

**O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim
vazirligi Guliston davlat universiteti**

Matematika kafedrası

Yakupov Qahramon Maxsetbayevichning

**5130100 – matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun**

**„Umumlashgan funksiyani differensiallash“
Mavzusidagi**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**Rahbar: K.Jamuratov
fizika – matematika
fanlari nomzodi GulDU
kafedrası „matematika“
kata o'qituvchisi**

Guliston - 2016

Reja:

I Kirish.

II Asosiy qism.

1-bob. Funksional fazolar.

- 1.1 Normallangan fazolar va Gilbert fazosi.
- 1.2 Gilbert fazosida chiziqli funkcionallar va chiziqli chegaralangan operatorlar.
- 1.3 O'rta funksiyalar.

2-bob. Umumlashgan funksiyalar va ularni differensiyallash.

- 2.1 Umumlashgan funksiya tushunchasi.
- 2.2 Umumlashgan funktsiyani differensiyallash.
- 2.3 Ayrim umumlashgan funksiyalarni differensiyallash (umumlashgan xosilalarni xisoblash).

III Xulosa va takliflar.

IV foydalanilgan adabiyotlar va manbalar.

I . Kirish

Ko'pgina fizik jarayonlarning matematik modeli oddiy yoki xususiy hosilali differentsiyal tenglamalarning qo'shimcha shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini izlash, ya'ni matematik fizikaning chegaraviy masalalari orqali ifodalanadi.

Chegaraviy shartlar – boshlang'ich holat, chegarada (sirtida) yuz berayotgan hodisalar biror qonuniyatlar asosida sodir bo'lib, ularning miqdoriy qiymatlari malum xatoliklar bilan hisoblanishi tabiiy. Shuningdek, aksariyat hollarda chegaraviy shartlarni ifodalovchi funksiyalar silliq bo'lmaydi.

Odatda chegaraviy masalaning yechimi deb biror sohada differensial tenglamani ayniyatga aylantiruvchi, ya'ni shu sohada tenglamada qatnashgan barcha tartibdagi hosilalariga ega bo'lishi, hamda chegarada talab darajasida silliq uzluksiz bo'lishi zarur.

Misol uchun tor tebranish tenglamasi uchun qo'yilgan Koshi masalasini qaraylik.

$$\Omega = \{(x, t): -\infty < x < +\infty, t > 0\} \text{ sohada}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (0.1)$$

Tenglamani va

$$U(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (0.2)$$

Shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x, t)$ funksiya bo'lsin. (0.1), (0.2) masala yechimi (klassik) ni

$$U(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \quad (0.3)$$

Dirixle formulasi bilan toppish mumkin.

Ko'rinib turibdiki (0.3) formula bilan ifodalangan $U(x, t)$ funksiya Ω sohada (0, 1) tenglamani qanoatlantirishi uchun, $\varphi(t)$ funksiya 2 marta, $\Psi(t)$ funksiya 1 marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lishi lozim. Ammo bu funksiyalar eslatganimizdek tajriba, sinov natijalari bo'lgani uchun aniq qiymatga ega emas ya'ni biror xatolik bilan olingan va nihoyat yetarlicha silliq emas bo'lishi mumkin. Ana shu ikki holat- berilganlardagi taqribiylik va yetarlicha silliq bo'lmaslik (0.3) ni (0.1), (0.2) masala uchun yechim (klassik yechim) deb atashga haqqimiz yo'qligini anglatadi. Malumki chegaraviy masala to'g'ri-korrekt qo'yilgan deyiladi agar.

- 1 Masala yechimi(klassik) mavjud;
- 2 Masala yechimi yagona;
- 3 Masala yechimi turg'un;

bo'lsa.

Agar shu 3 ta shartdan kamida bittasi bajarilmasa ham masala noto'g'ri qo'yilgan (korrekt qo'yilmagan) deyiladi. Shuni e'tiborga olsak chegaraviy masalalar chegaraviy shartlarni ifodalovchi funksiyalar yetarlicha silliq hamda topilgan yechim berilganlardagi kichik xatoliklar yechimda ham kichik xatolik paydo qilishi zarur, aks holda 3-shart masala yechimi turg'un bo'lmaydi.

Yuqorida keltirilgan (0.1), (0.2) masalaning yechimiga nisbatan talablarning ayrimlari bajarilmasligi yechimga qo'yilgan talablarni yumshatishini taqozo qiladi. Bu holat yechim tushunchasini ham, funksiya tushunchasini ham isloh qilish, ya'ni kengaytirishga ishora qiladi, undaydi.

Mazkur bitiruv-malakaviy ishida klassik funksiyalarni umumlashgan funksiya tushunchasiga kengaytirish va umumlashgan hosila, umumlashgan funksiyalarni differensiyallash muammosi o'rganiladi.

Bitiruv ishi to'rtta qisimdan - kirish, asosiy qisim, xulosa va takliflar hamda foydalanilgan adabiyotlar va manbalar deb nomlanuvchi qisimlardan iborat.

Kirish qismida ish mavzuning dolzarbligi asoslanadi va ishga umumiy xarakteristika beriladi.

Asosiy qismi ikkita bobdan, har bir bob uchta banddan (paragrafdan) iborat. Birinchi bob „Funksiyonal fazolar“ deb nomlangan bo'lib, unda umumlashgan funksiya tushunchasi bilan bog'liq bo'lgan „Normallangan va Gilbert fazosi“, bu fazolardagi chiziqli uzluksiz funksiyonallar, ularning xossalari kabi funksiyonal analizning muhim tushuncha va tasdiqlari keng yoritilgan. Bu bobning uchunchi paragrafida o'rtalovchi yadro va nixoyat o'rtta funksiyalarning chekli o'lchovli fazolardagi tariflari va ayrim xossalari keltirilganki bu faktlar ishning ikkinchi bobida qayta-qayta asos qilib olingan.

Ikkinchi bob „Umumlashgan funksiyalar va ularni differensiyallash“ deb nomlangan. Undagi birinchi va ikkinchi paragraflar umumlashgan funksiyalar, umumlashgan funksiyalarni differensiyallash kabi boshlang'ich ma'lumotlar berishga, uchunchi paragraf esa umumlashgan hosila olishga – differensiyallashga bag'ishlangan. Shuningdek uchunchi paragrafda Xevisayd funksiyasi (teta – funksiya) ning umumlashgan funksiya sifatida umumlashgan hosilasi Dirakning delta funksiyasiga tengligi va chekli sondagi birinchi tur uzulishga ega funksiyalarning umumlashgan ma'nodagi hosilasi bilan klassik ma'nodagi hosilasi orasidagi bog'lanishlar mavjudligini ko'rsatadi.

Xulosa va takliflar qismida ishda erishilgan asosiy yangiliklar va ishni qaysi yo'nalishda davom ettirish (Sobolev fazolarida differensial operatorlarni o'rganish) borasida tavsiyalar berilgan.

To'rtinchi adabiyotlar va manbalar qismida o'ttizdan ortiq zamonaviy jurnallar va ommaviy matbuotda shuningdek darislik va qo'llanmalarda umumlashgan funksiyalarni fanga kiritish uchun kerakli asoslarni o'zida jamlagan kitob va

manbalar ro'yxati keltirilgan. Internetdan malumotlar qismida shunga taalluqli turli manbalar va eng so'ngi yutuqlarni o'zida jamlagan sayitlar ro'yhati keltirilgan.

Mavzuning dolzarbligi. Juda ko'p fizik, texnik, iqtisodiy va h.k. jaraynlarni ifodalaydigan chegaraviy masalalar klassik funksiyalar to'plamida o'z yechimini topolmaydilar. Shu va shunga o'xshash boshqa muammolarni hal qilishda yangi tabiyatga ega, aniqrog'I klassik funksiyalarni o'z ichiga oluvchi va yuqorida eslatilgan muammolarni hal qilishga yordam beradigan yangi umumlashgan funksiyalarni o'rganish mavzusi hozirgi kunning dolzarb mavzularidandir.

Tadqiqot mavzusi. Dastlab birnecha, xususan moddiy nuqtaning zichligi, nuqtaviy zaryad impuls, nuqtaviy manbaning intensivligi kabi fizik tushunchalarni ifodalovchi matematik ob'yekt funksiya emas, balki chiziqli uzliksiz funksiyonal bo'lishi va ular bilan bog'liq faktlarni chuqur tadqiq qilish lozimligini etirof qilmoq zarur.

Tadqiqot muammosi. Umumlashgan funksiyalarni o'rganish va uni differensiyallash tushunchasini kiritishdan oldin matematik analiz, funksiyonal analiz, differensial tenglamalar nazaryasini chuqur bilish va tadbiq etish muammosi turadi.

Tadqiqot ob'yekiti. Tadqiqotda klassik funksiyalar to'plami hali kengaytirilishga muhtoj ekanligi va nihoyat bu kengaytmada differensial xisobning asosiy operatsiyalarini qay yo'sinda va samarali qilib kiritishi uchun funksioanal analizning normallashtgan va Gilbert fazolarida chiziqli uzliksiz funksiyonallarni tadqiqot obyekiti qilib olingan.

Tadqiqot predmeti. Tadqiqot ob'yekti bo'lgan chiziqli uzliksiz funksiyonnallar asosiy funksiyalar klassida aniqlangan bo'lib yangi-yangi xossalarga ega ekanligi ochib beriladi.

Tadqiqot farazi (gipotezasi). Umumlashgan funksiyalar apparati chegaraviy masalalarni yechishning zamonaviy usullaridan biri ekanligi va tadbiq darajasi kenligini ko'rsatuvchi birnecha misollar keltirilganligi ishning himoyaga olib chiqiladigan yutuqlari sanaladi.

Tadqiqot vazifalari. Bitiruv-malakaviy ish mavzusi shuni maqsad qilib olganki odatdagi (klassik) funksiyalar to'plamini kengaytirish ko'pgina shu kunning muammolarini hal qilishga yordam bera olishini ko'rsatishdan va ishonarli misollar yordamida namoyish eta bilishidir.

Tadqiqot yangiligi. Umumlashgan hosila tushunchasini lokal integrallanuvchi funksiyalar uchun integral hisobning bo'laklab integrallash fo'rmulasini ketma-ket

qo'llash natijasida ham kiritish mumkinligi ma'lum manoda tadqiqot yangiligi hisoblanadi.

Fan uchun ahamiyati. Son tushunchasini natural sondan kompleks songa kengaytirish turmush ehtiyoji va so'ngra fanning rivojlanishi uchun qanchalik muhim bo'lganligini eslasak klassik funksiya tushunchasini umumlashgan funksiyalarga kengaytirish ham shubhasiz fan uchun benihoya ahamiyatlidir.

Amaliyot uchun ahamiyati. Barcha chegaraviy masalalar amaliy masalalarning matematik ifodasi ekanligini eslatish va ularning yechimini umumlashgan funksiyalar sinfidan izlash bu tadqiqotning amaliy ahamiyati ekanligini ko'rsatadi.

