МИНИСТЕРСТВО ПО РАЗВИТИЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН УРГЕНЧСКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ИМЕНЫ МУҲАММАД АЛЬ-ХОРАЗМИЙ

Факультет «Компьютерный инжиниринг»

РЕФЕРАТ

Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формулы полной вероятности и Байеса

Выполнила: Ш.Уразматова

Ургенч – 2017

Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формулы полной вероятности и Байеса

План:

1. **Теоремы сложения вероятностей.**
2. **Теоремы умножения вероятностей.**
3. **Формула полной вероятности.**
4. **Формула Байеса.**

Пусть события *A* и *B* — несовместные, причем вероятности этих событий даны. Как найти вероятность того, что наступит либо событие *A*, либо событие *B*, т.е. вероятность суммы этих событий *A+B*? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема (сложения вероятностей несовместных событий). ***Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:***

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

<u>Доказательство</u>. Введем обозначения:

n — **общее число элементарных событий;**

m_1 — **число элементарных событий, благоприятствующих событию *A*;**

m_2 — **число элементарных событий, благоприятствующих событию *B*.**

Число элементарных событий, благоприятствующих наступлению либо события *A*, либо события *B*, равно $m_1 + m_2$. **Следовательно,**

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}.$$

Приняв во внимание, что $\frac{m_1}{n} = P(A)$ **и** $\frac{m_2}{n} = P(B)$, **окончательно получим**

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Следствие. ***Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:***

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \qquad (2)$$

Пример 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

<u>Решение</u>. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A)

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Вероятность появления синего шара (событие B)

$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому искомая вероятность равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Так как противоположные события вместе образуют достоверное событие, то из теоремы 3.1 вытекает, что

$$P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$

поэтому

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad \textbf{(3)}$$

Пример 2. Вероятность того, что день будет дождливым, равна $p = 0{,}3$. Найти вероятность того, что день будет ясным.

<u>Решение</u>. События «день дождливый» и «день ясный» — противоположные, поэтому искомая вероятность равна

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$$

Из формулы (2) получаем следующую теорему.

Теорема (умножения вероятностей зависимых событий). ***Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:***

$$P(AB) = P(A/B) \cdot P(B). \qquad \textbf{(4)}$$

Пример 3. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик наудачу взял один валик, а

затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков — конусный, а второй — эллиптический.

<u>Решение</u>. Вероятность того, что первый из взятых валиков окажется конусным (событие *B*), равна

$$P(B) = \frac{3}{10}.$$

Условная вероятность того, что второй из валиков окажется эллиптическим (событие *A*), вычисленная в предположении, что первый валик — конусный, равна

$$P(A/B) = \frac{7}{9}.$$

Тогда по формуле (3.4) искомая вероятность равна

$$P(AB) = P(A/B) \cdot P(B) = \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{30}.$$

Теперь перейдем к случаю, когда события *A* и *B* — независимые, и найдем вероятность произведения этих событий.

Так как событие *A* не зависит от события *B*, то его условная вероятность $P(A/B)$ равна его безусловной вероятности $P(A)$, т.е.

$$P(A/B) = P(A).$$

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема (умножения вероятностей независимых событий). *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad \textbf{(5)}$$

Следствие. *Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Пример 4. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

<u>Решение</u>. Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие *A*), равна

$$P(A) = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие *B*), равна

$$P(B) = \frac{7}{10} = 0{,}7.$$

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие *C*), равна

$$P(C) = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

Так как события *A*, *B* и *C* — независимые, то искомая вероятность по теореме умножения вероятностей независимых событий равна

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

Теперь перейдем к случаю, когда события *A* и *B* — совместные, и найдем вероятность суммы этих событий.

Теорема (сложения вероятностей совместных событий). ***Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий с вычетом вероятности их произведения:***

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad \textbf{(6)}$$

Пример 5. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$ Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

<u>Решение</u>. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому события *A* (попадание первого орудия) и *B* (попадание второго орудия) независимы.

