

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА
ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ
МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

Пиримқулов Раҳматилло Эгамқул ўғлининг

5130100 – математика таълим йўналиши бўйича
бакалавр даражасини олиш учун

«ТАСОДИФИЙ ЖАРАЁНЛАРДА МАРКОВ ЗАНЖИРИНИ
ЎРГАНИШ»
мавзусидаги
БИТИРУВ МАЛАКАВИЙ ИШИ

Раҳбар: _____ Ҳ. Норжигитов,
ф.-м.ф.н., доцент

БМИ «Математика» кафедрасининг 2016 йил ____ май №__ сонли
йиғилишида кўриб чиқилди ва ҳимояга тавсия этилади.

Кафедра мудири _____ Ҳ. Норжигитов, ф.-м.ф.н., доцент
имзо

Физика-математика факультети декани томонидан ҳимоя қилишга
рухсат этилади.

Факультет декани _____ Ш. Аширов, п.ф.н., доцент

Гулистон – 2016

М У Н Д А Р И Ж А

КИРИШ.....

I БОБ. МАРКОВ ТАСОДИФИЙ ЖАРАЁНЛАРИ.....

1.1 §. А.Марков - ҳаёти ва ижоди.....

1.2 §. Марков тасодифий жараёнлари.....

1.3 §. Даромадли Марков жараёнлари.....

1.4 §. Бошқарилувчи Марков жараёнлари.....

II БОБ. ТАСОДИФИЙ ЖАРАЁНЛАРДА

МАРКОВ ЗАНЖИРИ.....

2.1 §. Боғлиқ тажрибалар кетма-кетлиги.

Марковнинг дискрет занжири.....

2.2 §. Содда Пуассон жараёни.....

2.3 §. Марков занжирлари ҳолатларининг

Классификацияси.....

**2.4 §. Марков жараёни орқали саноқли ҳолатли
хизмат кўрсатиш системалари тадқиқоти.....**

Хулоса.....

Фойдаланилган адабиётлар.....

КИРИШ

Республикаимиз Президенти Ислон Абдуғаниевич Каримов томонидан халқ манфаати ва жамият истиқболининг ўйлаб амалга оширилаётган ислохотлар, миллий уйғониш ва маънавий юксалиш йўлидаги саъи-ҳаракатлар ҳаётимизнинг барча соҳаларда ижобий натижалар бера бошлади.

Келажакни қандай бўлиши ҳозирги ёшларнинг дунё-қарашига, идрокига ва илмий билимларни қандай эгаллашига боғлиқ эканлигини чуқур ҳис қилган юртбошимиз кадрларни тайёрлаш масаласига асосий эътиборини қаратмоқда. «Кадрлар тайёрлаш миллий дастур»ининг ҳаётга жорий қилинаётганлиги, «Таълим тўғрисида»ги қонуннинг қабул қилинганлиги, мустақиллик мафкурасини шакллантириш, халқни бир жон бир тан бўлиб, фаол ижодий меҳнатга чорловчи ғоялар, жаҳон тарихини бойитган миллий ифтихор манбаларга айланган аجدодлар хотирасини улуғлаш – бунинг ёрқин мисолларидир.

Таълим муассасаларида математика ўқитишнинг асосий вазифаси ўқувчи ёшларни ватанга садоқат, юксак ахлоқ, маънавий бойликка эга бўлиш ва меҳнатга виждонан муносабатда бўлиш руҳида тарбиялашга қаратилган. Шунингдек, таълимнинг инсонпарвар бўлишига эришиш, ҳозирги замон бозор иқтисодиёти шароитларини ҳисобга олиб ҳар бир жамият аъзосини меҳнат фаолияти ва кундалик ҳаёти учун зарур математик билим, кўникма ва малакани беришдан иборат.

Битирув малакавий ишида икки йўналишда иш олиб боришга мўжжалланган бўлиб, биринчи йўналишда математика тарихи, яъни математиклар ҳаётини ўрганишга, иккинчидан олимнинг илмий изланишлар натижаларини ўрганишга бағишланади. Шу мазмунда математик олим А.А.Марковнинг ўрганиб чиқилди.

А.А.Марковнинг илмий фаолияти ғоят хилма-хил эди. Биринчи йилларда у сонлар назарияси билан дифференциал тенгламалар, функциялар назариялари ва бошқа масалалар билан шуғулланди, кейинроқ эса фақат эҳтимоллар назарияси билан машғул бўлди. Марковнинг бу соҳалардан ҳар бирида эришган натижалари уни шуҳратли олим номига сазовор қилди. Ҳозирги кунда ҳам унинг асарлари энг актуал натижалар қаторида танилиб, янги авлодни илмий изланишларга ундайди ва янги масалаларни қўйишга илҳомлантиради.

А.А.Марков бутун дунё математиклари ўртасидагина эмас, балки физиклар, техниклар ва табиий фанлар олимлари орасида ҳам шуҳрат қозонди. Ана шу фан соҳасидаги унинг лаёқатининг ҳар тарафлама кучга ва ўзига хос хусусиятларига эга эканлиги очилди. Бу изланишлар ҳозирги кунда эҳтимоллар назариясининг асосий бўлимларидан ҳисобланган ва назарий физикада, шунингдек кўпгина, техника ва табиий-илмий назарияларни, математика жиҳатидан исботлашда катта аҳамиятга эга бўлган стохастик жараёнлар назариясини яратишга ва ғоят ривожлантиришга сабаб бўлди.

Битирув малакавий ишда тасодифий жараёнлар назарияси ўрганиб чиқилади. Асосий тушунчалар, асосий хусусиятлари келтирилди. Жараёнлар учун стационарлик, биргиналик, таъсирсизлик шартлари келтирилади. Марков занжири таърифи ва хусусиятлари келтирилади. Битирув ишда Марков занжири хусусиятлари, ўтиш матрицаси, Марков тенгламаси ва уни исботи, эргодик теорема ва уни бажарилиши шарти кўриб чиқилди. Узлуксиз вақтли Марков занжирлари ўрганиб чиқилди ва мисоллар кўрсатилди. Мавзуга доир адабиётлар ва интернет маълумотлари келтирилди.

I БОБ. МАРКОВ ТАСОДИФИЙ ЖАРАЁНЛАРИ

1.1 §. А.Марков - ҳаёти ва ижоди

Андрей Андреевич Марков 1856 йил 14 июнда Россиянинг Рязань губерниясида туғилди. Унинг оиласи зиёли оила бўлиб, отаси адвокат бўлиб ишларди.

А.А.Марков ўрта маълумотни гимназияда олди. Гимназияда ўқиб юрган йилларида математика билан қизиқа бошлади. Ўша вақтлардаёқ у, мустақил ҳолда олий математикани ўргана бошлади. Бу машғулотлар эса, уни ўзини ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламаларни интеграллашдаги янги методни топишга олиб келган. Бироқ А.Марков топган метод математика фанида янги метод эмас эди. Аммо, бу биринчи мустақил кашфиёт уни профессорлар билан танишишига сабаб бўлди ва уни умрбод шуғулланадиган машғулотини аниқлаб берди.

А.А.Марков ўн саккиз ёшида гимназияни тугатиб, Петербург университетига ўқишга кирди. Ўша вақтда бу ерда маърузаларни буюк рус математиги П.Л.Чебишев ўқир эди.

Ёш талабани илмий интилишларига ва уларнинг ривожланишига П.Чебишев ҳал этувчи таъсир кўрсатган эди.

А.А.Марков 1878 йилда «Узлуксиз касрлар ёрдами билан дифференциал тенгламаларни интеграллаш ҳақида» номли илмий асар ёзиб, университетни олтин медаль билан битириб чиқди. Икки йилдан сўнг магистрлик диссертациясини ёқлади ва Петербург университетида

аввал ассистент, доцент, сўнгра 1886 йилдан бошлаб профессор вазифасида ишлаб дарс бера бошлади.

Марковнинг педагогик хусусиятини уни ўқувчиларидангина эмас, ҳатто унинг ўзи ёзган «Чекли айирмалар ҳисоби» ва «Эҳтимоллик ҳисоби» деб номланган дарсликларидан ҳам кўриш мумкин.

Бу китобларни математика фанини ривожлантиришдаги роли шу қадар катта эдики, улар рус тилида босилиб чиқиши биланоқ чет тилларидаги таржимаси ҳам босилиб чиқади. А.А.Марков педагогик фаолиятини ўз ҳаётини сўнги йилларигача давом эттирди.

А.А.Марковни биринчи илмий ишлари босилиб чиқиши билан илмий соҳада орасида обрўси ортиб кетди. 1886 йилда Россия Фанлар академиясига П.Чебишев таклифи билан адъютант-академик, экстраординар академик ва 1892 йилда академиянинг хақиқий академики бўлиб сайланди.

Марковнинг бундан кейинги ҳаёти тамомила фанга бағишланди. У ўзининг сўнги асарлар тўпламини Фанлар Академиясига вафотидан бир ой олдин топширган эди. Оғир касаллик уни ётқазиб қўйди ва у 1922 йил 20 июнда вафот этди.

А.А.Марковнинг илмий фаолияти ғоят хилма-хил эди. Биринчи йилларда у сонлар назарияси билан, дифференциал тенгламалар, функциялар назариялари ва бошқа масалалар билан шуғулланди, кейинроқ эса фақат эҳтимоллар назарияси билан машғул бўлди. Марковнинг бу соҳаларнинг ҳар бирида эришган натижалари уни шуҳратли олим номига сазовор қилишга лаёқатли эди. Ҳозирги кунда ҳам унинг асарлари математиканинг классик асарлари қаторида танилиб, янги авлод илмий кучларини ғоялар, методлар ва масалаларни қўйиш билан илҳомлантиради. Бироқ асосий ютуқларни сонлар назарияси ва эҳтимоллар назарияси соҳасида эришди.

Агар у сонлар назариясининг битта-иккита бўлимини ривожлантиришга сабаб бўлган бўлса, унинг эҳтимоллар назариясидаги

илмий ишлари йўналишларни ўстирибгина қолмай, балки бу фанни қайтадан тузишга олиб келди. Бу ишлар натижасида А.Марков бутун Дунё математиклари ўртасидаги эмас, балки физиклар, техниклар ва табиий фанлар олимлари орасида ҳам шуҳрат қозонди. Ана шу фан соҳасида унинг лаёқати ҳар тарафлама кучга ва ўзига хос хусусиятларига эга эканлиги очилди. Бу изланишлар ҳозирги кунда эҳтимоллар назариясининг асосий бўлимларидан ҳисобланган ва назарий физикада, шунингдек, кўпгина техника ва табиий-илмий назарияларни математик жиҳатидан ишлашда катта аҳамиятга эга бўлган стохастик жараёнлар назариясини яратишга ва ғоят ривожланишига сабаб бўлди.

А.Марков эҳтимоллар назарияси соҳасида ёзган биринчи ишлари, П.Л.Чебишевнинг илмий ишларини давом эттириш ва уларни охиргача олиб боришдан иборат бўлди: биринчидан, катта сонлар қонунида энг умумий шартларни тузишга, иккинчидан, эҳтимоллар назариясининг марказий лимит теоремасини таърифини берди. А.Марков бу фикрларни амалга ошириш ва теоремани кенг шартлардаги тўғри исботини бериш имкониятига эришди. А.Марков буни махсус шаклдаги интегрални узлуксиз касрларга ёйиш орқали жуда ҳам мураккаб ва ўткир йўллар билан исбот қилди.