1-bob. Funksiyanal fazolar.

1.1 Normallangan fazolar va Gilbert fazosi.

Ta'rif – 1. E abstrakt elementlar to'plami bo'lsin. Agar 1) E to'plam elementlarini haqiqiy (kompleks) songa ko'paytirish bilan birgalikda chiziqli sistema bo'lsa va 2) E sistemaning har bir U elementiga (shu elementning normasi deb ataluvchi va $\|U\|$ kabi belgilanuvchi) haqiqiy son mos qo'yilib,

a) $\|U\| \geq 0$, shuningdek $\|U\| = 0$ faqat nol element uchun,

b) $\|U + V\| \leq \|U\| + \|V\|$, $U, V \in E$;

c) $\|\lambda U\| = |\lambda| \|U\|$

aksyomalar bajarilsa E to'plamni haqiqiy (kompleks) chiziqli normallangan fazo deymiz.

Bunday fazolarda tabiiy metrika kiritiladi: U va V elementlar orasidagi $\rho(U, V)$ masofa $\rho(U, V) = \|U - V\|$ tenglik bilan aniqlanadi.

Ta'rif – 2. Agar E dan (E chiziqli normallangan fazodan) olingan $\{U_n\}$ ketma-ketlik va U element uchun $n \rightarrow \infty$ $\|U_n - U\| \rightarrow 0$ bo'lsa $\{U_n\}$ ketma-ketlik U elementga E da norma bo'yicha yaqinlashadi deymiz.

Bazida norma bo'yicha yaqinlashishni kuchli yaqinlashish deyilib $U_n \rightarrow U$ kabi belgilanadi.

Ta'rif – 3. Agar $E' \subset E$ bo'lib E to'plamning har bir elementini E' elementlarining E ning no'rmasi bo'yicha limiti sifatida qarash mumkin bo'lsa, E' to'plam E ning hamma joyida zich deyiladi.

Ta'rif – 4. Agar E da elementlarning sanoqli va E ning hamma joyida zich to'plam mavjud bo'lsa, E ni separabel fazo deymiz.

Ta'rif – 5. Agar E dan olingan ixtiyoriy $\{U_n\}$ fundamental ketma-ketlik E da yaqinlashuvchi, yaniy

$\{U_n\}$, $U_n \in E$, $n=1, 2, 3, \dots$ bo'lib $\|U_p - U_q\|_{p, q \rightarrow \infty} \rightarrow 0$

bo'lsa E ni to'la fazo deymiz.

Ta'rif – 6. To'la chiziqli normallangan fazoni B tipdagi fazo yoki Banax fazosi deyiladi.

Quyida qaraladigan barcha fazolar tola va separabel fazolar bo'ladi.

Biz asosan Banax fazolarining hususiy holi bo'lgan Gilbert fazolari bilan ish ko'ramiz.

Ta'rif – 7. H elementarni haqiqiy songa ko'paytirish bilan birgalikda chiziqli sistema bo'lib, uning ixtiyoriy U va V elementlari uchun skalyar ko'paytma deb ataluvchi (U, V) haqiqiy som mos qo'yilib

- a) $(U, V) = (V, U)$;
- b) $(U_1 + U_2, V) = (U_1, V) + (U_2, V)$;
- c) $(\lambda U, V) = \lambda(U, V)$, λ – haqiqiy son;
- d) $(U, U) \geq 0$, shuningdek $(U, U) = 0$ faqat nol element uchun,

aksiyomalar bajarilsa H ni haqiqiy Gilbert fazosi deymiz.

Kompleks Gilbert fazosida (U, V) skalyar ko'paytma kompleks son bo'lib, b), - d) aksiomalarni qanoatlantiradi va a) aksioma o'rniga a') $(U, V) = \overline{(V, U)}$ aksioma o'rinli bo'ladi.

Gilbert fazosida U elementning normasi sifatida $\|U\| = \sqrt{(U, U)}$ son olinadi. Biz Gilbert fazosi ta'rifidan uning to'liq va separabel fazo bo'lishini ham nazarda tutdik.

H Gilbert fazosining ixtiyoriy U va V elementlari uchun Koshi-Bunyakovskiy-Shvars tengsizligi deb ataluvchi

$$|(U, V)| \leq \|U\| \|V\|$$

Tengsizlik o'rinli uni qisqa qilib Koshi tengsizligi deb atayveramiz.

Narazda norma bo'yicha (kuchli) yaqinlashishdan tashqari yana kuchsiz yaqinlashishni qaraymiz: agar $\forall V \in H$ uchun $(U_n - U, V) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ bo'lsa $\{U_n\}$ ketma-ketlikni H da U elementga kuchsiz yaqinlashadi deymiz. Bu holatni ham qisqacha $U_n \rightarrow U, n \rightarrow \infty$ kabi belgilayveramiz.

Agar $\{U_n\}, U_n \in H, n = 1, 2, 3, \dots$ bo'lib $\{\|U_n\|\}$ normalar to'plami tekis chegaralangan bo'lib, $(U_n - U, V) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ shartning V larning H ning hamma joyida zich biror to'plamida bajarilishi $\{U_n\}$ ketma-ketlikning H da U ga kuchsiz manoda ham yaqinlashadi. Tasdiqning teskarisi umuman olganda to'g'ri emas. Biroq $\{U_n\}$ ning U ga kuchsiz yaqinlashuvchiligidan tashqari $\|U_n\| \rightarrow \|U\|$ bajarilsa, $\{U_n\}$ U ga kuchli manoda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Keyinchalik biz quyidagi jumlagi tez-tez murojaat qilamiz.

Teorema-1. Agar $\{U_n\}$ U ga H da kuchsiz yaqinlashsa, u holda

$$\|U\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\| \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|}$$

Tengsizlik bajariladi va bu tengsizlikning o'ng tomoni chekli bo'ladi.

Gilbert fazosi va uning ixtiyoriy fazo osti kuchsiz yaqinlashishi manosida to'la fazodir.

Ta'rif-8. Banax fazosi B da joylashgan M to'plamdan olingan elementlarning ixtiyoriy cheksiz ketma-ketligidan o'zida yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa M ni B da kompakt to'plam deymiz. Agar barcha shunday ketma-ketliklarning limitlari M ga tegishli bo'lsa M ni o'qida kompakt deymiz.

H Gilbert fazosida sust kompakt va o'zida sust kompaktlik tushunchasi B fazodagidek kiritiladi.

H da kuchsiz kompakt bo'lish belgisi (kriteriysi) quyidagi tearemada o'z aksini topadi:

Teorema-2. H dan olingan harqanday yopiq chegaralangan to'plam o'zida kuchsiz kompaktdir.
Haqiqiy B va H fazolariga ikkita misol keltiramiz.

Misol-1. R_n Evklid fazosiga tegishli Ω to'plamda o'lchovli haqiqiy qiymatli va

$$\|U\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |U(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 \quad (1.1)$$

Chekli integralga ega $U(x)$ funksiyalar to'plamini $L_p(\Omega)$ orqali belgilaylik. $L_p(\Omega)$ to'plam (1.1) ko'rinishda kiritilgan norma bilan to'la separabel B (banax) tipdagi fazoni tashkil etadi.

Aniqroq qilib aytganda $L_p(\Omega)$ ning elementi haqida gap ketganda yuqoridagi xossalarga ega bitta $U(x)$ funktsiyani emas balki Ω da $U(x)$ ga ekvivalent bo'lgan funksiyalar kassini tushunamiz. Shunday bo'lishiga qaramasdan, qisqa qilib $L_p(\Omega)$ ning elementlarini Ω da aniqlangan funksiya deb atayveramiz.

$L_p(\Omega)$ ning hamma joyida zich to'plam sifatida

- Barcha cheksiz ko'p marta differensiyallanuvchi funksiyalar, barcha ko'phadlar, yoki xatto barcha ratsional koeffisientli ko'phadlar to'plamini;
- Ω ning chegarasi yaqinida nolga teng bo'lgan barcha cheksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamini olish mumkin;

Eslatma-1. “ Ω ning chegarasi yaqinida nolga teng” degan so'z – shunday $\delta > 0$ son topilishi kerakki, chegaradan δ masofadan uzoqlashmaydigan Ω ning barcha nuqtalarida funksiyaning qiymati nolga teng bo'ladi so'zidir. Bu holatni ba'zida funksiyaning δ kenglikdagi chegaraviy polosada nolga teng deymiz.

Agar $L_2(\Omega)$ da skalyar ko'paytmani

$$(U, V) = \int_{\Omega} U(x)V(x)dx$$

ko'rinishda kiritsak, u gilbert fazosiga aylanadi.

Agar $L_2(\Omega)$ kompleks fazo bo'lsa, skalyar ko'paytma

$$(U, V) = \int_{\Omega} U(x) \overline{V(x)} dx$$

ko'rinishda kiritilsa $L_2(\Omega)$ kompleks Gilbert fazosiga aylanadi.

Bizga butun ish davomida bir necha marta kerak bo'ladigan algebraik va funksional tengsizliklarni keltiramiz.

1) Koshi tengsizligi. Har qanday manfiy bo'lmagan

$$a_{ij}\xi_i\eta_j; a_{ij} = a_{ji}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in R, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in R$$

kvadratik forma uchun

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\eta_j \right| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j} * \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\eta_i\eta_j} \quad (1.2)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2) "ε bilan olingan Koshi tengsizligi". Ixtiyoriy a, b va ε>0 haqiqiy sonlar uchun

$$|a \cdot b| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2 \quad (1.3)$$

tengsizlik o'rinli.

Funksional tengsizliklardan uchburchak tengsizligini konkretlashtiruvchi yoki Koshi tengsizligini aniqlashtiruvchi $L_2(\Omega)$ dagi tengsizliklar

$$\left(\int_{\Omega} (U + V)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\Omega} U^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega} V^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left| \int_{\Omega} UV dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} U^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega} V^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

$$U = (U_1, U_2 \dots U_N), U_i \in L_2(\Omega), i = 1, 2, 3, \dots, N$$

U vektor funksiyasidan tuzulgan ushbu tengsizlik

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N U_i V_i dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N U_i^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N V_i^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

(1.4) formulaning umumlashmasi bo'lgan Gyolder tengsizligini keltiramiz;

$$\left| \int_{\Omega} UV dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |U|^P dx \right)^{\frac{1}{P}} \cdot \left(\int_{\Omega} |V|^{P'} dx \right)^{\frac{1}{P'}} \quad (1.6)$$

Bu yerda $U \in L_P(\Omega), V \in L_{P'}(\Omega), \forall P \geq 1, P' = \frac{P}{P-1}, P = 1$ bo'lsa $P' = \infty$ bo'ladi va bu holda $\|V\|_{P',\Omega} = \max_{\Omega} |V|$ deb tushinish kerak bo'ladi.

