O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

NIZOMIY NOMIDAGI
TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

ALGEBRA VA SONLAR NAZARIYASI

(Ma'ruzalar matni 3-qism)

Matematika va uni o'qitish metodikasi kafedrasi

Tuzuvchilar: f.m.f.n., dotsent A.Yunusov
f.m.f.n., dotsent D.Yunusova

TOSHKENT-2006

1–ma'ruza. Vektor fazolar va ularning xossalari

Reja:

1. Vektor fazo haqida tushuncha.
2. Vektor fazoning ta'rifi.
3. Vektor fazoning xossalari.
4. Vektor fazoga misollar.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpolatov B.T., Dusumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (116-119 betlar).
2. Kulikov L.Ya.Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh.shk. 1979g.(str.245-247).

Bo'sh bo'lmagan V to'plam va $\mathcal{F}$ maydon berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar quyidagi aksiomalar bajarilsa, u holda V to'plam $\mathcal{F}$ maydoni ustiga qurilgan vektor fazo deyiladi:

1. V – additiv abel gruppa;
2. $(\alpha \cdot \beta)\overline{x} = \alpha(\beta\overline{x})$ $(\forall\overline{x} \in V, \forall\alpha, \beta \in F)$;
3. $\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y}$ $(\forall\overline{x},\overline{y} \in V, \quad \forall\alpha \in F)$;
4. $(\alpha + \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{x}$ $(\forall\overline{x} \in V, \forall\alpha, \beta \in F)$;
5. $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$ $\qquad (\forall\overline{x} \in V, \quad 1 \in F)$.

Endi vektor fazoning ta'rifidan kelib chiqadigan quyidagi xossalar bilan tanishib o'tamiz:

1^0. Vektor fazo ta'rifidagi 1-aksiomaga binoan V chiziqli fazo additiv abel gruppa bo'lganidan u yagona $\overline{0}$ elementga ega. Bundan tashqari V ning har bir $\overline{x}$ elementi uchun yagona $-\overline{x}$ qarama-qarshi element mavjud.

2^0. $0 \cdot \overline{x} = \overline{0}$ $\qquad (\forall\overline{x} \in V, \quad \exists 0 \in F)$.

3^0. $\alpha \cdot \overline{0} = \overline{0}$ $\qquad (\forall\alpha \in F, \quad \overline{0} \in V)$.

4^0. Agar $\alpha \cdot \overline{x} = \overline{0}$ bo'lsa, u holda $\alpha = 0$ yoki $\overline{x} = \overline{0}$ bo'ladi.

5^0. Agar $\alpha\overline{x} = \alpha\overline{y}$ bo'lib, $\alpha \neq 0$ bo'lsa, u holda $\overline{x} = \overline{y}$ bo'ladi.

6^0. Agar $\alpha \cdot \overline{x} = \beta \cdot \overline{x}$ bo'lib, $\overline{x} \neq \overline{0}$ bo'lsa, u holda $\alpha = \beta$ bo'ladi.

Misol. $C = \{a + bi | \forall a, b \in R, \ i^2 = -1\}$ to'plam R haqiqiy sonlar maydoni ustidagi vektor fazoni ifodalaydi

Takrorlash uchun savollar:

1. Maydon ustida vektor fazo deb nimaga aytiladi?
2. Vektor fazoning asosiy xossalarini bayon eting.
3. Vektor fazoga misollar keltiring.

2–ma'ruza. Chiziqli qobiq. Chiziqli ko'pxillik

Reja:

1. Vektorlar sistemasining chiziqli qobig'i.
2. Chiziqli qobiqning asosiy xossalari.
3. Chiziqli ko'pxillik.

4. Chiziqli ko'pxillikning asosiy xossalari.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpolatov B.T., Dusumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (116-119 betlar).

2. Kulikov L.Ya.Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh.shk. 1979g.(str.245-247).

$F=<F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ maydon ustida qurilgan $F^n=<F^n;+,\{\omega_\lambda \mid \lambda\in F\}>$ arifmetik vektor fazo va shu fazo vektorlaridan tuzilgan $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ vektorlarning chekli sistemasi berilgan bo'lsin.

Ta'rif. $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n$ ($\alpha_i\in F$) ko'rinishdagi barcha chiziqli kombinatsiyalar to'plamiga $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlarning chiziqli qobig'i deyiladi va u $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)$ ko'rinishda belgilanadi.

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlarning chiziqli qobig'i qo'shish va skalyarni vektorga ko'paytirish amallariga nisbatan yopiqligi bevosita tekshirish tekshirish orqali aniqlanadi.

Teorema. $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)$ chiziqli qobiq vektor fazo tashkil etadi.

Ta'rif. F^n vektor fazoning $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)$ fazoostisiga $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlarga tortilgan yoki $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlar orqali hosil qilingan fazoosti deyiladi.

Bo'sh to'plamning chiziqli qobig'i nol vektordan iborat to'plam bo'ladi.

Misol. $\vec{a}_1=(2,3,1),\vec{a}_2=(-1,2,0),\vec{a}_3=(1,5,1)$ vektorlar sistemasining chiziqli qobig'i $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)=\{\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3 \mid \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in R\}$ tashkil etgan chiziqli vektor fazoning bazisi berilgan vektorlar sistemasining bazisi (masalan, $\vec{a}_1,\vec{a}_2$)dan iborat bo'lib, o'lchovi vektorlar sistemasining rangi 2 ga teng.

Teorema. Agar $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_m$ sistemaning har bir vektori $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ sistema orqali chiziqli ifodalansa, u holda $L(\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_m)\subset L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)$ bo'ladi.

Teorema. Agar $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ sistemaning rangi k bo'lsa, u holda $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n)$ chiziqli qobiq k o'lchovli bo'ladi.

F maydon ustida n–o'lchovli F^n fazoning W qism fazosi va $\vec{x}_0\in F^n$ vektor berilgan bo'lsin. $\forall\vec{y}\in W$ uchun $\vec{z}=\vec{x}_0+\vec{y}$ ko'rinishdagi vektorlar to'plamini H orqali belgilaylik.

Ta'rif. $\vec{x}_0+W=\{\vec{x}_0+\vec{y} \mid \vec{x}_0\in F^n\}$ to'plamga W qism fazoning $\vec{x}_0$ vektorga siljitishdan hosil bo'lgan chiziqli ko'pxillik deyiladi va u $H=\vec{x}_0+W$ orqali belgilanadi.

$H=\vec{x}_0+W$ tenglik, W qismfazoning barcha vektorlariga $\vec{x}_0$ vektorni qo'shishdan H ning $\vec{z}$ vektorlari hosil bo'lishini ko'rsatadi.

Misol. Dekart koordinatalar tekisligini ikki o'lchovli arifmetik vektor fazo ekanligi ma'lum. Uning qismfazosi sifatida koordinatalar boshidan o'tgan har qanday to'g'ri chiziqda yotuvchi vektorlar to'plamini olish mumkin. U holda chiziqli ko'pxillik sifatida qismfazo sifatida olingan to'g'ri chiziqni biror $\vec{x}_0$ vektorga parallel ko'chirishdan hosil bo'lgan to'g'ri chiziqni qarash mumkin.

Takrorlash uchun savollar:

1. Vektorlar sistemasining chiziqli qobig'i deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqli qobiqning asosiy xossalarini bayon eting.
3. Chiziqli ko'pxillikka ta'rif bering.
4. Chiziqli ko'pxillikning asosiy xossalarini ayting.
5. Chiziqli ko'pxillikka maktab matematikasidan misol keltiring.

3–ma'ruza. Fazoostilar va ularning kesishmasi, yig'indisi, to'g'ri yig'indisi

Reja:

1. Fazoosti va uning xossalari
2. Fazoostilar kesishmasi.
3. Fazoostilar yig'indisi.
4. Fazoostilar to'g'ri yig'indisi.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (119-121, 135-137 betlar).
2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh.shk. 1979 g. (str. 250-255).

Ta'rif. $\mathcal{F}$ maydon ustida aniqlangan V vektor fazoning biror L qism to'plami V da aniqlangan algebraik amallarga nisbatan vektor fazosini tashkil etsa, u holda L ga V fazoning qism fazosi deyiladi.

Teorema. V vektor fazoning biror L qism to'plami shu vektor fazoning qism fazosi bo'lishi uchun quyidagi ikkita shartning bajarilishi zarur va etarli:

a) $(\forall \bar{x}, \bar{y} \in L)\ \ (\bar{x} - \bar{y}) \in \mathrm{L}$;

b) $(\forall \bar{x} \in \mathrm{L},\ \ \forall \alpha \in \mathrm{F})\ \ \alpha \bar{x} \in \mathrm{L}$.

Fazoostining quyidagi xossalari mavjud:

1^0. Agar V fazo $\mathcal{F}$ maydon ustida vektor fazo bo'lsa, u holda uning ixtiyoriy fazoostisi $\mathcal{F}$ maydon ustidagi vektor fazo bo'ladi.

2^0. Agar U fazo V vektor fazoning qism fazosi va V fazo W vektor fazoning qism fazosi bo'lsa, u holda U fazo W vektor fazoning qism fazosi bo'ladi.

Ta'rif. Agar $U_1,\ldots, U_n$ lar V vektor fazoning qism fazolari bo'lsa, u holda $U = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$ ga $U_1,\ldots, U_n$ qism fazolarning kesishmasi deyiladi.

3^0. V vektor fazoning ixtiyoriy qism fazolarining kesishmasi V vektor fazoning qism fazosi bo'ladi.

Qism fazolar kesishmasi tushunchasi orqali ularning yig'indisi va to'g'ri yig'indisi kabi tushunchalarni kiritish mumkin.

Ta'rif. $\overline{x}_1 \in U_1$, $\overline{x}_2 \in U_2$, ..., $\overline{x}_n \in U_n$ bo'lganda $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + ... + \overline{x}_n$ ko'rinishdagi barcha yig'indilar to'plamiga U_1 ,..., U_n qism fazolar yig'indisi deyiladi va u $U_1 + U_2 + ... + U_n$ ko'rinishda belgilanadi.

Ta'rif. Agar $U_1 + U_2 + ... + U_n$ qism fazoning har bir vektori yagona usulda $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + ... + \overline{x}_n$ ko'rinishda ifodalansa, u holda $U_1 + U_2 + ... + U_n$ yig'indiga U_i $(i = \overline{1, n})$ qism fazolarning to'g'ri yig'indisi deyiladi va u $U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_n$ ko'rinishida belgilanadi.

Fazoostilar yig'indisi va to'g'ri yig'indisi quyidagi xossalarga ega:

1^0. Agar L va U lar V vektor fazoning fazoostilari bo'lsa, u holda $L + U = U + L$ bo'ladi.

2^0. Agar L, U, W lar V vektor fazoning fazoostilari bo'lsa, u holda $L + (U + W) = (L + U) + W$ bo'ladi.

