1 x \varphi'(x) dx$$

bo'laklab integralni qo'llab

$$\int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx = \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx = - \int_{-1}^1 \varphi(x) \text{sign}x dx \quad (2.1.7)$$

bundan $U'(x) = \text{sign}x$ ekanligi ko'rinadi.

2. $\text{Sign}x$ funksiya $(-1, 1)$ intervalda birinchi tartibli umumlashgan hosilaga ega emas (hatto $|x|$ funksiya o'xshash $x \neq 0$ bo'lganda uzluksiz hosilaga ega bo'lsa ham). Buni isbotlash uchun

$$\int_{-1}^1 \varphi'(x) \text{sign}x dx = - \int_{-1}^0 \varphi'(x) dx + \int_0^1 \varphi'(x) dx = -2\varphi(0) \quad (2.1.8)$$

Bu yerda $\varphi(x) \in m^{(1)}(-1, 1)$

$$\int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx = 2\varphi(0) \quad (2.1.9)$$

Ayniyatni qanoatlantiruvchi $(-1, 1)$ intervalda local integrallanuvchi, hamda ixtiyoriy $\varphi(x) \in m^{(1)}(-1, 1)$ funksiya uchun (2.1.9) ayniyatni qanoatlantiruvchi $v(x)$ funksiya mavjud emas.

Haqiqatdan ham, agar shunday funksiya mavjud desak

$$V(x) = \int_0^x v(y) dy$$

Funksiya ixtiyoriy $[a, b] \subset (-1, 1)$ segmentda absolyut uzluksiz va unda jamlanuvchi $v(x)$ hosilaga ega bo'ladi. (2.1.9) integralni bo'laklab integrallash va so'ngra (2.1.8) formulaga ko'ra $\varphi(x) \in m^{(1)}(-1, 1)$ ixtiyoriy funksiya uchun

$$\int_{-1}^1 \varphi'(x)[\operatorname{sign} x - V(x)]dx = 0$$

ayniyatga ega bo'lamiz. Bu holda

$$\operatorname{sign} x = V(x) + \operatorname{const} \quad x \in (-1, 1)$$

Bu mantiqqa to'g'ri kelmaydi, chunki $x = 0$ nuqtada tenglikning chap tamoni uzilishga ega, o'ng tamoni esa uzluksizdir.

3. $f(t)$ va $g(t)$ funksiyalar $[-1, 1]$ segmentda uzluksiz, ammo ular bu segmentning biror nuqtasida differensiallanuvchi emas.

$0 \leq x_1 \quad x_2 \leq 1$ kvadratda ikki argumentli

$$U(x) = U(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad (2.1.10)$$

Funksiya birinchi tartibli umumlashgan hosilaga ega emasligini, ammo bu funksiya

$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}$ ikkinchi tartibli umumlashgan hosilaga ega va bu hosila nolga tengligini

ko'rsatish mumkin. Buni isbotlash uchun ixtiyoriy $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) \in m^{(2)}(\Omega)$ bu yerda Ω soha $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$ kvadrat funksiya uchun

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} U(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = 0$$

Ayniyatning to'g'riligini ko'rsatish yetarli. Ammo bu ayniyatning quyidagi tengliklar orqali to'g'riligi isbotlanadi:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} U(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = \\ & = \int_{-1}^{+1} f(x_1) \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 \right\} dx_1 + \int_{-1}^{+1} g(x_2) \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \right\} dx_2 = \end{aligned}$$

$$= \int_{-1}^{+1} f(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big|_{x_2 = -1}^{x_2 = +1} dx_1 + \int_{-1}^{+1} g(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \Big|_{x_1 = -1}^{x_1 = +1} dx_2 = 0$$

Bu misoldan shuni ko'ramizki, funksiyaning biror tartibli umumlashgan hosilasi mavjudligidan, shu tartibdan oldingi tartibli umumlashgan hosilalari mavjud degan xulosa kelib chiqmas ekan.

Umumlashgan hosilaning soda xossalari.

Teorema 2.1.2. $U(x)$ funksiya Ω to'plamda (2.1.1) tenglik bilan aniqlangan $v(x)$ umumlashgan hosilaga ega bo'lsin: $v(x) = D^a U$ va $U_h(x), v(x)$ lar mos ravishda o'rta funksiya bo'lsin. U holda $\frac{\Omega}{\Omega_h}$ sohada bu hosilaning o'rta funksiyasi o'sha ko'rinishdagi o'rta funksiya bilan olingan hosilasiga teng bo'ladi.

Isboti. Ω_h sohada Ω sohaning h qalinlikdagi chegaraviy poloskasidir. $\frac{\Omega}{\Omega_h}$ - ochiq to'plam va agar $x \in \frac{\Omega}{\Omega_h}$ bo'lsa, u holda x dan Ω ning chegarasigacha bo'lgan masofa h dan kata, shuning uchun ham $w_h(r)$ o'rtalovchi yadro uchun $w_h(r) \in m^{(\infty)}(\Omega)$ munosabat o'rinli bo'ladi. (2.1.1) formulaga ko'ra

$$\int_{\Omega} U(y) D_y^a w_h(r) dy = (-1)^k \int_{\Omega} U(y) w_h(r) dy = (-1)^k v_h(x) \quad (2.1.11)$$

bu yerda $|a| = k$ deb belgilangan.

O'rtalovchi yadro $w_h(r)$ faqat $x - y$ ayirmadan bog'liq bo'lgani uchun $D_y^a w_h(r) = (-1)^k D_x^a w_h(r)$ Buni (2.1.1) formulaga qo'yib $v_h(x) = D^a U_h(x)$ natijaga ega bo'lamiz.

Teorema 2.1.3. $\Omega' - \Omega$ uchun soha osti bo'lsin. Agar $v(x)$ funksiya Ω sohada $U(x)$ funksiya uchun umumlashgan hosila, yani

$$v(x) = D^a U(x) \quad |a| = k \quad (2.1.12)$$

tenglik bilan bog'langan bo'lsa, u holda $v(x)$ Ω' sohada ham $U(x)$ funksiyaning o'shanday umumlashgan hosilasi bo'ladi.