(1.6) ning diskret o'xshamasi bo'lgan

$$\left| \sum_{i=1}^N a_i v_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^P \right)^{\frac{1}{P}} \cdot \left(\sum_{i=1}^N |b_i|^{P'} \right)^{\frac{1}{P'}} \quad (1.7)$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

(1.6) yordamida $L_P(\Omega)$ elementlari uchun uchburchak tengsizligi

$$\|U + V\|_{P,\Omega} \leq \|U\|_{P,\Omega} + \|V\|_{P,\Omega} \quad P \geq 1 \quad (1.8)$$

osongina isbotlanadi.

1.2 Gilbert fazosida chiziqli funksionallar va chiziqli chegaralangan operatorlar.

Haqiqiy (yoki kompleks) H fazoning $\forall U \in H$ elementi uchunchiziqli sonli $l(u)$ funksiyani l chiziqli funksional deymiz.

l ning chiziqliligi (yoki distributivligi) shuni anglatadiki $\forall U_1, U_2 \in H$ va $\lambda, \mu \in R$ lar uchun

$$l(\lambda U_1 + \mu U_2) = \lambda lU_1 + \mu lU_2 \quad (2.1_1)$$

tenglik bajariladi.

Ta'rif-9. Agar $n \rightarrow \infty$ da $U_n \rightarrow U$ bo'lganda $l(U_n) \rightarrow l(u)$ bo'lsa $l(u)$ funksionalni uzluksiz deymiz.

(2.1₁) shartga bo'ysunuvchi $l(u)$ funksionalning uzluksizligi birlik $S_1 \equiv \{U: \|U\| = 1\}$ sferada $l(u)$ ning chegaralanganligi ekvivalentligini isbotlash mumkin, yani

$$|l_u| \leq C \|U\|, \quad \forall U \in H \quad (2.1_2).$$

F.Riss teoremasiga ko'ra H dagi l chiziqli funksional

$$L(U) = (U, V)$$

Skalyar ko'paytma ko'rinishda tasvirlanishi mumkin, bu holda V element $l(U)$ funksional orqali yagona aniqlanadi.

$\|V\|$ miqdorni chiziqli l funksionalning normasi $\|l\|$ deb ham ataladi.

Ko'rinib turibdiki

$$\|l\| = \sup \frac{|l(u)|}{\|u\|}$$

yani (2.1₂) tengsizlikni qanoatlantiruvchi C o'zgarmaslarning eng kichigi funksionalning normasi deb yuritilar ekan.

Endi H dagi chiziqli operatorga o'tamiz.

Agar H fazoning biror $D(A)$ to'plamidagi har bir U funksiyaga H dan biror V elementni mos qo'ysak $D(A)$ da A operator aniqlangan deymiz. Agar $\forall A \in D(A)$ uchun

$$\|Au\| \leq C \|U\| \quad (2.2)$$

bajarilsa A ni $D(A)$ da chegaralangan operator deymiz.

$$A(\lambda U_1 + \mu U_2) = \lambda A(U_1) + \mu A(U_2)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A ni chiziqli operator deymiz.

$$\|A\| = \sup_{U \in H} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

tenglik bilan aniqlangan $\|A\|$ son yoki (2. 2) tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlarning eng kichigi A operatorning normasi deb yuritiladi.

Bizni operatorlarning ikkita klassi qiziqtiradi.

Bittasi- bu o'zi – o'ziga qo'shma operatorlar klassi, ikkinchisi – bu to'la uzliksiz operatorlar klassidir.

Agar

$$(Au, V) = (U, Av), \quad \forall u, v \in H \quad (2.3)$$

Tenglik bajarilsa A ni o'z-o'ziga qo'shma operator deymiz.

Agar A operator har qanday chegaralangan to'plamni kompakt to'plamga akslantirsa, u holda A ni to'la uzluksiz operator deymiz.

A to'la uzliksiz operator bo'lganda

$$U - \lambda AU = V \quad (2.4)$$

Tenglama yechilishi haqida to'xtalamiz, bu yerda V H dan olingan (berilgan) element, λ – kompleks parametr.

(2.4) tenglama uchun Fredgolmning uchta tearemasi o'rinli.

- 1) Agar (2. 4) ga mos keluvchi $U - \lambda AU = 0$ (2.5) birjinisli tenglama faqat trival yechimga ega bo'lsa (2.4) har qanday $V \in H$ uchun bir qiymatli yechimga ega bo'ladi; boshqacha aytganda (2.4) uchun yagonalik teoremasidan mavjudlik tearemasi kelib chiqadi.
- 2) (2.5) tenglama har bir chekli karralikka ega sanoqli sondagi $\{\lambda_k\}$ qiymatlarga mos keluvchi natural yechimga ega bo'ladi.
- 3) λ_k xarakteristik qiymatlardan birortasiga teng bo'ladigan λ ning qiymqtida

$$U + \lambda A^* U = 0 \quad (2.6)$$

tenglamani tuzaylik. (2.4) tenglama yechimga ega bo'ladi faqat va faqat, agar V (2.6) tenglamaning barcha yechimlariga orthogonal bo'lsa.

Chegaralangan operatorlardan farqli o'laroq, chegaralanmagan operatorlar uchun (va barcha $U \in D(A)$ lar uchun)

$$\|AU\| \leq C\|U\| \quad (2.2)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi C son mavjud bo'lmaydi.

1.3. O'rta funksiyalar.

1. Ayrim (dastlabki) malumotlar.

Haqiqiy $x_1, x_2, \dots, x_m$ tartiblangan sonlarni $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ deb belgilab uni m o'lchovli nuqta ham deymiz, $x_1, x_2, \dots, x_m$ sonlarni esa mos ravishda birinchi, ikkinchi va h.k. m - koordinata deymiz.

Ikkita $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ nuqtalar orasidagi masofani

$$|x - y| \equiv \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2} \quad (3.1)$$

fo'rmla yordamida aniqlaymiz. Yuqorida eslatilgan

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ nuqtalar to'plamini E_m orqali belgilaymiz va E_m da

$x^{(k)} \rightarrow x$ $k \rightarrow \infty$ deganda $\rho(x^{(k)}, x) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ kabi yoki

$|x^{(k)} - x| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ va ularga teng kuchli koordinatalar bo'yicha yaqinlashish, yani

$$\left. \begin{array}{l} x_1^{(k)} \rightarrow x_1 \\ x_2^{(k)} \rightarrow x_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_m^{(k)} \rightarrow x_m \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

kabi tushunilsa E_m to'plam fazoga aylanadi, odatda masofa (3.1) formula bilan yaqinlashish (3.2) formula bilan aniqlangan E_m fazoni m o'lchovli Evkilid fazosi deyiladi.

Quyida bizga E_m da joylashgan turli o'lchovli to'plamlar bo'yicha integallash amalini bajarishga, xususan $(m - 1)$ o'lchovli sirtlar bo'yicha integral olishga to'g'ri keladi. Bunday integrallashlarni o'lchovidan qat'iy nazar bitta integral belgisini ishlatib yozishga kelishib olingan.

Agar integral o'zgaruvchini (o'zgaruvchi nuqtani) x orqali belgilasak, u holda E_m dagi Lebeg o'lchovga ega elementni ("element hajmi"ni) dx orqali belgilaymiz. Agar sirtlar $S, G, \dots$ harflar bilan belgilansa sirt o'lchovining elementini ("sirt yuzasi elementi") mos ravishda $ds, dg, \dots$ orqali belgilaymiz.

Agar M to'plam E_m ning qismi bo'lsa, bu to'plamning yopig'ini $\bar{M}$ orqali belgilaymiz. Xususan Ω E_m dagi biror to'plam, G uning chegarasi bo'lsa, u holda $\bar{\Omega} = \Omega \cup G$ bo'ladi.

Agar E_m dan Ω soha olingan bo'lsa, uning hajmini $|\Omega|$ simvolika bilan, xuddi shunday G sirtning yuzasini $|G|$ orqali belgilaymiz.

E_m dagi R radiusli sferani S_R orqali, σ , $G \dots$ nuqtali to'plamlar chegaralarini ko'pincha $\partial\sigma$, $\partial G \dots$ orqali belgilaymiz. Butun ish davomida (agar aloxida eslatilmasa) biz faqat bo'lak-bo'lak silliq chegarali sohalar bilan ish ko'ramiz.

E_m fazodagi G to'plamdan x ($x \in E_m$) nuqtagacha masofa deb G to'plam nuqtalari va x nuqta orasidagi masofalar to'plamining aniq quyi chegarasini tushunamiz va $\rho(x, G)$ orqali belgilaymiz.

Agar Ω soha va $K \subset \Omega$ bo'lib K - yopiq chegaralangan to'plam bo'lsa, K ni Ω ga nisbatan kompakt deymiz.

G to'plam E_m fazoga qarashli bo'lsin. G da uzluksiz va chegaralangan funksiyalar to'plamini $C(G)$ orqali, shuningdek G da k tartibgacha uzluksiz chegaralangan hosilalarga ega funksiyalar to'plamini esa $C^{(k)}(G)$ orqali belgilash qabul qilingan.

$C_0^{(k)}(\Omega)$ orqali esa (Ω - chekli soha) $\bar{\Omega}$ da k marta uzluksiz diffrensiallanuvchi va $\partial\Omega$ da o'zlari hamda $k - 1$ tartibgacha hosilalari ham nolga aylanuvchi funksiyalar to'plamini belgilaymiz.

Ω - biror soha, k - butun son ($0 \leq k \leq \infty$) bo'lsin. $m^{(k)}(\Omega)$ orqali Ω da k marta uzliksiz diffrensiallanuvchi va chegaraviy palasada nolga aylanuvchi funksiyalar to'plamini belgilaymiz, agar Ω cheksiz soha bolsa $m^{(k)}(\Omega)$ to'plamdagi funksiyalardan qo'shimcha ravishda biror shardan tashqarida (har bir funksiya uchun aloxida olingan shardan) nolga aylanishi talab qilinadi. Tabiiyki $m^{(k)}(\Omega) \subset m^{(k-1)}(\Omega)$. $m^{(\infty)}(\Omega)$ klassdagi funksiyalarni Ω da finit funksiyalar ham deb yuritiladi.

Ta'rif-10. G da aniqlangan biror $U(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar $\forall x, x' \in \Omega$ nuqtalar va $\lambda \geq 0$ son uchun

$$|U(x') - U(x)| \leq A|x' - x|^\lambda$$

tengsizlik bajarilsa $U(x)$ funksiyaning G da λ ko'rsatkich bilan Lipshits shartini qanoatlantiradi deyiladi va $U \in Lip_\lambda(G)$ kabi belgilanadi.

Tabiiyki $\lambda > 1$ bo'lganda $U(x) = const$ bo'ladi shuning uchun ham odatda $0 < \lambda \leq 1$ deb hisoblaymiz $\lambda < 1$ ko'rsatkichli Lipshits shartni ba'zida Gyolder sharti deb ham yuritamiz.

