

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**

A.YUNUSOV, D.YUNUSOVA

**SONLI
SISTEMALAR**

Pedagogika oliy

ta'lim muassasalari

uchun darslik

TOSHKENT- 2011

O'QUV ADABIYOTLARI GRIFI

GUVOHNOMASI № 1436

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus
ta'lim vazirligining 200 8 yil "28" fevral
dagi 51 -buyrug'iga asosan

A. S. Yunusov,
(muallifning familiyasi ismi-sharifi)

D. L. Yunusova ning
5140100-Matematika va informatika
bakalavriat ta'lim yo'nalishi
(ta'lim yo'nalishi, mutaxassisligi, ixtisosligi)

talabalari (o'quvchilari) uchun tavsiya etilgan

"Sonli sistemalar"
(o'quv adabiyotining nomi va turi: darslik, o'quv qo'llanmasi)
nomli darsligi

ga

O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi
tomonidan litsenziya berilgan nashriyotlarda nashr
qilish uchun ruxsat berildi.



A. Paxriyev

Annotasiya

Ushbu darslik pedagogika oliy ta'lim muassasalarining matematika informatika yo'nalishi bakalavr bo'limi o'quv rejasiga kiritilgan «Sonli sistemalar» fani davlat ta'lim standartlari, o'quv dasturlari asosida yozilgan bo'lib, IV bobdan iborat. Boblarni tashkil etgan paragraflar oxirida takrorlash uchun savollar va mashqlar keltirilgan. Darslikda maktab, akademik litsey, kasb-hunar kollejlari matematika kursida o'qitiladigan barcha sonli sistemalar aksiomatik qurib chiqilgan.

Darslikdan pedagogika oliy o'quv yurtlari talabalari, umumiy o'rta ta'lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari o'qituvchilari foydalanishlari mumkin.

Taqrizchilar: fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent A.Amanov
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent R.Turg'unboev,

So'z boshi

Agar e'tibor bersak 1-sinfдан boshlab sonli sistemalarni o'quvchilarga o'rgatish boshlanadi. O'quvchilar oldin natural sonlar to'plami, ular ustidagi amallar bilan tanishadilar, so'ngra butun sonlar sistemasi, ratsional sonlar sistemasi, haqiqiy sonlar sistemasi va nihoyat, akademik litsey, kasb-hunar kollejlari o'quvchilari kompleks sonlar sistemasini o'qib o'rganadilar. Shuning uchun bu kitobda maktab, litsey, kasb-hunar kollejlarida o'qitiladigan matematikaning eng muhim mavzularidan biri bo'lgan sonli sistemalar hozirgi zamon matematikasi nuqtai nazaridan bayon qilingan.

Darslikda o'rganilishi an'ana bo'lib qolgan sonli sistemalardan tashqari p-adik sonlar sistemasi, kvaternionlar algebrasi haqida ham asosiy ma'lumotlar berilgan.

Sonli sistemalarni qurish jarayonida talabalar matematik analiz, geometriya, algebra, matematik mantiq fanlarida tanishgan chuqur matematik g'oyalarning tatbiqlarini ko'radilar.

Darslik asosan o'quv rejasiga «Sonli sistemalar» fani kiritilgan oliy o'quv yurtlari talabalari, umumiy o'rta ta'lim maktablari, akademik litsey, kasb-hunar kollejlari o'qituvchilari uchun mo'ljallangan.

Darslikda o'quvchilar mustaqil ishlarini tashkil etish uchun mo'ljallangan topshiriqlar har bir paragrafdan so'ng olingan bilimlarni tekshirish uchun savollar, mustaqil ishlash uchun misollar ko'rinishida keltirilgan.

Darslikda asosiy materialni o'zlashtirish engilroq bo'lishi uchun algebradan, matematik analizdan, matematik mantiqdan kerakli materiallar berilgan.

I BOB. TO'PLAMLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

I.1-§. To'plam. To'plamlar ustida amallar

To'plam matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan biri bo'lib u misollar yordamida tushuntiriladi.

To'plam ma'lum bir xossa yoki xususiyatga ega bo'lgan predmetlar yoki ob'ektlar majmuasidan iborat bo'ladi. Masalan, Afrikadagi barcha daryolar yoki bir fakultetdagi barcha guruhlar majmuasi to'plam bo'la oladi. To'plamni tashkil qiluvchi predmetlar yoki ob'ektlar to'plamning *elementlari* deyiladi. To'plam lotin alifbosining bosh harflari A, B, C,... lar orqali belgilanadi.

Misollar: Barcha natural sonlar to'plami $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, butun sonlar to'plami $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ko'rinishda belgilanadi. Q orqali barcha ratsional sonlar to'plamini, ya'ni $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, $p, q \in Z$ kasr ko'rinishida yozish mumkin bo'lgan sonlarni belgilaymiz. R orqali esa barcha haqiqiy sonlar to'plamini belgilaymiz.

a ob'ekt A to'plamning elementi bo'lsa, $a \in A$, aksincha a ob'ekt A to'plamning elementi bo'lmasa, $a \notin A$ yoki $a \bar{\in} A$ orqali belgilanadi. Agar A to'plamning har bir elementi V to'plamning ham elementi bo'lsa, $A \subset B$ orqali belgilanadi va A to'plam V to'plamning *to'plamostisi* deyiladi.

Bir xil elementlardan tashkil topgan to'plamlar *teng to'plamlar* deyiladi. A va B to'plamlar teng bo'lsa $A=B$ ko'rinishda belgilaymiz. A va B to'plamlarning teng bo'lishi uchun $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'lishi zarur va etarli ekanligini ko'rish qiyin emas. Bitta ham elementi yo'q to'plamni *bo'sh to'plam* deb ataymiz va $\emptyset$ yoki Λ orqali belgilaymiz.

I.1.1-ta'rif. *A va B to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'lgan barcha elementlardan tashkil topgan A va B to'plamlarning birlashmasi yoki yig'indisi deyiladi.*

A va B to'plamlarning yig'indisi $A \cup B$ orqali belgilanadi.

I.1.2-misol. $A = \{1, 2, O, \Delta, \Diamond\}$, $B = \{1, O, \Delta, 8, 9\}$ to'plamlarning birlashmasi $A \cup B = \{1, 2, O, \Delta, \Diamond, 8, 9\}$ bo'lishi ravshan

I.1.3-ta'rif. *A va B to'plamlarning kesishmasi yoki ko'paytmasi deb, A va B to'plamlarning barcha umumiy, ya'ni A ga ham, B ga ham tegishli elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi.*

A va B to'plamlarning kesishmasi $A \cap B$ ko'rinishida belgilanadi.

I.1.2-misoldagi A va B lar uchun $A \cap B = \{1, O, \Delta\}$ bo'ladi.

I.1.4-ta'rif. *A va B to'plamlarning ayirmasi deb, A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plamga aytiladi.*

A va B to'plamlarning ayirmasi $A \setminus B$ ko'rinishida belgilanadi.

I.1.2-misoldagi A va B to'plamlar uchun $A \setminus B = \{2, \Diamond\}$, B va A to'plamlar uchun esa $B \setminus A = \{8, 9\}$.

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ to'plam A va B to'plamlarning *simmetrik ayirmasi* deyiladi va $A \Delta B$ orqali belgilanadi. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ bo'lishini isbot qilishni o'quvchilarga havola etamiz.

I.1.5-ta'rif. *Agar $A \subset B$ bo'lsa, $B \setminus A$ to'plam A to'plamning B to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam deyiladi.*

To'ldiruvchi to'plam $\subset A$ yoki A' orqali belgilanadi. Shunday qilib, $B \setminus A \subset A' = B \setminus A$.

Matematikaning ba'zi sohalarida faqatgina birorta to'plam va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Masalan, planimetriya tekislik va uning barcha to'plamostilari bilan, stereometriya esa fazo va uning barcha to'plamostilari bilan ish ko'radi.

Agar biror E to'plam va faqat uning to'plamostilari bilan ish ko'rsak, bunday E to'plamni universal to'plam deb ataymiz. Universal to'plamning barcha to'plamostilari to'plamini $B(E)$ orqali belgilaymiz.

To'plamlar ustida amallarning xossalari.

To'plamlar ustida bajariladigan algebraik amallar quyidagi xossalarga ega.

$$1^\circ. \begin{matrix} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{matrix} \text{ kesishma va birlashmaning kommutativligi;}$$

$$2^\circ. \begin{matrix} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{matrix} \text{ kesishma va birlashmaning assosiativligi;}$$

3°. Kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

4°. Birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$5^\circ. (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \cap (B \cap C)^c;$$

$$6^\circ. A \setminus B = A \setminus (A \cap B);$$

$$7^\circ. (A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n \cup \dots \text{ birlashmani } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n \cap \dots \text{ kesishmani } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

deb belgilab olsak, yana quyidagi xossalarga ega bo'lamiz. $A_i, i=1, \dots$ to'plamlar birorta X to'plamning to'plamostilari bo'lsin, u holda

$$8^\circ. X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i);$$

$$9^\circ. X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i);$$

Bu tengliklarni isbotlash uchun, tengliklarning chap tomonidagi to'plamga tegishli ixtiyoriy element, tenglikning o'ng tomonidagi to'plamga tegishli va to'plamning o'ng tomonidagi to'plamga tegishli ixtiyoriy element chap tomonidagi to'plamga ham tegishli bo'lishini ko'rsatish etarli.

Yuqoridagi xossalarning bir nechtasini isbot qilib ko'raylik.

3⁰-ning isboti: ixtiyoriy $x \in (A \cap (B \cup C))$ bo'lsin, u holda kesishmaning ta'rifiga asosan, $x \in A$ va $x \in (B \cup C)$ bo'ladi. To'plamlar birlashmasining ta'rifiga asosan $x \in B$ yoki $x \in C$ bo'ladi. Demak, $x \in A$ va $x \in B$ yoki $x \in A$ va $x \in C$ bo'ladi. Bu esa $x \in (A \cap B)$ yoki $x \in (A \cap C)$ degani. Oxirgi munosabat $x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$ bo'lishini bildiradi. Shunday qilib, har qanday $x \in (A \cap (B \cup C))$ uchun, $x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$ ekan.

Endi $x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))$ bo'lsin, u holda to'plamlar birlashmasi amalining ta'rifiga ko'ra $x \in (A \cap B)$ yoki $x \in (A \cap C)$ bo'ladi. To'plamlar kesishmasining ta'rifiga ko'ra $x \in A$ va $x \in B$ yoki $x \in C$ bo'ladi, u holda $x \in (A \cap (B \cup C))$.