3^0. Agar L fazoosti V vektor fazoning fazoostisi bo'lsa, u holda $L+V=V$ bo'ladi.

4^0. L va U lar V fazoning fazoostilari bo'lsa, u holda $L+U$ yig'indi to'g'ri yig'indi bo'lishi uchun $L \cap U = \{\overline{0}\}$ bo'lishi zarur va etarli.

5^0. U_1 ,..., U_n lar V vektor fazoning fazoostilari bo'lsa, u holda $U_1 + U_2 + ... + U_n$ yig'indi to'g'ri yig'indi bo'lishi uchun ixtiyoriy $\overline{x}_1 \in U_1$, $\overline{x}_2 \in U_2$, ..., $\overline{x}_n \in U_n$ vektorlar uchun $\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + ... + \overline{x}_n = \overline{0}$ tenglikdan $\overline{x}_1 = \overline{0}$, $\overline{x}_2 = \overline{0}$,..., $\overline{x}_n = \overline{0}$ tengliklarning kelib chiqishi zarur va etarli.

Takrorlash uchun savollar:

1. Vektor fazoning fazoostisi deb nimaga aytiladi?
2. Fazoostilarning xossalarini bayon eting?
3. Fazoostilar kesishmasi deb nimaga aytiladi?
4. Fazoostilar yig'indisi deb nimaga aytiladi?
5. Fazoostilar to'g'ri yig'indisi deb nimaga aytiladi?
6. Fazoostilar yig'indisi va to'g'ri yig'indisining xossalarini bayon eting?

4-ma'ruza.Vektorlar fazosining bazisi va o'lchovi

Reja:

1. Vektorlar fazosining bazisi.
2. Vektorlar fazosining o'lchovi.
3. Vektorlar fazosining bazisi va o'lchovi haqidagi teoremalar.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (124-127 - betlar).
2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh.shk. 1979 g. (str. 256-258).

Ta'rif. Agar V vektor fazoning chiziqli bog'lanmagan

$$\overline{x}_1,\ \overline{x}_2, \ldots,\ \overline{x}_n \qquad (1)$$

vektorlar sistemasi mavjud bo'lsaki, V ning qolgan barcha vektorlari (1) sistema orqali chiziqli ifodalansa, u holda (1) vektorlar sistemasi V vektorlar fazosining bazisi deyiladi.

V vektorlar fazosining bazisini $\overline{e}_1,\ \overline{e}_2, \ldots,\ \overline{e}_n$ (2)

vektorlar sistemasi ko'rinishida belgilasak, unda $\forall \overline{a} \in V$ vektorni (2) bazis orqali chiziqli ifodalash mumkin, ya'ni shunday $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n \in F$ sonlar topiladiki, natijada $\overline{a} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n \overline{e}_n$ (3)

tenglik bajariladi.

Ta'rif. V vektorlar fazosining (2) bazis vektorlari uchun (3) tenglik o'rinli bo'lsa, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ kortejga $\overline{a}$ vektorning (2) bazisga nisbatan satr koordinatalari deyiladi.

Ta'rif. V vektorlar fazosining bazislaridagi vektorlar soni V vektor fazoning o'lchovi deyiladi.

V fazoning o'lchovi dimV orqali belgilanadi.

Agar (1) sistema V fazoning bazisi bo'lsa, V fazo n o'lchovli fazo deyiladi. n o'lchovli vektor fazo V_n yoki V^n orqali belgilanadi.

Agar (1) sistema chekli bo'lmasa, u holda bunday vektorlar fazosi cheksiz o'lchovli vektorlar fazosi deb ataladi.

Teorema. R haqiqiy sonlar maydoni ustida berilgan R^n fazoning istalgan n+1 ta vektori chiziqli bog'langan bo'ladi.

Teorema. V vektorlar fazosining ixtiyoriy vektori (2) bazis vektorlar sistemasi orqali yagona usulda chiziqli ifodalanadi.

Isboti. V fazoda (2) sistema bazis bo'lsa, unda bazisning ta'rifiga asosan, istalgan n+1 ta vektorlar chiziqli bog'langan bo'ladi. Demak, kamida bittasi noldan farqli shunday $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ sonlar mavjudki, ular uchun

$$\alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n \overline{e}_n + \alpha_{n+1} \overline{a} = \overline{0} \qquad (4)$$

tenglik bajariladi. O'z-o'zidan ma'lumki, (4) tenglikda $\alpha_{n+1} \neq 0$, aks holda

$$\alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n \overline{e}_n = \overline{0} \qquad (5)$$

bo'lib, (5) tenglik (2) ning bazis ekanligiga zid keladi. (4) tenglikning ikkala tomonini α_{n+1} ga bo'lib va $(n+1)$-haddan boshqa hadlarni qarama-qarshi ishora bilan o'ng tomonga o'tkazib,

$$\overline{a} = h_1 \overline{e}_1 + h_2 \overline{e}_2 + \ldots + h_n \overline{e}_n \qquad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. (6) da $h_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}}$ $(i = \overline{1, n})$ bo'ladi.

Endi (6) chiziqli ifodalanishning yagona ekanligini isbotlaymiz.

Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $\overline{a}$ vektor uchun (6) dan farqli kamida yana bitta

$$\overline{a} = \beta_1 \overline{e}_1 + \beta_2 \overline{e}_2 + \ldots + \beta_n \overline{e}_n \qquad (7)$$

chiziqli ifodalanish mavjud bo'lsin.

(6) tenglikdan (7) ni hadlab ayiramiz. U holda

$$(h_1 - \beta_1)\overline{e}_1 + (h_2 - \beta_2)\overline{e}_2 + \ldots + (h_n - \beta_n)\overline{e}_n = \overline{0} \qquad (8)$$

tenglik hosil bo'ladi. (2) vektorlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan bo'lgani uchun (8) tenglik faqat barcha koeffitsientlar nolga teng bo'lgandagina bajariladi. Demak, $h_i = \beta_i \quad (i = \overline{1, \ n})$ tengliklar o'rinli.

Takrorlash uchun savollar:

1. Vektorlar fazosining bazisi deb nimaga aytiladi?
2. Vektorlar fazosining o'lchovi deb nimaga aytiladi?
3. R^n fazoning (n+1) ta vektorlari haqidagi teoremani bayon qiling.
4. V_n fazoning ixtiyoriy vektorining bazis orqali chiziqli ifodalanishining yagonaligi haqidagi teoremani bayon qiling.

5-ma'ruza. Vektor fazolar izomorfizmi.

Reja:

1. Izomorfizm.
2. Vektor fazolar izomorfizmi.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (130-133, 139-141 - betlar).

2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh.shk. 1979 g. (str. 266-271).

$\mathcal{F}$ maydon ustidagi chekli o'lchovli ikkita V_n va V'_n chiziqli fazolar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar V_n va V'_n chiziqli fazolar orasida shunday φ akslantirish mvjud bo'lib, u V_n ning har bir $\overline{x}$ vektorini V'_n ning yagona bitta $\overline{x}'$ vektoriga o'zaro bir qiymatli akslantirsa va quyidagi shartalar bajarilsa, V_n va V'_n fazolar o'zaro izomorf chiziqli fazolar deyiladi:

1) $\overline{x} \xrightarrow{\varphi} \overline{x}'$ va $\overline{y} \xrightarrow{\varphi} \overline{y}'$ dan $\overline{x} + \overline{y} \xrightarrow{\varphi} \overline{x}' + \overline{y}'$ kelib chiqsa, (bunda $\overline{x} + \overline{y} \in V_n$, $\overline{x}' + \overline{y}' \in V_n'$ $(\forall \overline{x}, \overline{y} \in V_n, \forall \overline{x}', \overline{y}' \in V_n')$);

2) $\overline{x} \xrightarrow{\varphi} \overline{x}'$ dan $\alpha \overline{x} \xrightarrow{\varphi} \alpha \overline{x}'$ kelib chiqsa, (bunda $\alpha \overline{x} \in V_n$, $\alpha \overline{x}' \in V_n'$ $(\forall \overline{x} \in V_n, \forall \alpha \in F, \overline{x}' \in V_n')$).

V_n va V'_n fazolarning izomorfizligi $V_n \cong V_n'$ ko'rinishida belgilanadi.

Teorema. $\mathcal{F}$ maydon ustidagi n o'lchovli istalgan ikkita V_n va V_n' chiziqli fazolar izomorfdir.

Isboti. V_n va V_n' fazolarning bazislarini mos ravishda

$$\overline{e}_1, \ \overline{e}_2, \ldots, \ \overline{e}_n \ , \qquad (1)$$

$$\overline{e}_1', \ \overline{e}_2', \ldots, \ \overline{e}_n', \qquad (2)$$

orqali belgilaylik va V_n ning har bir $\overline{x} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \ldots + \alpha_n \overline{e}_n$ vektoriga V_n' ning mos koordinatalari teng bo'lgan $\overline{x}' = \alpha_1 \overline{e}_1 + \ldots + \alpha_n \overline{e}_n$ vektorini mos qo'yamiz, ya'ni

$$\overline{x} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \ldots + \alpha_n \overline{e}_n \xrightarrow{\varphi} \overline{x}' = \alpha_1 \overline{e}'_1 + \ldots + \alpha_n \overline{e}'_n \qquad (3)$$

bunda $\alpha_i \in F(i = \overline{1, n})$. Bu φ akslantirish o'zaro bir qiymatlidir, chunki yana

$$\bar{y} = \beta_1 \bar{e}_1 + ... + \beta_n \bar{e}_n \xrightarrow{\varphi} \bar{y}' = \beta_1 \bar{e}_1' + ... + \beta_n \bar{e}_n' \qquad (4)$$

akslantirishni olib, $\bar{x} = \bar{y}$ desak, $\alpha_i = \beta_i (i = \overline{1, n})$ kelib chiqadi. U holda $\bar{x}' = \bar{y}'$ bo'ladi.

φ akslantirish izomorfizm ta'rifining ikkala shartini qanoatlantiradi. Haqiqatan,

$$\bar{x} + \bar{y} = (\alpha_1 \bar{e}_1 + ... + \alpha_n \bar{e}_n) + (\beta_1 \bar{e}_1 + ... + \beta_n \bar{e}_n) = (\alpha_1 + \beta_1)\bar{e}_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n)\bar{e}_n \xrightarrow{\varphi}$$

$$\xrightarrow{\varphi} (\alpha_1 + \beta_1)\bar{e}_1' + ... + (\alpha_n + \beta_n)\bar{e}_n' = (\alpha_1 \bar{e}_1' + ... + \alpha_n \bar{e}_n') + ... + (\beta_1 \bar{e}_1' + ... + \beta_n \bar{e}_n') = \bar{x}' + \bar{y}'.$$

$\bar{x} \xrightarrow{\varphi} \bar{x}'$ va $\bar{y} \xrightarrow{\varphi} \bar{y}' \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \xrightarrow{\varphi} \bar{x}' + \bar{y}'$.