1900-1902 йиллар ичида М.Ляпунов, Чебишевдан фарқ қиладиган ўз йўли билан ишлаб Марков натижаларидан афзал натижаларга эришди.

А.Марков бир неча йиллар моментлар методининг моҳиятини янада кўтариш мақсадида Н.Ляпунов теоремасини кучли, содда ва чиройли йўл билан исботлади. Бу исбот А.Марковнинг «Эҳтимолларни ҳисоблаш» номли китобига қўшимча қилиб киритилди. Бу исботда берилган тасодифий миқдорлар ўрнига улар билан деярлик бир хил бўлган бошқа миқдорларни олиб қараш асос қилинган ва бу усулдан ҳозирга қадар муваффақиятли фойдаланиб келинмоқда.

Катта сонлар қонуни қуйидагидан иборат: ҳар бири бошқаларга боғлиқ бўлмаган ҳолда турли қийматлар қабул қиладиган ғоят кўп тасодифий миқдорларнинг ўрта қиймати, амалий ишонч билан ўзгармас миқдорга тенг бўлади. Катта сонлар қонуни ғоят кўп тасодифий миқдорларнинг умумий таъсири ҳақида маълумот беради. Катта сонлар қонунини қайси шартларда тўғри эканлигини белгилаш, табиий фанларда ва техникада бу шу хил қонуни ишлатиш учун ишончли асос бериш демакдир. Ана шу ишни А.Марков бажарди. Бироқ А.Марков бундан ҳам яхши натижаларга эришди.

Турли қийматларга эга бўлган тасодифий миқдорнинг бирон муайян қиймати қанчалик кўп такрорланиши мумкин? Бу каби сўроқларга эҳтимоллар назариясининг марказий лимит теоремаси жавоб беради. Мана шу теоремага асосланиб, тўпчилар снаряд учишининг тарқалиш қонунини ва мингларга сабаблар снаряд учганда уни нишондан четлаштиришига қарамай, нишонни ишонч билан ўтга тутадилар. Худди шу теоремага асосланиб чексиз кўп молекулаларни қанчаси маълум тезлик билан ҳаракат қила олишини ишонч билан айта оладилар.

А.Марковнинг юқорида кўрсатилган текширишлари ва унчага қилинган барча текширишлар эрки тасодифий миқдорлар кетма-кетлигининг схемасига тегишлидир. Бу схемадаги ғоя, кузатилаётган ҳодисанинг миқдорий ўзгаришларни текширишни ўзаро эрки тасодифий миқдорлар йиғиндиси билан ифода қилишдан иборат. Бу ғоя табиий фанларда, техникада кўп татбиқ этилади ва математикада текшириладиган энг қизиқарли объектлардан ҳисобланади. Бу ғояларни юқоридаги каби талқин этиш физика фанидаги кўп назарияларга, диффузия, Броун ҳаракати ва бошқа жараёнларда яхши натижа берди.

Бироқ бу схема ҳодисаларни ҳаммасини акс эттира олмайди. Физика, табиий фанлар ва техника текширадиган ҳодисаларнинг

кўпчилиги яна ҳам мураккаб қонунларга асосан рўй беради. Масалан, ипнинг бир бирига қўшни бўлган икки қисмининг мустақамлиги бир-бирига боғлиқ эмас деб бўлмайди, чунки бу қисмлар ўзаро умумий толалар билан боғлангандирлар. Ёки маълум сондаги бактерияларнинг бир-бирига яқин вақт оралиғидаги сони, албатта, бир-бирига боғлиқ эмас деб бўлмайди, чунки бу бактерияларнинг бошланғич вақтдаги сони унинг кейинги тараққиётига таъсир этади.

Мураккаброқ ҳодисаларни тасвирлай оладиган математик моделни А.Марков туза бошлади ва уни ривожлантирди. Олдинги ҳолатлари кейинги моментлардаги ҳолатларига таъсир этадиган системаларни эҳтимоллар назарияси нуқтаи назаридан ўрганишни тавсия қилди. Агар системанинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтиши эҳтимоли фақат шу ҳолатларга боғлиқ бўлса ва системанинг ривожланиши илгари тарихига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда системаларнинг бу хилда бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтишини А.А.Марков оддий занжирлар деб айтишни таклиф этди. Эркин тасодифий миқдорлар схемаси каби занжирлар схемаси учун ҳам исбот қилишни мумкин эканлигини кўрсатди. Бу эса фан ривожи учун катта ютуқ бўлди.

Назария ижодчиси шарафига юқорида айтиб ўтилган схемани «Марков занжирларининг схемаси» деб аталган. У ўз назариясини яратишда конкрет бир физик образларни кўзда тутмади, балки янги математик назария яратди. Шу сабабли, у ўзининг олган натижаларини мисолларда кўрсатиш учун физика ёки техникадан эмас, балки, бадий адабиётда унли ва ундош харфларнинг навбатлашиб келишидаги боғланишни текширди. Лекин, кўп ўтмасдан Планко, Эйнштейн ва бошқалар ўзларининг ишларида «Марков занжирлари»ни физикага муваффақият билан татбиқ қилишди. Бу ишлар ўз навбатида бу соҳадаги математик текширишнинг қизгин суратда тараққий этишига ҳам сабаб бўлди. Энг кучли олимлар эҳтимоллар назариясининг янги бўлимини - тасодифий жараёнлар назариясини ярата бошлади. Унинг

назарияси асосида қурила бошлаган «бино»да турли фанларнинг умумий мақсадлари ҳал бўла бошлади.

1.2 §. Марков тасодифий жараёнлари

Турли хил жараёнларни танлаш ва уларни бажаришда назорат қилиб бўлмайдиган омиллар таъсир қилади.

Рус математиги А.А.Марков томонидан тасодифий жараёнлар ўрганилиб Марков занжирлари ёки Марков тасодифий жараёнлари деб аталувчи жараёнларга таъриф берилди.

Марков тасодифий жараёнларининг характерли хусусияти шундан иборатки, ҳар бир t_0 вақт моменти учун бирор системанинг t_1 моментидаги ($t_1 > t_0$) ҳолати унинг фақатгина t_0 моментдаги ҳолатига боғлиқ ва системанинг шу ҳолатга қачон ва қандай келишига боғлиқ эмас.

Бирор S система $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ ҳолатлардан бирига келиши маълум бўлсин. Агар S системанинг ҳолатлари сони чекли бўлса, мос Марков жараёни чекли, акс ҳолда чексиз деб айтилади.

Қаралаётган системанинг бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ўтиш вақт моментларини

$$t_0, t_1, \dots, t_m, \dots \quad (t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots)$$

деб белгилаймиз.

Марков жараёни учун S системанинг t_m вақтдаги ҳолати эҳтимоли системанинг фақатгина t_{m-1} моментдаги ҳолатига боғлиқ, яъни $P[j, t_m / i, t_{m-1}]$ шартли эҳтимолдан иборат. Бу ёзув, агар система t_{m-1} моментда E_i ҳолатда бўлган бўлса, t_m моментда E_j ҳолатда бўлишининг шартли эҳтимолини ифодалайди. Бундай эҳтимолларни ўтиш эҳтимоллари деймиз. Агар ўтиш эҳтимоллари вақтдан боғлиқ

бўлмасдан, фақат E_i ва E_j ҳолатлардан боғлиқ бўлса, мос Марков занжири бир жинсли, акс холда бир жинсли бўлмаган дейилади.

Бир жинсли Марков занжири учун E_i дан E_j га ўтиш эҳтимолларини P_{ij} деб белгилаймиз. Бу эҳтимоллардан қуйидаги матрицани тузамиз:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \dots \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \dots \end{pmatrix}.$$

Бу матрица ўтиш эҳтимоллари матрицаси деб аталади. Унинг элементлари қуйидаги иккита шартга бўйсинади:

$$\begin{aligned} 0 \leq P_{ij} &\leq 1, \quad i, j = 1, 2, \dots \\ \sum_j P_{ij} &= 1, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Бу хоссаларга эга бўлган матрица стохастик матрица дейилади.

Ҳолатлар эҳтимоллари. Бир жинсли Марков занжирлари қаралганда ўтиш оралиқлари ўзгармас деб ҳисобланади. Шунинг учун t_i катталиклар натурал қатор $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ билан характерланиши мумкин. Системанинг m вақт моментида E_i ҳолатда бўлишининг шартсиз эҳтимоли $P_i(m)$ бўлсин. Қуйидаги

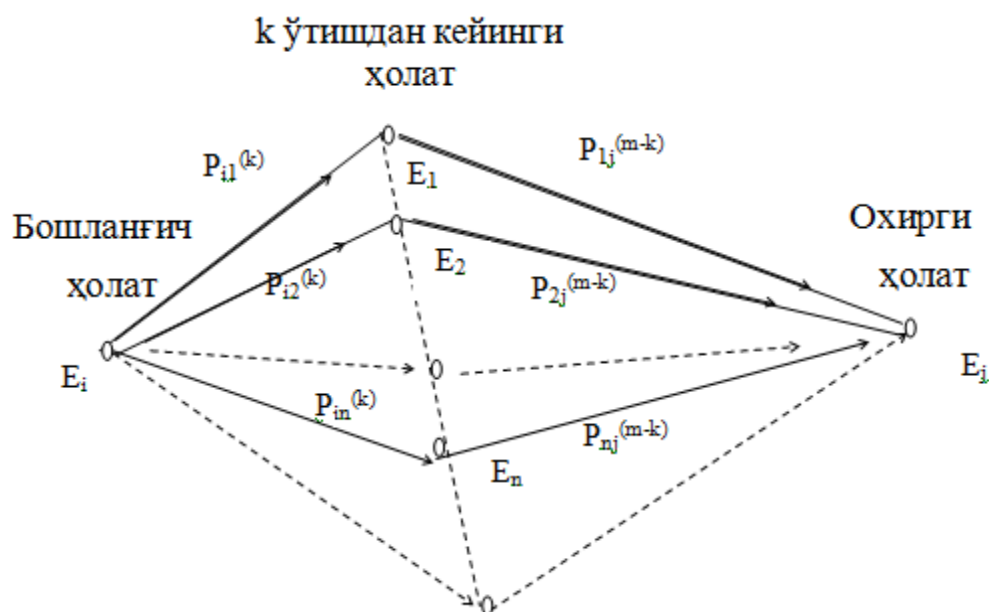
$$\bar{P}(m) = (P_1(m), P_2(m), \dots, P_i(m), \dots)$$

вектор стохастик вектор бўлади, яъни

$$\begin{aligned} 0 \leq P_i(m) &\leq 1, \quad i = 1, 2, \dots \\ \sum_i P_i(m) &= 1 \end{aligned}$$

шартлар бажарилади.