Hqiqatdan ham $\varphi \in m^{(k)}(\Omega')$ bo'lsin. $\varphi(x)$ funksiya $\frac{\Omega}{\Omega'}$ sohada nolga teng qilib davom ettiramiz. Tabiiyki $\varphi \in m^{(k)}(\Omega)$ bo'ladi. $U(x)$ va $\varphi(x)$ funksiylarga (2.1.1) formulani qo'llaymiz. Bu formulada $\frac{\Omega}{\Omega'}$ soha bo'yicha olingan integrallar nolga teng bo'lgani uchun, ularni tashlab yuboramiz, natijada

$$\int_{\Omega'} U D^a \varphi dx = (-1)^k \int_{\Omega'} v \varphi dx$$

tenglikga kelamiz, bu degani Ω' soha ostida $v = D^a U$ tenglik bajarilganini bildiradi.

Teorema 2.1.4. Agar $v(x)$ funksiya Ω sohada $U(x)$ funksiyaning $v(x) = D^a U(x)$ ko'rinishdagi $w(x)$ funksiya Ω sohada $v(x)$ funksiyaning $w(x) = D^\beta v(x)$ ko'rinishdagi umumlashgan hosilasi bo'lsa, u holda $w(x) = D^{a+\beta} U(x)$ tenglik Ω sohada o'rinli bo'ladi.

Isboti.

$$|\alpha| = k \quad |\beta| = l \text{ va } \varphi \in m^{(k+l)}(\Omega)$$

bo'lsin.

$$D^\beta \varphi(x) \in m^{(k)}(\Omega)$$

va (2.1.1) formulaga ko'ra

$$\int_{\Omega} U D^{a+\beta} \varphi dx = (-1)^k \int_{\Omega} v D^\beta \varphi dx \quad (2.1.12)$$

$$\int_{\Omega} v D^\beta \varphi dx = (-1)^l \int_{\Omega} w \varphi dx$$

tengliklar bajariladi. Oxirgi tenglikni (2.1.12) tenglikga qo'yib

$$\int_{\Omega} U D^{a+\beta} \varphi dx = (-1)^{k+l} \int_{\Omega} w \varphi dx$$

tenglikni olamiz, yani teorema isbotlandi.

Lemma 2.1.1. $U(x)$ funksiya Ω sohada $\frac{\partial^k U}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_m^{i_m}}$ umumlashgan hosilaga ega bo'lsin, shuningdek bundan oldingi tartibli barcha hosilalar ham mavjud bo'lsin. Agar $\eta(x) \in C^{(k)}(\Omega)$ bo'lsa, u holda shunday $\frac{\partial^k (\eta \cdot U)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_m^{i_m}}$

umumlashgan hosila mavjud bo'lib, uni oddiy ko'paytmaning hosilasini hisoblash qoidasiga ko'ra topish mumkin.

Teorema 2.1.5. $U_n(x)$ $n = 1, 2, 3, \dots$ funksiyalar $\Omega \subset E_m$ chekli sohada bir xil $v_n(x) = D^a U_n(x)$ ko'rinishdagi umumlashgan hosilalarga ega bo'lsin. Agar ikkala $\{U_n(x)\}$ va $\{v_n(x)\}$ ketma-ketliklar $L_1(\Omega)$ fazo metrikasi bo'yicha mos ravishda $U_n(x)$ va $v_n(x)$ limitlarga yaqinlashsa, u holda Ω sohada $v(x)$ funksiya $U(x)$ funksiyaning o'sha tartibdagi umumlashgan hosilasi bo'ladi.

2.2. W_p^k fazolari. Sobolevning integral ayniyati.

$\Omega \subset E_m$ —bo'lak-bo'lak silliq chegarali chekli soha bo'lsin. Ω sohada jamlanuvchi va k tartibgacha bo'lgan barcha umumlashgan hosilalari p daraja bilan Ω sohada jamlanuvchi bo'lgan barcha funksiyalar to'plamini qaraymiz. Bu to'plamda normani

$$\|U\|_{p,k} = \|U\|_1 + \sum_{|a|=k} \|D^a U\|_p \quad (2.2.1)$$

formula yordamida kiritamiz. Shundan so'ng eslatilgan to'plam Sobolev fazosi deb ataluvchi normallangan fazoga aylanadi va uni $W_p^k(\Omega)$ orqali belgilaymiz.

Normani (2.2.1) ko'rinishda kiritish umuman olganda muhim emas; masalan $W_p^k(\Omega)$ da normani quyidagicha

$$\|U\|'_{p,k} = \|U\|_1 + \left\{ \int_{\Omega} \sum_{|a|=k} |D^a U|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \|U\|_1 + \left\{ \int_{\Omega} \sum_{|a|=k} \|D^a U\|_p^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (2.2.1a)$$

va

$$\|U\|'_{p,k} = \|U\|_1 + \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{|a|=k} (D^a U)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (2.2.1b)$$

kiritilsa ham bo'ladi. (2.2.1b) norma koordinata o'qlarining burilishiga bog'liq bo'lmaydi (yani invariant), shu ma'noda malum ustunlikka ega. Bundan so'ng $\|\cdot\|_{p,k}$ simvol (2.2.1) normaga ekvivalent bo'lgan ixtiyoriy normani anglatadi.

Teorema 2.2.1. $W_p^{(k)}$ to'liq fazodir.

Isboti. $U_n \in W_p^k(\Omega)$ $n = 1, 2, 3, \dots$ $\|U_n - U_s\|_{p,k} \xrightarrow{\overline{n,s}} 0$ bo'lsin; Aniqlik uchun $W_p^k(\Omega)$ fazoda norma (2.2.1) ko'rinishda bo'lsin. Berilgan munosabatdan

$$\|U_n - U_s\|_1 \xrightarrow{\overline{n,s}} 0 \quad \|D^a U_n - D^a U_s\|_p \xrightarrow{\overline{n,s}} 0$$

kelib chiqadi.