$\forall \alpha \in F$ uchun

$$\alpha \bar{x} = \alpha\alpha_1 \bar{e}_1 + ... + \alpha\alpha_n \bar{e}_n \xrightarrow{\varphi} \alpha\alpha_1 \bar{e}_1' + ... + \alpha\alpha_n \bar{e}_n' = \alpha(\alpha_1 \bar{e}_1' + ... + \alpha_n \bar{e}_n') = \alpha \bar{x}'$$

$\bar{x} \xrightarrow{\varphi} \bar{x}' \Rightarrow \alpha \bar{x} \xrightarrow{\varphi} \alpha \bar{x}'$.

Shunday qilib, $V_n \cong V_n'$ bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Algebralar izomorfizmi.
2. Vektor fazolar izomorfizmi deb nimaga aytiladi?

6-ma'ruza. Skalyar ko'paytmali vektor fazolar. Vektorlarning ortoganal sistemasi.

Reja:

1. Ortogonal vektorlar.
2. Ortogonal vektorlar sistemasi.
3. Ortogonal bazis.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (141-143 - betlar).
2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh.shk. 1979 g. (str. 271 - 273).

Kompleks sonlar maydoni ustida aniqlangan V vektorlar fazosi berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar V fazoning har bir juft $\bar{x}$ va $\bar{y}$ elementlariga ularning skalyar ko'paytmasi deb ataluvchi yagona $(\bar{x}, \bar{y})$ haqiqiy son mos qo'yilib, bu moslik uchun

1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$;
2) $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$;
3) $(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y}), \quad \forall \lambda \in R$;
4) $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$

aksiomalar bajarilsa, u holda V vektorlar fazosiga skalyar ko'paytmali fazo deyiladi.

Yuqoridagi aksiomalardan skalyar ko'paytmaning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1^0. $(\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}) = (\bar{y} + \bar{z}, \bar{x}) = (\bar{y}, \bar{x}) + (\bar{z}, \bar{x}) = (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{x}, \bar{z})$;

2^0. $(\overline{x}, \lambda\overline{y}) = (\lambda\overline{y}, \overline{x}) = \lambda(\overline{y}, \overline{x}) = \lambda(\overline{x}, \overline{y})$.

Ta'rif. Agar V fazoning istalgan $\overline{x} \neq \overline{0}$ vektori uchun $(\overline{x}, \overline{x}) \neq \overline{0}$ bo'lsa, V fazoda aniqlangan skalyar ko'paytma xosmas skalyar ko'paytma deyiladi.

Ta'rif. Agar V fazoning istalgan $\overline{x}$ va $\overline{y}$ vektorlari uchun $(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ bo'lsa, V fazoda aniqlangan skalyar ko'paytma nol skalyar ko'paytma deyiladi.

Biz bundan keyin faqatgina xosmas skalyar ko'paytmaga ega bo'lgan fazolar bilangina shug'ullanamiz.

Ta'rif. Agar V fazoning istalgan $\overline{x} \neq \overline{0}$ vektori uchun $(\overline{x}, \overline{x}) > 0$ bo'lsa, bunday fazoga unitar fazo deyiladi.

Ta'rif. Agar unitar fazoning ikkita $\overline{x}$ va $\overline{y}$ vektorlari uchun $(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ bo'lsa, u holda $\overline{x}$ va $\overline{y}$ vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi.

Ta'rif. Agar V fazoning

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n \qquad (1)$$

vektorlar sistemasining istalgan ikkita elementi o'zaro ortogonal bo'lsa, u holda (1) sistema ortogonal vektorlar sistemasi deyiladi.

Teorema. Agar V xosmas skalyar ko'paytmali vektor fazo bo'lsa, u holda V fazoning nolmas vektorlaridan tuzilgan ortogonal vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'ladi.

Ta'rif. Agar ortogonal vektorlar sistemasi qaralayotgan fazoning bazisi bo'lsa, bunday sistema ortogonal bazis deyiladi.

Misol. $\overline{e}_1 = (1,0,0)$, $\overline{e}_2 = (0,1,0)$, $\overline{e}_3 = (0,0,1)$ sistema R^3 fazoning ortogonl bazisi bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Skalyar ko'paytmaning xossalarini bayon eting.
2. Skalyar ko'paytmali vektor fazo deb nimaga aytiladi?
3. Xosmas skalyar ko'paytma deb nimaga aytiladi?
4. Nol skalyar ko'paytma deb nimaga aytiladi?
5. Unitar fazo deb nimaga aytiladi?
6. Ortogonal vektorlar deb nimaga aytiladi?
7. Ortogonal vektorlar sistemasi deb nimaga aytiladi?
8. Ortogonal bazis deb nimaga aytiladi?

7-ma'ruza.Ortogonallash jarayoni. Fazoostining ortogonal to'ldiruvchisi.

Reja:

1. Ortogonal vektorlar sistemasi.
2. Ortogonallash jarayoni.
3. Fazoostining ortogonal to'ldiruvchisi.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (141-143 - betlar).
2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh.shk. 1979 g. (str. 271 - 273).

R maydon ustida aniqlangan V_n fazoning ixtiyoriy

$$\overline{g}_1, \overline{g}_2, ..., \overline{g}_n \qquad (1)$$

bazisiga asoslanib, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ (2)
ortogonal bazisni tuzish jarayoni bilan tanishamiz. Bu erda (1) dan (2) ni hosil qilish jarayoni ortogonallash jarayoni deyilib, u quyidagidan iborat: $\bar{e}_1 = \bar{g}_1$ deb olamiz, $\bar{g}_1 \neq 0$ bo'lgani uchun $\bar{e}_1 \neq \bar{0}$ bo'ladi. Endi $\bar{e}_2$ ni $\bar{e}_2 = \bar{g}_2 + \alpha \bar{g}_1 = \bar{g}_2 + \alpha \bar{e}_1$ shaklda olib, α sonni shunday aniqlaylikki, natijada $(\overline{e_1}, \overline{e_2}) = 0$, ya'ni

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = (\bar{e}_1, \bar{g}_2 + \alpha \bar{e}_1) = (\bar{e}_1, \bar{g}_2) + \alpha(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 0 \qquad (3)$$

bo'lsin. $\bar{g}_1 = \bar{e}_1 \neq \bar{0}$ va $\bar{g}_2 \neq \bar{0}$ bo'lgani uchun $\bar{e}_2 \neq \bar{0}$ bo'ladi. (6) tenglikdan

$$\alpha = -\frac{(\bar{e}_1, \bar{g}_2)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)}$$

topiladi.

Endi $\bar{e}_3$ ni $\bar{e}_3 = \bar{g}_3 + \gamma \bar{e}_2 + \beta \bar{e}_1$ shaklda olib, β va γ larni shunday tanlaylikki, natijada $(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = 0$ va $(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0$ bo'lsin, ya'ni

$$(\bar{e}_1, \bar{g}_3 + \gamma \bar{e}_2 + \beta \bar{e}_1) = 0, \qquad (4)$$

$$(\bar{e}_2, \bar{g}_3 + \gamma \bar{e}_2 + \beta \bar{e}_1) = 0, \qquad (5)$$

tengliklar bajarilsin. (4) va (5) tengliklardan

$$(\bar{e}_1, \bar{g}_3) + \gamma(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + \beta(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 0,$$

$$(\bar{e}_2, \bar{g}_3) + \gamma(\bar{e}_2, \bar{e}_2) + \beta(\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 0$$

hosil bo'lib, bunda $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = (\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 0$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$\beta = -\frac{(\bar{e}_1, \bar{g}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} \text{ va } \gamma = -\frac{(\bar{e}_2, \bar{g}_3)}{(\bar{e}_2, \bar{e}_2)}$$ lar kelib chiqadi.

Shu jarayonni oxirigacha davom ettirib, ortogonal bazisga kelamiz. Bu bazis quyidagi vektorlardan tuzilgan bo'ladi:

$$\bar{e}_1 = \bar{g}_1, \quad \bar{e}_2 = \bar{g}_2 - \frac{(\bar{e}_1, \bar{g}_2)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} \cdot \bar{e}_1 \ ,$$

$$\bar{e}_3 = \bar{g}_3 - \frac{(\bar{e}_2, \bar{g}_3)}{(\bar{e}_2, \bar{e}_2)} \cdot \bar{e}_2 - \frac{(\bar{e}_1, \bar{g}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} \bar{e}_1, \ldots \ ,$$

$$\bar{e}_n = \bar{g}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\bar{e}_i, \bar{g}_n)}{(\bar{e}_i, \bar{e}_i)} \cdot \bar{e}_i \ .$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Ortogonal vektorlar deb nimaga aytiladi?
2. Ortogonal vektorlar sistemasi deb nimaga aytiladi?
3. Ortogonal bazis deb nimaga aytiladi?
4. Ortogonal vektorlar sistemasi haqidagi teoremani bayon qiling.
5. Ortogonallash jarayonini bayon qiling.

8-ma'ruza. Evklid vektor fazolar. Vektor normasi va xossalari. Evklid fazolar izomorfizmi

Reja:

1. Evklid vektor fazo.
2. Vektorning normasi.
3. Vektor normasining xossalari.
4. Evklid fazolarining ortonormallangan bazisi.
5. Evklid fazolar izomorfizmi.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (257-262 - betlar).

2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh.shk. 1979 g. (str. 276 - 280).

V_2 fazoda berilgan ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos(\bar{a}\wedge\bar{b}) \qquad (1)$$

formula orqali aniqlanadi. (1) formuladan

$$\cos(\bar{a}\wedge\bar{b}) = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} \qquad (2)$$

topiladi. Bunda $(\bar{a}\wedge\bar{b})$ belgi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchakni bildiradi.

Ta'rif. Haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan V unitar fazoga Evklid fazosi deyiladi.

Evklid fazoni E orqali belgilaylik.

Bu ta'rifga ko'ra biror V fazo Evklid fazosi bo'lishi uchun uning elementlari ustida quyidagi shartlar bajarilishi lozim:

1) $(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{y},\bar{x}) \quad (\forall \bar{x},\bar{y}\in V)$;

2) $(\bar{x},\bar{y}+\bar{z}) = (\bar{x},\bar{y}) + (\bar{x},\bar{z}) \quad (\forall \bar{x},\bar{y},\bar{z}\in V)$;

3) $(\lambda\bar{x},\bar{y}) = \lambda(\bar{x},\bar{y}) \quad (\forall \bar{x},\bar{y}\in V,\ \forall\lambda\in R)$;

4) $(\bar{x},\bar{x}) > 0 \quad (\forall \bar{x}\in V,\ \ \bar{x}\neq\bar{0}),\quad (\bar{x},\bar{x}) = 0 \quad (\bar{x}\in V,\ \ \bar{x}=\bar{0})$.