Системанинг E_i ҳолатдан, бир ўтишда эмас, m ўтишда, E_j ҳолатга келиш эҳтимоли $P_{ij}^{(m)}$ ни топиш масаласини караймиз. Бу эҳтимоллар матрицаси $P^{(m)}$ бўлсин. Ўтишнинг мумкин бўлган йўллари қуйидагича бўлиши мумкин:



$$E_i \rightarrow E_1 \rightarrow E_j - \text{ўтиш эҳтимоли } P_{i1}^{(k)} P_{1j}^{(m-k)};$$

$$E_i \rightarrow E_2 \rightarrow E_j - \text{ўтиш эҳтимоли } P_{i2}^{(k)} P_{2j}^{(m-k)};$$

.....

$$E_i \rightarrow E_n \rightarrow E_j - \text{ўтиш эҳтимоли } P_{in}^{(k)} P_{nj}^{(m-k)};$$

.....

Шундай қилиб,

$$P_{ij}^{(m)} = \sum_{s=1}^n P_{is}^{(k)} P_{sj}^{(m-k)}$$

ёки $P^{(m)} = P^{(k)} P^{(m-k)}$, $P^{(1)} = P$ эканини эътиборга олсак, $P^{(2)} = P^{(1)} P^{(1)} = P^2$, $P^{(3)} = P^{(2)} P^{(1)} = P^3$ ва ҳ.к $P^{(m)} = P^m$ ни топамиз. Худди шунга ўхшаш $\bar{P}(m) = \bar{P}(0) P^m$ тенгликни ҳосил киламиз.

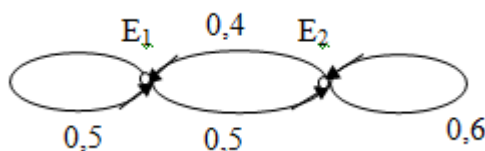
Агар Марков занжирида E_j ҳолатга исталган E_i ҳолатдан чекли сондаги қадамда ўтиш мумкин бўлса, у эргодик Марков занжири дейилади.

Маълумки, агар система эргодиклик хоссасига эга бўлса, у стохастик турғун бўлади, яъни $m \rightarrow \infty$ бўлганда ҳолатлар эҳтимоллари $P_i(m)$ нинг бошланғич ҳолатига боғлиқсиз равишда лимитлари P_i лар мавжуд бўлади:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_i(m) = P_i(\infty) = P_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

$\bar{P}(m) = \bar{P}(m-1)P$ тенгликдан $m \rightarrow \infty$ бўлганда $\bar{P} = \bar{P}P$ тенгликни ҳосил қиламиз, бунда $\bar{P} = (P_1, P_2, \dots, P_i, \dots)$. $\bar{P}$ ни аниқлаш учун охириги тенгликни $\bar{P}(P - E) = 0$ кўринишда ёзамиз, бунда E – бирлик матрица. Бу тенглик $\sum_i P_i = 1$ тенглик билан биргаликда P_i ларга нисбатан тенгламалар системасини ташкил қилади. Бу тенгламалар системасини ечиб $\bar{P}$ вектор топилади.

1-мисол. $P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad \bar{P}(0) = (1, 0).$



$$\bar{P}(1) = (P_1(1), P_2(1)) = (1, 0) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (0,5; 0,5)$$

$$\bar{P}(2) = (P_1(2), P_2(2)) = (0,5; 0,5) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (0,45; 0,55)$$

$$\begin{cases} (P_1, P_2) \left[\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ P_1 + P_2 = 1 \end{cases}$$

$$P_1 = \frac{4}{9}, \quad P_2 = \frac{5}{9}.$$

1.3 §. Даромадли Марков жараёнлари

Чекли $E_1, E_2, \dots, E_N$ ҳолатларга ва P ўтишлар матричасига эга бўлган эргодик Марков жараёни берилган бўлсин. E_i дан E_j га ўтишга даромад деб аталувчи r_{ij} , $i, j = \overline{1, N}$ сонларни мос қўямиз. Бундай система ишлаб турса, маълум вақт ўтгандан сўнг Марков жараёнининг эҳтимоллари тақсимотига боғлиқ бўлган умумий даромад ҳам тасодифий миқдор бўлади.

Система m ўтиш қилиши натижасидаги умумий даромадни ҳисоблаймиз. Умумий **даромад** деганда даромаднинг математик кутилмаси ёки ўртача қиймати тушунилади.

Агар жараён E_i ҳолатдан бошланиб m ўтишдан кейин кутилган даромад миқдорини $v_i(m)$ деб белгиласак, m ўтишдан кейинги даромадни биринчи ўтишдан олинган даромад плюс қолган $(m-1)$ ўтишдан олинган даромад деб ҳисоблаш мумкин. Системани E_i ҳолатдан бир ўтишда олинган даромадни q_i деб белгилаймиз:

$$q_i = \sum_{j=1}^N P_{ij} r_{ij}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Қолган $(m-1)$ ўтиш натижасида кутилган даромад биринчи қадамдан кейинги системанинг ҳолатига боғлиқ. Система E_j ҳолатга ўтган бўлсин. У ҳолда қолган $(m-1)$ ўтиш натижасидаги ўртача даромад $v_j(m-1)$ га тенг бўлади. Система E_i ҳолатдан исталган E_j , $j = \overline{1, N}$ ҳолатга ўтиш мумкин бўлгани учун қолган $(m-1)$ ўтиш натижасидаги ўртача даромад

$$\sum_{j=1}^N P_{ij} v_j(m-1), \quad m = 1, 2, \dots$$

бўлади. Шундай қилиб, охирги натижаларни эътиборга олиб, m ўтиш натижасидаги умумий даромад

$$v_i(m) = \sum_{j=1}^N P_{ij} r_{ij} + \sum_{j=1}^N P_{ij} v_j(m-1), \quad i = \overline{1, N}, m = 1, 2, \dots$$

ёки

$$v_i(m) = q_i + \sum_{j=1}^N P_{ij} v_j(m-1), \quad i = \overline{1, N}, m = 1, 2, \dots$$

формула билан ҳисобланишини топамиз.

Охирги формулани вектор матрицали ёзувда $V(m) = q + P v(m-1)$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда

$$V(m) = \begin{pmatrix} v_1(m) \\ v_2(m) \\ \vdots \\ v_N(m) \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}, \quad P = \|P_{ij}\| - \text{ўтишлар матрицаси.}$$

Марков жараёнининг эргодик эканлигини эътиборга олиб катта m лар учун $v_i(m)$ даромад

$$v_i(m) = mg + v_i$$

ёки векторли ёзувда

$$v(m) = mg + v$$

формула билан топилишини ҳосил қиламиз, бу ерда: $g = \sum_{i=1}^N P_i q_i$, P_i -

Марков жараёнининг лимитик эҳтимоли.

1.4 §. Бошқарилувчи Марков жараёнлари

Бошқарилувчи тасодифий жараёнлар ҳаётда турли ҳолларда намоён бўлади. Масалан, саноат корхонасининг ишини режалаштиришни олайлик. Ҳар бир режалаштириш вақтининг бошида эришилган ҳолатга қараб кейинги вақтга режа тузилади.

Режалаштирилатганда актив маблағ миқдорларига қараб иш қўрилади. Актив маблағни ишлатишнинг мумкин бўлган усуллари стратегия деб атайдилар.

Фараз қилайлик, қаралаётган корхонанинг (корхона бундан кейин система деб атаймиз) иш фаолияти Марков тасодифий жараёни билан аниқлансин. Турли стратегияларга системанинг турли ўтиш эҳтимоллари ва турли даромадлар мос келади.

Ҳар бир стратегия учун ўтиш эҳтимоллари ва даромадларини мос равишда P_{ij}^k ва r_{ij}^k деб белгилаймиз. Ҳар бир ҳолатга мос стратегиялар тўпламига эга бўлган жараёнга бошқарилувчи Марков жараёни деб айтаемиз. Ҳар бир E_i ҳолат учун шундай $d_i(m)$ стратегия номерини топиш масаласини қараймизки, бу стратегия m – қадамда ишлатилиб бир ўтишда максимал ўртача даромад g ни берсин.

Бу стратегиялар тўплами $d(m)$ векторни беради:

$$d(m) = \begin{pmatrix} d_1(m) \\ d_2(m) \\ \vdots \\ d_N(m) \end{pmatrix}.$$

Стратегияларни кетма-кет таҳлил қилиб шу нарсани аниқлаш мумкинки, система $(m+1)$ – қадамда оптимал ўртача даромад бериши учун m - қадам оптимал бўлиши керак.

$$v_i(m) = q_i + \sum_{j=1}^N P_{ij} v_j(m-1), \quad i = \overline{1, N}, m = 1, 2, \dots$$

$$v_i(m+1) = \max_k \left[q_i^k + \sum_{j=1}^N P_{ij}^k v_j(m) \right], \quad i = \overline{1, N}$$

Бу ерда $v_i(m+1)$, $v_j(m)$ лар танланган оптимал ўтиш учун кутилган даромадни билдиради. Кутилган даромад ва оптимал стратегияларни

охирги тенглик ёрдамида кетма-кет ҳисоблашни $d(m)$ вектор ўзгармай қолгунча давом эттирилади.

Бошқарилувчи Марков жараёнларининг оптимал стратегиялари. Энди оптимал стратегияларни

$$v_i(m) = mg + v_i, \quad i = \overline{1, N}$$

асимптотик формулалар ёрдамида топиш методини қараб чиқамиз.

$$v_i(m) = q_i + \sum_{j=1}^N P_{ij} v_j(m-1), \quad i = \overline{1, N}, m = 1, 2, \dots$$

бўлгани учун

$$mg + v_i = q_i + \sum_{j=1}^N P_{ij} v_j(m-1)$$

ёки

$$mg + v_i = q_i + \sum_{j=1}^N P_{ij} [v_j + (m-1)g]$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан

$$mg + v_i = q_i + \sum_{j=1}^N P_{ij} v_j + (m-1)g \sum_{j=1}^N P_{ij}$$

тенгликни ва $\sum_{j=1}^N P_{ij} = 1$ эканлигини эътиборга олиб

$$g + v_i = q_i + \sum_{j=1}^N P_{ij} v_j, \quad i = \overline{1, N}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $N+1$ та

$$g, v_1, v_2, \dots, v_N$$

ўзгарувчили N та тенгламалар системасига эга бўлдик. Оптимал стратегияни аниқлашда $v_j, \quad j = \overline{1, N}$ ўзгарувчиларнинг абсолют қийматларини билиш шарт эмас. $v_j - v_i$ айирмалар ўзгармас қиймат

қабул қилишини талаб қилиш етарли. Бунга эришиш қийин эмас, охирги системага, масалан, $v_N = 0$ тенгламани қўшиш етарли, чунки исталган i учун $v_i = 0$ деб олиш мумкин.

Охирги системани $v_N = 0$ тенглама билан биргаликда ҳал қилинса $v_j(m)$ катталиқнинг асимптотик қиймати

$$g^o, v_1^o, v_2^o, \dots, v_N^o$$

топилади.