Вероятность события *AB* (оба орудия дали попадание), равна

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Искомая вероятность равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}94.$$

Если н е з а в и с и м ы е события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вместе образуют достоверное событие, то вероятность появления хотя

бы одного из этих событий можно найти по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) \qquad \textbf{(7)}$$

Пример 6. В типографии имеются 4 машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие *A*).

<u>Решение</u>. Вероятность того, что машина в данный момент не работает, равна

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Тогда искомая вероятность равна

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - (0{,}1)^4 = 0{,}9999.$$

Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу событий*, если они несовместны и вместе образуют достоверное событие, т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j;\quad A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$.

Предположим, что событие *A* может наступить только при условии появления одного из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, которые назовем *гипотезами*. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P(A/H_i),\ i = \overline{1, n}$.

Так как $A\Omega = A$, то

$$A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n.$$

Из несовместности $H_1, H_2, \ldots, H_n$ вытекает несовместность событий $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$.

Применяя формулу (3.1), имеем

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n).$$

Согласно формуле (3.4) (так как события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ могут быть и зависимыми), заменив каждое слагаемое $P(AH_i)$ в правой части последнего выражения произведением $P(A/H_i)P(H_i)$, получим *формулу полной вероятности*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i). \qquad \textbf{(8)}$$

Пример 7. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго — 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь из

наудачу взятого набора — стандартная.

Решение. Обозначим через *A* событие «извлеченная деталь стандартна». Деталь может быть извлечена либо из первого набора (событие H_1), либо из второго набора (событие H_2).

Вероятность того, что деталь будет вынута из первого набора, равна

$$P(H_1) = \frac{1}{2}.$$

Вероятность того, что деталь будет вынута из второго набора, равна

$$P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

По условиям задачи $P(A/H_1) = 0{,}8$ и $P(A/H_2) = 0{,}9$.

Тогда искомая вероятность находится по формуле полной вероятности и равна

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

Пусть теперь для тех же событий, что и при выводе формулы полной вероятности, появилось событие *A*, и ставится задача отыскать условные вероятности гипотез $P(H_k/A)$, $k = \overline{1, n}$.

Из формулы (2.1) имеем

$$P(H_k/A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)}.$$

Далее, из формулы (3.4) получаем

$$P(AH_k) = P(H_k)P(A/H_k).$$

Отсюда и из предыдущего соотношения, применяя формулу полной вероятности, выводим *формулу Байеса*:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)} \qquad \textbf{(9)}$$

Пример 8. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму — 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым

контролером, равна 0,94, а вторым — 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения:

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза H_1);

2) деталь проверил второй контролер (гипотеза H_2).

По условиям задачи имеем:

$P(H_1) = 0,6$ **(вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру);**

$P(H_2) = 0,4$ **(вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);**

$P(A/H_1) = 0,94$ **(вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером);**

$P(A/H_2) = 0,98$ **(вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной вторым контролером).**

Искомую вероятность найдем по формуле Байеса

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} =$$

$$= \frac{0,6 \cdot 0,94}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0.98} \approx 0,58996.$$

Вопросы для повторения и контроля:

1. **О чем теорема сложения вероятностей несовместных событий и каково ее доказательство?**
2. **Чему равна вероятность противоположного события?**
3. **О чем идет речь в теоремах умножения вероятностей зависимых и независимых событий?**
4. **О чем теорема сложения вероятностей совместных событий?**
5. **Как можно найти вероятность появления хотя бы одного события?**
6. **Какие события образуют полную группу событий?**
7. **Что такое формула полной вероятности и как она выводится?**
8. **Что такое формула Байеса и как она выводится?**

Опорные слова:

Вероятность суммы несовместных событий, вероятность противоположного события, вероятность произведения зависимых событий, вероятность произведения независимых событий, вероятность суммы несовместных событий, вероятность появления хотя бы одного события, полная группа событий, гипотезы, формула полной вероятности, формула Байеса.