8⁰- xossaning isboti: ixtiyoriy $x \in (X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ bo'lsin, u holda $x \in X$ va $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Demak, $x \notin A_1$ va $x \notin A_2$ va... va $x \notin A_n, \dots$. U holda $x \in (X \setminus A_1)$, $x \in (X \setminus A_2)$, ..., $x \in (X \setminus A_n)$ va hokazo, ya'ni $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$.

Aksincha, $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$ bo'lsin, u holda to'plamlar kesishmasining ta'rifiga ko'ra $x \in (X \setminus A_1)$ va $x \in (X \setminus A_2)$ va ... va $x \in (X \setminus A_n)$ va hokazo. To'plamlar ayirmasi amalining ta'rifiga ko'ra $x \in X$ va $x \notin A_1$ va $x \notin A_2$ va ... va $x \notin A_n$ va ... bo'ladi. To'plamlar birlashmasining ta'rifiga ko'ra $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Demak $x \in (X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$.

Bu xossalardan tashqari to'plamlar ustida bajariladigan amallar isboti ravshan bo'lgan quyidagi xossalarga ega:

$$10^{\circ}. A \cup A = A$$

$$11^{\circ}. A \cap A = A$$

$$12^{\circ}. A \subset B \text{ bo'lsa, } (A \subset B)' = A' \supset B'.$$

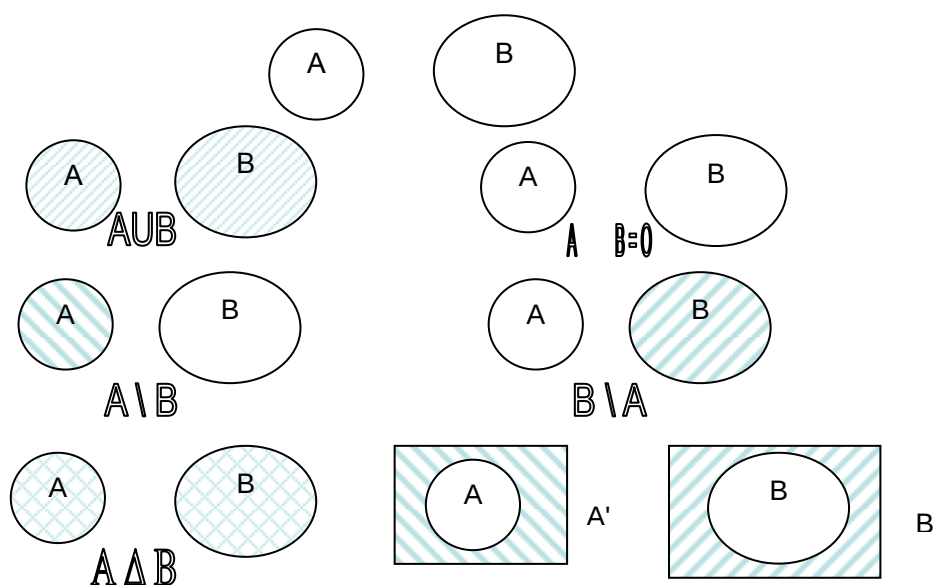
$$13^{\circ}. A \subset C \text{ va } B \subset C \text{ bo'lsa, } (A \cup B)' = A' \cap B' \text{ va } (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

$$14^\circ. A \cap \emptyset = \emptyset$$

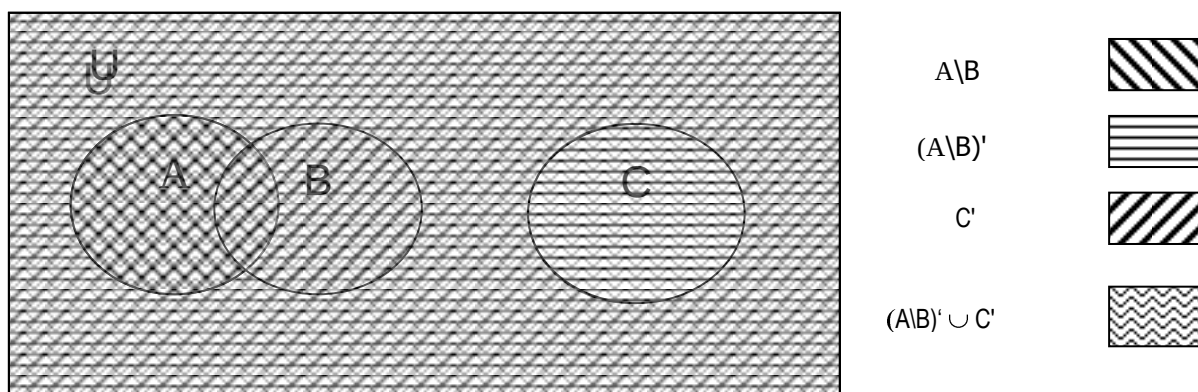
$$15^\circ. A \cup \emptyset = A$$

To'rlamlar ustida bajariladigan amallarni **Eyler-Venn** diagrammalari deb ataladigan shakllar yordamida ifoda qilish mumkin.

Universal to'plam to'g'ri to'rt burchak shaklida, uning to'plamostilari to'g'ri to'rtburchak ichidagi doiralar orqali ifoda qilinadi. U holda, ikki to'plam birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi, to'lduruvchi to'plamlar, ikki to'plamning simmetrik ayirmasi mos ravishda quyidagicha ifodalanadi:



I.1.6-misol. $(A \setminus B)' \cup C'$ to'plamni Eyler-Venn diagrammalari yordamida tasvirlang.



Takrorlash uchun savollar

1. To'plam tushunchasiga misollar keltiring.
2. To'plam elementi deb nimaga aytiladi?
3. Qism to'plam ta'rifini ayting.
4. Teng to'plamlar tushunchasiga ta'rif bering.
5. Bo'sh to'plam, universal to'plamlar ta'rifini ayting.
6. To'plamlar birlashmasi, kesishmasiga ta'rif bering.
7. To'plamlar ayirmasi, simmetrik ayirmasiga ta'rif bering.
8. To'plamlar birlashmasining qanday xossalari bilasiz?
9. To'plamlar kesishmasining qanday xossalari bilasiz?
10. To'plamlar ustida bajariladigan amallarning xossalari qanday tushunchalar yordamida isbotlanadi?
11. Eyler-Venn diagrammalarini tushuntiring.

M a s h q l a r

1. Quyidagi ayniyatlarni isbot qiling:
 - a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
 - b) $A \setminus (B \cap C \cap D) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (A \setminus D)$
 - c) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$
 - d) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
2. Quyidagi tasdiqlarni isbot qiling:
 - a) agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda $(A \setminus B) \cup A = A$ bo'ladi;
 - b) $A \subset B$ bo'lishi uchun $A \cup B = A$ bo'lishi zarur va etarli;
 - c) agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda $A \setminus C \subset B \setminus C$;
 - d) agar $A \subset B$ bo'lsa, $A \cup C \subset B \cup C$ bo'ladi.
3. Agar $n(X) - X$ chekli to'plamning elementlari sonini bildirsin. U holda A , B va C chekli to'plamlar uchun , $n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C)$ tenglikni isbotlang.
4. Elementlari soni n ta bo'lgan to'plamning barcha to'plamostilari soni 2^n ta bo'lishini isbot qiling.

I.2-§. Mulohaza. Mulohazalar ustida amallar

Rost yoki yolg'onligini bir qiymatli aniqlash mumkin bo'lgan darak gap *mulohaza* deb tushuniladi.

«Qayin – daraxt», «Toshkent – poytaxt shahar», « $5 > 2$ », «9 – may - bayram» kabi gaplar mulohazalarga misol bo'la oladi. Lekin har qanday gap ham mulohaza bo'la olmaydi, masalan, «Yashasin O'zbekiston yoshlari!», «Sen nechanchi kursda o'qiysan?» kabi gaplar mulohazalar emas, Chunki ular darak gaplar emas.

Demak, biror bir gap mulohaza bo'lishi uchun, u albatta darak gap bo'lishi va rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanishi shart.

O'zbek tilidagi barcha mulohazalar to'plamini M orqali belgilaylik. M to'plamning elementlarini lotin alifbosining bosmachas, indeksli yoki indeksiz bosh harflari bilan belgilashga kelishib olamiz. Ya'ni $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots, A_n$ - mulohazalardir. A mulohaza rost bo'lsa, unga 1 ni, yolg'on bo'lsa, 0 ni mos qo'yamiz, ya'ni M to'plamga quyidagi akslantirishni kiritamiz:

$$\begin{cases} \mu(A) = 1, \text{ agar } A\text{-rost mulohaza bo'lsa;} \\ \mu(A) = 0, \text{ agar } A\text{-yolg'on mulohaza bo'lsa.} \end{cases}$$

$\mu(A)$ qiymatga A mulohazaning mantiqiy qiymati deyiladi. Rostlik jadvallarini to'ldirganimizda yozuvni ixchamlashtirish maqsadida $\mu(A)$ o'rniga A yozishni kelishib olamiz.

I.2.1 – ta'rif. A va B mulohazalarning *kon'yunksiyasi* deb, A va B mulohazalar rost bo'lgandagina rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan $A \& B$ mulohazaga aytiladi.

Mulohazalar kon'yunksiyasi mantiqiy ko'paytirish deb ham ataladi va $A \cdot B$ yoki $A \wedge B$ kabi belgilanishi mumkin.

I.2.2 - ta'rif. A va B mulohazalar *diz'yunksiyasi* deb, A va B mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \vee B$ mulohazaga aytiladi.

Mulohazalar diz'yunksiyasi mantiqiy qo'shish deb ham yuritiladi va $A + B$ kabi belgilanishi ham mumkin.

I.2.3 - ta'rif. A mulohaza rost bo'lganda yolg'on, yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan $\neg A$ mulohaza A mulohazaning inkori deyiladi.

A mulohazaning inkori $\bar{A}$ orqali belgilanishi ham mumkin.