Фиксирланган стратегиялар учун g ни аниқлашда охирги системани ечмасдан

$$g = \sum_{i=1}^N P_i q_i$$

формуладан фойдаланиб топса ҳам бўлади. Лекин, бу вақтда оптимал стратегияни топиш учун ҳеч қанақа информацияга эга бўлмаймиз. Топилган

$$g^o, v_1^o, v_2^o, \dots, v_N^o$$

ечимдан фойдаланиб турли стратегияларни баҳолаш мумкин.

Алгоритм. Дастлабки қадам. $v_i = 0$, $i = \overline{1, N}$ деб оламиз ва иккинчи қадамга ўтамиз.

Биринчи қадам. P_{ij} ва q_i лардан фойдаланиб g даромадни ва $v_1, v_2, \dots, v_N$ ларни

$$\left. \begin{aligned} g + v_i &= q_i + \sum_{j=1}^N P_{ij} v_j, \quad i = \overline{1, N} \\ v_N &= 0 \end{aligned} \right\}$$

системани ечиб топамиз. Иккинчи қадамга ўтамыз.

Иккинчи қадам (ечимни яхшилаш). Биринчи қадамда топилган қийматлардан фойдаланиб ҳар бир E_i , $i = \overline{1, N}$ ҳолат учун

$$q_i^k + \sum_{j=1}^N P_{ij}^k v_j$$

критерийга максимум берувчи k стратегияни топамиз. Бу стратегияни янги вектор – ечим деб оламиз. Агар янги вектор – ечим эскиси билан бир хил бўлса, масала ечилди, акс ҳолда q_i^k ни $q_i^{k'}$ га P_{ij}^k ни $P_{ij}^{k'}$ га алмаштирамиз ва биринчи қадамга ўтамыз.

II БОБ. ТАСОДИФИЙ ЖАРАЁНЛАРДА МАРКОВ ЗАНЖИРИ

2.1 §. Боғлиқ тажрибалар кетма-кетлиги. Марковнинг дискрет занжири

Ҳозирга қадар биз ўзаро боғлиқ бўлмаган тажрибалар билан иш кўрган эдик. Энди эса боғлиқ тажрибалар кетма-кетлигининг содда ҳоли билан танишайлик. Мумкин бўлган натижалари чекли ёки саноқли $\{E_1, E_2, \dots, E_n, \dots\}$ тўпладан иборат бўлган S тажрибани кўрайлик. Бу тажрибани кетма-кет такрорлайлик ва E_{x_n} орқали n – тажриба натижасини белгилайлик. Умуман олганда, E_{x_n} нинг эҳтимоли олдинги $(n-1)$ та тажриба натижасида қандай ҳодисалар рўй берганига боғлиқдир. Агар E_{x_n} нинг эҳтимоли $(n-1)$ – тажриба натижаси $E_{x_{n-1}}$ гагина боғлиқ бўлиб, аввалги $(n-2)$ та тажрибада қандай ҳодисалар рўй берганига боғлиқ бўлмаса, бундай тажрибалар кетма-кетлиги **Марков занжири** ташкил этади дейилади.

Марков занжири аниқ таърифини қуйидаги ҳло учун берамиз: бутун қийматлар қабул қилувчи $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлигини оламиз. Агар n – тажрибада E_j ҳодиса рўй берса, $x_n = j$ деб ҳисоблаймиз. Агар

$$P(x_n = j / x_0 = k_0, x_1 = k_1, \dots, x_{n-2} = k_{n-2}, x_{n-1} = i) = P(x_n = j / x_{n-1} = i) \equiv p_{ij}(n)$$

шарт бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик **Марков занжири** дейилади.

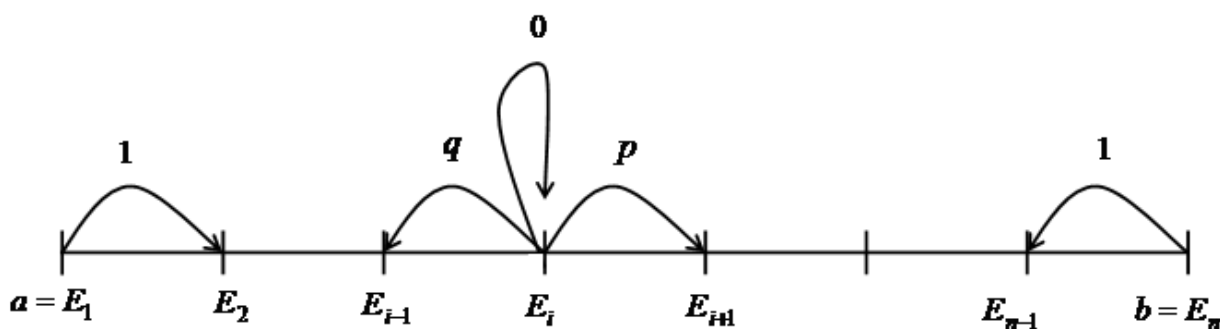
Марков занжирини бошқача талқин қилиш ҳам мумкин: ҳақиқатан ҳам, мумкин бўлган ҳолатлари тўплами $\{E_1, E_2, \dots, E_n, \dots\}$ дан иборат бўлган бирор физик система берилган бўлиб, x_0 бошланғич тақсимооти

$$P(x_0 = j) = p_j^0, \quad \sum p_i^0 = 1$$

берилган ва вақтнинг бутун қийматли моментларида (онларида) система ўз ҳолатини ўзгартирсин. Шу билан бирга системанинг вақтнинг n – моментида E_j ҳолатда бўлиш эҳтимоли, олдинги

моментларнинг барчасида система қайси ҳолатда бўлганлиги маълум бўлса ҳам, уларга боғлиқ бўлмасдан, фақат вақтнинг $(n-1)$ -моментида система қайси ҳолатда бўлганига боғлиқ бўлсин. Бундай боғлиқлик Марков занжиридир.

1-мисол. Заррача $[a, b]$ да ҳаракатлансин. Бу заррача вақтнинг $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ моментларида тасодифий туртки таъсирида бир қадам ўнгга ёки чапга, мос равишда, $p, q=1-p$ эҳтимол билан силжиши мумкин. Заррачанинг ўз ўрнида қолиш эҳтимоли эса нолга тенг бўлсин. Агар заррача a нуқтада бўлса, туртки натижасида бир эҳтимол билан ўнгга, b нуқтада бўлса, бир эҳтимол билан чапга силжисин. Заррачанинг баён этилган қонун бўйича ҳаракати Марков занжирига мисол бўлади.



1-шакл.

Энди $p_{ij}^{(m,n)} = P(x_n = j / x_m = i)$ эҳтимолини қарайлик. Бу $p_{ij}^{(m,n)}$ эҳтимол системанинг m -тажрибада E_i ҳолатда бўлиб, n тажрибада E_j ҳолатга ўтиш эҳтимоли деб ўқилади.

Марков занжирида ҳолатлар чекли, шунингдек, чексиз бўлиши мумкин. Биз ҳолатлари сони чекли бўлган ҳолатни қараймиз. Ушбу

$$P(m,n) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(m,n)} & p_{12}^{(m,n)} & \dots & p_{1s}^{(m,n)} \\ p_{21}^{(m,n)} & p_{22}^{(m,n)} & \dots & p_{2s}^{(m,n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s1}^{(m,n)} & p_{s2}^{(m,n)} & \dots & p_{ss}^{(m,n)} \end{pmatrix}$$

матрица **ўтиш эҳтимоллари матрицаси** дейилади. Бу матрицанинг тартиби Марков занжирининг ҳолатлари сони s га тенг бўлади.

Марков теоремаси. Агар $0 < m < k < n$ бўлса, у ҳолда ўтиш эҳтимоллари матрицаси $P(m, n)$ билан аниқланувчи Марков занжири учун ушбу муносабат ўринлидир:

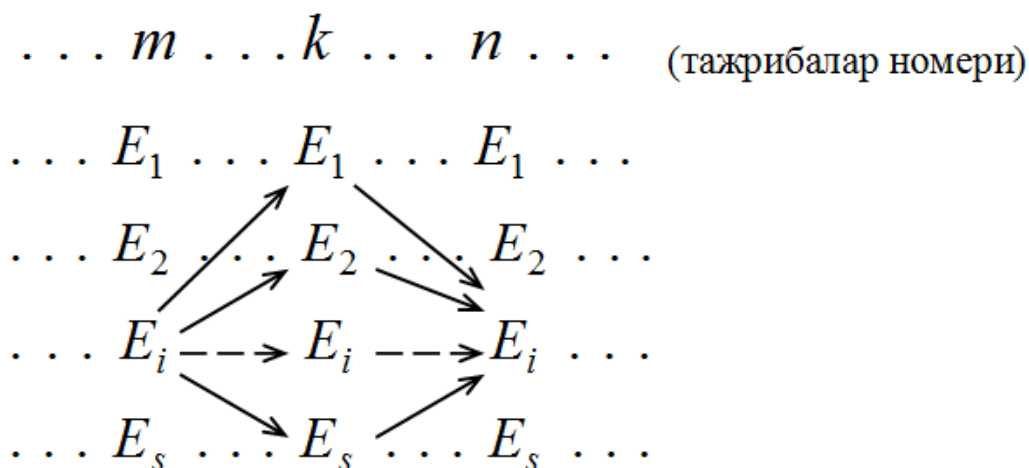
$$P(m, n) = P(m, k) \cdot P(k, n). \quad (1)$$

Бу тенглама баъзан **Марков тенгламаси** ҳам дейилади.

Исботи. Системанинг m – тажрибада E_i ҳолатда бўлиб, n тажрибада E_j ҳолатда бўлиш ҳодисасини $A_{ij}^{(m, n)}$ орқали белгилаймиз. У ҳолда ушбу тенглик ўринли:

$$A_{ij}^{(m, n)} = A_{i1}^{(m, k)} \cdot A_{1j}^{(k, n)} + A_{i2}^{(m, k)} \cdot A_{2j}^{(k, n)} + \dots + A_{i, s-1}^{(m, k)} \cdot A_{s-1, j}^{(k, n)} + A_{i, s}^{(m, k)} \cdot A_{s, j}^{(k, n)}.$$

Ҳақиқатан ҳам, бу тенгликнинг ўринли эканлигига қуйидаги схемага қараб ишонч ҳосил қилиш мумкин:



Схемадан кўриниб турибдики, бу йиғиндидаги қўшилувчиларнинг исталган иккитаси биргаликда рўй бермайди. У ҳолда

$$p_{ij}^{(m, n)} = P(A_{ij}^{(m, n)}) = \sum_{l=1}^s P(A_{il}^{(m, k)} \cdot A_{lj}^{(k, n)})$$

бўлади. Система марков занжирини ташкил этгани учун E_α ҳолатдан E_j ҳолатга ўтиш ҳодисаси система E_α ҳолатга қайси ҳолатдан ўтганига боғлиқ эмас, яъни $A_{i\alpha}^{(m, k)}$ ҳодиса $A_{aj}^{(k, n)}$ ҳодисага боғлиқ эмас. Шунинг учун

$$P(A_{i\alpha}^{(m, k)} \cdot A_{aj}^{(k, n)}) = P(A_{i\alpha}^{(m, k)}) \cdot P(A_{aj}^{(k, n)}).$$

У ҳолда

$$p_{ij}^{(m,n)} = \sum_{l=1}^s p_{il}^{(m,k)} \cdot p_{lj}^{(k,n)} = p_{i1}^{(m,k)} \cdot p_{1j}^{(k,n)} + p_{i2}^{(m,k)} \cdot p_{2j}^{(k,n)} + \dots + p_{is}^{(m,k)} \cdot p_{sj}^{(k,n)}.$$

Бу эса матрицаларни кўпайтириш қондасига кўра

$$P(m,n) = P(m,k) \cdot P(k,n),$$

демакдир. Агар $k = m + 1$ деб олинса, у ҳолда (1) дан

$$P(m,n) = P(m, m+1) \cdot P(m+1, n) = P(m, m+1) \cdot P(m+1, m+2) \dots P(n-1, n).$$

$P(m, m+1) = P(m)$ га **бир қадамда ўтиш эҳтимоллари** матрицси дейилади.