$L_p(\Omega)$ ixtiyoriy p uchun to'liq fazo bo'lganidan $U \in L_p(\Omega)$ va $v_a \in L_p(\Omega)$ $|a| = k$

$$\|U_n - U\| \xrightarrow{\overline{n}} 0 \quad \|D^a U_n - v_a\|_p \xrightarrow{\overline{n}} 0$$

munosabatni qanoatlantiradigan U va v_a funksiyalar mavjud bo'ladi. Shuning uchun ham, bir vaqtda

$$\|D^a U_n - v_a\|_1 \xrightarrow{\overline{n}} 0$$

bajariladi. Oldingi bandedagi teorema ko'ra $D^a U_n = v_a$ $|a| = k$ umumlashgan hosila mavjud bo'ladi. Yuqorida ko'rdikki $U \in L_p(\Omega)$ va $D^a U \in L_p(\Omega)$ $|a| = k$ bundan $U \in W_p^k(\Omega)$ ekanligi ko'rinadi. Bu yerda

$$\|U_n - U\|_{p,k} = \|U_n - U\|_1 + \sum_{|a|=k} \|D^a U_n - v_a\|_p \xrightarrow{\overline{n}} 0$$

shuni takidlash kerakki Sobolev fazolari separabel fazo ham bo'ladi. Tabiiyki $k = 0$ bo'lganda $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazo $L_p(\Omega)$ fazoga aylanadi.

Bir qator izlanishlarda k belgi butun bo'lmagan $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazolar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi: $k = l + \lambda$ $l \geq 0$ va butun son va $0 < \lambda < 1$ bo'lsin. Bu holda $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazo elementlari deb $W_p^{(l)}(\Omega)$ fazoning

$$J(U) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \sum_{|a|=l} \frac{|D^a U(y) - D^a U(x)|^p}{|y - x|^{m+\lambda p}} dx dy \quad (2.2.2)$$

integrali yaqinlashuvchi bo'ladigan funksiyalari tushuniladi, $W_p^{(k)}(\Omega)$ da norma

$$\|U\|_{W_p^{(k)}} = \|U\|_{W_p^{(l)}} + [J(U)]^{\frac{1}{p}} \quad (2.2.3)$$

ko'rinishda olinadi. (2.2.3) norma o'rniga, unga ekvivalent bo'lgan ixtiyoriy normani olish ham mumkin.

$W_p^{(k)}$ fazo tushunchasini qaralayotgan funksiyalar evklid fazosida berilagan bo'lmasdan, balki biror yetarlicha silliq ko'p xillikda aniqlangan holda ham (umumlashtirish) tadbiq etish mumkin. Γ – m o'lchovli ko'p xillik va uni chekli sondagi o'sha o'lchovga ega Γ_i ko'pxilliklar birlashmasi sifatida tasvirlash mumkin bo'lsin. Shuningdek bu ko'pxilliklarning har birini E_m evklid fazosidagi D_i sohaga

$$\xi = \varphi_i(x) \quad (\xi \in \Gamma, x \in E_m)$$

Funksiyalar yordamida uzluksiz akslantirish mumkin bo'lsin. Bu funksiyalar $\bar{D}_i$ sohada [k] marta uzluksiz differensiallanuvchi ham bo'lsin. Agar

$U(\varphi_j) \in W_p^{(k)}(D_j) \quad j = 1, 2, \dots, N$ bo'lsa, u holda $U \in W_p^{(k)}(\Gamma)$

Bo'ladi deb aytamiz. $W_p^{(k)}(\Gamma)$ da normani masalan

$$\|U\|_{W_p^{(k)}(\Gamma)} = \sum_{i=1}^N \|U\varphi_i\|_{W_p^{(k)}(D_j)}$$

Ko'rinishda olish mumkin.

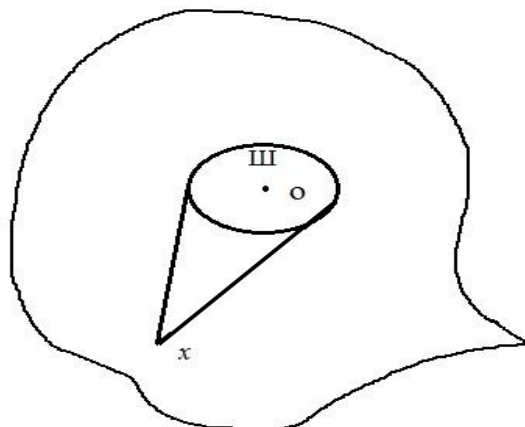
Ta'rif.2.2.2. Agar sohaning biror nuqtasidan chiquvchi ixtiyoriy nur soha chegarasi bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo'lsa, u holda sohani o'sha nuqtaga nisbatan yulduzli soha deyiladi.

Agar soha biror nuqtali to'planning har bir nuqtasiga nisbatan yulduzli soha bo'lsa, u hilda sohani shu nuqtali to'plamga nisbatan yulduzli deymiz.

1-chizmada ko'rsatilgan $\sqcup$ sharga nisbatan yulduzli bo'lgan sohani Ω orqali belgilaylik. Shar radiusini a orqali belgilaylik. Koordinatalar boshini shar markazida o'rnatib so'ngra

$$v(y) = w_a(|y|)$$

deb belgilaylik, bu yerda w_a – birinchi bobda eslatilgan o'rtalovchi yadro.



chizma-1

X va $y - E_m$ fazoning ixtiyoriy nuqtalari bo'lsin. X nuqtadan y nuqtaga yo'nalgan ortni θ orqali, bu ortning x_j o'qdagi proeksiyasini θ_j orqali belgilaylik, odatdagidek $r = |x - y|$ deymiz. X va y ning har qanday funksiyasini x, r va θ ning funksiyasi deb qarash mumkin va aksincha. Shunga mos qilib, masalan $v(y) = v(x, r, \theta)$ deb yozsak bo'ladi.

$$t(x, y) = v(x, r, \theta) = - \int_r^\infty v(x, \rho, \theta) \rho^{m-1} d\rho \quad (2.2.3)$$

va

$$z(x, y) = z(x, r, \theta) = \frac{1}{(k-1)!} r^{k-1} t(x, r, \theta) \quad (2.2.4)$$

funksiyalarni kiritamiz.

D_x orqali ∂III sfera va uchi x nuqtada bo'lgan konus sharga urunuvchi konus bilan chegaralangan sohani belgilasak $t(x, y)$ va $z(x, y)$ funksiyalar shu D_x sohada noldan farqli. D_x sohaning sferasida va D_x dan tashqarida eslatilgan funksiyalar nolga teng. ($y = x$ nuqtadan tashqarida nolga teng, bu nuqtada esa $t(x, y)$ funksiya aniqlanmagan).