Mulohazalar ustida bajariladigan amallar rostlik jadvali deb ataladigan jadvallar yordamida ham berilishi mumkin. Yuqorida ta'riflangan amallar rostlik jadvali quyidagi ko'rinishda bo'ladi :

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Bundan tashqari yana bir qancha amallar, ya'ni :

$\Rightarrow$ - implikasiya yoki mantiqiy hulosa,

$\Leftrightarrow$ yoki $\equiv$ - ekvivalensiya yoki mantiqiy teng kuchlilik,

$|$ - Sheffer shtrixi,

$\downarrow$ - Pirs strelkasi,

$\oplus$ - qat'iy diz'yunksiya, ya'ni 2 modul' bo'yicha qo'shish amallari quyidagi jadval orqali beriladi:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A B$	$A \downarrow B$	$A \oplus B$
1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday gaplar mulohaza bo'ladi ?
2. Mulohazalar kon'yunksiyasi, diz'yunksiyasi, implikasiyasi, ekvivalensiyasi hamda inkori ta'riflarini ayting.
3. Rostlik jadvali nima ?
4. Biri ikkinchisining inkori bo'lgan mantiq amallarini keltiring.

M a s h q l a r

1. Quyidagi gaplar ichidan mulohazalarni ajrating va ularning rost yoki yolg'on ekanligini aniqlang :

- 1). Sirdaryo Orol dengiziga quyiladi.
- 2). Siz qaysi oliygohda o'qiysiz ?
- 3). O'zbekiston Mustaqilligining 15 yilligi muborak bo'lsin!
- 4). Har qanday son musbat.
- 5). 0 har qanday haqiqiy songa bo'linadi.
- 6). $3x^3 - 5u + 9$.

2. Quyidagi juftliklarning qaysi birida mulohazalar bir-birining inkori :

- 1) $2 < 0$, $2 > 0$.
- 2) $6 < 9$, $6 \geq 9$.
- 3) «f- funksiya – toq» , «f – funksiya – juft» ?

3. Quyidagi mulohazalarning rostlik qiymatini aniqlang:

- 1). Agar $12 \mid 6$ ga bo'linsa, u holda $12 \mid 3$ ga bo'linadi.
- 2). Agar $11 \mid 4$ ga bo'linsa, u holda $11 \mid 2$ ga bo'linadi.
- 3). Agar $15 \mid 3$ ga bo'linsa, u holda $15 \mid 6$ ga bo'linadi.
- 4). $12 \mid 6$ ga bo'linadi, faqat va faqat shu holda-ki, agar $12 \mid 3$ ga bo'linsa.
- 5). $15 \mid 6$ ga bo'linadi, faqat va faqat shu holda-ki, agar $15 \mid 3$ ga bo'linsa.

4. Agar A orqali «9 - murakkab son», V orqali «8 - tub son» degan mulohazalar belgilangan bo'lsa, u holda quyidagi mulohazalarni so'zlar orqali ifodalang va rostlik qiymatini aniqlang:

$$A \Rightarrow B, B \Rightarrow A, \neg A \Rightarrow B, \neg B \Rightarrow A, \neg A \Rightarrow \neg B, \neg B \Rightarrow \neg A, \\ A \Rightarrow \neg B, B \Rightarrow \neg A, A \Leftrightarrow B, \neg A \Leftrightarrow \neg B, \neg A \Leftrightarrow B, A \Leftrightarrow \neg B.$$

I.3 -§. Mulohazalar algebrasi. Mulohazalar algebrasi alfaviti, formula tushunchasi

Mulohazalar algebrasi tushunchasini kiritish uchun algebra tushunchasini eslatib o'tamiz. $A \neq \emptyset$ to'plam va Ω - A to'plamda aniqlangan algebraik amallar to'plami berilgan bo'lsin. U holda (A, Ω) - juftlikni *algebra* deb ataymiz.

I.3.1 - ta'rif. $\langle M, \{ \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow \} \rangle$ - *universal algebra mulohazalar algebrasi deyiladi.*

Mulohazalar algebrasini qisqacha MA deb belgilaymiz.

MA ning alfaviti quyidagilardan iborat :

$A, B, C, \dots$ – mulohazalarni belgilash uchun ishlatiladigan xarflar;

$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ - mantiq amallarini belgilash uchun ishlatiladigan belgilar;

$(,)$ - chap va o'ng qavslar .

I.3.2 - ta'rif. 1). *Har qanday mulohaza formuladir.*

2). *Agar $\mathcal{T}$ va $\mathcal{R}$ lar formulalar bo'lsa, u holda*

$(\neg \mathcal{T}), (\mathcal{T} \wedge \mathcal{R}), (\mathcal{T} \vee \mathcal{R}), (\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{R}), (\mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{R})$ lar ham formulalardir.

3). *1) va 2) lar yordamida hosil qilingan ifodalargina formulalardir.*

Masalan, A, V, C lar 1) ga asosan formulalar; $(\neg B), (A \Rightarrow (\neg B)), ((A \Rightarrow (\neg B)) \Rightarrow A) \wedge C$ lar 2) ga asosan formulalardir.

Formulalarning tarkibidagi qavslarni kamaytirish maqsadida mantiq amallarining bajarilish tartibini $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ deb belgilab olamiz. Bundan tashqari tashqi qavslarni ham ehtiyoj bo'lmaganda tashlab yuboramiz. Bunday o'zgartirishlardan keyin $((A \wedge B) \vee (\neg A) \Rightarrow C)$ formulani $A \wedge B \vee (\neg A \Rightarrow C)$ ko'rinishda yozishimiz mumkin bo'ladi.

I.3.3-ta'rif. *Formulada qatnashgan mantiq amallari soni formulaning rangi deyiladi.*

Yuqorida keltirilgan formulaning rangi 4 ga teng.

I.3.4- ta'rif. 1. $\mathcal{T}$ formula - A dan iborat bo'lsa, uning formulaosti faqat uning o'zidan iborat.

2. Agar formulaning ko'rinishi $\mathfrak{F} * \mathfrak{H}$ dan iborat bo'lsa, u holda uning formulaostilari $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F} * \mathfrak{H}$, hamda $\mathfrak{F}$ va $\mathfrak{H}$ larning barcha formulaostilaridan iborat bo'ladi. Bu erda $*$ - $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ amallaridan biri.

3. Agar formulaning ko'rinishi $\neg \mathfrak{F}$ bo'lsa, uning formulaostilari $\mathfrak{F}$ formula, $\mathfrak{F}$ formulaning barcha formulaostilari va $\neg \mathfrak{F}$ ning o'zidan iborat.

4. Boshqa formulaostilari yo'q.

I.3.5 - misol. $(A \wedge B) \Rightarrow \neg A$ formulaning formulaostilari ta'rifga ko'ra quyidagilardan iborat: A , B , $\neg A$, $A \wedge B$, $(A \wedge B) \Rightarrow \neg A$.

Agar $\mathfrak{F}$ formula tarkibiga faqat $A_1, A_2, \dots, A_n$ -mulohazalar kirgan bo'lsa, bu mulohazalarni *propozisional o'zgaruvchilar* deb ataymiz va formulani ehtiyoj bo'lganda $\mathfrak{F}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ko'rinishda yozamiz.

Koordinatalari 0 yoki 1 lardan iborat $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ vektor (bu erda i_k lar 0 yoki 1 lardan iborat) propozisional o'zgaruvchilarning *qiymatlari tizimi* deyiladi.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ propozisional o'zgaruvchilarning barcha qiymatlari tizimi 2^n ta ekanligini ko'rish qiyin emas. Demak, agar mulohazalar algebrasining biror $\mathfrak{F}$ formulasi tarkibiga n ta mulohaza kirgan bo'lsa, bu formulaning rostlik jadvali 2^n ta qiymatlar tizimidan tashkil topgan bo'ladi.

I.3.6 - misol. $A \wedge B \Rightarrow \neg A \vee C$ formulaning rostlik jadvalini tuzing.

A	B	C	$\neg A$	$A \wedge B$	$\neg A \vee C$	$A \wedge B \Rightarrow \neg A \vee C$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1

Takrorlash uchun savollar

1. Mulohazalar algebrasi deb nimaga aytiladi ?
2. Mulohazalar algebrasining alfavitini keltiring.
3. Mulohazalar algebrasining formulasi deb nimaga aytiladi ?
4. Mantiq amallarining bajarilish tartibini ayting.
5. Formulaning rangi nima?
6. Formulaosti nima?
7. Formula uchun rostlik jadvali qanday tuziladi ?

M a s h q l a r

1. Quyidagi ifodalardan qaysilari formula ekanligini aniqlang :
 - 1) $A \vee B \wedge \neg A \Leftrightarrow C \Rightarrow \neg B$;
 - 2) $A \Leftrightarrow B \vee C \neg A$;
 - 3) $\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg \neg C$;
 - 4) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B \Leftrightarrow C) \wedge (\wedge B)$.
2. $A \vee B \wedge \neg A \Leftrightarrow C$ formuladan qavslar yordamida hosil qilish mumkin bo'lgan barcha formulalarni toping.
3. Quyidagi formulalarning barcha formula ostilarini aniqlang :
 - 1) $A \Leftrightarrow B \vee C \wedge \neg A$;
 - 2) $((A \Leftrightarrow B) \wedge \neg C) \Rightarrow (((A \vee B) \Rightarrow A) \Rightarrow \neg B)$;
 - 3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Leftrightarrow \neg B) \Rightarrow (A \wedge B))$;
 - 4) $A \Rightarrow \neg B \vee C \Rightarrow \neg A \Rightarrow \neg C$.
4. Yuqoridagi misollarda keltirilgan formulalar ranglarini aniqlang.
5. Yuqoridagi misollarda keltirilgan formulalar uchun rostlik jadvallari tuzing.

I.4 - § . Teng kuchli formulalar. Tautologiya – mantiq qonuni.

I.4.1-ta’rif. MA ning $\mathfrak{S}$ va $\mathfrak{R}$ formulalari berilgan bo’lib, bu formulalar tarkibiga kirgan barcha mulohazalar $A_1, \dots, A_m$ - lardan iborat bo’lsin. Agar $A_1, \dots, A_m$ mulohazalarning barcha qiymatlar tizimlari $(i_1, \dots, i_m)$ lar uchun $\mathfrak{S}$ va $\mathfrak{R}$ formulalar bir hil qiymatlar qabul qilsalar, u holda, bu formulalar teng kuchli formulalar deyiladi.

$\mathfrak{S}$ va $\mathfrak{R}$ formulalarning teng kuchliligi $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{R}$ ko’rinishda ifodalanadi.