Ω sohaning qariyb hamma joyida aniqlangan funksiya Ω da joylashgan ixtiyoriy kompaktda jamlanuvchi bo'lsa, bunday funksiyaning Ω da local jamlanuvchi funksiya deymiz. Bu xildagi funksiyalar to'plamini $L_{los}(\Omega)$ orqali belgilash qabul qilingan.

$L_{los}(\Omega)$ da $v_n \rightarrow v_0$ deymiz, agar, $v_n, v_0 \in L_{los}(\Omega)$ va $\|v_n - v_0\|_{L_1(\Omega')} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ($\Omega' \subset \Omega$ ixtiyoriy soha osti) munosabat bajarilsa.

Ta'rif-11. $U(x)$ - uzliksiz funksiya bo'lsin. Bu funksiya noldan farqli bo'lgan nuqtalar to'plamining yopig'iga shu funksiyaning tashuvchisi (nositel)

deyiladi va $\sup U$ simvol bilan belgilanadi. Shubhasiz hosilaning tashuvchisi funksiya tashuvchisiga tegishli bo'ladi.

Shuningdek ekvivalent funksiyalar deganda bir – biridan nol o'chovli to'plamdagina farq qiladigan funksiyalarni tushunamiz.

E_m fazoda har bir nuqtasida normalga ega G sirtini qaraymiz. $x_0 \in G$ bo'lsin.

Koordinatalar boshi x_0 nuqta bilan ustma-ust tushuvchi hamda Y_m o'qi x_0 nuqtadan o'tuvchi normal bo'yicha yo'nalgan $y_1, y_2, \dots, y_n$ dekart koordinatalar sistemasini x_0 nuqta bilan bog'langan mahalliy koordinatalar sistemasi deymiz.

Agar shunday $d > 0$ son topilib, markazi $\forall x_0 \in G, x_0$ nuqtada bo'lgan d radiusli sfera G chiziqdan (sirtidan) ajratgan uchastkasi x_0 nuqta bilan bog'langan koordinatalar sistemasida $y_m = f(y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$ tenglama bilan berilib hamda k tartibgacha uzliksiz hosilalarga ega bo'lsa $G \in C^{(k)}$ deymiz.

Agar $G \in C^{(k)}$ bo'lib f ning k -tartibli hosilasi λ ($0 < \lambda \leq 1$) korsatkich bilan Lipshits shartini qanoatlantirib va Lipshits shartidagi A o'zgarmas va λ ko'rsatkich x_0 dan bog'liq bo'lmasa, $G \in C^{(k, \lambda)}$ deb yozamiz. $C^{(1, \lambda)}$ kassdagi sirtlarni Lyapunov sirtlari deymiz.

A biror operator bo'lsin. $D(A)$ orqali A operatorning aniqlanish sohasini $R(A)$ orqali esa qiymatlar to'plamini belgilaymiz.

Tartiblangan m ta manfiymas butun $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \alpha$ sonlar ketma-ketligini m tartibli multindeks deymiz.

$|\alpha| = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)$ songa shu multideksning uzunligi deyiladi.

Multindekslar ustida qo'shish va manfiymas butun songa ko'paytirish amallari odatdagidek o'rnatiladi. Agar n – manfiymas butun son $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ va $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ birxil m tartibli multindekslar bo'lsa, u holda

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_m + \beta_m),$$

$$n\alpha = (n\alpha_1, n\alpha_2, \dots, n\alpha_m)$$

lar ham yana m tartibli multindekslar bo'ladi.

Agar $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ vektor bo'lsa

$X^a = (X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2} \cdot \dots \cdot X_m^{a_m})$ kabi xususiy holda $x \in E_m$ ning nuqtasi bo'lsa, $x^a = (x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_m^{a_m})$ kabi yozish va tushunish kerak bo'ladi. Shuningdek $a! = a_1! a_2! \dots a_m!$. Biz ko'pincha

$$D^a U = \frac{\partial^{|\alpha|} U}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_m^{a_m}}$$

belgilashdan foidalanamiz.

X koordinata bo'yicha diffrensiallash amali bajarilayotganini ta'kidlash uchun $D_x^a U$ yozuvni ham ishlatamiz.

2. O'rtalovchi yadro.

x va y lar E_m fazoning ixtiyoriy nuqtalari $r = |x - y|$ va h -ixtiyoriy musbat son bo'lsin.

Tarif-12. Agar 1) $w_h(r)$ funksiya x va y dekart koordinatalar bo'yicha cheksiz ko'p marta diffrensiallanuvchi bo'lsa;

$$2) \begin{cases} w_h(r) > 0, & r < h \\ w_h(r) = 0, & r \geq h \end{cases}$$

$$3) \int_{r < h} w_h(r) dy = \int_{r < h} w_h(r) dx = 1$$

shartlar bajarilsa $w_h(r)$ funksiyaning o'rtalovchi yadro deymiz.

Quyidagi funksiya hech bo'lmaganda bitta shunday yadro mavjudligiga kafolat beradi:

$$w_h(r) = \begin{cases} C_h e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}}, & r < h, \\ 0 & r \geq h \end{cases} \quad C_h = \text{const} > 0 \quad (3.1)$$

2) Xossa o'rinli bo'lishligiga shubha yo'q.

3) Xossaning bajarilishi uchun

$$C_h = \left\{ \int_{r < h} e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} dy \right\}^{-1} \quad (3.2)$$

deb olinsa kifoya.

Endi 1) shartning bajarilishini ko'rsatamiz. (3.1) funksiyaning ($h < r$) $r < h$ va $r \leq h$ bo'lgan hollarda cheksiz ko'p marta diffrensiyallanuvchi ekanligini tekshirib ko'rish qiyin emas va $r > h$ bo'lganda barcha hosilalar nolga teng bo'ladi. Shuning uchun ham $r = h$ bo'lganda (3.1) funksiyaning barcha hosilalari mavjud va nolga teng, ya'ni $r < h$ bo'lgandagi barcha hosilalar $r \rightarrow h$ da nolga intilishini ko'rsatish yetarli.

Isbotni birinchi tartibli hosila uchun keltiramiz, yuqori tartibli hosilalar uchun tekshirish o'xshash bo'ladi.

- a) $w_h(r)$ funksiya $r = h$ da uzliksiz. Haqiqatdan ham (3.1) dan $w_h(h+0) = w_h(h)$

$$w_h(h-0) = \lim_{r \rightarrow h-0} C_h e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} = 0$$

Chunki

$$-\frac{h^2}{h^2-r^2} \xrightarrow{r \rightarrow h-0} -\infty$$

- b) $w_h(h)$ ning hosilasi mavjud va nolga tengligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham.

$$\lim_{r \rightarrow h+0} \frac{w_h(r) - w_h(h)}{r - h} = \lim_{r \rightarrow h+0} 0 = 0$$

Bu holda, shuningdek

$$\lim_{r \rightarrow h-0} \frac{w_h(r) - w_h(0)}{r - h} = \lim_{r \rightarrow h-0} \frac{e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}}}{r - h} = 0$$

Bunga hech bo'lmaganda Lopital qoidasidan kelib chiqib ham ishonish mumkin. Shunday qilib hosila mavjud va y nolga teng:

$$\lim_{r \rightarrow h} \frac{w_h(r) - w_h(h)}{r - h} = w'_h(h)$$

$$\lim_{r \rightarrow h-0} w'_h(h) = \lim_{r \rightarrow h-0} C_h \frac{2rh^2}{(h^2 - r^2)^2} e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} = 0$$

qaysiki yana Lopital qoidasi bilan osongina tekshiriladi.

Shunday qilib $w'_h(r)$ hosila mavjud va barcha r lar uchun uzliksiz. Xuddi shunday ikkinchi va undan yuqori tartibli hosilalar mavjud hamda uzliksizligini ko'rsatish qiyin emas.

3). O'rta funksiyalar.

Ω to'plam E_m fazoning chekli sohasi, $U(y)$ Ω da jamlanuvchi funksiya bo'lsin. Bu funksiyaning Ω dan tashqarida nolga teng qilib davom ettiramiz. X E_m fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin, shuningdek $w_h(r)$ 1) - 3) xossaga ega biror o'rtalovchi yadro bo'lsin:

$$U_h(x) = \int_{\Omega} w_h(r) U(y) dy \quad (3.3)$$

funksiyani qaraymiz. U_h ni U ga nisbatan o'rta funksiya, h sonni o'rtalash radiusi deymiz. O'rta funksiyani quyidagi uchta formada berish mumkin.

- 1) $U(y) = 0, y \notin \Omega$ ekanligini etiborga olib (3.3) integralni butun E_m fazo bo'yicha olish mumkin, u holda

$$U_h(x) = \int_{E_m} w_h(y) U(y) dy \quad (3.3a)$$

- 2) O'rtacha yadroning 2- xossasini hisobga olib, integrallashni butun fazo bo'yicha emas balki h radiusli shar bo'yicha olib borilsa ham bo'ladi

$$U_h(x) = \int_{r < h} w_h(r) U(y) dy \quad (3.3b)$$

- 3) Nihoyat integrallashni faqat $\Omega \cap (r < h)$ kesishma boyicha ham amalga oshirish mumkin, chunki bu kesishmadan tashqarida yoki birinchi ko'paytuvchi yoki ikkinchi ko'paytuvchi nolga aylanadi.

Shuning uchun

$$U_h(x) = \int_{\Omega \cap (r < h)} w_h(y) U(y) dy \quad (3.3d)$$

formula o'rinlidir.

4). O'rta funksiyaning ba'zi xossalari.

1. O'rta funksiya butun fazoda cheksiz ko'p marta diffrensiallanuvchi uning hosilalarini (3.3) – (3.3d) fo'rmulalardan istalgan birida integral belgisi ostida diffrensiallash mumkin.

$$D^a U_h(x) = \int_{\Omega} U(y) D_h^a w_h(r) dy \quad (3.4)$$

bu yerda a ixtiyoriy m tartibli multindeks Ω sohani $E_m, r < h, \Omega \cap (r < h)$ sohalarning istalgan biri bilan almashtirish mumkin.

2. O'rta funksiya Ω sohagacha masofasi h dan kam bo'lmagan barcha nuqtalarda nolga aylanadi. Haqiqatdan $r < h$ shar butunlay Ω sohaning

tashqarisida joylashgan bo'ladi, va integral belgisi ostida (3.3b) dagi $U(y) \equiv 0$

Shunday qilib, o'rta funksiya quyidagicha tuzulgan $\Omega^{(h)}$ sohadagina aynan noldan farqli bo'ladi; har bir $x \in \Omega$ nuqtani markaz qilib h radiusli shar yasaymiz, xuddi shunday sharlar birlashmasini $\Omega^{(h)}$ deb olamiz: tabiiyki $\Omega^{(h)} \supset \Omega$ bo'ladi; agar masalan Ω R radiusli shar bo'lsa, $\Omega^{(h)}$ Ω bilan konsentrik bo'lgan $R + h$ radiusli shardir.