1–4-aksiomalar $(\bar{x},\bar{y})$ skalyar ko'paytmaning har bir tashkil etuvchilariga ko'ra chiziqli ekanligini bildiradi.

Ta'rif. $+\sqrt{(\bar{a},\bar{a})}$ miqdor $\bar{a}\in V$ vektorning normasi (uzunligi) deyiladi va $\|\bar{a}\|$ orqali belgilanadi.

Ta'rif. Agar $\|a\|=1$ bo'lsa, $\bar{a}$ normallangan vektor deyiladi.

Agar $\bar{a}$, $\bar{b}$ - Evklid fazosining ixtiyoriy vektorlari va $\lambda\in R$ uchun vektorning normasi quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\|\bar{a}\| \geq 0 \quad (\|\bar{a}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{a}=\bar{0})$;

2^0. $\|\lambda\bar{a}\| = |\lambda|\ \|\bar{a}\|$;

3^0. $|(\bar{a},\bar{b})| \leq \|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|$ (Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi);

4^0. $\|\bar{a}+\bar{b}\| \le \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|$ (uchburchak tengsizligi).

Ta'rif. Evklid fazosining har biri normallangan

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n \qquad (3)$$

ortogonal vektorlar sistemasiga ortonormallangan vektorlar sistemasi deyiladi.

Ta'rif. Agar (3) sistema bazis tashkil etsa, unga Evklid fazosining ortonormallangan bazisi deyiladi.

Misol. $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$, $\bar{e}_3 = (0,0,1)$ uch o'lchovli Evklid fazosining ortonormallangan bazisi bo'ladi. Haqiqatan,

$(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$, $(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = 0$, $(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0$; $\|\bar{e}_1\| = 1$, $\|\bar{e}_2\| = 1$, $\|\bar{e}_3\| = 1$ bo'ladi.

Demak, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ sistema E fazoning bazisi ekan.

Teorema. Chekli o'lchovli Evklid fazosining istalgan bazisini ortonormallash mumkin.

Isboti. $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ vektorlar sistemasi n o'lchovli E_n Evklid fazoning bazisi bo'lsin. Bizga ma'lumki $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ bazisni hamma vaqt ortogonallash mumkin. Ortogonal bazisdagi har bir vektorni o'z normasiga bo'lib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\frac{\bar{a}_1}{\|\bar{a}_1\|}, \frac{\bar{a}_2}{\|\bar{a}_2\|}, ..., \frac{\bar{a}_n}{\|\bar{a}_n\|} \qquad (4)$$

V_n fazo Evklid fazosi bo'lgani uchun $\bar{e}_i = \dfrac{\bar{a}_i}{\|\bar{a}_i\|}$ ва $\bar{e}_j = \dfrac{\bar{a}_j}{\|\bar{a}_j\|}$ vektorlar uchun

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{агар} \quad i = j \quad \text{булса}, \\ 0, & \text{агар} \quad i \neq j \quad \text{булса}, \end{cases} \qquad (5)$$

tenglik bajariladi. Demak, (4) sistema ortonormallangan sistema ekan.

Takrorlash uchun savollar:

1. Evklid fazo deb nimaga aytiladi?
2. Vektorning normasi deb nimaga aytiladi?
3. Vektor normasining xossalarini bayon qiling.
4. Normallangan vektor deb nimaga aytiladi?
5. Ortonormallangan bazis deb nimaga aytiladi?

9-ma'ruza. Chiziqli akslantirishlar va chiziqli operatorlar.

Reja:

1. Chiziqli akslantirishlar.
2. Chiziqli operatorlar.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (235-236 - betlar).

2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh.shk. 1979 g. (str. 283 - 287).

Biz oldingi ma'ruzalarda vektor fazo tushunchasi bilan tanishgan edik. Endi turli vektorlar fazolari orasida qanday munosabatlar mavjudligini ko'raylik.

U vektor fazoning V vektor fazoga akslantirish φ bo'lsa, u holda $\varphi: U \to V$ ko'rinishda belgilaylik. U vektor fazoning ixtiyoriy $\overline{x}$ elementiga φ akslantirish yordamida V vektor fazodan mos keluvchi vektorni $\overline{y}$ deylik. Bu moslik $\varphi: \overline{x} \to \overline{y}$, $\overline{x} \xrightarrow{\varphi} \overline{y}$, $\varphi\overline{x} = \overline{y}$, $y = \varphi(\overline{x})$ ko'rinishlarda belgilanadi.

Ta'rif. $\mathcal{F}$ sonlar maydoni ustida aniqlangan U vektor fazoning V vektor fazoga akslantiruvchi φ akslantirish uchun ushbu

1. $\varphi(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = \varphi(\overline{x}_1) + \varphi(\overline{x}_2)$,
2. $\varphi(\lambda\overline{x}) = \lambda\varphi(\overline{x}) \quad (\lambda \in F)$

shartlar bajarilsa, u holda U vektor fazo V vektor fazoga chiziqli akslanadi deyiladi

U fazoni V fazoga chiziqli akslantirishlar to'plamini $Hom(U,V)$ orqali belgilanadi.

Ta'rif. U vektor fazoni o'z-o'ziga akslantirish U fazoda aniqlangan operator deyiladi.

Yuqoridagi ikkita ta'rifdan ko'rinadiki, operator chiziqli akslantirishning xususiy holi ekanligi.

Operatorlar $f, \varphi, ...$ harflar bilan belgilanadi.

Ta'rif. U vektor fazoni o'z-o'ziga chiziqli akslantirish U fazoda aniqlangan chiziqli operator deyiladi.

φ chiziqli akslantirish ta'sirida $\varphi(\overline{x}) = \overline{y}$ bo'lsa, u holda $\overline{y}$ vektor $\overline{x}$ vektorning obrazi (tasviri), $\overline{x}$ vektor esa $\overline{y}$ vektorning proobrazi (asli) deb yuritiladi.

$\overline{x} \in U$ bo'lganda $\varphi(\overline{x}) \in V$ vektorlar to'plami odatda φ akslantirishning obrazi deb yuritiladi va $Jm\varphi$ yoki φU orqali belgilanadi.

Misol. Agar $\varphi: \alpha \to \overline{\alpha}$ akslantirish S kompleks sonlar maydoni ustida chiziqli operator bo'ladi (Bunda $\overline{\alpha}$ va α sonlar o'zaro qo'shma kompleks sonlar).

Ta'rif. U vektor fazoning ixtiyoriy $\overline{x}_1$ va $\overline{x}_2$ elementlari va U da aniqlangan φ operator uchun $\varphi(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = \varphi(\overline{x}_1) + \varphi(\overline{x}_2)$ tenglik bajarilsa, u holda φ ga U da aniqlangan additiv operator deyiladi.

Quyidagi xossalar o'rinli:

1^0. $\varphi 0 = 0_1$;

2^0. $\varphi(-\overline{x}) = -\varphi(\overline{x}) \quad (\forall \overline{x} \in U)$;

3^0. $\varphi(r\overline{x}) = r\varphi\overline{x} \quad (\forall r \in Q)$;

4^0. $\varphi(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) = \varphi(\overline{x}_1) - \varphi(\overline{x}_2) \quad (\forall \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in U)$.

Ta'rif. Agar λ ixtiyoriy son bo'lganda ham U fazoning ixtiyoriy $\overline{x}$ elementi uchun $\varphi(\lambda\overline{x}) = \lambda\varphi(\overline{x})$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda φ ga U da aniqlangan bir jinsli operator deyiladi.

Ta'rif. Bir vaqtda bir jinsli va additiv bo'lgan operatorga chiziqli operator deyiladi.

φ operator chiziqli operator bo'lishi uchun U fazoning ixtiriy $\bar{x}_1$ ва $\bar{x}_2$ elementlari va $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ berilganda $\varphi(\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2) = \lambda_1 \varphi(\bar{x}_1) + \lambda_2 \varphi(\bar{x}_2)$ tenglikning bajarilishi zarur va etarli.

Bu mulohazani isbotlashda yuqoridagi ikkita ta'rifdan foydalaniladi.

Agar φ chiziqli operator bo'lsa, u holda $\forall x_i \in U,\ \lambda_i \in P\ (i = \overline{1,n})$ uchun ushbu

$$\varphi(\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + ... + \lambda_n \bar{x}_n) = \lambda_1 \varphi(\bar{x}_1) + \lambda_1 \varphi(\bar{x}_2) + ... + \lambda_n \varphi(\bar{x}_n) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu mulohazada (1) tenglik matematik induktsiya printsipi asosida isbot qilinadi.

Ta'rif. Agar $\forall \bar{x} \in U$ uchun $\varphi(\bar{x}) = 0$ tenglik bajarilsa, u holda φ operatorga nol operator deyiladi.

Nol operator ham chiziqli operator bo'ladi. (Isbotlang).

Ta'rif. Agar $\forall \bar{x} \in U$ uchun $e(\bar{x}) = \bar{x}$ tenglik bajarilsa, u holda e ga ayniy (birlik) operator deyiladi.

Ta'rif. Agar $\forall \bar{x} \in U$, $\lambda \in P$ uchun $\varphi(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$ tenglik bajarilsa, u holda φ ga o'xshashlik operatori deyiladi.

Demak, bu ta'rifdan ko'rinadiki, $\lambda = 0$ bo'lsa, o'xshashlik operatorining nol operator, $\lambda = 1$ bo'lsa, o'xshashlik operatorining ayniy operator bo'lishi.

Ta'rif. Agar $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in U$ bo'lib, $\varphi(\bar{x}) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_k)$ $(1 \leq k < n)$ bo'lsa, ya'ni φ operator n o'lchovli fazodagi vektorni k o'lchovli fazodagi vektorga o'tkazuvchi operator bo'lsa, u holda φ ga proektsiyalovchi operator deyiladi.

Ta'rif. Agar U_n fazoning ixtiyoriy $\bar{x}$ vektori uchun $f(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) + \Psi(\bar{x})$ tenglik bajarilsa u holda f ga φ va Ψ operatorlarning yig'indisi deyiladi va u $\varphi + \Psi = f$ orqali yoziladi.

Ta'rif. $\alpha \in F$, $\forall \bar{x} \in U_n$ uchun $(\alpha\varphi)\bar{x} = \alpha\varphi(\bar{x})$ tenglik bajarilsa, u holda $\alpha\varphi$ ga φ operatorning α skalyarga ko'paytmasi deyiladi.

Ayrim hollarda U_n fazoning nolmas vektorini φ operator ta'sirida nol vektorga akslanishi mumkin.