$U(x) \in C^{(k)}(\bar{\Omega})$ $k \geq 1$ bo'lsin. Quyidagicha aniqlangan $U(x, r, \theta)$ funksiyani: agar $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \bar{\Omega}$ bo'lsa u holda

$$U(x, r, \theta) = U(y) \frac{\partial^{k-1} z}{\partial r^{k-1}} - \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial^{k-2} z}{\partial r^{k-2}} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1} U}{\partial r^{k-1}} z \quad (2.2.5)$$

Agar $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \bar{\Omega}$ bo'lsa, u holda $U(x, r, \theta) = 0$ (2.2.5) formulani differensiallab

$$\frac{\partial U}{\partial r} = U(y) \frac{\partial^k z}{\partial r^k} + (-1)^{k-1} \frac{\partial^k U}{\partial r^k} z \quad (2.2.6)$$

tenglikni olamiz. Agar (2.2.6) da $r = 0$ deyilsa, y holda (2.2.5) tenglikning o'ng tamonidagi qo'shiluvchilardan birinchisidan

$$U(x, 0, \theta) = U(x) t(x, 0, \theta) = -U(x) \int_0^\infty v(x, r, \theta) r^{m-1} dr \quad (2.2.7)$$

hosil bo'ladi. (2.2.6) tenglikni $(0, \infty)$ oraliqda r bo'yicha integrallaymiz. (2.2.7) formuladan foydalanib

$$U(x) \int_0^\infty v(x, r, \theta) r^{m-1} dr = \int_0^\infty \left[U(y) \frac{\partial^k z}{\partial r^k} + (-1)^{k-1} z \frac{\partial^k U}{\partial r^k} \right] dr$$

Oxirgi tenglikni markazi x nuqtada bo'lgan birlik sfera elementi ds_1 ga ko'paytirib, so'ngra shu sfera bo'yicha integrallaylik

$$U(x) \int_{E_m} v(x, r, \theta) r^{m-1} dr = \int_0^\infty \left[U \frac{\partial^k z}{\partial r^k} + (-1)^{k-1} z \frac{\partial^k U}{\partial r^k} \right] \frac{dy}{r^{m-1}} \quad (2.2.8)$$

Ammo o'rtalovchi yadroning 3-xossasiga ko'ra

$$\int_{E_m} v(x, r, \theta) dy = \int_{E_m} v(y) dy = \int_{E_m} w_a(y) dy = 1$$

(2.2.8) ning o'ng tamonida integralni E_m bo'yni emas balki Ω soha bo'yicha olish mumkinligiga asosan, quyidagi S.L.Sobolevning integral ayniyatiga kelamiz:

$$U(x) = \int_{\Omega} U(y) \frac{\partial^k z}{\partial r^k} \frac{dy}{r^{m-1}} + (-1)^{k-1} \int_{\Omega} z \frac{\partial^k U}{\partial r^k} \frac{dy}{r^{m-1}} \quad (2.2.9)$$

(2.2.9) formulani batafsilroq o'rganamiz. Eng avvalo bu formuladagi birinchi integral x ga nisbatan darajasi $k - 1$ dan yuqori bo'lmagan ko'phad ekanligini ko'rsatamiz: bu ko'phadning koefisientlari $U(y)$ funksiyani y ning chegaralangan funksiyasiga ko'paytirishdan hosil bo'lgan funksiyalar. Leybnist formulasiga ko'ra

$$\frac{\partial^k z}{\partial r^k} = \sum_{j=1}^k C_j r^{j-1} \frac{\partial^{j-1}}{\partial r^{j-1}} [r^{m-1} v(y)] = \sum_{j=1}^k \sum_{s=0}^{j-1} C_j r^{m+s-1} \frac{\partial^s v(y)}{\partial r^s} \quad (2.2.10)$$

bunda C_j va C_{js} lar o'zgarmas sonlar. Ammo

$$\theta_j = \frac{(y_j - x_j)}{r} \quad \frac{\partial^s v(y)}{\partial r^s} = \sum_{|a|=s} \frac{s!}{a!} D_y^a v(y) \theta^a \quad (2.2.11)$$

$r^s \theta^a$ ko'paytma x va y nuqtalar har birining koordinatalari bo'yicha s darajali ko'phaddir. Shundan so'ng (2.2.10) formuladan

$$\frac{\partial^k z}{\partial r^k} = r^{m-1} p_{k-1}(x, y)$$

bunda $p_{k-1}(x, y)$ — x nuqta koordinatalarining darajasi $k - 1$ dan yuqori bo'lmagan ko'phad, bu ko'phad koefitsientlari $\bar{\Omega}$ da uzluksiz bo'lgan y ning funksiyalaridir.

$$p_{k-1}(x, y) = \sum_{|a|=0}^{k-1} b_a(y) x^a \quad b_a \in C(\bar{\Omega})$$

$$U(x) = \sum_{|a|=0}^{k-1} x_a \int_{\text{III}} b_a(y) U(y) dy + \sum_{|a|=k} \int_{D_x} \frac{A_a(x, y)}{r^{m-k}} D_y^a U(y) dy$$

S.L.Sobolevning integral ayniyatining oxirgi ko'rinishidan kelib chiqib funktsiyani uning k tartibli hosilalari va biror $k - 1$ dan yuqori bo'lmagan ko'phad orqali ta'svirlash mumkinligi xulosa qilish mumkin.

2.3. Sobolev fazolarida ekvivalent normalar Fridriks va Puankare tengsizliklari.

1. Joylashish teoremlari.

X va Y ikkita banax fazolari va X ning barcha elementlari Y fazoga tegishli bo'lsin. U holda X fazo Y fazoga **joylashadi** deyiladi. V orqali X fazoning ixtiyoriy u elementini mos qo'yuvchi operatorni belgilaymiz. Bu holda V ni X

fazoni Y fazoga **joylashtiruvchi operator** deymiz. Tabiiyki $D(V) = X$ va $R(V) \subset Y$.

Joylashtiruvchi operatorning chegaralanganligi yoki to'la uzluksizligi haqidagi teoremlarni "joylashtirish haqida teoremlar" deb nomlanadi.

Agar X ni Y ga joylashtiruvchi operator chegaralangan yoki to'la uzluksiz bo'lsa X fazo Y fazoga chegaralangan yoki to'la uzluksiz bo'lib joylashadi deymiz.

Quyida Ω ni chekli va biror sharga nisbatan yulduzli bo'lgan E_m ning qismi deb tushunamiz.