Бундан фойдаланилса,

$$P(m,n) = P(m) \cdot P(m+1) \dots P(n-1), \quad (2)$$

хусусий ҳолда эса

$$P(1,n) = P(1) \cdot P(2) \dots P(n-1)$$

формулага эга бўламиз.

Ҳар бир қадамда ўтиш эҳтимоллари матрицаси берилган бўлса, Марков занжири берилган дейилади. Агар $p_{ij}^{(k,k+1)} = p_{ij}^{(k)}$ десак,

$$P(k) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & \dots & p_{1s}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & \dots & p_{2s}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s1}^{(k)} & p_{s2}^{(k)} & \dots & p_{ss}^{(k)} \end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. Бу бир қадамда ўтиш эҳтимоллари матрицаси бўлиб, умуман айтганда, k ўзгариши билан $P(k)$ ўзгаради, яъни $P(k)$ тажриба номерига боғлиқдир. Агар ўтиш эҳтимоллари тажриба номерига боғлқ бўлмаса, яъни $p_{ij}^{(k)} = p_{ij}$ бўлса, бундай занжир **бир жинсли Марков занжири** дейилади. Демак, бир жинсли Марков занжирининг бир қадамда ўтиш эҳтимоллари матрицаси

$$\pi = P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{pmatrix}$$

кўришда бўлар экан. Бундан ва (2) дан бир жинсли Марков занжири учун m – тажрибада E_i ҳолатда бўлиб, n – тажрибада E_j ҳолатга ўтиш эҳтимоллари матрицаси

$$P(m, n) = P(m) \cdot P(m+1) \dots P(n-1) = [P]^{n-m} = \pi_{n-m}$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, бир жинсли Марков занжирини бериш учун бир қадамда ўтиш эҳтимоллари матрицасини бериш етарли экан. 1-мисолдаги “дайди заррача” ҳаракат қонуни бир жинсли Марков занжирига мисол бўлади. бу мисолда бир қадамда ўтиш эҳтимолларининг матрицаси

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ q & 0 & p & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & q & 0 & p & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

кўринишга эга бўлади. Заррачанинг E_2 ҳолатдан E_5 ҳолатга 10 та тўртки натижасида (10 та қадамдан сўнг) ўтиш эҳтимолини топтоқчи бўлсак, $[P]^{10}$ ни ҳисоблаб, сўнг унинг 2-йўл, 5-устунидаги $p_{2,5}$ элементни олиш кифоя.

Ўтиш эҳтимоллари матрицаси қуйидаги хоссаларга эга:

1-хосса. Ўтиш эҳтимоллари матрицасининг ҳар бир элементи учун $0 \leq p_{ij}^{(m,n)} \leq 1$ тенгсизлик ўринли.

2-хосса. $\sum_{j=1}^s p_{ij}^{(m,n)} = 1$ (ҳар бир сатрдаги эҳтимоллар йиғиндиси бирга тенг), яъни система m – тажрибада E_i ҳолатда бўлса, n – тажрибада $E_1, E_2, \dots, E_s$ ҳолатларнинг бирига албатта ўтади.

3-хосса. Бирор устуннинг ҳамма элементлари нолга тенг бўла олмайди. Масалан, j – устуннинг ҳамма элементлари нолан иборат бўлсин. бу эса

системанинг ҳеч қачон j – ҳолатда бўла олмаслигини билдиради. Демак, бу ҳолда ҳолатлар сони s дан кичик бўлар эди.

Таъриф. Агар $n \rightarrow \infty$ да ихтиёрий $i, j, k = 1, 2, \dots, s$ учун

$$|p_{ij}^{(m,n)} - p_{kj}^{(m,n)}| \rightarrow 0$$

бажарилса, бу ўтиш эҳтимоллари билан берилган **Марков занжири эргодик принципга бўйсунди** дейилади.

Қандай шартлар бажарилганда Марков занжири эргодик принципга бўйсунди? $s=2$ бўлган ҳолни қарайлик. Бу ҳолда ўтиш эҳтимоллари матрицалари

$$P(k) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} \end{pmatrix} \text{ ва } P(m,n) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(m,n)} & p_{12}^{(m,n)} \\ p_{21}^{(m,n)} & p_{22}^{(m,n)} \end{pmatrix}.$$

Бу ҳолда таърифдан кўринадики, эргодик принципнинг ўринли бўлиши

$$|p_{11}^{(m,n)} - p_{21}^{(m,n)}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad |p_{12}^{(m,n)} - p_{22}^{(m,n)}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3)$$

лардан бирининг бажарилишига тенг кучлидир.

Агар

$$p_{11}^{(k)} = \alpha_k, \quad p_{22}^{(k)} = \beta_k$$

десак,

$$P(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & 1 - \alpha_k \\ 1 - \beta_k & \beta_k \end{pmatrix}$$

бўлади ва

$$\det P(k) = \alpha_k \beta_k - 1 + \beta_k + \alpha_k - \alpha_k \beta_k = \alpha_k + \beta_k - 1.$$

Теорема. $s=2$ бўлган ҳол учун Марков занжири эргодик принципга бўйсундиши учун ушбу

$$\sum_{k=1}^{\infty} [1 - |\alpha_k + \beta_k - 1|]$$

қаторнинг узоқлашувчи бўлиши зарур ва етарли.

Исботи. $m=1$ деб олишимиз мумкин, у ҳолда $n \rightarrow \infty$ да

$$|p_{11}^{(1,n)} - p_{21}^{(1,n)}| \rightarrow 0 \quad \text{ёки} \quad |p_{12}^{(1,n)} - p_{22}^{(1,n)}| \rightarrow 0$$

эканини кўрсатамиз. Лекин,

$$\det P(1, n) = \begin{vmatrix} p_{11}^{(1, n)} & p_{12}^{(1, n)} \\ p_{21}^{(1, n)} & p_{22}^{(1, n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11}^{(1, n)} & 1 - p_{11}^{(1, n)} \\ p_{21}^{(1, n)} & 1 - p_{21}^{(1, n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - p_{12}^{(1, n)} & p_{12}^{(1, n)} \\ 1 - p_{22}^{(1, n)} & p_{22}^{(1, n)} \end{vmatrix}.$$

Бундан

$$|p_{11}^{(1, n)} - p_{21}^{(1, n)}| = |p_{12}^{(1, n)} - p_{22}^{(1, n)}| = |\det P(1, n)|.$$

Демак, (3) ни исботлаш учун $n \rightarrow \infty$ да

$$\det P(1, n) \rightarrow 0$$

ни кўрсатиш етарли.

$$P(1, n) = P(1) \cdot P(2) \dots P(n-1)$$

лигидан ва

$$|\det P(1, n)| = \prod_{k=1}^{n-1} |\det P(k)| = \prod_{k=1}^{n-1} |\alpha_k + \beta_k - 1|$$

дан (3) нинг $n \rightarrow \infty$ да

$$\prod_{k=1}^{n-1} |\alpha_k + \beta_k - 1| \rightarrow 0$$

га тенг кучли эканини кўрамиз. Математик анализ курсидан маълумки,

$n \rightarrow \infty$ да $\prod_{k=1}^{n-1} a_k \rightarrow 0$ бўлиши учун $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) = +\infty$ бўлиши зарур ва

етарлидир. Шунга асосан $n \rightarrow \infty$ да

$$\prod_{k=1}^{n-1} |\alpha_k + \beta_k - 1| \rightarrow 0 \text{ бўлиши учун}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k + \beta_k - 1|) = \infty$$

бўлиши зарур ва етарли. Теорема исботланди.

Бир жинсли Марков занжири учун бир қадамда ўтиш матрицаси система s та ҳолатли бўлганда

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{pmatrix}$$

бўлади. Бу ҳолат учун қуйидаги теорема ўринли.

Теорема. Агар бирор $k > 0$ сон учун ўтиш эҳтимоллари матрицаси $\pi_k = [P_1]^k$ ҳамма элементлари мусбат бўлса, у ҳолда занжир эргодик бўлади ва i га боғлиқ бўлмаган шундай p_j ($1 \leq j \leq s$) сонлар мавжудки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^n = p_j$$

бўлади.

2-мисол. Ўтиш матрицаси

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

бўлган 3 ҳолатли, бир жинсли Марков занжири эргодик принципга бўйсунадими?

Ечиш. Ҳамма элементлари мусбат бўлган π_k ни топамиз:

$$\pi_k = P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Демак, бу занжир эргодик принципга бўйсунди.

2.2 §. Содда Пуассон жараёни

$\{\Omega, F, P\}$ эҳтимоллик фазосида аниқланган ва t параметрга ($t \in T$) боғлиқ бўлган $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega)$ тасодифий миқдорлар оиласи **тасодифий жараён** дейилади. Бирор идишдаги газ молекуласининг ҳаракатини кузатайлик. Кузатилаётган молекула вақт ўтиши билан бошқа бир молекула билан тўқнашиши натижасида ҳаракат

траекториясини ўзгартириши мумкин, демак, бу тажрибада кузатилаётган траекториянинг вақтга боғлиқлиги равшан. Бу траекториялар эса тасодифий жараённи ташкил қилади. Сув омборидаги сув миқдори вақт ўтиши билан ўзгаришда бўлади, ва демак, сув омборидаги сув миқдори ҳам тасодифий жараёндир. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ҳам тасодифий жараён деб қаралиши мумкин, бунда $n \in T$,

$$T = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Агар T тўплам саноқли элементлардан ташкил топган бўлса, $\xi(t)$ жараён **дискрет “вақтли” (параметрли) жараён** ва T тўплам бирор (a, b) интервалдан иборат бўлса, $\xi(t)$ жараён **узлуксиз “вақтли” (параметрли) жараён** дейилади. Хусусан, t параметр фиксирланса, $t = t_0$, у ҳолда $\xi(t_0, \omega)$ тасодифий миқдорга эга бўламиз. Элементар ҳодиса ω фиксирланса, $\omega = \omega_0$, биз “вақт”нинг функцияси $\xi(t, \omega_0)$ ни оламиз. Бу функция тасодифий жараённинг **реализацияси** (траекторияси танланма функцияси) дейилади.