Takrorlash uchun savollar:

1. Chiziqli akslantirish deb nimaga aytiladi.?
2. Chiziqli operator deb nimaga aytiladi?
3. Additiv operator deb nimaga aytiladi?
4. Bir jinsli operator deb nimaga aytiladi?
5. Nol operator deb nimaga aytiladi?
6. Birlik operator deb nimaga aytiladi?
7. O'xshashlik, proektsiyalovchi operatorlar deb nimaga aytiladi?
8. Chiziqli operatorlar ustida qanday amalarni bilasiz?

10- ma'ruza. Chiziqli operator yadrosi va obrazi.
Chiziqli operator matritsasi va uning rangi.

Reja:

1. Chiziqli operator yadrosi.
2. Chiziqli operator obrazi.
3. Chiziqli operator matrisasi.
4. Chiziqli operatorlar matritsasi rangi.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (235-236 - betlar).
2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh.shk. 1979 g. (str. 283 - 287).

Ta'rif. U_n fazoning φ operator yordamida nolga akslanuvchi barcha elementlari to'plamiga φ operatorning yadrosi deyiladi va u Kerφ orqali belgilanadi.

Teorema. φ chiziqli operatorlar yadrosi shu operator qaralayotgan fazoning qism fazosi bo'ladi.

Bu teoremaning isboti [1, 240-bet]da keltirilgan.

Ta'rif. φ chiziqli operator yadrosining o'lchovi shu operatorning defekti (nuqsoni) deyiladi.

U_n fazoda aniqlangan φ chiziqli operator berilgan bo'lsin. M to'plamosti U_n ning qism fazosi, ya'ni $M \subset U_n$ bo'lsin. Agar $\varphi(\overline{x}) = \overline{y}$ desak, u holda $\overline{x}$ ning obrazi $\overline{y}$ bo'ladi. M to'plamostiga tegishli hamma elementlarning obrazini topaylik. Bu obrazlar hosil qilgan to'plamni φM orqali belgilaylik.

Teorema. Agar M fazoosti bo'lsa, u holda φM to'plam ham fazoosti bo'ladi.

Isboti. $\forall \overline{y}_1 \in \varphi M \Rightarrow \overline{y}_1 = \varphi(\overline{x}_1)$ $(\overline{x}_1 \in M)$ va $\forall \overline{y}_2 \in \varphi M \Rightarrow \overline{y}_2 = \varphi(\overline{x}_2)$ $(\overline{x}_2 \in M)$ lardan $\alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 \in M$ kelib chiqadi. Bu vaqtda $\alpha_1 \overline{y}_1 + \alpha_2 \overline{y}_2 = \alpha_1 \varphi(\overline{x}_1) + \alpha_2 \varphi(\overline{x}_2) = \varphi(\alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2) \in \varphi M$ hosil bo'ladi. Demak, $\overline{y}_1 \in \varphi M$, $\overline{y}_2 \in \varphi M$ ekanligidan $\alpha_1 \overline{y}_1 + \alpha_2 \overline{y}_2 \in \varphi M$ kelib chiqdi. U holda φM to'plam fazoosti bo'ladi.

Xususiy holda M=U_n bo'lishi mumkin. U holda φU_n ham fazoosti bo'ladi.

Ta'rif. φU_n fazoostiga φ operatorning obrazi deyiladi.

Ta'rif. φU_n obrazning o'lchoviga φ operatorning rangi deyiladi.

$\mathcal{F}$ maydon ustida V_n vektor fazo berilgan bo'lib,

$$\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \ldots,\ \overline{e}_n \qquad (1)$$

uning bazisi bo'lsin. Agar φ operator V_n fazoda aniqlangan chiziqli operator bo'lsa, u holda $\varphi(\overline{e}_1),\ \varphi(\overline{e}_2),\ \ldots, \varphi(\overline{e}_n) \in V_n$ vektorlar (1) bazis orqali chiziqli ifodalanadi, ya'ni

$$\begin{cases}\varphi(\bar{e}_1)=\alpha_{11}\bar{e}_1+\alpha_{21}\bar{e}_2+\ldots+\alpha_{n1}\bar{e}_n,\\ \varphi(\bar{e}_2)=\alpha_{12}\bar{e}_1+\alpha_{22}\bar{e}_2+\ldots+\alpha_{n2}\bar{e}_n,\\ \ldots\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\\ \varphi(\bar{e}_n)=\alpha_{1n}\bar{e}_1+\alpha_{2n}\bar{e}_2+\ldots+\alpha_{nn}\bar{e}_n.\end{cases}\qquad(2)$$

bo'ladi.

Ta'rif. Ushbu

$$\mathrm{M}(\varphi)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\ \alpha_{12}\ \ldots\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}\ \alpha_{22}\ \ldots\alpha_{2n}\\ .\ .\ .\ .\ .\\ \alpha_{n1}\ \alpha_{n2}\ \ldots\alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

matritsa φ chiziqli operatorning (1) bazisdagi matritsasi deyiladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Chiziqli operatorning yadrosi.
2. Chiziqli operatorning obrazi haqida tushuncha bering.
3. Chiziqli operator matrisasi.
4. Chiziqli operatorlar matritsasi rangi.

11,12 – ma'ruzalar. $\vec{x}$ va $\overrightarrow{\varphi(x)}$ vektorlar ustun koordinatalari orasidagi bog'lanish. Chiziqli operatorning turli bazislarga nisbatan matritsalari orasidagi bog'lanish

Reja:

1. $\bar{x}$ va $\varphi(\bar{x})$ vektorlar ustun koordinatalari orasidagi bog'lanish.
2. Chiziqli operatorning turli bazislarga nisbatan matritsalari orasidagi bog'lanish.
3. O'xshash matritsalar.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (236-239, 247 – 249 - betlar).
2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh.shk. 1979 g. (str. 289 – 291, 296 - 297).

Teorema. Nol bo'lmagan chekli o'lchovli vektor fazodagi φ chiziqli operatorning rangi φ chiziqli operator matritsasining rangiga teng bo'ladi.

$\mathcal{F}$ maydon ustida V_n vektor fazo berilgan bo'lib, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ uning birinchi bazisi, $\overline{e_1^1}, \ldots, \overline{e_n^1}$ esa uning ikkinchi bazisi va T birinchi bazisdan ikkinchi bazisga o'tish matritsasi bo'lsin.

Teorema. φ operator V_n fazoda aniqlangan chiziqli operator bo'lib, $M(\varphi)$ va $M'(\varphi)$ lar φ chiziqli operatorning birinchi va ikkinchi bazislarga nisbatan mos matritsalari, hamda T birinchi bazisdan ikkinchi bazisga o'tish matritsasi bo'lsa, u holda $M'(\varphi)=T^{-1}M(\varphi)$ T tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. $\bar{x}$ vektorning har xil bazislardagi, ya'ni birinchi va ikkkinchi bazislardagi ustun koordinatalarini mos ravishda $M(\bar{x})$ va $M'(\bar{x})$ deb belgilasak, u holda $\forall \bar{x} \in V_n$ vektor uchun

$$M(\bar{x}) = TM'(\bar{x}) \qquad (8)$$

$$M'(\bar{x}) = T^{-1}M(\bar{x}) \qquad (9)$$

fomulalar o'rinli bo'ladi.

(9) da $\bar{x}$ ni $\varphi(\bar{x})$ bilan almashtirib,

$$M^1(\varphi(\bar{x})) = T^{-1}M(\varphi(\bar{x})) \qquad (10)$$

tenglikni hosil qilamiz. $\bar{x}$ va $\varphi(\bar{x})$ vektorlarning ustun koordinatalarini $M(\bar{x})$ va $M(\varphi(\bar{x}))$ deb belgilasak, ular orasidagi bog'lanish

$$M(\varphi(\bar{x})) = M(\varphi) \cdot M(\bar{x}) \qquad (11)$$

orqali beriladi, bunda $M(\varphi)$ matritsa φ chiziqli operator matritsasi.

(10) va (11) tengliklardan

$$M'(\varphi(\bar{x})) = T^{-1}M(\varphi) \cdot M(\bar{x}) \qquad (12)$$

tenglik kelib chiqadi.

(8) va (12) tengliklarga asoslanib, $M^1(\varphi(\bar{x})) = [T^{-1}M(\varphi) \cdot T]\, M^1(\bar{x})$ tenglikni yoza olamiz. Oxirgi tenglikni (11) tenglik bilan solishtirib, $M'(\varphi) = T^{-1}M(\varphi) \cdot T$ formulani hosil qilamiz.

Ta'rif. Agar $\mathcal{F}$ maydon ustida $A, B \in F^{nxn}$ matritsalar uchun teskarilanuvchi $T \in F^{nxn}$ matritsa mavjud bo'lib, ular uchun $B = T^{-1}AT$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda A va B matritsalar o'xshash matritsalar deyiladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Chiziqli operator matritsasini tuzing.
2. Chiziqli operator rangi deb nimaga aytiladi?
3. Chiziqli operator rangi haqidagi teoremani bayon qiling.
4. Chiziqli operatorning turli bazislarga nisbatan matritsalari orasidagi bog'lanish formulasini bayon qiling.
5. O'xshash matritsalar deb nimaga aytiladi?

11-ma'ruza.Teskarilanuvchi chiziqli operatorlar. Chiziqli algebralar

Reja:

1. Chiziqli algebra haqida tushunchalar.
2. Chiziqli algebraga misollar.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (253-257 betlar).
2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh. shkola. 1979 g. (str. 291-293, 298-300).

$\mathcal{F}$ maydon ustida V_n vektor fazo berilgan bo'lib,

$$\overline{e}_1, \overline{e}_2, .., \vec{e}_n \qquad (1)$$

uning biror bazisi va φ operator berilgan V_n fazoning chiziqli operatori bo'lsin. $\overline{x}$ va $\varphi(\overline{x})$ vektorlarning (1) bazis orqali $x = \beta_1\overline{e}_1 + ... + \beta_n e_n$, $\varphi(\overline{x}) = \gamma_1\overline{e}_1 + ... + \gamma_n\overline{e}_n$ ko'rinishda ifodalansin.

$\overline{x}$ va $\varphi(\overline{x})$ vektorlarning (1) bazisga nisbatan ustun koordinatalarini mos ravishda ushbu

$$M(\overline{x}) = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad M(\varphi(\overline{x})) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ ... \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

ko'rinishlarda belgilab, ular orasidagi bog'lanish formulasini keltirib chiqaraylik.

Teorema. Agar φ operator V_n fazoda aniqlangan chiziqli operator bo'lib, M(φ) shu φ chiziqli operatorning (1) bazisdagi matritsasi bo'lsa, u holda $\forall \overline{x} \in V_n$ uchun $M(\varphi(\overline{x}))=M(\varphi)M(\overline{x})$ tenglik bajariladi.