3. Agar $U \in C(\Omega)$ bo'lsa, u holda o'rta funksiya

$U_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} U(x)$ intilish Ω sohaning ixtiyoriy qismida tekis bo'ladi.

Bu tasdiqni isbotlash o'rta funksiyaning va o'rtalovchi yadroning xossalariidan foidalaniib amalga oshiriladi.

2-bob. Umumlashgan funksiyalar va ularni diffrensiallash.

4. 1. Umumlashgan funksiya tushunchasi.

1. Asosiy funksiyalar.

Funksiya tushunchasining klassik ta'rifi ramkasida aniqlab bo'lmaydigan funksiyalarni singulyar funksiyalar deb atab kelinadi. Dirakning " δ - funksiya" si ham shular jumlasidandur har bir singulyar funksiya yetarlicha " yaxshi " funksiyalar klassi bilan chambarchas bog'langan. Shuning uchun ham dastlab yetarlicha " yaxshi " funksiyalar tushunchasini aniqlab olamiz.

E_n Evkild fazosida barcha (cheksiz ko'p tartibli) hosilalarga ega va finit (ya'ni biror chegaralangan to'plamning tashqarisida nol bo'lgan) funksiyalar to'plamini K orqali belgilaylik. Bunday funksiyalarni asosiy funksiyalar deb, ularning K to'plamini esa asosiy fuksiyalar fazosi (klassi) deb aytamiz.

Asosiy funksiyalalrning haqiqiy songa ko'paytmasi va yig'indisi yana asosiy funksiya bo'lgani uchun K chiziqli fazo bo'ladi.

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x), \dots$ funksiyalar ketma-ketligi K fazodan olingan bo'lsin.

Ta'rif – 13. Agar $\{\varphi_n(x)\}$ funksiyalar bitta chegaralangan to'plam tashqarisida nolga aylanib, barcha hosilalardan tuzulgan $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ ketma-ketlik ham nolga tekis yaqinlashsa $\{\varphi_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi K da nolga intiladi deyimiz. 1 – bob, 3§ dagi (3.1) formula bilan aniqlngan $w_h(r)$ funksiyalar keta-ketligi ham $h=n$ deyilsa $\{w_h(r)\}$ nolga intiluvchi asosiy funksiyalar ketma-ketligi bo'ladi.

2. umumlashgan funksiyalar.

Ta'rif – 14. K fazoning har bir $\varphi(x)$ asosiy funksiyasiga f akslantirish yordamida aniq bir haqiqiy (f, φ) sonni mos qo'yib:

- a) Ixtiyoriy ikkita a_1, a_2 haqiqiy son va ixtiyoriy ikkita $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ asosiy funksiyalar uchun

$$(f; a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1(f, \varphi_1) + a_2(f, \varphi_2)$$

(funktionalning chiziqlilik xossasi)va

- b) $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x), \dots$ ketma ketlik K fazoda nolga intilganda $(f, \varphi_1), (f, \varphi_2), \dots (f, \varphi_n), \dots$ sonlar ketma-ketligi nolga intisa (f funksionalning uzliksizligi), K to'plamda f chiziqli uzluksiz funksional berilgan deyimiz.

Misol-3.

E_m fazoning har bir chekli qismida absolyut integrallanuvchi (lokal integrallanuvchi) $f(x)$ funksiyani qarayik. Bu funksiya yordamida har bir $\varphi(x)$ asosiy funksiyaga

$$(f, \varphi) = \int_{E_m} f(x) \varphi(x) dx \quad (2.1.1)$$

sonni mos qo'yishimiz mumkin. $\varphi(x)$ finit bo'lgani uchun integrallash biror chekli soha bo'yicha amalga oshiriladi. Ko'rinib turibdiki har bir lokal integrallanuvchi f funksiya orqali a) va b) shartlarni qanoatlantiruvchi funksionalni (2.1.1) tenglik bilan hosil qilish mumkin.

Misol-4.

Yigirmanchi asrning 20-yillarida ingliz olimi Pol Dirak o'zining kvant mexanikasiga doir izlanishlarida fanga " δ - funksiya" deb nomlangan

$$\delta(0) = \infty \quad \delta(x) = 0, \quad x \neq 0; \quad \int \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \varphi \in C(E_m), \quad (2.1.2)$$

xossalarga ega funksiyani kiritadi.

Matematiklar bunday xossaga ega funksiya matematika nuqtai nazardan kelib chiqilsa ma'no kasb etmasligiga ishonch hosil qildilar. Bu funksiya operatorga o'xshab ta'sir qilishi, yani har bir uzluksiz $\varphi(x)$ funksiyaga $\varphi(0)$ sonni mos qo'yishi ham ta'rif-14 dagi a) va b) shartlarni qanoatlantirishi malum. (2.1.2) funksiyani tushuntirish uchun massasi 1 ga teng moddiy nuqta vujudga keltirilgan zichlikni aniqlash masalasini qo'yamiz.

Bu zichlikni aniqlash uchun 1 massani U_ε (markazi $x = (0, 0, 0) \in E_m$ nuqtada radiusi $\varepsilon > 0$ ga teng) shar ichiga tekis taqsimlaymiz boshqacha aytganda "bo'yaymiz". natijada quyidagi

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

zichlikka ega bo'lamiz.

Dastlab izlanuvchi zichlik sifatida (biz uni $\delta(x)$ orqali belgilab olamiz) $f_\varepsilon(x)$ o'rtacha zichliklar ketma-ketligining $\varepsilon \rightarrow +0$ dagi nuqtalar bo'yicha limitini qabul qilamiz; yani

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{agar } x = 0 \\ 0, & \text{agar } x \neq 0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Tabiiyki $\delta(x)$ zichlikdan har qanday V hajm bo'yicha olingan integral shu hajm ichida joylashgan moddaning massasini berishi lozim, ya'ni

$$\int_V \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{agar } 0 \in V \\ 0, & \text{agar } 0 \notin V \end{cases}$$

bo'lishi kerak. Ammo (2.1.2) ga ko'ra bu tenglikning chap tamoni har doim nolga teng. Hosil bo'lgan qarama-qarshilik $f_\varepsilon(x) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi nuqtalar bo'yicha limitini $\delta(x)$ zichlik sifatida qabul qilmasligimizga olib keladi.

Endi $f_\varepsilon(x) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ uchun kuchsiz yaqinlashadigan limitni hisoblaymiz, ya'ni ixtiyoriy uzliksiz φ funksiya uchun

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad (2.1.3)$$

bo'lishini ko'rsatamiz.

Haqiqatdan ham, $\varphi(x)$ ning uzliksizligidan har qanday $\eta > 0$ son uchun shunday $\varepsilon_0 > 0$ son topiladiki, $|x| = |x - 0| < \varepsilon_0$ bo'lganda $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$ bo'ladi. Bu yerdan barcha $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ sonlar uchun

$$\begin{aligned} \left| \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| &= \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left| \int_{|x| < \varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \\ &\leq \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x| < \varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx < \eta \cdot \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \cdot \int_{|x| < \varepsilon} dx = \eta \end{aligned}$$

bajariladi, bu esa (2.1.3) bo'lishini anglatadi.

Shunday qilib $f_\varepsilon(x)$ funksiyalar ketma-ketligining $\varepsilon \rightarrow 0$ dagi kuchsiz limiti $\varphi(0)$ funksianol ekan, ya'ni har bir uzluksiz $\varphi(x)$ funksiyaga uning $x = 0$ nuqtadagi qiymati $\varphi(0)$ ni mos qo'yuvchi funksional ekan. Xuddi shu funksional $\delta(x)$ - moddiy nuqta vujudga keltirgan zichlik sifatida qabul qilingdi, ikkinchi tomondan bu ma'lum va mashhur Dirakning " δ - funksiya" sidir.

Shunday qilib, $f_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ degan yozuv shunday ma'nodaki: har qanday uzluksiz $\varphi(x)$ funksiya uchun

$$\int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow (\delta, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

bo'ladi, bu yerda (δ, φ) simvol $\varphi(0)$ sonni, ya'ni δ funksionalning φ funksiyaga ta'siri natijasini anglatadi.

Endi $x = 0$ nuqtada joylashgan to'la massani tiklash uchun $\delta(x)$ funksional (zichlik) bilan $\varphi(x) = 1$ funksiyaga ta'sir o'tkazish kerak bo'ladi

$$(\delta, 1) = 1(0) = 1$$

Agar $x = 0$ nuqtada m massali modda jamlangan bo'lsa mos zichlikni $m\delta(x)$ ga teng deb olish yetarli. Agar m massali modda x_0 nuqtada joylashgan bo'lsa, mos zichlik $m\delta(x - x_0)$, $(m\delta(x - x_0), \varphi) = m\varphi(x_0)$ bo'ladi. Shuningdek x_k $k = 1, 2, 3 \dots N$ nuqtalarda m_k massali moddalar joylashgan bo'lsa, u holda zichlik

$$\sum_{k=1}^N m_k \delta(x - x_k)$$

formula bilan topiladi.

Shunday qilib moddiy nuqtalar vujudga keltirgan zichlik klassik funksiyalar yordamida aniqlanmas ekan, uni aniqlash uchun ancha kengroq matematik tabiatga ega obektlarni jalb qilishga, aniqrog'i chiziqli uzluksiz funksionallarni jalb qilishga to'g'ri kelar ekan.

Ta'rif-15. K asosiy funksiyalar fazosida aniqlangan chiziqli uzluksiz funksionalni umumlashgan funksiya deymiz.

Odatda (2.1.1) ko'rinishda tasvirlanadigan umumlashgan funksiyalar regulyar umumlashgan funksiyalar, tasvirlanmaydiganlarini esa, ya'ni integral yordamida tasvirlash imkoni bo'lmaganlarini singulyar umumlashgan funksiyalar deb ataladi.

(2.1.1) ko'rinishdagi umumlashgan funksiyalar regulyar umumlashgan funksiya, $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ esa ("δ - funksiya" esa) singulyar umumlashgan funksiya misol bo'ladi.

Regulyar umumlashgan funksiya f

$$(f, \varphi) = C \int \varphi(x) dx = \int C \varphi(x) dx$$

formula bilan ta'sir etsa, uni o'zgarmas C umumlashgan funksiya deymiz. Masalan:

$$(f, \varphi) = \int \varphi(x) dx$$

birlik umumlashgan funksiya deyiladi.

Ko'pincha f umumlashgan funksiyani oddiy funksiyalarga o'xshatib $f(x)$ deb yozish qabul qilingan. Hqiqatda bunday yozuv ma'nosiz, chunki umumlashgan funksiyaning aloxida olingan nuqtalaridagi qiymati haqida gapirish mumkin emas. Shunday bo'lsada $(f, \varphi) = (f(x), \varphi(x))$ ko'rinishda yozish ancha qulaylik tug'diradi. Masalan: $(\delta(x), \varphi(x))$ yoki $(\delta(x - x_0), \varphi(x))$. yana bir narsa, regulyar bo'lmagan umumlashgan funksiyalarni ham integral ko'rinishda yozish qulaylik tug'diradi.

$$\int \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \quad \int \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0).$$

Barcha umumlashgan funksiyalar to'plamini K' orqali belgilaymiz.