Teorema 2.3.1. agar $pk > m$ bo'lsa, u holda $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazo $C(\bar{\Omega})$ fazoga to'la uzluksiz bo'lib joylashadi.

Isboti. Faraz qilaylik $U(x) \in W_p^{(k)}(\Omega)$ fazoning ixtiyoriy funksiyasi bo'lsin.

2.2. bandage (2.2.9) – Sobolevning integral ayniyatidagi birinchi va ikkinchi qo'shuluvchini mos ravishda $U_1 = V_1 U$ $U_2 = V_2 U$ orqali belgilab olamiz.

Ko'rinib turibdiki V_1 operator $W_p^{(k)}(\Omega)$ dan $C(\bar{\Omega})$ ga ta'sir o'tkazadi; bu operator chekli o'lchovli, uning tarkibiga kiruvchi funksiyalar chegaralangan, shuning uchun ham V_1 to'la uzluksiz operatoridir. (2.2.9) ning ikkinchi hadini

$$(V_2 U)(x) = U_2(x) = \sum_{|a|=k} \int_{\Omega} \frac{r^\varepsilon A_a(x, y)}{r^{m-k+\varepsilon}} D_y^a U(y) dy \quad (2.3.1)$$

ko'rinishda yozib olamiz. O'zgaras musbat ε ni $p(k - \varepsilon) > m$ tengsizlik bajariladigan qilib yetarlicha kichik deb olamiz. Agar $[r^\varepsilon A_a(x, y)]_{y=x} = 0$ deb hisoblansa, (2.3.1) integrallarning surati $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ to'plamda uzluksiz bo'ladi.

$\lambda = m - k + \varepsilon$ deb $\lambda p' < m$ bo'lishini ko'rsatamiz. 1.3.1. teoreмага ko'ra V_2 operator $W_p^{(k)}(\Omega)$ dan $C(\bar{\Omega})$ ga ta'sir qiluvchi to'la uzluksiz operator bo'ladi.

Shundan so'ng $U = (U_1 + U_2) \in C(\bar{\Omega})$ va ta'rif bo'yicha $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazo $C(\bar{\Omega})$ fazoga joylashadi. Tabiiyki $V = V_1 + V_2$ yig'indi ham to'la uzluksiz operator bo'ladi.

Joylashtiruvchi operatorning xossasidan, uning chegaralanganligi kelib chiqadi; agar $pk > m$ bo'lsa, u holda shunday o'zgaras B son mavjud bo'ladiki, uning uchun

$$\|U\|_C \leq B \|U\|_{p,k} \quad (2.3.2)$$

tengsizlik bajariladi, bunda $\|\cdot\|_C$ belgi $C(\bar{\Omega})$ fazoning normasidir.

Teorema 2.3.2. $pk \leq m$ bo'lib $G_s \subset \Omega - S$ o'lchovli bo'lak-bo'lak silliq ko'pxillik bo'lsin, bu yerda $m - pk < S \leq m$. U holda $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazo $L_q(G_s)$ fazoga chegaralangan bo'lib joylashadi, bunda

$$1 \leq q < q_s = \frac{sp}{m - kp}$$

Bu teorema bevosita Sobolevning integral ayniyatidan va $m - k = \lambda$ deb olinsa 1.3.2. teoremadan kelib chiqadi, joylashganlikning chegaralanganligi shuni anglatadiki, uning uchun

$$\|U\|_{L_q(G_s)} \leq B_1 \|U\|_{p,k}$$

Teorema 2.3.3. Agar $pk \leq m$ bo'lsa, u holda $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazo $L_q(\Omega)$ fazoga to'la uzluksiz bo'lib joylashadi, bunda

$$1 \leq q < q'_m = \frac{mp}{m - kp}$$

Teorema 2.3.4. Agar $U \in W_p^{(k)}(\Omega)$ bo'lsa, u holda bu funksiya $l < k$ tartibli umumlashgan hosilalarga ega bo'ladi. $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazo agar $(k - l)p > m$ bo'lsa $C^{(l)}(\Omega)$ fazoga agar $(k - l)p \leq m$ bo'lsa $W_p^{(l)}(\Omega)$ fazoga to'la uzluksiz bo'lib joylashadi.

Izoh. Agar $l < k$ bo'lsa $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazo $W_p^{(l)}(\Omega)$ fazoga to'la uzluksiz bo'lib joylashadi.

2. Sobolev fazolarida ekvivalent normalar.

N chekli son bo'lib $t_1, t_2, \dots, t_N$ – lar ixtiyoriy qiymatlarni qabul qiluvchi o'zgaruvchilar bo'lsin.

Agar uzluksiz $f(t_1, t_2, \dots, t_N)$ funksiya quyidagi xossalarga ega bo'lsa:

- $f(t_1, t_2, \dots, t_N) \geq 0$ $f(t_1, t_2, \dots, t_N) = 0$ faqat va faqat $t_1 = t_2 = \dots = t_N = 0$ bo'lganda
- $f(\lambda t_1, \lambda t_2, \dots, \lambda t_n) = |\lambda| f(t_1, t_2, \dots, t_N)$
- $f(t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2, \dots, t_N + \tau_N) \leq f(t_1, t_2, \dots, t_N) + f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$

funksiyani norma xossalariga ega deymiz.

Teorema 2.3.5. N darajali $k - 1$ dan oshmaydigan bir hadlar soni bo'lsin.

Bundan so'ng $l_1, l_2, \dots, l_N$ – lar orqali $W_p^{(k)}(\Omega)$ metrikasida chegaralangan, chiziqli va aynan nolga teng bo'lmagan birorta darajasi $k - 1$ dan yuqori bo'lmagan

ko'phadlarda nolga aylanmaydigan funksionallar bo'lsin, va nihoyat $f(t_1, t_2, \dots, t_N)$ norma xossalriga ega funksiya bo'lsa, u holda

$$\|U\|_{p,k}^* = f(l_1 U, l_2 U, \dots, l_N U) + \sum_{|a|=k} \|D^a U\|_p \quad (2.3.3)$$

norma

$$\|U\|_{p,k} = \|U\|_1 + \sum_{|a|=k} \|D^a U\|_p \quad (2.3.3')$$

normaga ekvivalent bo'ladi.