I.4.2 - ta’rif. Mulohazalar algebrasining $\mathfrak{S}(A_1, \dots, A_n)$ formulasi $A_1, \dots, A_n$ mulohazalarning barcha qiymatlari tizimi $(i_1, \dots, i_n)$ da 1 qiymat qabul qilsa, aynan rost formula yoki tautologiya yoki mantiq qonuni deyiladi.

Aynan rost formulani qisqacha AR deb belgilaymiz.

I.4.3-ta’rif. MA ning $\mathfrak{S}(A_1, \dots, A_n)$ formulasi $A_1, \dots, A_n$ mulohazalarning barcha qiymatlari tizimi $(i_1, \dots, i_n)$ da 0 qiymat qabul qilsa, aynan yolg’on yoki ziddiyat deyiladi

I.4.4-ta’rif. Agar mulohazalar algebrasining $\mathfrak{S}(A_1, \dots, A_n)$ formulasi $A_1, \dots, A_n$ larning kamida bitta $(i_1, \dots, i_n)$ qiymatlari tizimida 1 ga teng qiymat qabul qilsa, u holda bu formula bajariluvchi formula deyiladi.

I.4.5-teorema. Mulohazalar algebrasining $\mathfrak{S}$ va $\mathfrak{R}$ formulalari teng kuchli formulalar bo’lishi uchun, $\mathfrak{S} \Leftrightarrow \mathfrak{R}$ formula aynan rost formula bo’lishi zarur va etarli.

Isbot. $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{R}$ bo’lsin. U holda $\mathfrak{S}$ va $\mathfrak{R}$ formulalarga kirgan barcha propozisional o’zgaruvchilarning barcha qiymatlari tizimlarida $\mathfrak{S}$ va $\mathfrak{R}$ formulalar bir xil qiymatlar qabul qiladilar. YA’ni, $\mathfrak{S} \Leftrightarrow \mathfrak{R} \equiv 1$ bo’ladi.

Aksincha, $\mathfrak{S} \Leftrightarrow \mathfrak{R} \equiv 1$ bo’lsa, $\mathfrak{S} \equiv 1$ bo’lganda $\mathfrak{R} \equiv 1$ va $\mathfrak{S} \equiv 0$ bo’lganda $\mathfrak{R} \equiv 0$ bo’ladi.

I.4.6. Asosiy teng kuchli formulalar.

1. $A \wedge A \equiv A$ (kon’yunksiyaning idempotentlik qonuni).

2. $A \vee A \equiv A$ (diz'yunksiyaning idempotentlik qonuni).
3. $A \wedge 1 \equiv A$.
4. $A \vee 1 \equiv 1$.
5. $A \wedge 0 \equiv 0$.
6. $A \vee 0 \equiv A$.
7. $A \vee \neg A \equiv 1$ – uchinchisini inkor qilish qonuni.
8. $A \wedge \neg A \equiv 0$ - ziddiyatga keltirish qonuni.
9. $\neg(\neg A) \equiv A$ - qo'sh inkor qonuni.
10. $A \wedge (B \vee A) \equiv A$.
11. $A \vee (B \wedge A) \equiv A$.
12. $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
13. $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$.
14. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.
15. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$.
16. $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$.
17. $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$.
18. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ – kon'yunksiyaning kommutativlik qonuni.
19. $A \vee B \equiv B \vee A$ – diz'yunksiyaning kommutativlik qonuni.
20. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ - $\wedge$ ning $\vee$ ga nisbatan distributivlik qonuni.
21. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ - $\vee$ ning $\wedge$ ga nisbatan distributivlik qonuni.
22. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ – kon'yunksiyaning assosiativlik qonuni.
23. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ – diz'yunksiyaning assosiativlik qonuni.

Bu tengkuchliliklar rostlik jadvallari yordamida isbotlanishi mumkin.
Masalan, 20 - tengkuchlilikning isboti uchun rostlik jadvali tuzamiz :

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Rostlik jadvalidagi oxirgi ikki ustunlar mos qatorlaridagi qiymatlar tengligidan ko'rinadiki : $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Takrorlash uchun savollar

1. Mulohazalar algebrasining teng kuchli formulalariga ta'rif bering.
2. Mantiq qonuni deb nimaga aytiladi ?
3. Mulohazalar algebrasida ziddiyat deb nimaga aytiladi?
4. Bajariluvchi formula ta'rifini ayting.
5. Mulohazalar algebrasining formulalari teng kuchli bo'lishining zarur va etarli shartlarini keltiring.
6. Uchinchisini inkor qilish, yutilish, qo'sh inkor va ziddiyatga keltirish qonunlarini ifodalang.

M a s h q l a r

1. Quyidagi formulalarning aynan rost ekanligini isbotlang :
 - 1) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$;
 - 2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

$$3) (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B));$$

$$4) (A \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee C) \Rightarrow (C \vee B)).$$

2. Quyidagi formulalarning aynan yolg'on ekanligini isbotlang :

$$1) A \wedge (B \wedge (\neg A \vee \neg B));$$

$$2) \neg(\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg(A \wedge B));$$

$$3) \neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow A));$$

$$4) \neg(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C)).$$

3. Quyidagi formulalarning qaysilari bajariluvchi ekanligini aniqlang :

$$1) \neg(A \Rightarrow \neg A);$$

$$2) (A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A);$$

$$3) (B \Rightarrow (A \wedge C)) \wedge \neg((A \vee C) \Rightarrow B);$$

$$4) \neg((A \Leftrightarrow \neg B) \vee C) \wedge B.$$

4. I.4.6 da keltirilgan tengkuchliliklarni rostlik jadvallari yordamida isbotlang.

I.5- §. Predikat tushunchasi. Predikatlar ustida amallar.

Predikatlar algebrasi mulohazalar algebrasini kengaytirish natijasida hosil qilingan bo'lib, mulohazalar algebrasini o'z ichiga oladi. Predikatlar algebrasining asosiy tushunchasi – predikat tushunchasi bilan tanishib chiqaylik. Bizga birorta ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan predmetlar to'plami P berilgan bo'lsin. P to'plamning ixtiyoriy « a » elementi haqida aytilgan mulohazani $R(a)$ ko'rinishida belgilaymi. $R(a)$ rost yoki yolg'on mulohaza bo'lishi mumkin. Masalan, P – natural sonlar to'plamidan iborat bo'lsin, $R(a) - \langle a - \text{tub son} \rangle$ - degan darak gap bo'lsin. U holda $R(1) - \langle 1 - \text{tub son} \rangle$ - yolg'on mulohaza, $R(2) - \langle 2 - \text{tub son} \rangle$ - rost mulohaza, $R(3) - \langle 3 - \text{tub son} \rangle$ - rost mulohaza, $R(4) - \langle 4 - \text{tub son} \rangle$ - yolg'on mulohaza va h. k.

Ko'rinib turibdiki, $R(a)$ - a ning o'rniga P to'plamning aniq elementlarini qo'yganimizda rost yoki yolg'on mulohazalarga aylanar ekan.

Xuddi Shunday, P to'plamining ikkita elementi haqida aytilgan mulohaza $R(a, b)$ ko'rinishida belgilanishi mumkin va h.k.

I.5.1 - ta'rif. *Bo'sh bo'lmagan P to'plam berilgan bo'lsin.*

$R : P^n \rightarrow \{0, 1\}$, $n = 0, 1, \dots$ ko'rinishdagi har qanday funksiya n o'rinli predikat deyiladi.

$n=0$ bo'lganda $P^0 = \{\emptyset\}$ bo'lib, $R(\emptyset) = 0$ yoki $R(\emptyset) = 1$ ko'rinishdagi ajratilgan elementlar hosil bo'ladi. Bu ajratilgan elementlarni yolg'on yoki rost mulohaza deb tushunishimiz mumkin. Shunday qilib o o'rinli predikat – mulohazadir.

Ikki o'rinli predikatga misol keltiraylik. Natural sonlar to'plami N da berilgan $R(a, b)$ – « a son b soniga qoldiqsiz bo'linadi» - degan predikatni ko'rib chiqaylik. Uning qiymatlari quyidagicha :

$$R(1, 1) = 1, R(1, 2) = 0, \dots, R(2, 1) = 1$$

$$R(2, 2) = 1, R(2, 3) = 0, \dots, R(3, 1) = 1 \text{ va h.k.}$$

Bir o'rinli predikatlar bilan to'liqroq tanishib chiqamiz.

Predikatlar ustida ham mulohazalar ustida bajarilgan amallarni kiritishimiz mumkin. $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ amallari bir o'rinli predikatlar uchun quyidagicha aniqlanadi :

P to'plamda aniqlangan R va Q predikatlar berilgan bo'lsin. U holda :

$(\neg R)$ – R ning inkori ;

$(R \wedge Q)$ – P va Q ning kon'yunksiyasi ;

$(P \vee Q)$ – P va Q ning diz'yunksiyasi ;

$(P \Rightarrow Q)$ – P va Q ning implikasiyasi ;

$(P \Leftrightarrow Q)$ – P va Q ning ekvivalensiyasi quyidagicha aniqlanadi :

$$(\neg R)(x) = \neg(R(x)), (R * Q)(a) = R(x) * Q(x),$$

bu erda $*$ - $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ amallardan biri.

I.5.2 - misol. N – natural sonlar to'plamida berilgan $R(x)$ – « x – tub son», $Q(x)$ – « x – toq son » - predikatlar berilgan bo'lsin. U holda $(\neg R)(x) = \neg(R(x))$ – « x – tub son emas » degan predikatdir. x ning bir

nechta qiymatlarida $\neg R$ predikatning qiymatlarini topamiz :

$$(\neg R)(3) = \neg(R(3)) = \neg 1 = 0, (\neg R)(4) = \neg(R(4)) = \neg 0 = 1$$

$(Q \wedge R)(x)$ – « x – toq va tub son » - degan predikatni ham x ning bir nechta qiymatlarida rost yoki yolg'on bo'lishini ko'ramiz

$$(Q \wedge P)(1) = Q(1) \wedge P(1) = 1 \wedge 0 = 0,$$

$$(Q \wedge P)(2) = Q(2) \wedge P(2) = 0 \wedge 1 = 0,$$

$$(Q \wedge P)(3) = Q(3) \wedge P(3) = 1 \wedge 1 = 1.$$

Shunga o'xshash $R \vee Q, P \Rightarrow Q, P \Leftrightarrow Q$ predikatlarning mohiyatini tushunib olish qiyin emas.