Ta'rif. $\mathcal{F}$ maydon ustidagi V chiziqli fazo elementlari uchun quyidagi aksiomalar bajarilsa,

1. $\overline{x}\overline{y} \in V \; (\forall \overline{x}, \overline{y} \in V)$;
2. $\overline{x}(\overline{y}\overline{z}) = (\overline{x}\overline{y})\overline{z} \; (\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V)$;
3. $\overline{x}(\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x}\overline{y} + \overline{x}\overline{z}$ ва $(\overline{y} + \overline{z})\overline{x} = \overline{y}\overline{x} + \overline{z}\overline{x} \; (\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V)$
4. $\lambda(\overline{x}\overline{y}) = (\lambda\overline{x})\overline{y} = x(\lambda\overline{y}) \; (\lambda \in F, \forall \overline{x}, \overline{y} \in V)$

u holda V fazoni $\mathcal{F}$ maydon ustidagi chiziqli algebra deyiladi.

Ta'rif. Agar V chiziqli algebrada $\overline{x} \bullet \overline{y} = \overline{y} \bullet \overline{x} (\forall x, y \in V)$ aksioma bajarilsa, V kommutativ chiziqli algebra deyiladi.

Ta'rif. V chiziqli algebraning rangi deb V fazoning o'lchoviga aytiladi.

Misol. $C=\{a+bi \mid \forall a,b \in R, i^2=-1\}$ to'plam R maydon ustida rangi ikkiga teng bo'lgan chiziqli algebra tashkil etadi.

Misol. barcha n-tartibli kvadrat matritsalar to'plami $F^{n\times n}$, $\mathcal{F}$ maydon ustida rangli n^2 bo'lgan chiziqli algebra tashkil etadi. Bunday chiziqli algebrani $\mathcal{F}$ maydon ustidagi to'liq matritsalar algebrasi deyiladi.

Misol. R maydon ustidagi kvaternionlar algebrasi R maydon ustidagi to'rt o'lchovli V_4 vektor fazo bo'lib, $\overline{e}, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ vektorlar V_4 fazoning bazisi bo'lsin. V_4 fazoda ko'paytirish amali quyidagi qoida asosida kiritiladi:

$\overline{i}^2 = \overline{j}^2 = \overline{k}^2 = -\overline{e}, \; \overline{i} \cdot \overline{j} = -\overline{j} \cdot \overline{i} = \overline{k}, \; \overline{j} \cdot \overline{k} = -\overline{k} \cdot \overline{j} = \overline{i}, \; \overline{k} \cdot \overline{i} = -\overline{i} \cdot \overline{k} = \overline{j}$,

$\overline{a} \cdot \overline{e} = \overline{e} \cdot \overline{a}, \; \overline{a} \in \{\overline{e}, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. U holda V_4 fazo rangi 4 ga teng bo'lgan kvaternionlar algebrasi bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Chiziqli algebra deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqli algebraga misollar keltiring.

14-Ma'ruza
Chiziqli operatorlar algebrasi va matritsalar algebralari orasidagi izomorfizm (2 soat)

Reja:

1. Chiziqli operatorlar algebrasi.
2. Matritsalar algebrasi.
3. Chiziqli operatorlar algebrasi va matritsalar algebrasi orasidagi izomorfizm.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (253-257 betlar).
2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh. shkola. 1979 g. (str. 301-302).

V fazo $\mathcal{F}$ maydon ustidagi vektor fazo bo'lib, φ, ψ lar shu vektor fazoning chiziqli operatorlari bo'lsin. φ va ψ chiziqli operatorlar ko'paytmasi quyidagicha aniqlangan bo'lsin, ya'ni $(\varphi\psi)(\bar{x}) = \varphi(\psi(\bar{x})), \forall x \in V.$

Lemma. V vektor fazoning ixtiyoriy ikkita chiziqli operatorlari ko'paytmasi yana shu vektor fazoning chiziqli operatori bo'ladi.

Bizga ma'lumki Hom (V,V) to'plam $\mathcal{F}$ maydon ustida vektor fazo tashkil qiladi.

Ushbu algebrani <Hom (V,V), +, $\{\omega_\lambda | \lambda \in F\}$,•> algebra V vektor fazoning chiziqli operatorlar algebrasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

End V= <Hom (V,V), +, $\{\omega_\lambda | \lambda \in F\}$,•>

Teorema. Agar V fazo $\mathcal{F}$ maydon ustidagi vektor fazo bo'lsa, u holda End V algebra $\mathcal{F}$ maydon ustida chiziqli algebra tashkil qiladi.

Isboti. EndV algebra chiziqli algebra shartlarini to'liq bajaradi. Haqiqatan,

1. <Hom (V,V), +, $\{\omega_\lambda | \lambda \in F\}$,•> algebra $\mathcal{F}$ maydon ustida vektor fazo tashkil qiladi;
2. $(\varphi + \psi)\lambda = \varphi\lambda + \psi\lambda;$
3. $\chi(\varphi + \psi) = \chi\varphi + \chi\psi;$
4. $\lambda(\varphi\psi) = (\lambda\varphi)\psi = \varphi(\lambda\psi), \varphi, \psi, \chi \in$ Hom (V,V), va $\lambda \in F$.

Ta'rif. U va U' algebralar $\mathcal{F}$ maydon ustidagi chiziqli algebralar va φ:U$\rightarrow$U' akslantirish biektiv akslantirish bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsa:

1. $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b});$
2. $\varphi(\lambda\bar{a}) = \lambda\varphi(\bar{a});$
3. $\varphi(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) \cdot \varphi(\bar{b}), \forall \bar{a}, \bar{b} \in V \wedge \forall \lambda \in F$

u holda φ akslantirishga izomorfizm U va U' chiziqli algebralarga esa izomorf chiziqli algebralar deyiladi va u U$\cong$U' ko'rinishda belgilanadi.

Misol. S = < C, +, $\{\omega_\lambda | \lambda \in R\}, \bullet$> - chiziqli algebra, $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \forall a, b \in R \right\}$; $G = < G, +, \{\omega_\lambda | \lambda \in R\}, \bullet >$ - chiziqli algebra bilan izomorf,

ya'ni S $\cong$ G bo'ladi (bunda $\varphi : a + bi \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$).

Agar $\mathcal{F}$ maydon ustidagi matritsalar algebrasini $M(n, F) = < F^{nxn}, +, \{\omega_\lambda | \lambda \in F\}, \bullet >$ ko'rinishda belgilasak, u holda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi:

Teorema. V fazo $\mathcal{F}$ maydon ustidagi vektor fazo bo'lib, $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ uning bazisi, M(φ) matritsa V vektor fazoda aniqlangan φ chiziqli operatorning $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ bazisga nisbatan matritsasi va $\varphi \to M(\varphi)$ akslantirish mavjud bo'lsa, u holda End V $\cong$ M(n, $\mathcal{F}$) munosabat o'rinli bo'ladi.

Isboti. Bizga ma'lumki, End V $\to$ M(n, *F*) akslantirish biektiv akslantirish bo'ladi.

1. $M(\varphi + \psi) = M(\varphi) + M(\psi)$.

Isboti. $\forall \overline{x} \in V \quad \varphi(\overline{x}) = \alpha_1 \overline{e}_1 + ... + \alpha_n \overline{e}_n, \quad \psi(\overline{x}) = \beta_1 \overline{e}_1 + ... + \beta_n \overline{e}_n$

$(\varphi + \psi)(\overline{x}) = \varphi(\overline{x}) + \psi(\overline{x}) = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n)\overline{e}_n$

$$M((\varphi + \psi)(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ ----- \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -- \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -- \\ \beta_n \end{pmatrix} = M(\varphi(\overline{x})) + M(\psi(\overline{x})) \Rightarrow M((\varphi + \psi)(\overline{x})) = M(\varphi(\overline{x})) + M(\psi(\overline{x}))$$

$M(\varphi + \psi)M(\overline{x}) = [M(\varphi) + M(\psi)]M(\overline{x}). \quad M(\varphi + \psi) = M(\varphi) + M(\psi).$

2. $M(\lambda\varphi) = \lambda M(\varphi)$.

Isboti. $((\lambda\varphi)(\overline{x}) = \lambda\alpha_1\overline{e}_1 + ... + \lambda\alpha_n\overline{e}_n$,

$$M((\lambda\varphi)(\overline{x})) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ --- \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -- \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda M(\varphi(\overline{x})),$$

$M(\lambda\varphi)M(\overline{x}) = (\lambda M(\varphi))\ M(\overline{x}). \quad M(\lambda\varphi) = \lambda M(\varphi)$.

3. M(φψ) = M(φ)M(ψ) (∀φ, ψ ∈ Hom(V, V), ∀λ ∈ F

Isboti. $M((\varphi\psi)(\overline{x})) = M(\varphi(\psi(\overline{x}))) = M(\varphi)\ M(\psi(\overline{x})) = M(\varphi)\ M(\psi)\ M(\overline{x})$.\`

$M(\varphi\psi)\ M(\overline{x}) = [M(\varphi)M(\psi)]\ M(\overline{x}) \Rightarrow M(\varphi\psi) = M(\varphi)M(\psi)$

Demak, ta'rifga asosan End V $\cong$ M(n, *F*) bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Chiziqli operatorlar algebrasi deb nimaga aytiladi?
2. Matritsalar algebrasi deb nimaga aytiladi?
3. Algebralar izomorfizmi haqida teoramani bayon qiling.

15-ma'ruza. Xos vektorlar va xos qiymatlar. Xarakteristik tenglama.

Reja:
1. Xos qiymatlar.
2. Xos vektorlar.
3. Xarakteristik tenglama.
4. Xarakteristik ko'phad.
5. Xarakteristik ko'phadning yagonaligi.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (263-266 betlar).
2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh. shk. 1979 g. (str. 307-309).

Kompleks sonlar maydoni ustida qurilgan V_n vektor fazo va $\varphi: V_n \to V_n$ chiziqli operator berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Ushbu

$$\varphi(\overline{x}) = \lambda\overline{x}(\forall\overline{x} \in V_n,\ x \neq \overline{0},\ \lambda \in F) \qquad (1)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi α songa φ chiziqli operatorning xos qiymati, $\overline{x}$ vektor esa λ xos qiymatga mos keluvchi xos vektori deyiladi.

Teorema. Kompleks sonlar maydoni ustida qurilgan V_n vektor fazoning har bir φ chiziqli operatori kamida bitta xos vektorga ega.