Umumlashgan funksiyalar ustida ularni qo'shish, songa va funksiyaga ko'paytirishni quyidagicha o'rnatamiz.

1. K fazoda aniqlangan ikkita umumlashgan f, g funksiyalarning yig'indisi deb

$$(f + g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi) \quad (2.1.4)$$

tenglik bilan aniqlangan $f + g$ ni tushunamiz.

2. a haqiqiy son, f umumlashgan funksiya bo'lsin.

$$(af, \varphi) = a(f, \varphi) = (f, a\varphi) \quad (2.1.5)$$

tenglik bilan aniqlangan a funksionalni f umumlashgan funksiyaning a songa ko'paytmasi deymiz.

3. Cheksiz differensiallanuvchi $a(x)$ funksiyaga har qanday asosiy $\varphi(x)$ funksiyani ko'paytirish yana asosiy funksiyani berishi ravshan.

K' fazodagi ixtiyoriy f umumlashgan funksiyani $a(x)$ cheksiz differensiallanuvchi funksiyaga ko'paytmasi

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi)$$

ko'rinishda aniqlaymiz. af funksional yana chiziqli uzliksiz bo'ladi va $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ da $a(x) * \varphi_n(x) \rightarrow 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $a\varphi \in K$ ekanligini anglatadi, ya'ni

$$(af, \varphi_n) = (f, a\varphi_n) \rightarrow 0 \quad \varphi_n \rightarrow 0$$

4. $(f(x + h), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x - h))$

5. $(f(-x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(+x))$ bo'lishini osongina isbotlash mumkin.

$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ umumlashgan funksiyalar ketma-ketligiga mos keluvchi $(f_1, \varphi), (f_2, \varphi), \dots, (f_n, \varphi), \dots$ funksionallar ketma-ketligi limiti (f, φ) funksional bo'lsa, ya'ni $(f_n, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$ bo'lsa unda $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$ deb yozamiz va (f_n) ketma-ketlik K' da f ga yaqinlashadi deyimiz, bu yerda $\forall \varphi \in K$.

Shuningdek, umumlashgan funksiyalardan tuzilgan $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ qatorning qisman yig'indilaridan

$$g_1 = f_1, \quad g_2 = f_1 + f_2, \quad g_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n, \dots$$

tuzilgan $\{g_n\}$ ketma -ketlik $(g_n, \varphi) = (g, \varphi)$ ma'noda yaqinlashuvchi ketma-ketlikni tashkil etsa qatorni g umumlashgan funksiyaga yaqinlashadi (yig'indisiga esa) deyimiz.

2.2. Umumlashgan funksiyani diffrensiallash.

Ma'lumki oddiy (klassik) funksiyalar ustida diffrensiallash operatsiyasi hamma vaqt ham bajarilavermaydi. Juda ko'p oddiy funksiyalar hatto birinchi tartibli hosilaga ega emaslar, bu borada umumlashgan funksiyalar bir muncha ustun turadi.

Ko'rsatish mumkinki, umumlashgan funksiyalar, umumlashgan ma'noda har vaqt differensiallanuvchi va hatto cheksiz ko'p marta.

Umumlash hosilani ta'riflashdan oldin $f'(x)$ hosilaga ega uzluksiz funksiyadan foydalanib

$$(f', \varphi) = \int_{+\infty}^{-\infty} f'(x) \cdot \varphi(x) dx$$

Integralda bo'laklab integrallashni amalga oshirsak

$$(f', \varphi) = f'(x) \cdot \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) \cdot \varphi'(x) dx = (f, -\varphi') \quad (2.2.1)$$

Tenglikka kelimiz (bu yerda $\varphi(x)$ funksiyaning finitligini, ya'ni $\varphi(+\infty) = \varphi(-\infty) = 0$ ekanligini hisobga oldik).

(2.2.1) tenglikni umumlashgan funksiyalarning hosilasini ta'riflashga asos qilib olamiz.

Ta'rif – 16. K asosiy funksiyalar fazosida aniqlangan f chiziqli funksional berilgan bo'lsin.

$$(g, \varphi) = (f, -\varphi') \quad (2.2.2)$$

formula bilan berilgan (aniqlangan) g funksionalni f funksionaldan olingan hosila deyiladi f' yoki $\frac{df}{dx}$ kabi belgilanadi.

Kelishilganimizga ko'ra, umumlashgan funksiyani hosilasi uchun

$$\int f'(x) \cdot \varphi(x) dx = - \int f(x) \cdot \varphi'(x) dx \quad (2.2.2')$$

yaqqol formulani yozish mumkin.

Umumlashgan hosila ta'rifi korrekt aniqlanganligini ko'rsatish uchun (2.2.2) formuladagi g funksionalning chiziqli uzliksiz funksional ekanligini ko'rsatamiz.

Birinchidan g funksional barcha asosiy $\varphi(x)$ funksiyalar ustida aniqlangan, chunki $\varphi'(x)$ ham $\varphi(x)$ bilan birgalikda asosiy funksiya bo'ladi.

Ikkinchidan g chiziqli funksionaldir.

Uchinchidan $\varphi_n(x), n = 1, 2, \dots$ asosiy funksiyalar ketma-ketligi K da nolga intiluvchi ketma-ketlik bo'lsa, bu fazodagi yaqinlashish tushunchasiga muvofiq

$$\varphi_n^{(k)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Shuning uchun f ning uzluksizligidan

$$(g, \varphi) = (f, -\varphi'_n) \rightarrow 0$$

Shunday qilib har bir umumlashgan funksiya hosilaga ega ekanligi ko'rinadi.

Oddiy hosila olish qoidalari umumlashgan hosila uchun ham o'z kuchida qoladi.

$$2. ((\lambda f)', \varphi) = (\lambda f, -\varphi') = (f, (-\lambda \varphi)') = (f, -\lambda \varphi') = \lambda (f', \varphi)$$

3. $a(x)$ cheksiz diffrensiallanuvchi funksiya bo'lsa

$$\begin{aligned} ((af)', \varphi) &= -(af, \varphi') = -(f, a\varphi') = -(f, (a\varphi)' - (a'\varphi)) = \\ &= (-f, (a\varphi)') + (f, a'\varphi) = (af' + a'f, \varphi) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Ko'p o'zgaruvchili bo'lgan holni qaraymiz.

Bu holda bir umumlashgan funksiyani alohida olingan argumenti bo'yicha xususiy hosilasini hisoblashni aniqlash mumkin.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.2.4)$$

Madomiki, diffrensiallash natijasi yana umumlashgan funksiyaga olib kelar ekan, biz hosila olishni davom ettirishimiz mumkin.

$$(f'', \varphi) = ((f')', \varphi) = (f', -\varphi') = (f, \varphi'')$$

Shuningdek

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}) \quad (2.2.5)$$

tenglikni osongina isbotlash mumkin.

Ko'p ozgaruvchili umumlashgan funksiya uchun aralash hosila tusunchasini kiritish mumkin. Bu holda har bir $x_1, x_2, \dots, x_m$ erkli o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilani

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.2.4)$$

Formula orqali aniqlaymiz. Xuddi shu yo'sinda yuqori tartibli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$$

va hakoza hosilalarni aniqlash mumkin.

Shunday qilib barcha umumlashgan funksiyalar cheksiz ko'p marta diffrensiallanuvchi ekanligiga amin bo'ldik.

Xususan lokol integrallanuvchi funksiya yordamida aniqlangan umumlashgan – regulyar umumlashgan funksiya ixtiyoriy tartibli hosilaga ega va u

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n \int_{E_m} f(x) \varphi^{(n)}(x) dx$$

formula bilan topiladi, bunda $x = x_1, x_2, \dots, x_m$, $dx = dx_1, dx_2, \dots, dx_m$, integral ham m karralidir.

Shuni ta'kidlash kerakki, aralsh hosilalar hosila olish tartibiga bog'liq bo'lmaydi.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

Haqiqatdan ham

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \varphi \right) &= - \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \varphi \right) \end{aligned}$$

Umumlashgan hosila (tushunchasini) ta'riflashni yana siljitish tushunchasi bilan ham berish mumkin.

Har qanday f umumlashgan funksiya uchun, uning Δx qiymatga siljitishini

$$(f(x + \Delta x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x - \Delta x))$$

formula bilan hisoblaymiz.

Har bir f umumlashgan funksiya uchun umumlashgan holda yani ma'noda

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{nisbat} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

da limitga ega ekanligini va bu limit yuqorida aniqlangan umumlashgan funksiya hosilasi bilan ustma-ust tushushini ko'rsatamiz.

$$\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \varphi \right) = \left(f(x), \frac{\varphi(x - \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \right)$$

Ma'lumki,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x - \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = - \lim_{-\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x - \Delta x) - \varphi(x)}{-\Delta x} = -\varphi'(x)$$

Shunday qilib

$$\left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \varphi \right) \longrightarrow (f(x), -\varphi'(x)) = (f', \varphi)$$

Umumlashgan hosila tushunchasini matematik analiz kursidan ma'lum bo'laklab integrallash va Gauss-Ostragradskiy formulalari yordamida ham ta'riflash mumkinligini ko'rsatamiz.

Dastlab bo'laklab integrallash formulasini keltiramiz.

R_m m-o'lchovli Evklid fazosida bo'lak-bo'lak silliq G sirt bilan chegaralangan Ω chekli sohada

$P(x) = P(x_1, x_2 \dots x_m)$ funksiya $C^{(1)}(\bar{\Omega})$ klassga tegishli bo'lganda Gauss-Ostrogradskiy formulasi deb ataluvchi

$$\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x_k} dx = \int_{\Gamma} P \cos(v, x_k) d\Gamma$$

Formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda v orqali Ω sohaga nisbatan tashqi bo'lgan Γ sirtga o'tgazilgan normal belgilandi, shuningdek tenglikning chap tamonida m karrali (soha bo'yicha) integral o'ng tamonida esa $m - 1$ karrali (sohani chegaralab turuvchi sirt bo'yicha) integral turganini ham eslatib qo'yish zarur. Agar $P, Q \in C^1(\bar{\Omega})$ bo'lsa

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (P \cdot Q) = P \frac{\partial Q}{\partial x_k} + \frac{\partial P}{\partial x_k} Q$$

Yoki

$$\int_{\Omega} P \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (P \cdot Q) dx - \int_{\Omega} Q \cdot \frac{\partial P}{\partial x_k} dx$$

Tengliklar o'rinli. O'ng tamondagi birinchi integralga Gauss-Ostragradskiy formulasini qo'llab bo'laklab integrallash formulasiga ega bo'lamiz.

$$\int_{\Omega} P \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = - \int_{\Omega} Q \frac{\partial P}{\partial x_k} dx + \int_{\Gamma} P Q \cos(v, x_k) dx$$

Agar P va Q funksiylardan biri Γ sirt ustida nolga teng bo'lsa, u holda Γ sirt bo'yicha olingan integral nolga aylanadi va quyudagi anchagina sodda

$$\int_{\Omega} P \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = - \int_{\Omega} Q \frac{\partial P}{\partial x_k} dx$$

formulaga kelamiz.