Ko'pincha (2.3.3) norma boshqa normalar bilan ham taqoslashadilar, masalan

$$\|U\|_p + \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{|a|=k} (D^a U)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (2.3.4)$$

va

$$f(l_1 U, l_2 U, \dots, l_N U) + \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{|a|=k} (D^a U)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (2.3.5)$$

normalar ham (2.3.3') ga ekvivalentdir.

3. Fridriks va Puankare tengsizliklari.

Ω — har biri sharga nisbatan yulduzli bolgan sohalar birlashmasidan iborat bo'lsin $U \in W_p^{(k)}(\Omega)$ bo'lganda $D^a U$ $0 \leq |a| \leq k-1$ hosilalar soha chegarasi $\partial\Omega = \Gamma$ ning qariyb hamma joyida aniqlangan va hech bo'lmaganda ρ — daraja bilan jamlanuvchi bo'ladi.

$$l_\gamma U = \int_{\Gamma} D^\nu U d\Gamma \quad 0 \leq |\nu| \leq k-1 \quad (2.3.1)$$

funksiyalar $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazo metrikasida chegaralanganligini ko'rsatamiz. Aniqlik uchun $W_p^{(k)}(\Omega)$ da metrika (2.2.1) formula bilan aniqlangan bo'lsin deymiz.

Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra

$$|l_\gamma U| \leq \left\{ \int_\Gamma |D^\gamma U|^p d\Gamma \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_\Gamma d\Gamma \right\}^{\frac{1}{p'}} = |\Gamma|^{\frac{1}{p'}} \|D^\gamma U\|_{L_p(\Gamma)}$$

$|\nu| = l$ belgilash kiritamiz. Shartga ko'ra $U \in W_p^{(k)}(\Omega)$ $l = |\nu| \leq k - 1$ shuning uchun $D^\nu U \in W_p^{(k-l)}(\Omega)$ va $k - l \geq 1$ teorema 2.2.2. ga asosan

$$\begin{aligned} \|D^\nu U\|_{L_p(\Gamma)} &\leq B_1 \|D^\nu U\|_{k, k-l} = B_1 \left\{ \|D^\nu U\|_1 + \sum_{|\beta|=k-l} \|D^{\beta+\nu} U\|_p \right\} B_1 \\ &= \text{const} \quad (2.3.2) \end{aligned}$$

so'ngra teorema 2.2.3. ga ko'ra

$$\|D^\nu U\|_1 \leq B_2 \|U\|_{p,k} \quad B_2 = \text{const}$$

bundan tashqari

$$\sum_{|\beta|=k-l} \|D^{\beta+\nu} U\|_p \leq \sum_{|a|=k} \|D^a U\|_p \leq \|U\|_{p,k}$$

buni (2.3.2) formulaga qo'yib

$$\|D^\nu U\|_{L_p(\Gamma)} \leq B_1(B_2 + 1) \|U\|_{p,k}$$

va nihoyat

$$|l_\gamma U| \leq C \|U\|_{p,k} \quad C = B_1(B_1 + 1) |\Gamma|^{\frac{1}{p'}}$$

Ekanligini, yani bizning tasdiq isbotlanganligini ko'ramiz.

(2.3.1) ko'rinishdagi funksionallar soni turli darajada $k - 1$ dan yuqori bo'lmagan birhadlar soniga teng va bu funksionallar aynan nol bo'lmagan birorta polinomda aynan nolga teng bo'lmaydi. Shuning uchun

$$\|U\|_{p,k}^* = \sum_{|a|=0}^{k-1} \left| \int_\Gamma D^a U d\Gamma \right| + \left\{ \int_\Omega \left[\sum_{|a|=k} (D^a U)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (2.3.3)$$

normani $W_p^{(k)}(\Omega)$ fazoning normasi sifatida qabul qilish mumkin.

Quyida $W_p^{(k)}(\Omega)$ dan Ω sohaning chegarasida

$$D^\nu U \Big|_\Gamma = 0 \quad 0 \leq |\nu| \leq k - l \quad (2.3.4)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamini qaraymiz. Kiritilgan to'plam

$W_p^{(k)}(\Omega)$ fazoda qism fazo bo'ladi va uni $W_{p,0}^{(k)}(\Omega)$ orqali belgilab olamiz. Agar $W_{p,0}^{(k)}(\Omega)$ da normani

$$\|U\|_{p,k}^{**} = \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{|a|=k} (D^a U)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (2.3.5)$$

ko'rinishda kiritsak, u hilda (2.3.3) formulaga asosan bu norma $W_{p,0}^{(k)}(\Omega)$ da

$$\|U\|_p \leq C \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{|a|=k} (D^a U)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad \forall U \in W_{p,0}^{(k)}(\Omega) \quad C = const \quad (2.3.6)$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Agar $k = 1$ $p = 2$ bo'lsa (2.3.6) **Fridrixs tengsizligi** deb ataluvchi

$$\|U\|_2^2 = \int_{\Omega} U^2(x) dx \leq \chi \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right)^2 dx \quad \forall U \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega) \quad \chi = C^2$$

= const (2.3.7)

tengsizlikka o'tadai.

$W_2^{(1)}(\Omega)$ fazoni ko'ramiz. Bu holda $k = 1$ va demak, darajasi k dan kichik bo'lgan bittagina chiziqli bog'lanmagan funksional mavjud va $y = 1$ ga teng. $\int_{\Omega} U dx$ funksional $W_k^{(1)}(\Omega)$ fazoda chegaralangan;

$$\left| \int_{\Omega} U dx \right| \leq \int_{\Omega} |U| dx = \|U\|_1 \leq \|U\|_{2,1}$$

va $U \equiv 1$ bo'lganda noldan farqli, shuning uchun

$$\left| \int_{\Omega} U dx \right| + \left\{ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.8)$$

ifodani $W_2^{(1)}(\Omega)$ fazodagi norma deb qarash mumkin. Shuningdek (2.3.8) va $\|\cdot\|_{2,1}$ lar $W_2^{(1)}(\Omega)$ da ekvivalent normalar bo'ladi, u holda oldingi bandedagi teorema 2.3.2 ga asosan

$$\|U\|_2^2 \leq C' \left[\left| \int_{\Omega} U dx \right| + \left\{ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad C' = const$$

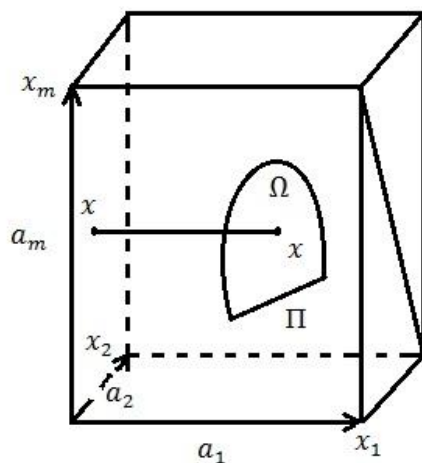
tengsizlikka kelamiz. Oxirgi tengsizlikni kvadratga ko'taramiz, $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ elementar tengsizlikdan foydalansak

$$\int_{\Omega} U^2 dx \leq C \left[\int_{\Omega} U dx^2 + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right)^2 dx \right] \quad (2.3.9)$$

Puankare tengsizligiga kelamiz.