Predikatlar ustida bajariladigan yana ikkita amal kiritamiz :

I.5.3 - ta'rif. P to'plamda aniqlangan $R(x)$ predikat berilgan bo'lsin. Agar x ning P to'plamdagi barcha qiymatlarida $R(x) = 1$ bo'lsa, u holda $\forall x R(x)$ – ifoda rost mulohaza, aks holda, ya'ni P to'plamning kamida bitta x_0 elementi uchun $R(x_0) = 0$ bo'lsa, yolg'on mulohazadir.

I.5.4 - ta'rif. $\exists x R(x)$ – ifoda x ning P to'plamdagi kamida bitta x_0 elementi uchun $R(x_0) = 1$ bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on mulohazadir.

$\forall$ - belgi, umumiylik kvantorining belgisi, $\exists$ - belgi, mavjudlik kvantorining belgisi. $\forall x R(x)$ – «barcha x lar uchun $R(x)$ bo'ladi », $\exists x R(x)$ – «Shunday x topiladi-ki, $R(x)$ bo'ladi» deb o'qiladi.

$\forall x R(x)$ va $\exists x R(x)$ ifodalardagi x o'zgaruvchi $\forall$ yoki $\exists$ kvantorlari orqali bog'langan, yo bo'lmasa, x o'zgaruvchiga $\forall$ yoki $\exists$ kvantori osilgan deyiladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Predikat deb nimaga aytiladi ?
2. Predikatlar ustida mantiq amallari qanday bajariladi ?
3. Predikatning rostlik sohasiga ta'rif bering.
4. Predikatlardan kvantorlar yordamida mulohaza hosil qilishni tushuntiring.

5. Mavjudlik va umumiylik kvantorlari yordamida hosil bo'lgan mulohazalarning rostlik qiymatlari qanday aniqlanadi ?

M a s h q l a r

1. Quyidagi ifodalar ichidan predikatlarni ajrating :

1. « x 5 ga bo'linadi » ($x \in \mathbb{N}$) ;
2. « $x^2 + 2x + 4$ » ($x \in \mathbb{R}$) ;
3. « $\text{ctg } 45^\circ = 1$ » ;
4. « x va y lar z ning turli tomonlarida yotadi» (x va y lar tekislikdagi nuqtalar to'plamiga, z esa tekislikdagi to'g'ri chiziqlar to'plamiga tegishli).

2. Quyidagi mulohazalarni o'qing va ularning rostlik qiymatini aniqlang :

- 1) $\forall x \exists y (x + y = 7)$;
- 2) $\exists y \forall x (x + y = 7)$;
- 3) $\exists x \exists y (x + y = 7)$;
- 4) $\forall x \forall y (x + y = 7)$;
- 5) $\forall x ((x^2 > x) \Leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0)))$;
- 6) $\exists a \forall b \exists x (x^2 + ax + b = 0)$.

3. Kvantorlar yordamida quyidagi predikatlardan hosil qilish mumkin bo'lgan barcha mulohazalarni quring va ularning rostlik qiymatini aniqlang :

- 1) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.
- 2) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.
- 3) $\sin x = \sin y$.
- 4) $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (x > 0)$.

4. Quyidagi predikatlarning rostlik sohalarini aniqlang :

- 1) « $x^2 + 4 > 0$ » , $M = \mathbb{R}$.
- 2) « $x_1 < x_2$ » , $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$.
- 3) « $\sin x > 1$ » , $M = \mathbb{R}$.
- 4) « x 3 ga karrali » , $M = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$.

5. Quyidagi predikatlar teng kuchli bo'ladigan to'plamni aniqlang :
- 1) « x 3 ga karrali » , « x 7 ga karrali ».
 - 2) « x – parallelogramm » , « x to'rtburchakning diagonallari teng » .
 - 3) « x – tub son » , « x – juft son » .
 - 4) « $x^2 - x - 2 = 0$ » , « $x^3 + 1 = 0$ » .

I.6-§. Predikatlar algebrasining formulalari

Predikatlar uchun quyida kiritiladigan barcha tushunchalar ixtiyoriy P to'plam bilan bog'liq. Bu to'plamni *predmetlar to'plami* deb ataymiz. Lotin alifbosining oxirrog'idagi $x, y, z, u, v, x_1, x_2, \dots$ - lar o'zgaruvchi predmetlarni, boshidagi harflar $a, b, c, a_1, a_2, \dots$ - lar P to'plamning aniq elementlarini bildiradi. Lotin alifbosining bosh harflari $A, B, C, \dots$ - orqali o'zgaruvchi yoki o'zgarmas mulohazalar belgilanadi.

$F(x), G(x, y), P(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$ – ifodalar orqali predikatlarni belgilaymiz.

Agar a, b – doimiy predmetlar, G – ikki o'zgaruvchili predikat bo'lsa, $G(a, b)$ mulohaza bo'lishi ravshan.

$A, B, C, \dots$ va $F(a), G(a, b), \dots$ ko'rinishdagi mulohazalar *elementar mulohazalar* deyiladi.

Endi predikatlar algebrasining formulasi tushunchasini kiritamiz.

Predikatlar algebrasida quyidagi simvollar ishlatiladi:

1. $x_0, x_1, \dots, x_n$ – predmet o'zgaruvchilar.
2. $R_0^{n_0}, R_1^{n_1}, \dots, R_i^{n_i}, \dots$ – predikatlar ($R_i^{n_i}$ - n – o'rinli predikat).
3. $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ - mantiq amallari.
4. $\forall, \exists$ - kvantorlar.
5. $(,)$ - qavslar.

I.6.1 - ta'rif. 1. Har qanday elementar mulohaza – formuladir.

2. Agar $R_i^{n_i}$ - n – o'rinli predikat, $x_1, \dots, x_{n_i}$ - o'zgaruvchi predmetlar yoki

doimiy predmetlar bo'lsin. U holda $R_i^{n_i}(x_1, \dots, x_{n_i})$ - formuladir.

Yuqoridagi 1,2-punktlarda aniqlangan formulalar elementar formulalar deyiladi.

3. Predikatlar algebrasining birida bog'liq bo'lgan predmet o'zgaruvchi ikkinchisida erkin bo'lmaydigan $\mathcal{T}$ va $\mathcal{R}$ formulalar berilgan bo'lsin. U holda $\mathcal{T} \wedge \mathcal{R}$, $\mathcal{T} \vee \mathcal{R}$, $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{R}$, $\mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{R}$, $\neg \mathcal{T}$ ifodalar ham predikatlar algebrasining formulalaridir.

4. Predikatlar algebrasining x erkin o'zgaruvchi qatnashgan $A(x)$ formulasi berilgan bo'lsin, u holda $\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$ ifodalar ham predikatlar algebrasining formulasidir.

5. Predikatlar algebrasining 1 – 4 punktlarda sanab chiqilgan formulalardan boshqa formulalari yo'q.

I.6.2 - misol. $P_1^1(x)$, $Q_0^2(x, y)$, $R_0^3(x, y, z)$, $\forall x Q_0^2(x, y)$, $\exists x Q_0^1(x)$, $\forall x R_0^2(x, y)$ - ifodalar predikatlar algebrasining formulalaridir.

Predikat simvolidagi indeksnlarni kerak bo'lmagan hollarda tashlab yozishni kelishib olamiz. Masalan, $P_1^3(x, y, z)$ o'rniga $R(x, y, z)$ deb yozish mumkin.

I.6.3 - misol . $\forall x Q(x, y) \vee R(x)$ ifoda formula bo'lmaydi, Chunki, I.6.1 - ta'rifdagi 3 - punkt shartlari bajarilmagan.

I.6.4 - misol . $N_0 = \{ 0, 1, 2, \dots \}$ to'plam va $N_0 \times N_0$ da aniqlangan $P(x, y) : \langle x < y \rangle$, $Q(x, y) : \langle x^2 + y^2 = 5 \rangle$ predikatlar berilgan bo'lsin. $\exists x (R(x, y) \wedge Q(x, y))$ – predikatning qiymatlarini topaylik. Bu formula bir o'zgaruvchili predikat bo'lib, uning qiymatlari faqat u ga bog'liq. Masalan, agar

$$y = 0 \text{ bo'lsa, } \exists x ((\langle x < y \rangle) \wedge (\langle x^2 + 0^2 = 5 \rangle)) = 0 ;$$

$$y = 1 \text{ bo'lsa, } \exists x ((\langle x < 1 \rangle) \wedge (\langle x^2 + 1^2 = 5 \rangle)) = 0;$$

$$y = 2 \text{ bo'lsa, } \exists x ((\langle x < 2 \rangle) \wedge (\langle x^2 + 2^2 = 5 \rangle)) = 1 \text{ va h.k.}$$

(bu erda $\langle : \rangle$ belgi « aynan shu » ma'nosini bildiradi).

Takrorlash uchun savollar

1. Predikatlar algebrasining simvollarini ayting.
2. Predikatlar algebrasining formulasiga ta'rif bering.
3. Predikatning predmetlar sohasi nima ?

M a s h q l a r

1. Quyidagi formulalardagi erkli va bog'liq o'zgaruvchilarni aniqlang:
 - 1) $\forall x A(x)$.
 - 2) $A(y) \Rightarrow \exists x V(x)$.
 - 3) $\exists x \forall y (A(x) \wedge B(y)) \Rightarrow \forall y C(t, y)$.
 - 4) $\forall x (\exists y (A(x, y)) \Rightarrow B(t, t, z))$.
2. Quyidagi mulohazalarni predikatlar algebrasi tilida ifodalang :
 - 1) « Barcha ratsional sonlar haqiqiy ».
 - 2) « Ayrim ratsional sonlar haqiqiy emas ».
 - 3) « 12 ga bo'linuvchi har qanday natural son 2, 4 va 6 ga bo'linadi ».
 - 4) « Ayrim ilonlar zaharli ».
 - 5) « Bir to'g'ri chiziqda yotmagan 3 ta nuqta orqali Yagona tekislik o'tkazish mumkin ».
 - 6) « Yagona x mavjudki, $R(x)$ ».
3. $A(x)$: « x – tub son », $B(x)$: « x – juft son », $S(x)$: « x – toq son », $D(x)$: « x y ni bo'ladi » kabi xossalarni bildirsa quyidagilarni o'qing :
 - 1) $A(7)$.
 - 2) $B(2) \wedge A(2)$.
 - 3) $\forall x (B(x) \Rightarrow \forall y (D(x, y) \Rightarrow B(y)))$.
 - 4) $\forall x (S(x) \Rightarrow \forall y (A(y) \Rightarrow \neg D(x, y)))$.