Айтайлик, бирор A ҳодиса $[0, t]$ оралиқда текширилаётган бўлсин. Масалан, A ҳодиса телефон станциясига $[0, t]$ вақт оралиғида келган телефон чақириқлари сонидан иборат бўлиши мумкин. $I_0(t)$ орқали A ҳодисанинг $[0, t]$ вақт орасида бирор марта ҳам рўй бермаслик ҳодисасини белгилаймиз. $I_k(t)$ орқали A ҳодисанинг $[0, t]$ вақт орасида k марта рўй беришини белгилаймиз, $k = 1, 2, \dots, n, \dots$. Биз ўрганаётган жараёнга қуйидаги шартларни қўямиз.

1. Стационарлик шарти. Кесишмайдиган оралиқларда A ҳодисанинг k марта рўй бериш эҳтимоли фақат интерваллар узунлигига боғлиқ бўлиб, шу интервалларни ўзгармас $h > 0$ га бир вақтда силжитишда ўзгармай қолса, у ҳолда $\xi(t)$ тасодифий жараён стационарлик шартига бўйсунди дейилади. Бошқача айтганда, бизнинг

ҳолда, $P_k(t_i, t)$ A ҳодисанинг $(t_i, t_i + t)$ оралиқда k марта рўй бериш эҳтимоли бўлса, ушбу

$$P_k(t_i, t_i + t) = P_k(t)$$

тенглик бажарилсин, бунда $P_k(t)$ A ҳодисанинг t вақт давомида k марта рўй бериш эҳтимоли.

2. Таъсирсизлик шарти. Бу шарт – бирор $(t_1, t_1 + t)$ оралиқда k марта рўй бериш ҳодисаси $(t_1, t_1 + t)$ билан кесишмайдиган бошқа оралиқларда A нинг неча марта рўй бериши ҳодисасига боғлиқ бўлмаслик шартидир.

3. Биргиналик шарти. Айтайлик, Δt кичик вақт орасида A ҳодисанинг икки ва ундан ортиқ марта рўй бериш эҳтимоли Δt га нисбатан чексиз кичик миқдор бўлсин, яъни агар $P_k(\Delta t)$ орқали A ҳодисанинг Δt кичик вақт оралиғида k марта рўй бериш эҳтимолини белгиласак,

$$P_k(\Delta t) = o(\Delta t), \quad k > 1 \quad (1)$$

бўлсин. Шу билан бирга A ҳодисанинг Δt кичик вақт оралиғида бир марта рўй бериш эҳтимоли

$$P_1(\Delta t) = \mu \Delta t + o(\Delta t) \quad (2)$$

га тенг бўлсин, бунда μ – бирор мусбат сон. Бу (1), (2) икки шарт жараённинг **биргиналик шарти** дейилади.

Стационарлик, таъсирсизлик ва биргиналик шартларини қаноатлантирувчи тасодифий жараён $\xi(t)$ **содда Пуассон жараёни** дейилади.

Теорема. Содда Пуассон жараёни учун

$$P_k(t) = P(\xi(t) = k) = \frac{e^{-\mu t} \cdot (\mu t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

бўлади.

Исботи. (3) формуланинг аввал $k=0$ учун тўғрилигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, юқоридаги шартларни эътиборга олиб, ушбу

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t) = P_0(t)[1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)] = P_0(t) - \mu P_0(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

муносабатни ёза оламиз. Бунда $\sum_{i=0}^{\infty} P_i(\Delta t) = 1$ экани эътиборга олинди.

Бундан

$$P_0(t + \Delta t) - P_0(t) = -\mu P_0(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

ёки

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\mu P_0(t) + o(1).$$

Натижада $\Delta t \rightarrow 0$ да

$$P_0'(t) = -\mu P_0(t),$$

бундан

$$P_0(t) = Ce^{-\mu t}.$$

Аммо, $P_0(0) = 1$, бундан $C = 1$, демак, $P_0(t) = e^{-\mu t}$ бўлади. энди (3) формулани ихтиёрий $k \geq 1$ учун исботлаймиз.

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t)P_0(\Delta t) + P_0(t)P_1(\Delta t) = P_1(t)[1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)] + P_0(t)[\mu\Delta t + o(\Delta t)].$$

Бундан

$$\frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = -\mu[P_1(t) - P_0(t)] + o(1),$$

ёки $\Delta t \rightarrow 0$ да

$$P_1'(t) = -\mu[P_1(t) - P_0(t)]. \quad (4)$$

Худди шунингдек,

$$P_k(t + \Delta t) = \sum_{l=0}^k P_{k-l}(t)P_l(\Delta t) = P_k(t)P_0(\Delta t) + P_{k-1}(t)P_1(\Delta t) + \sum_{l=2}^k P_{k-l}(t)P_l(\Delta t). \quad (5)$$

Лекин чекли k лар учун (1) га асосан

$$\sum_{l=2}^k P_{k-l}(t)P_l(\Delta t) \leq \sum_{l=2}^k P_l(\Delta t) = o(\Delta t)$$

тенгсизлик ўринлидир. (1), (2), (5) ва охирги тенгсизликдан

$$\frac{P_k(t + \Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -\mu[P_k(t) - P_{k-1}(t)] + o(1).$$

Энди $\Delta t \rightarrow 0$ да

$$P_k'(t) = -\mu[P_k(t) - P_{k-1}(t)], \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

бўлади. Энди $P_k(t)$ нинг $\Phi(t, x)$ ҳосил қилувчи функциясини киритамиз:

$$\Phi(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) x^k. \quad (7)$$

Равшанки,

$$\Phi(0, x) = P_1(0) + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(0) x^k = 1, \quad \Phi(t, 1) = 1, \quad (8)$$

шу билан бирга (7) қатор $|x| \leq 1$ да текис яқинлашувчи, ва демак, (6) га асосан:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{dP_k(t)}{dt} x^k = -\mu \sum_{k=0}^{\infty} [P_k(t) - P_{k-1}(t)] x^k = -\mu \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) x^k + \\ &+ \mu \sum_{k=0}^{\infty} P_{k-1}(t) x^k = -\mu \Phi(t, x) + \mu x \Phi(t, x). \end{aligned}$$

Бундан

$$\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} = -\mu(1-x)\Phi(t, x)$$

ёки

$$\Phi(t, x) = C e^{-\mu(1-x)t}.$$

Лекин (8) га асосан $c = 1$, демак,

$$\Phi(t, x) = e^{-\mu(1-x)t}.$$

Агар $e^{\mu t x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t x)^k}{k!}$ лигини эътиборга олсак,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) x^k = e^{-\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} x^k,$$

бундан

$$P_k(t) = e^{-\mu t} \cdot \frac{(\mu t)^k}{k!}$$

келиб чиқади. Шу билан (3) муносабат исботланди.

2.3 §. Марков занжирлари ҳолатларининг классификацияси

Айтайлик, бир жинсли Марков занжири $x(t)$ дискрет вақтли ва чекли ёки саноқли ҳолатлар тўплами

$$X = (x_1, x_2, \dots)$$

га эга бўлган жараён берилган бўлсин. $P_{ij}(t)$ орқали олдинги каби x_i ҳолатдан t вақтда x_j ҳолатга ўтишни белгилайлик $P_{ij}(t) = P_{ij}$.

x_i ва x_j ҳолатни бир синфга тегишли деймиз, агар шундай t_1 ва t_2 вақтни кўрсатиш мумкинки,

$$P_{ij}(t_1)P_{ji}(t_2) \quad (1)$$

бўлса. Бундай аниқланиш қарама-қаршиликка эга эмас. Чунки, айтайлик k_i - шундай ҳолатлар тўпламики бунда x_i ва x_j ҳолатлар бир синфга тегишли. Агар $x_j \in k_i$ тегишли бўлган k_j ҳам k_i каби тузулган бўлса,

$$k_i = k_j$$

бўлади. Ҳақиқатдан $x_j \in k_i$ бўлса, шундай s_1 ва s_2 мавжудки,

$$P_{ij}(s_1)P_{ji}(s_2) > 0.$$

Лекин,

$$P_{ji}(t_1 + s_1) \geq P_{ji}(t_1)P_{ij}(s_1), \quad P_{ji}(t_2 + s_2) \geq P_{ji}(t_2)P_{ij}(s_2)$$

ўринли, $x_j \in k_i$. Демак,

$$k_j \supset k_i.$$

Шундай асосда кўрсатиш мумкинки,

$$k_i \supset k_j$$

Айтайлик $x_i - k_i$ синфга тегишли қандайдир ҳолат бўлсин. Ҳолат ўринли деб аталади, агар ихтиёрий $t > 0$ учун

$$\sum_{j \in k_i} P_{ij}(t) = 1$$

Бу эса, $P_{ir}(t) = 0$ бўлиши $r \notin k_i$ эканлигидан келиб чиқади. Агар $x_i -$ ўринли ҳолат бўлса, у ҳолда $x_j \in k$ ҳам ўринли ҳолат бўлади. Агар қандайдир $t > 0$ учун

$$\sum_{i \in k_i} P_{ji}(t) < 1$$

бўлса, у ҳолда шундай s оламизки, $P_{ij}(s) > 0$ бўлсин, у ҳолда

$$\begin{aligned} \sum_{i \in k_i} P_{ii}(t+s) &= \sum_{i \in k_i} \sum_{r \in X} P_{ir}(s) P_{ri}(t) = \\ &= \sum_{i \in k_i} \sum_{r \in k_i} P_{ir}(s) P_{ri}(t) \leq P_{ij}(s) + \sum_{r \neq j} P_{ir}(s) = 1 \end{aligned}$$

Шундай қилиб, ўринли ҳолатлар синфи ҳақида гапириш мумкин.

Ҳар бир ўринли ҳолатлар синфини ёпиқ деб аталади, шу маънодаки, бу ҳолатга тушган жараён ҳеч қачон қайтиб бу ўринли ҳолатдан чиқиб кета олмайди.

Ҳолат x қайтувчи деб аталади, агар

$$P\left\{\bigcup_{t>0}\{x(t)=x\}/x(0)=x\right\}=1$$

Бу кўринишда r чекли қийматни аниқлаш мумкинки, у бошланғич ҳолатга биринчи қайтиб келиши вақтига тенг. Умумий ҳолда τ - чексиз қийматни қабул қилиши мумкин.

Агар ҳолат учун

$$P\{\tau = +\infty / x(0) = x\} > 0$$

муносабат ўринли бўлса, ҳолат қайтмас деб аталади.

Жараён ҳолати ҳақида қуйидаги тасдиқларни айтиш мумкин.