Isboti. V_n vektor fazoning

$$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n \qquad (2)$$

bazisi berilgan bo'lib, $\forall\overline{x} \in V_n$ vektorning bu bazisdagi koordinatasi $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots \overline{\alpha}_n$ bo'lsin, ya'ni $\overline{x} = \alpha_1\overline{e}_1, + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n$ tenglik o'rinli bo'lsin. $\varphi(\overline{e}_1), \varphi(\overline{e}_2), \ldots, \varphi(\overline{e}_n)$ vektorlar (2) bazis orqali chiziqli ifodalanadi, ya'ni

$$\begin{cases} \varphi(\overline{e}_1) = a_{11}\overline{e}_1 + a_{21}\overline{e}_2 + \ldots + a_{n1}\overline{e}_n, \\ \varphi(\overline{e}_2) = a_{12}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 + \ldots + a_{n2}\overline{e}_n, \\ ------------------ \\ \varphi(\overline{e}_n) = a_{1n}\overline{e}_1 + a_{2n}\overline{e}_2 + \ldots + a_{nn}\overline{e}_n \end{cases} \qquad (3)$$

bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

matritsa φ chiziqli operatorning (2) bazisdagi matritsasi. Endi $\varphi(\overline{x})$ vektorning (2) bazisdagi koordinatalarini aniqlaymiz.

$$\varphi(\overline{x}) = \alpha_1\varphi(\overline{e}_1) + \alpha_2\varphi(\overline{e}_2) + \ldots + \alpha_n\varphi(\overline{e}_n) = \alpha_1(a_{11}\overline{e}_1 + \ldots + a_{n1}\overline{e}_n) + \ldots + \alpha_n(a_{1n}\overline{e}_1 + \ldots + a_{nn}\overline{e}_n) =$$

$$= (\alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha_n a_{1n})\overline{e}_1 + \ldots + (\alpha_1 a_{n1} + \ldots + \alpha_n a_{nn})\overline{e}_n. \qquad (4)$$

(1) va (4) ga asosan

$$\lambda\overline{x} = (\lambda\alpha_1)\overline{e}_1 + \ldots + (\lambda\alpha_n)\overline{e}_n = (\alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha_n a_{1n})\overline{e}_1 + \ldots + (\alpha_1 a_{n1} + \ldots + \alpha_n a_{nn})\overline{e}_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = \lambda\alpha_1, \\ a_{21}\alpha_1 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = \lambda\alpha_2, \\ --------------- \\ a_{n1}\alpha_1 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = \lambda\alpha_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ -------------------- \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

kelib chiqadi.

(5) sistema $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ noma'lumli bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi. Bu sistema nolmas echimga ega bo'lishi uchun sistema determinanti nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \ldots & a_{2n} \\ ---- & ---- & ---- & ---- \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ ---- & ---- & ---- & ---- \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A - \lambda E| = 0 \qquad (6)$$

hosil bo'ladi. (6) ga φ chiziqli operatorning xarakteristik tenglamasi deb yuritiladi. (6) ning chap qismidagi determinant λ ga nisbatan n-darajali ko'phadni bildiradi. Bu ko'phadga φ chiziqli operatorning xarakteristik ko'phadi deb yuritiladi. Bizga ma'lumki, n-darajali ko'phad kompleks sonlar maydoni ustida n ta ildizga ega bo'ladi. Bu ildizlar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ bo'lib, ular φ chiziqli operatorning xos qiymatlari bo'ladi. □ar bir xos sonlarni (5) sistemaga qo'yib, uning nolmas echimlaridan tuzilgan vektorlar xos sonlarga mos xos vektorlar bo'ladi.

Agar $(A - \lambda_i E)$ matritsaning rangi r_i bo'lsa, φ chiziqli operatorning har biri λ_i xos songa mos keluvchi xos vektorlar soni (n-r_i) ga teng bo'ladi.

Teorema. φ chiziqli operatorning turli bazislaridagi xarakteristik ko'phadlari teng bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Xos qiymatlar deb nimaga aytiladi?
2. Xos vektorlar deb nimaga aytiladi?
3. Xarakteristik tenglamani yozing.
4. Xarakteristik ko'phadni yozing.
5. Chiziqli operatorning xos vektori haqidagi teoremani bayon qiling.

16,17- ma'ruzalar. Chiziqli tengsizliklar sistemasi. Qavariq konus. Chiziqli tengsizliklar sistemasining natijasi. Minkovskiy teoremasi

Reja:

1. Chiziqli tengsizliklar sistemasi haqida tushuncha.
2. Hamjoyli va hamjoysiz tengsizliklar sistemasi.
3. Tengsizliklar sistemasining natijasi.
4. Chiziqli tengsizliklar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi.
5. Bir jinsli chiziqli tengsizliklar sistemasi.
6. Qavariq konus.
7. Minkovskiy teoremasi.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (275-277 betlar).

2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh. shkola. 1979 g. (str. 317-320).

Ta'rif. Ushbu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b \geq 0 \qquad (1)$$

tengsizlik R haqiqiy sonlar maydoni ustidagi n ta noma'lumli tengsizlik deyiladi.

(1) da x_1, x_2, ..., x_n – noma'lumlar, a_i , $b \in R$ $(i=\overline{1,n})$ esa koeffitsi-entlar deyiladi.

Ta'rif. Agar (1) da b=o bo'lsa (1) ni bir jinsli, b≠o bo'lsa, (1) ni bir jinsli bo'lmagan tengsizlik deyiladi.

Ta'rif. Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + ... + a_{1n}\ x_n + v_1 \geq o, \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + ... + a_{2n}\ x_n + v_2 \geq o, \\ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + ... + a_{mn}\ x_n + v_m \geq o \end{cases} \qquad (2)$$

cistemaga n ta noma'lumli m ta chiziqli tengsizliklar sistemasi deyiladi.

(2) da x_1, x_2 ,..., x_n noma'lumlar, $a_{ij}, b \in R$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ sonlar (2) sistemaning koeffitsientlari deyiladi. $v_i \in R$ (2) sistemaning ozod hadlari deyiladi.

n noma'lumlar sonini, m tenglamalar sonini bildirib, ular orasida m=n, m<n, m>n munosabatlarning biri o'rinli bo'ladi.

Ta'rif. (2) sistemaning hamma tengsizliklarini qanoatlantiruvchi $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$,..., $x_n=\alpha_n$ sonlar (2) sistemaning echimi deyiladi.

Ta'rif. (2) sistemadagi hamma tengsizliklar bir jinsli bo'lsa, sistema ham bir jinsli sistema deyiladi. (2) sistemaning kamida bitta tengsizligi bir jinsli bo'lmasa, sistema bir jinsli bo'lmagan sistema deyiladi.

Ta'rif. Kamida bitta echimga ega bo'lgan (2) sistema hamjoyli sistema, bitta ham echimga ega bo'lmagan (2) sistema hamjoysiz sistema deyiladi.

Ta'rif. Agar (2) ning ixtiyoriy echimi (1) tengsizlikning ham echimi bo'lsa, (1) ga (2) ning natijasi deyiladi.

Ta'rif. Agar (1) tengsizlik bitta ham echimga ega bo'lmasa, u ziddiyatli tengsizlik deyiladi. ziddiyatli tengsizlik quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$0\cdot x_1+0.x_2+ \ldots +0.x_n+b\geq 0 \ (b<0) \qquad (3).$$

Ta'rif. (2) sistemaning birinchi tengsizligini $k_1\geq 0$ songa, ikkinchisini $k_2\geq 0$ songa, ... , m-sini $k_m\geq 0$ songa ko'paytirib, ularni hadlab qo'shsak hosil bo'lgan ushbu tengsizlik

$$\sum_{j=1}^{m} k_j a_{j1}x_1 + \sum_{j=1}^{m} k_j a_{j2}x_2 + \ldots + \sum_{j=1}^{m} k_j a_{jm}x_m + \sum_{j=1}^{m} k_j b_j \geq 0 \qquad (4)$$

ga (2) sistemaning manfiymas chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

Teorema. (2) sistemaning har bir manfiymas chiziqli kombinatsiyasi shu sistemaning natijasi bo'ladi.

Ta'rif. Bir xil x_1, x_2, ... ,x_n noma'lumli ikkita hamjoyli tengsizliklar sistemasidan birining istalgan echimi ikkinchisi uchun ham echim bo'lsa yoki ikkala sistema ham hamjoysiz sistema bo'lsa, ular teng kuchli sistemalar deyiladi.

Bizga quyidagi n ta noma'lumli m ta bir jinsli chiziqli tengsizliklar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n \geq o, \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n \geq o, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + \ldots + a_{mn}\ x_n \geq o. \end{cases} \qquad (5)$$

$\overline{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}),\ \overline{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2n}), \ldots, \overline{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots a_{mn})$ $V=R^n$ esa R maydon ustidagi arifmetik fazo bo'lib $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m \in V$ bo'lsin.

Ta'rif. Vektorlarni qo'yish va manfiymas haqiqiy songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq bo'lgan V vektor fazoning vektorlaridan tuzilgan bo'sh bo'lmagan to'plamga V vektor fazoning qavariq konusi deyiladi.

Teorema. (5) bir jinsli chiziqli tengsizliklar sistemasining barcha echimlar to'plami $V=R^n$ fazoning qavariq konusi bo'ladi.

Isboti. (5) ning barcha echimlar to'plami

$\{\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n),\ \overline{b} = (b_1, \ldots, b_n),\ \overline{c} = (c_1, \ldots, c_n), \overline{0} = (0_1, \ldots, 0_n), \ldots\}$ bo'lsin. Bunda $a_i, b_i, c_i, \ldots\ (i = \overline{1,n})$ haqiqiy sonlar.

Bu to'plam vektorlarni qo'shish va manfiymas haqiqiy songa ko'paytirish amaliga nisbatan yopiqdir. Shuning uchun bu to'plam V fazoning qavariq konusi bo'ladi.

$$\begin{cases} R_1 = a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n \geq o, \\ R_2 = a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n \geq o, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ R_m = a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + \ldots + a_{mn}\ x_n \geq o, \end{cases} \qquad (S)$$

tengsizliklar sistemasi

$$R_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq o. \qquad (1)$$

tengsizlik berilgan bo'lib, u (S) sistemaning natijasi bo'lsin.

Minkovskiy teoremasi. (S) bir jinsli chiziqli tengsizliklar sistemasining har bir natijasi bu sistemaning manfiymas koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasidan iboarat bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Chiziqli tengsizliklar sistemasi (ChTS)ning umumiy ko'rinishini yozing.
2. ChTS ning echimi deb nimaga aytiladi?
3. Ќamjoyli va hamjoysiz ChTS deb nimaga aytiladi?
4. ChTSning natijasi deb nimaga aytiladi?
5. ChTSning chiziqli kombinatsiyasi deb nimaga aytiladi?
6. Bin jinchli ChTS deb nimaga aytiladi?
7. Qavariq konus deb nimaga aytiladi?
8. Ziddiyatli tengsizlik deb nimaga aytiladi?
9. Minkovskiy teoremasi.

18,19-ma'ruzalar. Tengsizliklar sistemasining hamjoysizlik sharti. Chiziqli programmalashning kanonik masalalari. Simpleks metod.

Reja:

1. Chiziqli tengsizliklar sistemaning hamjoysizligi haqidagi teorema.
2. Chiziqli programmalashning kanonik masalalari.
3. Simpleks metod haqida tushuncha.
4. Simpleks jadvallar.