I.7-§. Dekart ko'paytma. n-ar munosabat. Ekvivalentlik munosabati

Ixtiyoriy a, b predmetlar uchun $\{a, b\}$ to'plam a va b predmetlarning tartiblangan juftligi deb aytiladi va (a, b) orqali belgilanadi.

Ba'zi adabiyotlarda (a, b) o'rniga $\langle a, b \rangle$ belgilash ham ishlatiladi. Tartiblangan (a, b) juftlikda a uning *birinchi koordinatasi*, b esa uning *ikkinchi koordinatasi* deb ataladi. Ba'zan "koordinata" termini o'rniga "kompanenta" so'zi ham ishlatiladi. $(a, b) = (s, d)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $a = c$, $b = d$ bo'lishini ko'rish qiyin emas. Aksincha $a = c$, $b = d$ bo'lsa, $(a, b) = (s, d)$ bo'lishi ravshan.

Agar $a \neq b$ bo'lsa, $(a, b) \neq (b, a)$ bo'lib, $(a, b) \neq (b, a)$ bo'ladi.

I.7.1-ta'rif. (a, b) ni tartiblangan juftlik deb ataymiz.

Faraz qilaylik $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ tartiblangan juftlik aniqlangan bo'lsin. U holda $((a_1, a_2, \dots, a_k), a_{k+1})$ ni tartiblangan $(k+1)$ lik deb ataymiz va $(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})$ orqali belgilaymiz.

I.7.2-teorema. Agar $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ bo'lsa, u holda $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ bo'ladi.

Isbot. Isbotni n bo'yicha matematik induksiya usuli bilan olib boramiz.

$n=2$ bo'lganda teorema to'g'riligi ravshan.

$n=k$ bo'lganda teorema to'g'ri bo'lsin, ya'ni $(a_1, a_2, \dots, a_k) = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ bo'lsa, u holda $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_k$. $(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}) = (b_1, b_2, \dots, b_k, b_{k+1})$ bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra $((a_1, a_2, \dots, a_k), a_{k+1}) = ((b_1, b_2, \dots, b_k), b_{k+1})$ bo'lib, $(a_1, a_2, \dots, a_k) = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ va $a_{k+1} = b_{k+1}$. U holda induksiya faraziga asosan $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_k$ va $a_{k+1} = b_{k+1}$.

Teoremaning teskarisi, ya'ni $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ bo'lsa, $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ bo'lishi ravshan. Shunday qilib, $[(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)] \Leftrightarrow [(a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2) \wedge \dots \wedge (a_n = b_n)]$.

I.7.3-ta'rif. Birinchi koordinatasi A to'plamga, ikkinchi koordinatasi B to'plamga tegishli bo'lgan barcha (a, b) ko'rinishdagi tartiblangan juftliklar

to'plami A va B to'plamlarning dekart ko'paytmasi deyiladi va $A \times B$ ko'rinishida belgilanadi.

Shunday qilib, $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$. $A \times B$ dekart ko'paytma ba'zan to'g'ri ko'paytma yoki ko'paytma ham deb ataladi.

Agar $A \times B = \emptyset$ bo'lsa, $A = \emptyset$ yoki $B = \emptyset$ bo'lishi va aksincha $A = \emptyset$ yoki $B = \emptyset$ bo'lsa, $A \times B = \emptyset$ bo'lishini ko'rish qiyin emas.

I.7.4-misol. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, \Theta, \Delta, O\}$ bo'lsa,
 $A \times B = \{(1, 1), (1, \Theta), (1, \Delta), (1, O)\}, (2, 1), (2, \Theta), (2, \Delta), (2, O), (3, 1), (3, \Theta), (3, \Delta), (3, O)\}$
 bo'lishi ravshan.

I.7.5-ta'rif. $A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlar berilgan bo'lsin, u holda
 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n = \{ \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n \}$ sifatida aniqlanadi.

Tarifdan ko'rinadiki $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{ \langle a_1, a_2, a_3 \rangle | a_i \in A_i, i = 1, 2, 3 \}$ bo'lib, $A_1 \times A_2 \times A_3$ to'plam barcha tartiblangan uchliklar to'plamidan iboratdir.

Demak, $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{ \langle a_1, a_2, a_3 \rangle | a_i \in A_i, i = 1, 2, 3 \}$.

I.7.6-ta'rif. Ixtiyoriy $A \neq \emptyset$ to'plam uchun $A^0 = \{\emptyset\}$,
 $A^1 = A, A^2 = A \times A, \dots, A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$ to'plamlar A to'plamning mos ravishda
 nolinci, birinchi, ikkinchi va h.k. n -darajalari deyiladi.

I.7.7-ta'rif. Ixtiyoriy $A \neq \emptyset$ to'plam uchun A^n ning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan to'plamostisi A to'plamda berilgan n o'rinli yoki n -ar munosabat deyiladi.

I.7.8- misol. $n=0$ bo'lsa, $A^0 = \{\emptyset\}$ bo'lib, nol o'rinli munosabat $\emptyset$ va A^0 dan iborat bo'lishini ko'ramiz. Bir o'rinli munosabat A to'plamning ixtiyoriy to'plamostisi bo'lishi, 2 o'rinli munosabat ixtiyoriy tartiblangan juftliklar to'plamidan iborat bo'lishi ko'rinib turibdi. n o'rinli munosabat ixtiyoriy tartiblangan $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ ko'rinishdagi n -liklar to'plamidan iboratdir.

Tartiblangan n -likni n elementli kortej deb ataydilar. Agar R n o'rinli munosabat bo'lsa, n uning rangi deb ataladi.

I.7.9-ta'rif. $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ to'plamning ixtiyoriy to'plamostisi n o'rinli (yoki n -ar munosabat) deyiladi.

I.7.10-ta'rif. Ixtiyoriy n elementli kortejlar to'plami n -ar munosabat deyiladi.

I.7.11-teorema. I.7.7, I.7.9, I.7.10- ta'riflar teng kuchli ta'riflardir.

Ixtiyoriy $\omega \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times A_{n+1}$ bo'lsin, $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ elementlar uchun $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \rangle \in \omega$ shartni qanoatlantiradigan barcha a_{n+1} elementlar to'plamini $\omega \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ yoki ω orqali belgilaymiz.

Agar $\omega \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ bir elementli to'plam bo'lsa, ya'ni $\omega \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \{a_{n+1}\}$ bo'lsa, $\omega \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = a_{n+1}$ ko'rinishdagi belgilashni kelishib olamiz.

$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_n = A$ bo'lib, $\omega \subset A^{n+1}$ $\langle n+1 \rangle$ o'rinli munosabat berilgan bo'lsa, u holda har bir $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ elementlar uchun $\omega \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ ko'pi bilan bir elementli to'plamdan iborat bo'lib, $\omega - (n+1)$ o'rinli munosabat n o'rinli yoki n -ar qisman algebraik amal deyiladi. n esa ω amalning rangi deyiladi. Agar Yuqoridagi holatda $\omega \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ faqat bir elementli to'plamdan iborat bo'lsa, u holda $\omega - (n+1)$ o'rinli munosabat A to'plamda aniqlangan n o'rinli algebraik amal deyiladi.

Shunday qilib tarifga ko'ra nol o'rinli algebraik amal A to'plamdagi bitta elementdan iborat, bir o'rinli amal $\omega \in A^2$ binar munosabatdan iborat bo'lib, $\forall a \in A$ uchun Yagona $\omega(a)$ mos keladi. Bir o'rinli algebraik amal *operator* yoki *unar algebraik amal* deyiladi. Agar $n=2$ bo'lsa, algebraik amal *binar algebraik amal* deyiladi. Agar ω -3 o'rinli munosabat bo'lsa, u binar algebraik amal bo'lishi uchun $\forall a_1, a_2 \in A$ elementlar juftligiga Yagona $\omega(a_1, a_2) \in A$ mavjud bo'lib, bunday element ba'zan $a_1 \omega a_2$ ko'rinishda ham belgilanadi. Bunday holda har bir $\langle a_1, a_2 \rangle$ juftlikka Yagona $\omega(a_1, a_2)$ element mos qo'yiladi deb aytishimiz mumkin.

Uch o'rinli algebraik amal *ternar algebraik amal* deyiladi.

Kelgusida binar munosabatlar $=, \cong, >, \geq, <, \leq$ va boshqa simvollar orqali belgilanadi.

I.7.12- misol. $\omega = \{n, n+1\} \mid \forall n \in N$ binar munosabat bo'lib, unar algebraik amal sifatida qaralishi mumkin. Bu unar algebraik amal har bir n ga $n+1$ ni mos qo'yadigan operatoridan iboratdir.

I.7.13-misol. $\omega = \{n, n, m+n\} \mid \forall m, n \in N$ ternar munosabat binar algebraik amal bo'lib, har bir $\{n, n\}$ juftlikka ularning yig'indisi $\{n+n\}$ ni mos qo'yadi.

I.7.14-tarif. $A \subset B$ bo'lib, ω B to'plamdagi n -ar munosabat bo'lsin, u holda $\omega' = \omega \cap A^n - A$ dagi n -ar munosabat bo'lishi ayon. ω' ni ω n -ar munosabatning A dagi izi, ω ni esa ω' ning V dagi davomi deyiladi.

I.7.15-misol. $\omega = \{b, c\} \mid c = a + b \wedge a, b, c \in Z$ munosabat $\omega' = \{n, n, m+n\} \mid \forall m, n \in N$ ternar munosabatni Z dagi davomi, ω' esa ω ning N dagi izidir.

I.7.16-misol. Butun sonlar to'plamida aniqlangan $\omega = \{b, a-b\} \mid \forall a, b \in Z$ ternar munosabat Z da binar algebraik amal bo'lib, uning N dagi izi ternar munosabatdir, lekin binar algebraik amal bo'la olmaydi.

Binar munosabatning turlari.

Agar ω A to'plamda berilgan binar munosabat bo'lib $\{a, b\} \in \omega$ bo'lsa, a va b elementlar ω munosabatda yotadi yoki a va b elementlar ω munosabatda deyiladi va $a\omega b$ orqali belgilanadi.

I.7.17-ta'rif. A to'plamda ω binar munosabat berilgan bo'lsin.