Endi ancha murakkab ko'rinishdagi integralni qaraymiz:

$$\int_{\Omega} P \frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx$$

Agar P funksiya barcha kerakli tartibdagi uzliksiz hosilalarga ega bo'lsa, u holda oxirgi integralda Q funksiyaning hosila olinishidan (differensiallashdan) qutqarguncha K marta bo'laklab integrallash formulasini qo'llasak

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} P \frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx &= - \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^{k-1} Q}{\partial x_1^{k_1-1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx + \\ &+ \int_{\Omega} P \frac{\partial^{k-1} Q}{\partial x_1^{k_1-1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} \cos(v, x_1) d\Gamma = - \dots = \\ &= (-1)^k \int_{\Omega} Q \frac{\partial^k P}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} dx + \int_{\Gamma} R(P, Q) d\Gamma, \quad (2.2.7) \end{aligned}$$

formulaga kelamiz. Bu yerda $R(P, Q)$ orqali P va Q funksiyalar va ularning $k - 1$ tartibgacha hosilalaridan bog'liq ifoda belgilangan.

Endi yana ham umumiyroq holga o'tamiz $\Omega \subset R_m$ Evklid fazosidagi biror soha, U va V funksiyalar Ω da local integrallanuvchi, xususan Ω ning ixtiyoriy soxa ostida jamlanuvchi, ya'ni $U, V \in L_{loc}(\Omega)$ (bu klass haqida 1-bob 3§ "o'rta funksiyalar" deb nomlangan bandda atroflicha to'xtalgan).

Faraz qilaylik $\varphi \in m^{(k)}(\Omega)$ bo'lsin (bu $m^{(k)}(\Omega)$ klass haqida ham 1-bob, 3§ da eslatilgan) va quyidagi

$$\int_{\Omega} U D^a \varphi dx = (-1)^k \int_{\Gamma} V \varphi dx, \quad k = |a| \quad (2.2.8)$$

tenglik o'rinli bo'lsin. Bu yerda $a = (a_1, a_2 \dots a_m)$ – biror multindeks.

Xususiyl holda $Q \in m^{(k)}(Q)$ va $P \in L_{loc}(\Omega)$ bo'lsa (2.2.7) bo'laklab integrallash formulasi (2, 2, 8) tenglikka kelish qiyin emas.

Ta'rif-17. Agar $U, V \in L_{loc}(\Omega)$ va $\forall \varphi \in m^{(k)}(Q)$ funksiyalar uchun (2.2.8) tenglik bajarilsa V funksiyaning $U(x)$ funksiyaning Ω sohadagi k -tartibli umumlashgan hosilasi deyimiz. Umumlashgan hosila uchun ham odatdagi simvol ishlatiladi, va

$$V(x) = \frac{\partial^{|a|} U}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_m^{a_m}} = D^a U$$

kabi belgilanadi.

Umumlashgan hosilaga nisbatan quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema-3. (2.2.8) ko'rinishdagi umumlashgan hosila yagonadir.

2.3. Ayrim umumlashgan funksiyalarni diffrensiallash (umumlashgan hosilalarni hisoblash).

Bu paragrafda dastlab bir o'zgaruvchili, so'ngra ko'p o'zgaruvchili eng muhim umumlashgan funksiyalarning umumlashgan hosilalarini hisoblashni ko'ramiz.

Misol – 5. Quyidagi funksiyani qaraylik.

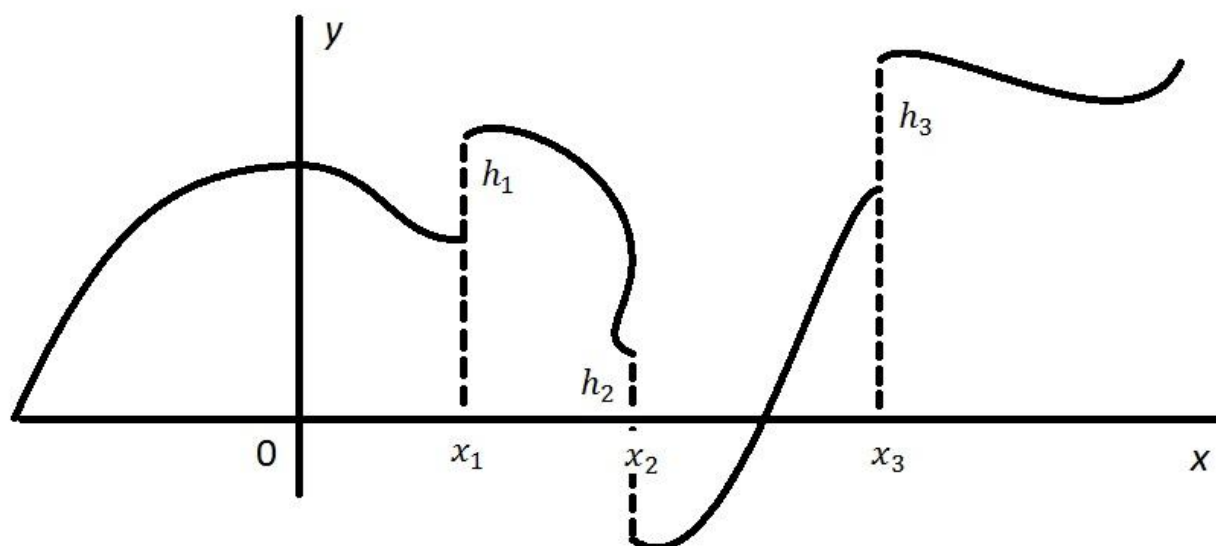
$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Bu funksiyani “teta funksiya” yoki Xevisayd funksiya deb yuritiladi. Bu funksiya har qanday chegaralangan to'plamda integrallanuvchi (lokal integrallanuvchi) shuning uchun ham umumlashgan hosilasi

$$\begin{aligned} (\theta'(x), \varphi(x)) &= -(\theta(x), \varphi'(x)) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \varphi'(x) dx = \\ &= - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(x) \Big|_0^{+\infty} = -\varphi(+\infty) + \varphi(0) = \varphi(0) \end{aligned}$$

Biz bu yerda $\theta(x) = 0$, $(-\infty, 0)$ da va $\varphi(x)$ ning finit ya'ni $\varphi(+\infty)=0$ ekanligidan foidalandik. Agar 2 – bob 1§ dagi “ δ - funksiya” ni eslasak $(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$ ya'ni $(\theta'(x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x))$, $\theta'(x) = \delta(x)$ tenglikka kelamiz, demak Xevisayd funksiyasining umumlashgan hosilasi Dirakning “ δ - funksiya” siga teng ekan. $\theta'(x-h) = \delta(x-h)$ ekanligini ham ko'rishimiz mumkin.

Misol – 6. Bizga $x_1, x_2 \dots x_k$ nuqtalarda birinchi tur uzulishga ega mos ravishda $h_1, h_2 \dots h_k$ sakrashga ega bo'lak- bo'lak uzliksiz $f'(x)$ hosilaga ega $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. (chizma – 1 ga qaralsin).



chizma - 1

Quyidagi funktsiyani kiritamiz.

$$f_1(x) = f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k) \quad (2.3.1)$$

Albatta bu funktsiya hamma joyda uzluksiz va chekli sondagi nuqtalardan boshqa hamma joyda $f'(x)$ hosilaga ega. $f_1(x)$ lokal integrallanuvchi funktsiyadir. Shuning uchun ham u orqali umumlashgan funktsiyani

$$(f_1(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \varphi(x) dx$$

ko'rinishda aniqlaymiz.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k) \right] \varphi(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx + \\ &+ \sum_k h_k \int_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x - x_k) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Shunday qilib

$$f' = f'_{klassik} + \sum_k f_k \delta(x - x_k)$$

Yani bo'lak-bo'lak uzliksiz hosilaga ega bo'lgan bo'lak-bo'lak uzliksiz funksiya har bir x_k nuqtada 1-tur uzulishga ega va h_k sakrashga ega funksiyaning diffrensiallashtirishda $h_k \delta(x - x_k)$ qo'shiluvchini qo'shish lozim bo'lar ekan.

Misol-7.

$$x_T^\lambda = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0 \\ x^\lambda, & \text{agar } x > 0 \end{cases} \quad -1 < \lambda < 0$$

Funksiyaning diffrensiallashtirilishi. Bu funksiya lokal integrallanuvchidir, ammo uning hosilasi $\lambda x^{\lambda-1}$ oddiy ma'noda lokal integrallanuvchi emas. Shuning uchun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda x^{\lambda-1} \varphi(x) dx$$

Uzoqlashuvchi integralni regulyarlashtirishga kelaymiz. Diffrensiallarning umumiy qoidasiga asosan

$$\begin{aligned} ((x_T^\lambda)', \varphi(x)) &= (x_T^\lambda, \varphi'(x)) = - \int_0^{+\infty} x_T^\lambda \varphi'(x) dx = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} x_T^\lambda \varphi'(x) dx : \left| \begin{array}{l} \varphi'(x) dx = dv \quad x_T^\lambda = U \\ v = \varphi(x), \quad du = \lambda x^{\lambda-1} dx \end{array} \right| \\ ((x_T^\lambda)', \varphi(x)) &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[x_T^\lambda (\varphi(x) + C) \right]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \lambda x_T^{\lambda-1} [\varphi(x) + C] dx = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_T^\lambda \varphi(x) \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_T^\lambda C \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \lambda x^{\lambda-1} [\varphi(x) + C] dx \end{aligned}$$

Agar $C = -\varphi(0)$ deyilsa, dastlabki ikkita qo'shiluvchi $\varepsilon \rightarrow 0$ da nolga aylanadi, chunki $-1 < \lambda < 0$ va $\varphi(\infty) = 0$. Tanlangan C uchun

$$((x_T^\lambda)', \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \lambda x_T^{\lambda-1} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx$$

Ko'rinib turibdiki, o'ng tomondagi limit $\varepsilon \rightarrow 0$ da mavjud. Albatta bu limitni, ya'ni

$$\int_0^{+\infty} [\varphi(x) - \varphi(0)] \lambda x_T^{\lambda-1} = (\lambda x_T^{\lambda-1}, (\varphi(x) - \varphi(0)))$$

Deyish mumkin. Bundan

$$(x_T^\lambda)' = \lambda x_T^{\lambda-1}$$

Formulani to'g'riligi ko'rinadi.