Adabiyotlar:

1. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Do'sumbetov A.D. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. T.: O'qituvchi. 1993 y. (282-296 betlar).
2. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M.: Vissh. shk. 1979 g. (str. 321-326).

Ta'rif. Chiziqli tengsizliklar sistemasidan noma'lumlar sonini bittaga kamaytirib tuzilgan yangi sistemani berilgan sistemaga yo'ldosh sistema deyiladi.

(S) sistemadan

$$\begin{cases} P_1 \geq x_n, \\ P_2 \geq x_n, \\ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ P_p \geq x_n; \end{cases} \quad \begin{cases} x_n \geq Q_1, \\ x_n \geq Q_2, \\ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ x_n \geq Q_q; \end{cases} \quad \begin{cases} R_1 \geq 0, \\ R_2 \geq 0, \\ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ R_r \geq 0 \end{cases} \qquad (T)$$

sistemani hosil qilamiz. Bundan

$$\begin{cases} P_\alpha \geq Q_\beta \quad (\alpha = \overline{1,p}\,;\, \beta = \overline{1,q}\,), \\ R_\gamma \geq 0 \quad (\gamma = \overline{1,r}) \end{cases} \qquad (S')$$

sistemani hosil qilamiz.

Lemma.Yo'ldosh sistemaning har bir tengsizligi berilgan tengsizliklar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi bo'ladi.

Chiziqli programmalash masalasini echishning muhim usuli simpleks usulidir. Simpleks usul quyidagi jarayonni ifodalaydi:

Cheklanish tenglamalar sistemasini

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1-(a_{1r+1}x_{r+1}+ \dots +a_{1n}x_n), \\ x_2 &= b_2-(a_{2r+1}x_{r+1}+ \dots +a_{2n}x_n), \\ &------------------------------ \\ x_r &= b_r-(a_{rr+1}x_{r+1}+ \dots +a_{rn}x_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

ko'rinishga (bunda $b_1 \geq 0, \dots ,b_r \geq 0$) va berilgan chiziqli formadagi $x_1,\dots,x_r$ larni (1) orqali ifodalab, uni

$$f = \gamma_0 - \gamma_{r+1}x_{r+1} - \dots - \gamma_n x_n \qquad (2)$$

ko'rinishga keltiramiz va bu formaning minimumini topish masalasini qo'yamiz.

(2) dagi $x_1, \dots ,x_r$ noma'lumlar to'plami chiziqli programmalash masalasining bazisi deyiladi va u $M=\{ x_1, \dots ,x_r\}$ ko'rinishda ʙelgilanadi. $x_1, \dots ,x_r$ larni bazis noma'lumlar, $x_{r+1}, \dots ,x_r$ larni ozod noma'lumlar deb ataymiz. Agar $x_{r+1}= \dots =x_n=0$ bo'lsa, (1) dan $x_1=b_1\geq 0, \dots ,x_r=b_r\geq 0$ larni hosil qilamiz. Shunday qilib,

$(b_1, b_2, \dots ,b_r, 0, 0, \dots 0)$ (3)

echim hosil bo'ladi. f ning bu echimdagi qiymati $f = \gamma_0$ ga teng bo'ladi.

Quyidagi ikki hol ro'y berishi mumkin:

I. (2) da hamma $-\gamma_i \geq 0$ $(i = \overline{r+1n})$ bo'lsin. U vaqtda f forma $x_{r+1}= \dots =x_n=0$ shartda minimum $f = \gamma_0$ qiymatga erishadi.

II. (2) da $-\gamma_{r+1},\dots,-\gamma_n$ sonlar orasida manfiylari bor bo'lsin.

Masalan, $-\gamma_i < 0$ deylik. U vaqta $x_{r+1}= \dots =x_j= \dots =x_n=0$ va $x_j>0$ deb olib, x_j ning qiymatini orttira borishi hisobiga $f = \gamma_0 - \gamma_j x_j$ ning qiymatini kamaytirish mumkin, lekin bu ishda ehtiyotkorlik kerak, chunki bu holda (1) lardan kelib chiqadigan

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1j}x_j, \\ x_2 &= b_2 - a_{2j}x_j, \\ &--------- \\ x_r &= b_r - a_{rj}x_j \end{aligned} \qquad (4)$$

tenglamalardagi $x_1, \dots ,x_r$ larning hech qaysisi manfiy bo'lib qolmasin.

Bu erda ham quyidagi ikkita hol ro'y beradi:

A. (4) da hamma $a_{1j}, \dots ,a_{rj}$ sonlar musbatmas. U vaqtda $x_j>0$ uchun $-a_{kj}x_j \geq 0$ $(k = \overline{1,r})$ bo'lganidan $x_k = b_k - a_{kj}x_j \geq b_k \geq 0$ $(k = \overline{1,r})$ ga asosan $x_1\geq b_1\geq 0,\dots,x_r\geq b_r\geq 0$ bo'ladi. Demak, $f = \gamma_0 - \gamma_j x_j$ da $\gamma_j > 0$ va $x_j > 0$ bo'lgani sababli x_j ni cheksiz orttirma berish bilan min f=-∞ ga kelamiz. Bundan esa f formaning minimumga erishmasligi ko'rinadi.

B. (4) da a_{1j} ,a_{ij}, ... ,a_{rj} sonlar orasida musbatlari bor. Masalan, $a_{kj}>0$ bo'lsin. U holda $x_k=b_k-a_{kj}x_j$ da x_j ga $\frac{b_k}{a_{kj}}$ dan ortiq qiymat berish mumkin emas, chunki aks holda $x_k<0$ bo'lib qoladi. Bunda $\frac{b_k}{a_{kj}}\geq 0$ ekanligi ravshan. Bunday kasrlar orasida eng kichigi $\frac{b_i}{a_{ij}}$ bo'lsin. Bunda $a_{ij}>0$ son hal qiluvchi element deyiladi.

Qisqalik uchun $\frac{b_i}{a_{ij}}=\rho$ belgilash kiritaylik. (4) da x_j ni ρ gachagina orttira olamiz, chunki aks holda $x_j<0$ bo'lishini ko'rdik.

Ozod noma'lumlarga

$$x_{r+1}=...=x_{j-1}=0,\ x_j=\rho,\ x_{j+1}=...=x_n=0 \qquad (5)$$

qiymatlarni berib, bazis noma'lumlarni aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1j}\rho, \\ &------- \\ x_i &= b_i - a_{ij}\rho, \\ &------- \\ x_r &= b_r - a_{rj}\rho. \end{aligned} \qquad (6)$$

Endi quyidagi yangi M' bazisga o'tamiz:

x_1, .. ,x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, ... ,x_r.

Bunga mos bazis echim (6) va (5) lardan tuziladi, (1) sistema va (2) formani yangi bazisga moslab yozamiz. Buning uchun (1) dagi

$$x_i=b_i-(a_{ir+1}x_{r+1}+...+a_{ij}x_j+...+a_{in}x_n)$$

tenglamani x_j ga nisbatan echamiz, ya'ni

$$x_j = \frac{b_j}{a_{ij}} - \left(\frac{a_{ir+1}}{a_{ij}} x_{r+1} + ... + \frac{1}{a_{ij}} x_i + ... + \frac{a_{in}}{a_{ij}} x_n \right)$$

va bu ifodani (1) ga qo'yib, hosil bo'lgan yangi sistemani

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1^I - (a_{1r+1}^I x_{r+1} + ... + a_{1i}^I x_i + ... + a_{1n}^I x_n), \\ &--------------------- \\ x_j &= b_j^I - (a_{jr+1}^I x_{r+1} + ... + a_{ji}^I x_i + ... + a_{jn}^I x_n), \\ &--------------------- \\ x_r &= b_r^I - (a_{rr+1}^I x_{r+1} + ... + a_{ri}^I x_i + ... + a_{rn}^I x_n) \end{aligned} \qquad (7)$$

ko'rinishda yoza olamiz. Bu bazisning ifodalarini f ga qo'yib, uni

$$f = \gamma_0^I - \gamma_{r+1}^I x_{r+1} - ... - \gamma_i^I x_i - ... - \gamma_n^I x_n \qquad (8)$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu bilan jarayonning birinchi qadami tugaydi. Keyingi qadam yana shu birinchi qadamni, ya'ni (8) va (7) larga nisbatan I yoki II holni, undan keyin IIA yoki IIB ni takrorlashdan iborat bo'ladi va h.q.

Takrorlash uchun savollar:

1. ChTS ning hamjoysizlik alomatini bayon qiling.
2. Simpleks usulni bayon qiling.
3. Simpleks jadvallarni misollar orqali tushuntiring.

□D□BIYOTL□R:

1. N□z□r□v R.N., T□shpo'l□t□v B.T, Dusumb□t□v □.D. □lg□br□ v□ s□nl□r n□z□riyasi. T.,I qism,1993 y.,II qism, 1995 y.
2.T□shpo'l□t□v B.T., Dusumb□t□v □.D., Qulm□t□v □.Q. □lg□br□ v□ s□nl□r n□z□riyasi. M□'ruz□l□r m□tni. T., 2001 1-5- qisml□r.
3.Yunus□v □.S.,Yunus□v□ D.I. M□t□m□tik m□ntiq v□ □lg□ritml□r n□z□riyasi. M□'ruz□l□r m□tni. T., 2001 y.
4. Yunus□v □.S, D.I.Yunus□v□. M□t□m□tik m□ntiq v□ □lg□ritml□r n□z□riyasi el□m□ntl□ri. O'quv qo'll□nm□. El□ktr□n v□rsiyasi. TDPU s□yti.
5.R.Isk□nd□r□v, R.N□z□r□v. □lg□br□ v□ s□nl□r n□z□riyasi. I-II qisml□r.T., O'qituvchi, 1979 y.
6.Kulik□v L.Ya. □lg□br□ i t□□riya chis□l. M., Vissh□ya shk□l□. 1979 g.
7. Yunus□v □.S., Yunus□v□ D.I. □lg□br□ v□ s□nl□r n□z□riyasid□n m□dul t□□n□l□giyasi □s□sid□ t□yyorl□ng□n n□z□r□t t□pshiriql□ri to'pl□mi. TDPU. 2004.
8. N.Ya.Vil□nkin. □lg□br□ i t□□riya chis□l. M. 1984.
9. P□tr□v□ V.T. L□ksii p□ □lg□br□ i g□□m□trii. CH.1,2. M□skv□, 1999g.
10. Shn□p□rm□n L.B. Sb□rnik z□d□ch p□ □lg□br□ i t□□rii chis□l. Minsk. Visheysh□ya shk□l□. 1982 g.
11. Z□v□l□ S.T. i dr. □lg□br□ I t□□riya chis□l.CH. I,II.Ki□v. Vis□ shk□l□.1983g.