1. Agar $\forall a \in A$ uchun $\{a, a\} \in \omega$ bo'lsa ω refleksiv;
2. Agar $\forall a \in A$ uchun $\{a, a\} \notin \omega$ bo'lsa ω antirefleksiv;
3. Agar $\exists a \in A$ uchun $\{a, a\} \notin \omega$ bo'lsa ω arefleksiv;
4. Agar $\forall a, b \in A$ uchun $a \neq b \Rightarrow (a, b) \in \omega \vee \{a, a\} \in \omega$ bo'lsa, ω bog'liq;
5. Agar $\forall a, b \in A$ uchun $(a, b) \in \omega \Rightarrow \{a, a\} \in \omega$ bo'lsa, ω simmetrik;
6. Agar $\forall a, b \in A$ uchun $(a, b) \in \omega \wedge \{a, a\} \in \omega \Rightarrow a = b$ bo'lsa, ω antisimmetrik;

7. Agar $\forall a, b \in A$ uchun $(a, b) \in \omega \Rightarrow [a, a] \in \omega$ bo'lsa, ω asimmetrik;

8. Agar $\forall a, b, c \in A$ uchun $(a, b) \in \omega \wedge (b, c) \in \omega \Rightarrow (a, c) \in \omega$ bo'lsa, ω tranzitiv;

9. Agar ω bir vaqtda refleksiv, simmetrik, tranzitiv bo'lsa, u holda ekvivalentlik munosabati deyiladi.

I.7.18-ta'rif. A to'plamda $*$ binar algebraik amal va R binar munosabat berilgan bo'lsin. Agar $\forall a, b, c \in A$ uchun $(a, b) \in R$ dan $(a * c, b * c) \in R$ bo'lishi kelib chiqsa, u holda R munosabat $*$ amalga nisbatan monoton deyiladi.

I.7.19-misol. N - natural sonlar to'plamida $\leq$ munosabat $+$ amaliga nisbatan monoton. Haqiqatdan ham, $(a \leq b) \Rightarrow (a + c \leq b + c) \wedge (c + a \leq c + b)$.

Takrorlash uchun savollar

1. Tartiblangan juftlik nima?
2. Tartiblangan juftliklar qachon teng bo'ladi?
3. To'plamlarning to'g'ri (dekart) ko'paytmasi nima?
4. Tartiblangan n lik qanday hosil qilinadi?
5. Binar munosabatga ta'rif bering.
6. Refleksiv binar munosabatni ta'riflang.
7. Simmetrik binar munosabatni ta'riflang.
8. Tranzitiv binar munosabatni ta'riflang.
9. Ekvivalentlik binar munosabatini ta'riflang.

M a s h q l a r

1. Quyidagilarni isbotlang:

- a. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
- b. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
- c. $A \cup B \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

d. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$

e. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$

2. R, S – binar munosabatlar uchun quyidagilarni isbotlang:

a. R, S - tranzitiv $\Rightarrow R \cup S, R \cap S$ – tranzitiv.

b. R, S – refleksiv $\Rightarrow R \cup S, R \cap S$ – refleksiv.

c. R, S - simmetrik $\Rightarrow R \cup S, R \cap S$ – simmetrik.

d. R, S - ekvivalent $\Rightarrow R \cup S, R \cap S$ – ekvivalent.

3. $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ to'plamda berilgan quyidagi binar munosabatlarning xossalari tekshiring:

3.1. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x \leq y + 1 \}.$

3.2. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x^2 = y^2 \}.$

3.3. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge |x| = |y| \}.$

3.4. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x \vdots y \}.$

3.5. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x < y \}.$

3.6. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x \neq y \}.$

3.7. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x \vdots y \vee x < y \}.$

3.8. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge (x - y) \vdots 2 \}.$

3.9. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x + y = 12 \}.$

3.10. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x + y \leq 7 \}.$

3.11. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge x + y \geq 20 \}.$

3.12. $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in M \wedge (x + y) \vdots 5 \}.$

I.8-§. Akslantirish (funksiya). Tartib munosabati

I.8.1-ta'rif. $f - A$ to'plamda berilgan binar munosabat bo'lsin. Agar $\forall x, y, z \in A$ lar uchun $\langle x, y \rangle \in f$ va $\langle x, z \rangle \in f$ bo'lishidan $y = z$ kelib chiqsa, u holda f binar munosabat akslantirish (funksiya) deyiladi.

Boshqacha qilib aytgach, f binar munosabatning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan har bir x element uchun, Yagona y element topilib, $\langle x, y \rangle \in f$ bo'lsa, u holda f munosabat funksiya deyiladi. Agar f binar munosabat funksiya bo'lib, $\langle x, y \rangle \in f$ bo'lsa, u holda $y = f(x)$ deb yozish qabul qilingan. Ba'zan $x \rightarrow f(x)$ yoki $f: x \rightarrow y$ deb ham yoziladi x elementga f funksiya y elementni mos qo'yadi deb va y element x ning *obrazi (tasviri)*, x esa y ning *proobrazi (asli)* deyiladi. $Dom f = \{x / \exists y \langle x, y \rangle \in f\}$ to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi, $Im f = \{y / \exists x \langle x, y \rangle \in f\}$ to'plam funksiyaning o'zgarish sohasi deyiladi. Bizga ikkita f va g funksiyalar berilgan bo'lsa, ularning tengligini f va g - juftliklar to'plamining tengligi sifatida tushuniladi. Predikatlar algebrasi tiliga o'tsak, $f = g \Leftrightarrow \forall x \langle x, y \rangle \in f \Leftrightarrow \forall x \langle x, y \rangle \in g$ formula tautologiyadir.

Har qanday funksiya $\forall x \in Dom f$ elementga Yagona $y \in Im f$ elementni mos qo'yganligi sababli, f ni *akslantirish* deb atash maqsadga muvofiq. Agar $Dom f \subset A$, $Im f \subset B$ bo'lsa, u holda f A to'plamdan B to'plamga *akslantirish* deyiladi.

Agar $A = Dom f$ $B = Im f$ bo'lsa, u holda f funksiyaning A to'plamni B to'plamga akslantirish deb ataymiz. A to'plamni B to'plamga akslantiradigan barcha funksiyalar to'plamini B^A orqali belgilash qabul qilingan. Faraz qilaylik, f A to'plamdan B to'plamga akslantirish bo'lsin.

Bundan keyin agar f A to'plamni B to'plamga akslantirish bo'lsa, $f: A \rightarrow B$ deb belgilaymiz. Agar A to'plam tartiblangan juftliklar to'plamidan iborat bo'lsa, u holda $f: A \rightarrow B$ akslantirish ikki o'zgaruvchili funksiya, n o'zgaruvchili funksiya sifatida $X \neq \emptyset$ $Y \neq \emptyset$ to'plamlar uchun $f: X^n \rightarrow Y$ akslantirish tushuniladi, bu erda $n = 0, 1, \dots$. n o'zgaruvchili funksiyaning $y = f(x_1, \dots, x_n)$ ko'rinishida belgilaymiz.

1.8.2-ta'rif. f va g funksiyalar berilgan bo'lsin, u holda $f \circ g = \{(x, z) \mid \exists t(x, t) \in g \text{ va } (t, z) \in f\}$ to'plam f va g funksiyalarning kompozitsiyasi deyiladi.

1.8.3-misol. $f = \{(3, 4), (3, 6), (6, 6)\}$ $g = \{(3, 4), (4, 1), (6, 4)\}$ bo'lsa, u holda $f \circ g = \{(6, 4), (4, 3)\}$.

1.8.4-teorema. Funksiyalar kompozitsiyasi quyidagi xossalarga ega:

$$1^\circ. \text{Dom } f \circ g = \{x \mid \exists y (x, y) \in g \text{ va } y \in \text{Dom } f\}$$

$$2^\circ. \forall x \in \text{Dom } f \circ g \text{ yuqori } (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$3^\circ. f \circ g = \{(x, f(g(x))) \mid g(x) \in \text{Dom } f\}$$

$$4^\circ. \text{Dom } f \circ g \subset \text{Dom } g.$$

$$5^\circ. \text{Im } (f \circ g) \subset \text{Im } f$$

$$6^\circ. \text{Agar } \text{Im } g = \text{Dom } f \text{ bo'lsa, } \text{Dom } f \circ g = \text{Dom } g \text{ va } \text{Im } (f \circ g) = \text{Im } f$$

1^0 - xossaning isboti. $\forall x \in \text{Dom } f \circ g$ bo'lsin, u holda $f \circ g$ ning ta'rifiga ko'ra $(x, y) \in f \circ g$ bo'lib, Shunday t topiladiki, natijada $(x, t) \in g$ va $(t, z) \in f$ bo'ladi, demak $t = g(x)$ ekanligidan $g(x) \in \text{Dom } f$ bo'ladi. Aksincha, agar $g(x) \in \text{Dom } f$ bo'lsa, Shunday z topiladiki, $(g(x), z) \in f$, u holda $(x, g(x)) \in g$ bo'lgani uchun $(x, z) \in f \circ g$ bo'ladi, ya'ni $x \in \text{Dom } f \circ g$.

Qolgan xossalarning isboti mustaqil bajarish uchun o'quvchilarga havola qilinadi.

1.8.5-teorema. Funksiyalar kompozitsiyasi assosiativdir.

Bu teoremaning isboti binar munosabatlar kompozitsiyasi assosiativligining bevosita natijasidir.

1.8.6-ta'rif. $A \neq \emptyset$ to'plamning har bir elementini o'zini o'ziga akslantiradigan akslantirish ayniy akslantirish yoki birlik akslantirish deyiladi. Bunday akslantirishni E_A orqali belgilaymiz.

1.8.7-teorema. Agar f - akslantirish A to'plamni V to'plamga akslantirish bo'lsa $f \circ f^\vee = E_B$ bo'ladi.

Isbot. Im $f = B$ bo'lganidan $E_B \subset f \circ f^\vee$ kelib chiqishi ravshan. Faraz qilaylik $\langle x, y \rangle \in f \circ f^\vee$, ya'ni Shunday $z \in V$ topilib $\langle x, z \rangle \in f^\vee$ va $\langle z, y \rangle \in f$ bo'lsin. U holda inversiyaning ta'rifiga ko'ra $\langle z, x \rangle \in f$ endi f binar munosabat funksiyaligini etiborga olsak $x = y$. Demak, $f \circ f^\vee \subset E_B$.