Misol-8.

$$\lim x_T = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \\ \ln x, & \text{agar } x > 0 \end{cases}$$

Funksiyani diffrensiallaymiz.

$$\begin{aligned} ((\ln x)', \varphi) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx = - \int_0^{+\infty} \ln x \cdot \varphi'(x) dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln x \cdot \varphi'(x) dx = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln x \cdot \varphi(x) \right]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\varphi(\varepsilon) \ln \varepsilon - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] \end{aligned}$$

$-\varphi(\varepsilon) \ln \varepsilon$ ifodani $-\varphi(0) \ln \varepsilon$ ifoda bilan almashtirish mumkin, chunki

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \varphi(\varepsilon) - \varphi(0) \ln \varepsilon] = 0$$

Shundan so'ng

$$-\varphi(0)\ln\varepsilon = \int_{\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(0)\theta(1-x)}{x} dx$$

Bu yerda

$$\theta(1-x) = \begin{cases} 0, & x > 1 \\ 1, & x < 1 \end{cases}$$

Natijada

$$((\ln x_T)', \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(1-x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(1-x)}{x} dx$$

Misol-9. Delta-funksiyaning hosilasini hisoblaymiz.

Ma'lumki

$$(\delta'(x-h), \varphi(x)) = -(\delta(x-h), \varphi'(x)) = -\varphi'(h)$$

Umuman

$$(\delta^{(k)}(x-h), \varphi(x)) = (-1)^k \varphi^{(k)}(h), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Misol-10. $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ funksiya yordamida aniqlangan regulyar funksionalga Laplas operatori Δ ni qo'llash natijasini ko'raylik.

$r \neq 0$ bo'lganda $\Delta \frac{1}{r} = 0$ ekanligi ma'lum. Δ ni umumlashgan funksiyalar fazosida qo'llab

$$\left(\Delta \frac{1}{r}, \varphi \right) = \left(\frac{1}{r}, \Delta \varphi \right) = \iiint \frac{\Delta \varphi}{r} dx dy dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\varepsilon < r} \frac{\Delta \varphi}{r} dx dy dz$$

Bu formulaga Grin formulasini qo'llab $\varepsilon \leq r \leq \theta$, θ yetarlicha kata son bo'lib $r \leq \theta$ sharning tashqarisida $\varphi(x, y, z) \equiv 0$

$$\left(\Delta \frac{1}{r}, \varphi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{r \geq \varepsilon} \frac{\Delta \varphi}{r} = -4\pi \varphi(0) = -4\pi(\delta, \varphi)$$

Ekanligini ko'ramiz. Demak

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(x, y, z)$$

ni olamiz.

Demak bu Laplas tenglamasining umumlashgan funksiyalar fazosidagi ko'rinishidir.

Misol-11.

$$f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (t > 0)$$

Funksiyaning $t \rightarrow 0$ dagi limiti $\delta(x)$ ekanligini ko'rsatamiz.

Odatda bunday funksiyalarni delta-sifat funksiyalar deyiladi. Har qanday $a < t < b$ bolgan a va b sonlar uchun

$$\int_a^b f_t(x) dx \leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = 1 \quad (2.3.4)$$

Demak, $f_t(x)$ local integrallanuvchidir. (2.3.4) formuladagi integralning 1 ga tengligini ko'rsatish uchun matematik analiz kurisidan ma'lum Eyler - Puasson integrali deb ataluvchi integralning

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

qiymatdan foidalanamiz.

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{2\sqrt{t}} = y, x = -\infty \text{ bo'lganda } y = -\infty \\ x = +\infty \text{ bolganda } y = +\infty \\ dx = 2\sqrt{t}dy \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} 2\sqrt{t}dy = 1$$

$$(f_t(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \varphi(x) dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = \frac{x}{2\sqrt{t}}, \quad dx = 2\sqrt{t}dy, \quad x = 2\sqrt{t}y \\ x = -\infty \text{ da } y = -\infty; \quad x = +\infty \text{ da } y = +\infty \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \varphi(2\sqrt{t}y) dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} (\varphi(2\sqrt{t}y) - \varphi(0)) dy + \varphi(0) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$$

Demak

$$f_t(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \delta(x)$$

ekan. Shuningdek $f_t(x)$ funksiyaga issiqlik o'tkazuvchanlik operatori $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ ni ta'sir etkazsak:

$$\frac{\partial f_t^{(x)}}{\partial t} - \Delta f_t^{(x)} = \delta(x)$$

Ekanligini ko'rsatish qiyin ekas.

Shunday qilib Misol-10 va Misol-11 larda, mos ravishda

$$\frac{1}{r}, r = x^2 + y^2 + z^2 \text{ va } f_t(x) \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Umumlashgan funksiyalarga mos ravishda Laplas operatori

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

va issiqlik o'tkazuvchanlik operatori

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta = \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Larning ta'sirida $-4\pi\delta(x, y, z)$ va $\delta(x, y, z)$ umumlashgan funksiyalarni olishimiz mumkinligini ko'rdik.

$\Omega \subset E_m$ va Ω da jamlanuvchi hamda berilgan k tartibdagi barcha umumlashgan hosilalari berilgan p daraja bilan Ω da jamlanuvchi U funksiyalar to'plamini $W_p^k(\Omega)$ orqali belgilaylik. Bu to'plam elementlari normasini

$$\|U\|_{\dot{H}_0^k} = \|U\|_1 + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha U\|_p \quad (2.3.5)$$

Ko'rinishda kiritsak $W_p^k(\Omega)$ to'plam (2.3.5) norma bilan normallangan fazoga aylanadi. Odatda $W_p^k(\Omega)$ ni (2.3.5) normasi bilan Sobolev fazosi deyiladi.

III. Xulosa va takliflar.

1. Bitiruv – malakaviy ishi zamonaviy matematikada kuchli tekshirish apparat – umumlashgan funksiyalar nazaryasini o'rganishga bag'ishlangan.
2. Umumlashgan funksiya tushunchasiga olib keladigan muhim muammolar jumladan, ma'lum massaga ega moddiy nuqta vujudga keltirgan zichlikni hisoblash va shunga o'xshash muammolarga batafsil izoh berilgan.
3. Odatdagi – klassik funksiyalarning aniqlanish (berilish) sohasi sonli to'plamlar bo'lsa, umumlashgan funksiyalar funksiyalar to'plamida aniqlangan bo'lgani uchun ishning birinchi bobida funksional fazolarga, hususan normallangan va gilbert fazosiga alohida to'xtalgan.
4. Birinchi bobda umumlashgan funksiyalar bilan chambarchas bog'liq bo'lgan o'rta funksiyalar tushunchasiga keng o'rin berilgan.
5. Klassik funksiyalar yordamida ifodalab bo'lmaydigan juda ko'p tabiiy jarayonlar, xususan, nuqtaviy manba intensivligi, nuqtaviy zaryad va dipol zichligi faqatgina uzliksiz chiziqli funksionallar yordamidagina ifodalaniladi.
6. Umumlashgan funksiyalarni diffrensiallashtirish uch xil yo'l bilan kiritilishi mumkinligi, ulardan biri asosiy ta'rif sifatida qolganlari esa uning natijasi deb olinsa bo'lishi ta'kidlandi.
7. Umumlashgan hosilaning ixtiyoriy tartibliligi mavjudligi klassik hosilaga nisbatan ma'lum ma'noda ustunligini bildirishi ko'rsatilgan.
8. Matematik analizdan ma'lum Gauss – Ostrogradskiy formulasi va bo'laklab integrallashtirish formulalarini umumlashgan ma'noda diffrensiallashtirish uchun asosiy vosita sifatida qarash yuqori samara berishi ta'kidlanadi.
9. Xevisayd funksiyasining umumlashgan ma'nodagi hosilasi Dirakning delta – funksiyasiga tengligi, shuningdek chekli sondagi nuqtalarda birinchi tur uzulishga ega bo'lak – bo'lak silliq funksiyalarning umumlashgan ma'nodagi hosilasi bilan klassik ma'nodagi hosilasi o'rtasidagi bog'lanish keltirilgan.
10. Bitiruv – malakaviy ish mavzusini $W_p^k(\Omega)$ – Sobolev fazolarida davom ettirish tavsiya etiladi.

IV. Foydalanilgan adabiyotlar va manbalar.

1. Karimov I.A. Milliy istiqlol g'oyasi: asosiy tushunchalar va tamoyillar. T.: 2001.
2. Karimov I.A. O'zbekiston XXI asga intilmoqda. T.: "O'zbekiston", 1999.
3. Karimov I.A. Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch. T.: "Ma'naviyat", 2008.
4. Karimov I.A. Biz kelajagimizni o'z qo'limiz bilan quramiz. T.: 1999.
5. Karimov I.A. Barkamol avlod – O'zbekiston taraqqiyotining poydevori. T.: "O'zbekiston", 1997.
6. Abu Nasr Farobiy "Fazilat, baxt – saodat va kamolat haqida. T.: "Yozuvchi", 2001.
7. Azlarov T.A. , Mansurov X. matematik analiz 1, 2 – qismlar, T.: "O'qituvchi", 1994.
8. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные методы М.: "Наука", 1994.
9. Alimov Sh.O., Ashirov P.P. Matematik tahlil. T.: "Mumtoz – so'z", 2010.
10. Боголюбов Н.Н. , Широков Д.В. Введение в теории квантованных полей. М.: "Наука", 1993.
11. Бремерман Г. Распределения. Комплексные функция и преобразования фурье. М.: "Мир", 1998.
12. Будак Б.М. , Самарский А.А. , Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физики. М.: "Наука", 1996.
13. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: "Физматгиз", 2001.
14. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: "Наука", 1988.
15. Владимиров В.С. , Михайлов В.П. , Вашарин А.А. и др. Сборник задач по математической физики. М.: "Наука", 2001.
16. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физики. М.: "Наука", 1976.
17. Гельфанд И.М. , Шилев Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Том 1. М.: "Наука", 1991.
18. Градштейн И.С. , Рижик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: "Наука", 1991.
19. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: "Наука", 1991.
20. Аналитические функции М.: "Наука", 1968.
21. Jurayev T. , Abdunazarov C. Matematik fizik tenglamalari. T.: "O'qituvchi", 2004.

22. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа М.: “Наука”, 1992.
23. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: “Наука”, 1999.
24. Salohiddinov M. Matematik fizik tenglamalari. T.: “O‘zbekiston”, 2002.
25. Salohiddinov M. , Islomov B. Matematik fizika tenglamalari fanidan masalalar to‘plami. T.: “Mumtoz – so‘z”, 2010.
26. Салехово И.Г. Аблеава С.Г. Методическое пособие для преподавания практических занятий по курсу “ Уравнения математической физики”. Казан, 2010.
27. Салехова И.Г Методическое указания курсу “Уравнения математической физики”. Казан; КГУ, 1982, 1983, 1990.
28. Смирнов М.М. задачи по уравнениям математической физики. М.: “Наука”, 1975.
29. Сироткина А.А. Методические разработки практических занятий по методам математической физики. М.: МГПН. 1978.
30. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: “Наука”, 1978.
31. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: “Наука”, Т.1, 2, 3, 1970.
32. Internet ma’lumotlari, saytlar.