Теорема. Занжирда x_1 ҳолат қайтувчи бўлиши учун

$$\sum P_{ii}(t) = \infty$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Қуйидаги муносабатга эгамиз:

$$\begin{aligned} P_{ii}(t) &= \sum_{n=1}^t P\{\tau = n, x(t) = x_i / x(0) = x_i\} = \\ &= \sum_{n=1}^t P\{\tau = n / x(0) = x_i\} P\{x(t-n) = x_i / x(0) = x_i\} \end{aligned}$$

Бунда $n < t$ бўлгани учун

$$\begin{aligned} P\{\tau = n, x(t) = x_i / x(0) = x_i\} &= \\ &= P\{\tau = n, x(n) = x_i, x(t) = x_i / x(0) = x_i\} = \\ &= P\{\tau = n / x(0) = x_i\} P\{x(t) = x_i / \tau = n, x(n) = x_i, x(0) = x_i\} = \\ &= P\{\tau = n / x(0) = x_i\} P\{x(t) = x_i / x(n) = x_i\}. \end{aligned}$$

Ифодани z^t , $|z| < 1$ га кўпайтириб, t бўйича 0 дан ∞ гача йиғамиз:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{\infty} P_{ii}(t) \cdot z^t &= \sum_{t=1}^{\infty} z^t \sum P\{\tau = n / x(0) = x_i\} \times \\ &\times P_{ii}(t-n) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n P\{\tau = n / x(0) = x_i\} \sum_{m=0}^{\infty} P_{ii}(m) z^m \end{aligned}$$

Бундан эса

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n P\{\tau = n / x(0) = x_i\} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} z^t P_{ii}(t)}{1 + \sum_{t=1}^{\infty} z^t P_{ii}(t)}$$

Айтайлик $0 < z < 1$ бўлсин. Агар $z \rightarrow 1$ лимитга ўтсак

$$\begin{aligned} P\{\tau < +\infty / x(0) = x_i\} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sum_{t=1}^{\infty} z^t P_{ii}(t) z^t}{1 + \sum_{t=1}^{\infty} z^t P_{ii}(t) z^t} = \\ &= 1 - \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sum_{t=1}^{\infty} P_{ii}(t) z^t}. \end{aligned}$$

Бу ифодадан теорема исботи келиб чиқади.

Натижа 1. Агар x_i ва x_j битта ва фақат битта синфга тегишли бўлса, у ҳолда бу ҳолат қатарилувчи ёки қайтмас бўлади.

Айтайлик, $P_{ij}(t_1)P_{ji}(t_i) > 0$. У ҳолда

$$P_{ij}(t+t_1+t_2) \geq P_{ij}(t_1)P_{ij}(t)P_{ji}(t_2),$$

$$P_{ij}(t+t_1+t_2) \geq P_{ji}(t_2)P_{ij}(t)P_{ij}(t_1).$$

Бу ифодадан қуйидаги қаторлар

$$\sum P_{ii}(t), \quad \sum P_{ji}(t)$$

яқинлашиши ёки узоқлашувчи бир вақтда бўлиши келиб чиқади. Ҳолатлари барчаси қайтувчи бўлган синф ҳам қайтувчи деб аталади.

Натижа 2. Агар x_i - қайтмас ҳолат бўлса, у ҳолда ихтиёрий i ҳолат учун

$$\sum_{t=1}^{\infty} P_{ij}(t) < \infty$$

ўринли.

Ҳақиқатдан ҳам, айтайлик

$$A_n = \{x(t) \neq x_j, \quad t < n, \quad x(n) = x_i\}$$

ҳодиса бўлсин. У ҳолда

$$P_{ij}(t) = \sum_{n=1}^t P(A_n / x(0) = x_i) P_{ij}(t-n).$$

Агар $\sum_{t=n}^{\infty} P_{ij}(t-n) = c < \infty$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{\infty} P_{ij}(t) &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{n=1}^t P(A_n / x(0) = x_i) P_{ij}(t-n) = \\ &= c \sum P(A_n / x(0) = x_i) \leq c \end{aligned}$$

Бу ерда, A_n - ўзаро боғлиқсиз ҳодисалар қайтувчи ҳолатлар k синфини қараймиз. Аниқланган τ вақт x_i - ҳолатга қайтиш вақтидир. $d(+)$ - орқали τ - қадам вақти тақсимотини белгиласак, $d(i)$ - x_i - ҳолат

даври деб аталади ва у шундай эҳтимоллар энг катта умумий бўлувчисидир. Кўрсатиш мумкинки $d(i)$ ҳолат даври $P_{ij}(m) > 0$ ларнинг умумий бўлувчиси билан устма-уст тушади.

Лемма. Айтайлик, x -қайтувчи ҳолат ва $m(x) = M(\tau / x(0) = x)$, $P_{xx}(t)$ – x ҳолатдан x ҳолатга t –қадамда ўтиш эҳтимоли, d - x ҳолат даври бўлсин. У ҳолда қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{xx}(nd) = \frac{d}{m(x)}.$$

2.4 §. Марков жараёни орқали саноқли ҳолатли хизмат кўрсатиш системалари тадқиқоти

Хизмат кўрсатиш жараёни шундай тасодифий жараёнки, у тасодифий вақт моментида бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга тасодифий равишда ўтади, буюртмалар ва ишлаётган каналлар навбатда турганлар турли қийматларни қабул қилади. Хизмат кўрсатиш жараёни физик системани дискрет қийматли ҳолатини ифодалайди, бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтиш сакраш орқали рўй беради. Бу системани Марков жараёни сифатида ўрганиш мумкин.

Саноқли қийматлар қабул қилувчи X – физик системани қараймиз, қийматлари

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

бўлсин. X система вақтнинг ихтиёрий t моментда шу ҳолатларни бирини қабул қилади. $p_k(t)$ орқали ($k = 1, 2, \dots, n, \dots$) вақтнинг t моментида система x_k ҳолатда бўлиш эҳтимолини белгилаймиз. Кўриниб турибдики, ихтиёрий t учун

$$\sum_k p_k(t) = 1.$$

Дискрет X системага мисол сифатида n та самолётдан иборат группани қараймиз. Радар самолётни аниқлаб топиши лозим. Группани аниқлаб топиш вақти ҳам, қирувчи самолёт кўтарилиш вақти ҳам маълум эмас. Турли ҳолатларни кўриб чиқамиз:

x_0 – бирорта ҳам самолёт уриб туширилгани йўқ.

x_1 – битта самолёт топиб уриб тушурилди.

⋮

.....

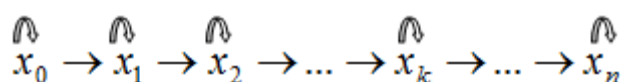
x_k – роса k та самолёт уриб тушурилди.

⋮

.....

x_n – n та самолёт уриб тушурилди.

Система ҳолатлари ўтишини қуйидагича ифодалаш мумкин



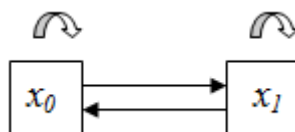
Бунда вақт моментида система ўз ҳолатида қолиши мумкин ёки фақат битта ҳолат кейингига ўтиши мумкин. Бу бирданига иккита самолёт бир вақтда уриб тушурилиш эҳтимоли жуда ҳам кичик бўлгани учун иккита ёки ундан ортиқ сакраш ҳолати йўқ деб олинди.

Бир каналли системага мисол сифатида битта линия орқали уланган иккита телефонни кўрамиз. Агар линия банд бўлса, навбатга қўйилмайди. Бу дискрет система ҳолатлари иккига

x_0 – канал бўш,

x_1 – канал банд.

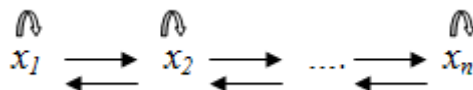
Ҳолатдан ҳолатга ўтиш схемаси қуйидагича:



Агар каналлар сони n - та бўлса,

x_0 - барча канал бўш;
 x_1 - фақат битта канал банд;

 x_n - барча канал банд.



Хизмат кўрсатиш системаси жараёнлари учун буюртма оқими муҳим роль ўйнайди. Шунинг учун жараённи характерлаш учун буюртма ҳолатини келтириш билан бошлаш зарур.

Содда оқим деб, эҳтимоллар назариясида шундай ҳодисалар кетма-кетлиги тушуниладики, бирор вақт моментида кетма-кет рўй бериши мумкин бўлган кетма-кетлик олинади. Содда оқимга мисол сифатида, телефон станциясига тушаётган чақирувлар, электр тармоғидаги узулишлар, почтага келаётган хатлар, компьютер системасидаги ишдан чиқишлар ва бошқаларни келтириш мумкин.

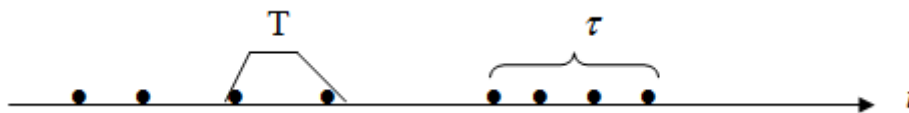
Ҳодисалар оқими регуляр дейилади, агар ҳодисалар бир-биридан маълум вақт ичида юз берса. Бундай оқимлар ҳам учрайди ва лимит теоремалар учун қизиқарли ҳисобланади.

Ҳодисалар оқими стационар деб аталади, агар уларни юз бериши фақат олинган вақт оралиғи узунлигига боғлиқ бўлиб, оралиқни қаерда жойлашишига боғлиқ бўлмаса.

Ҳодисалар оқими таъсирсизлик шартини қаноатлантиради дейилади, агар маълум вақт оралиғида ҳодисаларни кузатилиши сони бошқа оралиқларда неча марта кузатилишига боғлиқ бўлмаса.

Ҳодисалар оқими биргиналик шартига бўйсунди дейилади, агар қисқа Δt вақт оралиғида ҳодисани икки ва ундан ортиқ маротаба рўй бериши Δt га нисбатан чексиз кичик сон бўлса.

Сонлар ўқида ot содда оқими Π ни қарайлик, уларни тасодифий нуқталар кетма-кетлиги сифатида белгилаймиз



Узунлиги τ га тенг бўлган оралиқни оламиз. Стационарлик, таъсирсизлик ва биргиналик шартида τ оралиққа тушадиган ҳодисалар сони Пуассон қонунига асосан

$$a = \lambda \cdot \tau$$

математик кутилмага эга, λ - оқим зичлиги, яъни бирлик вақтга тўғри келадиган кузатишлар ўртачаси.

τ вақтда роса m ҳодиса юз бериши эҳтимоли

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda \tau)^m}{m!} e^{-\lambda \tau} \quad (1)$$

ифода билан аниқланади.

Хусусий ҳолда оралиқда ҳодиса кузатилмаслик эҳтимоли

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda \tau} \quad (2)$$

ифодага тенг. Оқимнинг муҳим характеристикаси ҳодисалар орасидаги фарқ тақсимотидир.

Ихтиёрий икки ҳодиса юз бериши оралиқ вақтини T билан белгилаймиз ва тақсимот функциясини топамиз:

$$F(t) = P\{T < t\}.$$

Тескари ҳодисани қараймиз:

$$1 - F(t) = P\{T \geq t\}.$$

Таъсирсизлик шарти ўринли бўлгани учун (2) формуладан ёзиш мумкинки,

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Бундан

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

Дифференциаллашдан фойдаланиб,

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \quad (4)$$

ифодага келиши мумкин. (4) ифода кўрсаткичли тақсимотни аниқлайди. τ тақсимот параметри ҳисобланади. Математик кутилмани ҳисоблаб чиқамиз:

$$m_t = M[\tau] = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt.$$

Бўлаклаб интегралласак,

$$m_t = \frac{1}{\lambda}$$

эканини топамиз.