Keltirib chiqarilgan Fridriks va Puankare tengsizliklari Ω soha har biri biror sharga nisbatan yulduzli bo'lgan chekli sondagi sohalar birlashmasidan iborat bo'lgandagina to'g'ridir. Umumiy holda Puankare tengsizligi o'rinli bo'lmay qolishi mumkin. Fridriks tengsizligi esa ixtiyoriy chekli sohada o'rinli faqat " $U(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$ va soha chegarasida nolga aylanuvchi $U(x)$ funksiya " tushunchasini yetarlicha aniqlik bilan kiritish lozim. Quyida yuqoridagilarga mos mulohazalarni keltiramiz.

$\Omega - E_m$ fazodagi ixtiyoriy chekli soha va $C^{(1)}(\bar{\Omega})$ klassdan hamda chegarada nolga aylanuvchi funksiya bo'lsin. Koordinatalar sistemasini qaralayotgan sohaning nuqtalari koordinatalari musbat bo'ladigan qilib joylashtiramiz.



chizma-2

Bu sohani biror Π parallelepiped ichiga joylashtiramiz (2-chizma), uning qirralari $0 \leq x_k \leq a_k \quad k = 1, 2, \dots, m$

tengsizliklar bilan aniqlangan bo'lsin. $U(x)$ funksiyani $\frac{\Pi}{\Omega}$ sohada aynan nolga teng qilib davom ettiramiz. Bundan so'ng $U(x)$ funksiya $U|_{\Gamma} = 0$ bo'lgani uchun uzluksiz bo'lib qoladi. Bu funksiyaning hosilsi $\partial\Omega$ chegaradan o'tishda uzulishga ega bo'lishi mumkin. Bunday funksiyalar uchun Nyuton-Leybnist formulasini qo'llash mumkin bo'ladi.

Π parallelepipeddan $x(x_1, x_2, \dots, x_m)$ nuqtani olib $0x_1$ o'qqa perpendikulyar bo'lgan tekislikka proeksiyalaymiz. Proeksiyani x' orqali belgilaylik. x' nuqtani $x_2, x_3, \dots, x_m$ koordinatali $E_{m-1} - (m-1)$ o'lchovli fazoning nuqtasi deb qarash mumkin. $x(x_1, x')$ belgiga o'xshash belgilardan foydalanamiz. Nyuton-Leybnist formulasiga ko'ra

$$U(x) - U(0, x') = \int_0^{x'} \frac{\partial U(\xi, x')}{\partial \xi} d\xi$$

Ammo $(0, x')$ nuqta Ω sohadan tashqarida joylashgan shuning uchun $U(0, x') = 0$ va

$$U(x) = \int_0^{x'} \frac{\partial U(\xi, x')}{\partial \xi} d\xi$$

Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra

$$U^2(x) \leq \int_0^{x_1} d\xi \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial U(\xi x')}{\partial \xi} \right)^2 dx \leq a_1 \int_0^{a_1} \left(\frac{\partial U(\xi x')}{\partial \xi} \right)^2 d\xi$$

Oxirgi tengsizlikni Π parallelepiped bo'yicha integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U^2(x) dx &\leq a_1^2 \int_0^{a_1} d\xi \int_0^{a_2} dx_2 \dots \int_0^{a_m} \left(\frac{\partial U(\xi x')}{\partial \xi} \right)^2 dx_m \\ &= a_1^2 \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2} dx_2 \dots \int_0^{a_m} \left(\frac{\partial U(x_1 x')}{\partial x_1} \right)^2 dx_m = a_1^2 \int_{\Pi} \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x_1} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Oxirgi tengsizlikning o'ng va chapida $\frac{\Pi}{\Omega}$ soha bo'yicha olingan integralni tashlab yuboramiz (chunki bunda $U(x) \equiv 0$) so'ngra integral ostidagi funksiyaga manfiy bo'lmagan $\sum_{k=2}^m \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \right)^2$ yig'indini qo'yamiz. Bu holda quyidagi tengsizlik

$$\int_{\Omega} U^2(x) dx \leq a_1^2 \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \right)^2 dx \quad (2.3.10)$$

hosil bo'ladi, qaysiki Fridriks tengsizligi bilan ustma-ust tushadi.

Fridriks tengsizligini ancha kengroq klassga joriy qilishimiz mumkin. $W_2^{(1)}(\Omega)$ orqali quyidagicha aniqlangan funksiyalar to'plamini belgilaymiz: agar $U(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$ bo'lsa, u holda

- 1) $U(x) \in L_2(\Omega)$
- 2) $\frac{\partial U}{\partial x_k} \in L_2(\Omega) \quad k = 1, 2, \dots, m$ umumlashgan hosilalar mavjud;
- 3) $U_n(x) \in C^{(1)}(\bar{\Omega}) \quad U_n|_{\partial\Omega} = 0 \quad \|U - U_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.3.11)$

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial x_k} - \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, m$$

Xossalarga ega $\{U_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi mavjud.

$W_2^{(1)}(\Omega)$ funksiyalarni $\partial\Omega$ chegarada nolga aylanuvchi deb tushunamiz.

Agar $W_2^{(1)}(\Omega)$ to'plamda normani

$$\|U\|_{W_2^{(1)}}^2 = \int_{\Omega} \left[U^2(x) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \right)^2 \right] dx \quad (2.3.12)$$

ko'rinishda kiritsak, u gilbert fazosiga aylanadi.

Agar Ω chekli sondagi yulduzli sohalar birlashmasi bo'lsa, u holda $W_2^{(1)}(\Omega)$ ni $W_2^{(1)}(\Omega)$ fazo uchun fazo osti deb qarash mumkin.

$U \in W_2^{(1)}(\Omega)$ va $\{U_n\}$ – eslatilgan ketma-ketlik bo'lsin. U_n funksiyalar uchun quyidagi Fridriks tengsizligi o'rinli bo'ladi:

$$\int_{\Omega} U_n^2(x) dx \leq \chi^2 \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \right)^2 dx \quad (2.3.13)$$

(2.3.11) munosabatdan,

$$\|U_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|U\|_2 \quad \left\| \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial U}{\partial x_k} \right\|_2$$

(2.3.13) da limitga o'tilsa hosil bo'lgan natija $W_2^{(1)}(\Omega)$ klassdagi ixtiyoriy funksiya uchun Fridriks tengsizligiga olib kelinadi.

III. Xulosa va takliflar.

1. Matematik fizikaning keying rivijlanishi funksional analizning tatbiqiy masalalari bilan chambarchas bog'langan.
2. Chegaraviv masalalarning klassik yechimi va umumlashgan ma'nodagi yechimlari orasidagi bog'lanishni, xususan masala yechimi yagonaligini kengroq klasslarda ko'rsatilishi muhim ekanligi taminlangan.
3. Umumlashgan hosila tushunchasini kiritishda umumiy holda E_m fazo (m o'lchovli Evklid fazosida) integral hisob, parametrga bog'liq integrallarning tekis yaqinlashishi kabi muhim teoremlarga tayanishga to'g'ri keladi.
4. Integral yadrosida soha o'lchovidan kichik maxsuslikga ega funksiya turgan hol alohida ahamiyat kasb etadi. Shuning uchun ham mazkur ishda kuchsiz maxsuslikka ega integral operatorlarning xossalari o'rganilgan.
5. Ishda umumlashgan hosila tushunchasini kiritishda o'rtalovchi yadro, o'rta funksiyalar, finit funksiyalar kabi yordamchi va ayni payitda asosiy tushunchalardan keng foydalanilgan.
6. O'rta funksiyalarga doir misollar keltirilgan bo'lib, bu misollar keyinchalik Dirakning " δ – funksiya" sini ta'riflashda ham asos bo'lib xizmat qilishi takidlangan.
7. Ma'lumki umumlashgan hosila ikki xil yondashuv bilan: birinchisi chiziqli uzluksiz funksional (asosiy funksiyalar klassida aniqlangan) sifatida; ikkinchisi integral ayniyatni qanoatlantiruvchi funksiya sifatida qarash bilan tushuntirildi. Mazkur ishda ikkinchi yondashuv asos qilingan holda umumlashgan hosila ta'riflangan.
8. Ishning ikkinchi bobida E_m fazodagi Ω sohada p darajasi bilan jamlanuvchi k- tartibgacha umumlashgan hosilaga ega funksiyalar klassi $W_p^{(k)}(\Omega)$ – Sobolev fazolari va ular bilan bog'liq ayniyatlar, tengsizliklar o'rganilgan.
9. 2.2. bandda Sobolevning integral ayniyati isbotlangan va uning asosida birnecha yangi ayniyatlar va tengsizliklar isbotlangan.
10. Mazkur ishning kulminatsion nuqtasi hisoblanmish Fridriks va Puankare tengsizliklari $W_2^{(1)}(\Omega)$ fazodagi funksiyalar uchun isbotlangan.
11. Chegarviiy masalalar yechimi mavjudligi va yagonaligini ko'rsatishda, xususan umumlashgan yechimning yagonaligini ko'rsatishda Fridriks va Puankare tengsizliklariga asoslangan.

IV. Foydalanilgan adabiyotlar va manbalar.

1. Azlarov T.A. , Mansurov X. matematik analiz 1, 2 – qisimlar, T.: “O’qituvchi”, 1989.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные методыю М.: “Наука”, 1974.
3. Боголюбов Н.Н. , Широков Д.В. Введение в теории Квантованных полей. М.: “Наука”, 1973.
4. Бремерман Г. Распределенияб Комплексные и преобразоания фурье. М.: “Мир”, 1968.
5. Будах Б.М. , Самарский А.А. , Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физики. М.: “Наука”, 1972.
6. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ш., Медедьев Г.Н., Шишкин А.А. математический анализ в вопросах и задачах. Т.1.2-М. “Висшая школа”, 1984,1988.
7. Бруй И.Н., Гаврилюк А.В. и др. Лобороторный практикум по математическому анализу. М. “Висшая школа”, 1991.
8. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: “Физматгиз”, 1989.
9. Владимир В.С. , Михайлов В.П. , Вашарин А.А. и др. Сборник задач по математической физики. М.: “Наука”, 2001.
10. Владимир В.С. Обобщенные функции в математической физики. М.: “Наука”, 1976.
11. Гельфанд И.М. , Шилев Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Том 1. М.: “Наука”, 1979.
12. Градштейн И.С. , Рижик И.М. Таблицы интегралов, суим, рядов и произведений. М.: “Наука”, 1971.
13. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: “Наука”, 1971.
14. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: “Наука”, 1971.
15. Эвклид М.А. Аналитические функции М.: “Наука”, 1968.
16. Jurayev T. , Abdunazarov C. Matematik fizik tenglamalar. T.: “O’qituvchi”, 2004.
17. Кудрявцев Л.Д. Курс математической анализа М.: “Наука”, 1992.
18. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: “Наука”, 1999.
19. Salahiddinov M. Matematik fizik tenglamalar. T.: “O’zbekiston”, 2002.
20. Salahiddinov M. , Islomov B. Matematik fizik tenglamalari fanidan masalalar to’plami. T.: “Mumtoz – so’z”, 2010.
21. Салехово И.Г. Аблеава С.Г. Методическое полобие для преподпвания практических занятий по курсу “ Уравнения математической физики”. Казан, 2010.

22. Салехово И.Г Методическое указания курсу “ Уравнения математической физики”. Казан; КГУ, 1982, 1983, 1990.
23. Смирнов М.М. задачи по Уравнения математической физики. М.: “Наука”, 1975.
24. Сироткина А.А. Методические разработки практических занятий по методам математической физики. М.: МГПН. 1978.
25. Тиханов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: “Наука”, 1978.
26. Internet ma'lumotlari, saytlar.