Дисперсияси эса

$$D_t = D[T] = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - \frac{1}{\lambda^2} = \int_0^{\infty} \lambda + t^2 e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Бундан эса

$$D_t = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{ва} \quad \sigma_t = \frac{1}{\lambda}$$

эканини ёзиш мумкин.

Демак, бундан шундай натижа чиқариш мумкин: агар вақт оралиғи маълум τ оралиқларга ажратилган бўлса ва оралиқда кўрсаткичли тақсимот ўринли бўлса, у қолган вақт оралиғидаги тақсимот қонунига таъсир қилмайди, унда ҳам кўрсаткичли тақсимот ўринли.

Жараёни бошланишида каналлар бўш бўлганлиги учун жараён стационар бўлмайди. Аммо, маълум вақт ўтган буюртма тушиши ва уни бажарилиши стационар режимга ўтади. Бундай режим «ўрнатилган режим» деб аталади.

Исботлаш мумкинки, рад этиш мавжуд бўлган хизмат кўрсатиш системаларда стационар ўтиш режими мавжуд, яъни $t \rightarrow \infty$ да ҳар бир $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$ эҳтимолликлар доимий $p_0, p_1, \dots, p_n$ сонига интилади.

Лимитик $p_0, p_1, \dots, p_n$ ларни топиш учун Эрланг тенгламасида барча $p_k(t)$, $(0 \leq k \leq n)$ эҳтимолликларни p_k билан алмаштирамиз, унинг ҳосиласини нолга тенг деб оламиз.

Энди дифференциал тенгламалар системаси эмас, балки алгебраик тенгламалар системасини оламиз:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0 \\ \lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2 &= 0 \\ \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1} &= 0 \\ \\ \lambda p_{n-2} - [\lambda + (n-1)\mu] p_{n-1} + n\mu p_n &= 0 \\ \lambda p_{n-1} - n\mu p_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Бу системага яна битта

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

шартни қўшиш лозим.

(5) тенгламалар системасини ечимини излаймиз. Биринчи тенгламадан

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

ни, иккинчи тенгламадан, буни эътиборга олган ҳолда

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2\mu} [-\lambda p_0 + (\lambda + \mu) p_1] = \\ &= \frac{1}{2\mu} \left[-\lambda p_0 + \frac{\lambda^2}{\mu} p_0 + \lambda p_0 \right] = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0 \end{aligned}$$

топамиз. p_1, p_2 ларни эътиборга олиб, шунга ўхшаш

$$p_3 = \frac{1}{3\mu} \left(-\frac{\lambda^2}{\mu} p_0 + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0 + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} 2\mu p_0 \right) = \frac{\lambda^3}{3!\mu^3} p_0$$

ни топиш мумкин. Умумий ҳолда $k \leq n$ учун

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} p_0 \quad (6)$$

ифодага эга бўламиз. $\frac{\lambda}{\mu} = d$ деб белгилаш киритамиз. Биз буни буюртмалар оқимининг ўрнатилган зичлиги деб атаймиз. Бу қиймат

битта буюртма ўртача хизмат кўрсатиши учун тўғри келадиган, ўртача буюртмалар сонини ифодалайди.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda m_{t_{\text{хк}}}$$

ифодада $m_{t_{\text{хк}}}$ бир буюртмага хизмат кўрсатиш учун кетадиган ўртача вақт эди. Янги белгилашлар орқали (6) ифода

$$p_k = \frac{\alpha}{k!} p_0 \quad (7)$$

кўринишда ёзилади. Бу формула барча p_k эҳтимолликларни p_0 орқали ифодалайди. Уларни α ва n орқали кўринишини топиш учун

$$p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1$$

шартдан фойдаланамиз:

$$\sum_{k=0}^n p_k = p_0 \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} = 1.$$

Бундан

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}}. \quad (8)$$

(7) ифодага буни қўйиб,

$$p_k = \frac{\frac{\alpha_k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!}}, \quad 0 \leq k \leq n \quad (9)$$

муносабатга келамиз. Бу **Эрланг формулалари** деб аталади. Бу ифода хизмат кўрсатиш системаси характеристикаларига боғлиқ равишда ва хизмат кўрсатиш унумдорлигига асосланган ҳолда банд каналлар лимитик тақсимотини беради.

(9) ифода $k = n$ деб олиб, рад этиш эҳтимолини топиш мумкин, яъни барча каналлар банд бўлиш эҳтимоли

$$P_{pad} = p_n = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}}.$$

Хусусий ҳолда, бир каналли система учун

$$P_{pad} = p_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

га тенг. Хизмат кўрсатиш унумдорлиги

$$q = 1 - P_{pad} = \frac{1}{1 + \alpha}$$

формула билан ҳисобланади.

3-мисол. Телефон станцияси 4 та алоқа линиясига эга бўлсин. Станцияга буюртмалар содда оқим билан тушсин. Буюртма зичлиги $\lambda = 3$ бўлсин. Агар каналлар банд бўлса, рад этилади. Ўртача гаплашиш вақти 2 минут. Қуйидагилар аниқлансин:

- а) рад этилиш эҳтимолини;
- б) телефон станция умуман банд бўлмаслик ўрта вақти.

Ечиш. Масала шартида $m_{тхк} = 2(\text{мин})$, $\mu = 0,5 (\text{ган} / \text{мин})$, $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 6$.

а). (8) формулага асосан

$$P_{pad} = p_4 = \frac{\frac{\alpha^4}{4!}}{1 + \frac{\alpha^1}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!}} \approx 0,47.$$

б). (4) формулага асосан

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha^1}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!}} \approx 0,0087.$$

4-мисол. Самолётни кузатиб топиш радари 3 та каналга эга. Ҳар бир канал бир вақтда фақат битта самолётни кузатиб тура олади.

Кузатишнинг ўртача вақти $m_{t_{\text{хк}}} = 2(\text{мин})$. Самолётлар келиши оддий оқим бўлиб $\lambda = 1,5$ параметрга эга.

Системани рад этувчи система деб қараш мумкин. Кузатиш территориясида кузатилмай қолган самолётларни ўртача сонини топинг.

Ечиш. Масала шартидан $\mu = \frac{1}{2} = 0,5$, $\lambda = 1,5$, $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 3$.

$$(8) \text{ формулага асосан } P_{\text{рад}} = p_3 = \frac{\frac{3^3}{3!}}{1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!}} \approx 0,346.$$

Бунда рад этиш деганини, биз кузатув радарига тушмай қолиб, ўтиб кетган самолётни тушунамиз. Буюртмалар сони **чегараланмаган** бўлганлиги учун хизмат кўрсатиш системаси ҳолатлар сони чексиз кўп бўлади. Ҳолатларни ифодаловчи дифференциал тенгламалар ҳам чексиз кўп бўлади. Биринчи n – та тенглама навбатсиз хизмат кўрсатиш системасидаги каби бўлиши аниқ:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$

.....

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t),$$

.....

$$\frac{dp_{n-1}(t)}{dt} = -\lambda p_{n-2}(t) - [\lambda + (n-1)\mu]p_{n-1}(t) + n\mu p_n(t).$$

Эрланг формулаларини ўзгариши навбат бошланишида кўринади. Ҳақиқатан ҳам, x_n ҳолатда система навбатга қўйиш ҳолатига фақат x_{n-1} ҳолатдан ўтиши мумкин, лекин кейинги ҳолатларда x_n ҳолатга x_{n-1} дан ҳам, x_{n+1} дан ҳам ўтиши мумкин. $P_n(t)$ учун дифференциал тенглама тузамиз.

t моментни фиксирлаб $P_n(t + \Delta t)$ ни топамиз. Бу система $t + \Delta t$ моментда x_n ҳолатда бўлиш эҳтимолини англатади. Бу учта кўринишда амалга ошиши мумкин.

1) система t вақтда ҳам x_n ҳолатда бўлган эди, кейин Δt вақтда шу ҳолатдан чиқиб кетмайди, (бирорта) буюртма тушмади ва бирорта буюртма бажарилиб бўлмайди.

2) система t вақтда x_{n-1} ҳолатда бўлиб, Δt моментида x_n ҳолатга ўтди (битта буюртма тушди).

3) система t вақтда моментида система x_{n+1} ҳолатда эди (битта навбатда буюртма бор), кейин Δt вақт мобайнида x_n ҳолатга ўтди. (битта канал бўшаб қолди ёки битта буюртма кутиш вақти белгиланган чегарадан ўтганлиги сабабли системадан чиқиб кетди).

Хулоса

Битирув ишда Марков занжири хусусиятлари, ўтиш матрицаси, Марков тенгламаси ва уни исботи, эргодик теорема ва уни бажарилиши шарти кўриб чиқилди. Узлуксиз вақтли Марков занжирлари ўрганиб чиқилди ва мисоллар кўрсатилди. Мавзуга доир адабиётлар ва интернет маълумотлари келтирилди.

Малакавий ишида икки йуналишда иш олиб борилди, биринчидан, математика тарихи, яъни математиклар ҳаётини ўрганиш олиб борилди, иккинчидан олимнинг илмий изланишлар натижаларини ўрганиш олиб борилди. А.А.Марковнинг илмий фаолияти ғоят хилма-хил эди. Биринчи йилларда у сонлар назарияси билан дифференциал тенгламалар,

функциялар назариялари ва бошқа масалалар билан шуғулланди, кейинроқ эса фақат эҳтимоллар назарияси билан машғул бўлди. Марковнинг бу соҳалардан ҳар бирида эришган натижалари уни шуҳратли олим номига сазовор қилди. Ҳозирги кунда ҳам унинг асарлари энг актуал натижалар қаторида танилиб, янги авлодни илмий изланишларга ундайди ва янги масалаларни қўйишга илҳомлантиради. А.А.Марков бутун дунё математиклари ўртасидагина эмас, балки физиклар, техниклар ва табиий фанлар олимлари орасида ҳам шуҳрат қозонди. Ана шу фан соҳасидаги унинг лаёқатининг ҳар тарафлама кучга ва ўзига хос хусусиятларига эга эканлиги очилди. Бу изланишлар ҳозирги кунда эҳтимоллар назариясининг асосий бўлимларидан ҳисобланган ва назарий физикада, шунингдек кўпгина, техника ва табиий-илмий назарияларни математика жиҳатидан исботлашда катта аҳамиятга эга бўлган стохастик жараёнлар назариясини яратилишига ва ғоят ривожланишига сабаб бўлди. Битирув ишида асосий тушунчалар, асосий хусусиятлар келтирилди. Жараёнлар учун стационарлик, биргиналик, таъсирсизлик шартлари келтирилди. Марков занжири таърифи ва хусусиятлари келтирилди.

Битирув малакавий иши мактаб, академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари ўқитувчилари учун фойдали илмий ва тарихий манба сифатида ишлатилиши мумкин.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Б.В.Гнеденко. Курс теории вероятностей. М.:Наука, 1988.
2. Г.И.Ивченко, Ю.И.Медведев. Математическая статистика. М., Высшая школа, 1984.
3. В.Е.Гмурман. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Т.: Ўқитувчи, 1980.
4. В.П.Чистяков. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1982.

5. Э. А. Вукулов и др. Сборник задач по математике для втузов. Теория вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1990.
6. В.М.Иванова и др. Математическая статистика. М.: Высшая школа, 1975.