1.8.8-ta'rif. $f : A \rightarrow B$ akslantirish A to'plamni V to'plamga akslantirish bo'lsin. U holda, agar $\forall x_1, x_2 \in A$ va $x_1 \neq x_2$ elementlar uchun $f \langle x_1 \rangle \neq f \langle x_2 \rangle$ bo'lsa, f -in'ektiv, Im $f = B$ bo'lsa, f -syur'ektiv akslantirish deyiladi. Agar f ham syur'ektiv, ham in'ektiv akslantirish bo'lsa, u holda f biektiv akslantirish deyiladi.

1.8.9-misol. Haqiqiy sonlar to'plami R ni o'zini o'ziga akslantiradigan $f \langle x \rangle = x^2$ funksiya in'ektiv ham emas, biektiv ham emas. Haqiqatdan ham, $+2 \neq -2$.

Lekin $\langle 2 \rangle = 2^2 = 4$; Im $f = R^+ \cup \{0\} = R^+ \cup \{0\}$ manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlar to'plami.

1.8.10-misol. $f \langle x \rangle = x^2$ funksiya barcha haqiqiy sonlar to'plamini $R^+ \cup \{0\}$ to'plamga akslantirsin. U holda Im $f = R^+ \cup \{0\}$. Demak, f -syur'ektiv akslantirish, lekin in'ektiv akslantirish emas.

1.8.11-misol. $y = \sqrt{x}$ funksiya $R^+ \cup \{0\}$ to'plamni R - haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiradi. Bu funksiya in'ektiv, lekin syur'ektiv emas.

1.8.12-misol. $y = x^3$ funksiya R - haqiqiy sonlar to'plamini o'zini o'ziga akslantiradigan biektiv funksiyadir.

1.8.13-misol. $x = \langle a, b \rangle$ to'plam berilgan bo'lsin, u holda $f \langle a \rangle = b$; $f \langle b \rangle = a$; $g \langle a \rangle = a$; $g \langle b \rangle = a$ shartlar bilan aniqlangan f va g funksiyalarni qarasak, $\langle f \circ g \langle a \rangle \rangle = f \langle g \langle a \rangle \rangle = f \langle a \rangle = b$.
 $\langle f \circ g \langle b \rangle \rangle = f \langle g \langle b \rangle \rangle = f \langle a \rangle = b$; $\langle g \circ f \langle a \rangle \rangle = g \langle f \langle a \rangle \rangle = g \langle b \rangle = a$ $\langle g \circ f \langle b \rangle \rangle = g \langle f \langle b \rangle \rangle = g \langle a \rangle = a$ bo'ladi.

Bu misoldan ko'rinadiki, $f \circ g \neq g \circ f$, ya'ni funksiyalar kompozitsiyasi har doim ham kommutativ bo'lavermas ekan.

1.8.14-ta'rif. $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ akslantirishlar berilgan bo'lsin, u holda agar $f \circ g = E_B$ bo'lsa f akslantirish g akslantirishga chapdan teskari, g akslantirish esa f akslantirishga o'ngdan teskari deyiladi. Agar $f \circ g = E_B$ va $g \circ f = E_A$ shartlar bajarilsa, u holda f va g akslantirishlar bir biriga teskari akslantirishlar deyiladi.

1.8.15-teorema. Agar $f : A \rightarrow B$; $g : B \rightarrow A$ akslantirishlar berilgan bo'lib, $g \circ f = E_A$ shart bajarilsa, u holda f -in'ektiv, g esa syur'ektiv akslantirishdir.

Isbot. Teorema shartlari bajarilgan deb faraz qilaylik. U holda, $\forall a \in A$ uchun $g \circ f \left(\tilde{a} \right) = g \left(f \left(\tilde{a} \right) \right) = a$. Faraz qilaylik $a_1 \neq a_2$ elementlar uchun $f \left(\overset{\sim}{a_1} \right) = f \left(\overset{\sim}{a_2} \right)$ bo'lsin, u holda $a_1 = g \circ f \left(\overset{\sim}{a_1} \right) = g \left(f \left(\overset{\sim}{a_1} \right) \right) = g \left(f \left(\overset{\sim}{a_2} \right) \right) = a_2$. Bu esa $a_1 \neq a_2$ farazimizga zid.

Endi uchun Shunday $b \in B$ topilib, $g \left(\tilde{b} \right) = a$ bo'lishini ko'rsataylik. Haqiqatdan, teorema shartiga ko'ra $\forall a \in A$ uchun $g \circ f \left(\tilde{a} \right) = g \left(f \left(\tilde{a} \right) \right) = a$ bo'ladi. $f \left(\tilde{a} \right)$ ni b orqali belgilasak $g \left(\tilde{b} \right) = a$. Demak, g -syur'ektiv akslantirish ekan

1.8.16-teorema. $f : A \rightarrow B$ akslantirishga teskari akslantirish mavjud bo'lishi uchun uning biektiv bo'lishi zarur va etarli.

Isbot. Agar f - biektiv bo'lsa, $\forall b \in B$ uchun Shunday Yagona $a \in A$ topilib, $f(a) = b$ bo'ladi. U holda $\forall b \in B$ uchun $g \left(\tilde{b} \right) = a$ shartni qanoatlantiradigan g akslantirish f akslantirishga teskari akslantirish bo'lishi ravshan.

Faraz qilaylik f akslantirish uchun g - teskari akslantirish bo'lsin, u holda, teskari akslantirish ta'rifiga ko'ra $g \circ f = E_A$, $f \circ g = E_B$, u holda 1.8.15-teoremaga ko'ra f va g lar biektiv akslantirishlardir.

Kelgusida f akslantirishga teskari akslantirish mavjud bo'lsa, uni f^{-1} orqali belgilaymiz.

1.8.17-natija. *O'zaro teskari akslantirishlar biektiv akslantirishlardir.*

To'plamni o'zini o'ziga akslantirish *almashtirish* deyiladi.

1.8.18-teorema. *Chekli to'plamni almashtirish biektiv bo'lishi uchun, syur'ektiv yoki in'ektiv bo'lishi zarur va etarlidir.*

Isbot. X - chekli to'plam berilgan bo'lsin. f almashtirish biektiv bo'lsa, ham syur'ektiv, ham in'ektiv bo'lishi ravshan. Faraz qilaylik $f : X \rightarrow X$ syur'ektiv bo'lib, in'ektiv bo'lmasin. U holda X chekli to'plam bo'lgani uchun uning elementlari $x_1, x_2, \dots, x_n$ lardan iborat desak, $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ elementlar $n-1$ tadan ko'p emas. Demak, kamida bitta x_k element uchun proobraz topilmaydi. Bu esa f -syur'ektiv degan farazimizga zid. $f : X \rightarrow X$ syur'ektivligidan f ning in'ektivligini keltirib chiqarish o'quvchilarga xavola qilinadi.

1.8.19-ta'rif. *Agar ikkita A va B to'plamlarning birini ikkinchisiga o'zaro bir qiymatli akslantiradigan kamida bitta akslantirish mavjud bo'lsa, to'plamlar teng quvvatli deyiladi va $A \cong B$ ko'rinishida yoki $|A| = |B|$ ko'rinishida belgilanadi.*

1.8.20-ta'rif. A to'plamda berilgan $R \subset A \times A$ antisimetrik va tranzitiv munosabat A to'plamdagi tartib munosabati deyiladi.

1.8.21-ta'rif. A to'plamdagi tartib munosabati refleksiv munosabat bo'lsa, bunday munosabat A to'plamdagi noqat'iy tartib munosabat deyiladi.

A to'plamdagi tartib munosabat antirefleksiv munosabat bo'lsin, bunday munosabat A to'plamdagi qat'iy tartib munosabat deyiladi.

1.8.22-misol. $B(A) - A$ to'plamning barcha to'plamostilari to'plami bo'lsin. $B(A)$ to'plamda to'plamosti bo'lish munosabati noqat'iy tartib munosabatidir.

1.8.23-misol. $A = \{12, 36, 72\}$ to'plamda bo'linish munosabati noqat'iy tartib munosabatidir.

1.8.24-ta'rif. A to'plamda R tartib munosabat berilgan bo'lsin. U holda, agar $\forall a, b \in A$ elementlar uchun xRy yoki $x = y$ yoki yRx munosabatlardan kamida bittasi albatta bajarilsa, bunday munosabat A to'plamdagi chiziqli tartib munosabat deyiladi.

Chiziqli bo'lmagan tartib munosabat, qisman tartib munosabat deyiladi.

1.8.25-misol. N -natural sonlar to'plamida $R = \{x, y \mid \forall x, y \in N \ x \leq y\}$ munosabat qisman tartib munosabat bo'ladi. " $<$ " = $\{x, y \mid \forall x, y \in N \ \exists k \in N \ y = x + k\}$ munosabat esa chiziqli tartib munosabatdir.

1.8.26-ta'rif. A to'plamda R tartib munosabat berilgan bo'lsin, (A, R) juftlik tartiblangan to'plam deyiladi. Agar R - qisman tartib munosabati bo'lsa, (A, R) qisman tartiblangan to'plam, R chiziqli tartib munosabati bo'lsa, (A, R) chiziqli tartiblangan to'plam deyiladi.

1.8.27-misol. $(N, <)$ -juftlik chiziqli tartiblangan to'plamdir. Kelgisida $a < b$ yozuvni odatdagidek $a < b$, $a \leq b$ yozuvni esa a kichik yoki teng b deb o'qiymiz va $a \leq b$ ni $a < b \vee a = b$ mulohaza ma'nosida tushunamiz. Xususan $4 \leq 4$, $3 \leq 4$ mulohazalar aynan rost mulohazalardir.

$(A, <)$ -tartiblangan to'plam berilgan bo'lsin, u holda $a \in A$ elementdan kichik element mavjud bo'lmasa a - *minimal element*, agar a dan katta element mavjud bo'lmasa a - *maksimal element* deyiladi. A dagi o'zidan boshqa barcha elementlaridan kichik bo'lgan a element A to'plamning eng kichik elementi, A dagi o'zidan boshqa barcha elementlaridan katta bo'lgan b element A to'plamning eng katta elementi deyiladi.

1.8.28-misol. $A = \{2, 3, 4, 12\}$ to'plamida, agar $a \leq b$ bo'lsa, $b < a$ deylik, u holda 1 eng kichik element, 12 eng katta element bo'ladi.

1.8.29-misol. $A = \{2, 3, 4\}$ to'plamda ham 1.8.28-misoldagi kabi aniqlangan $<$ -tartib munosabatni qaraylik. U holda 1 minimal element, 3, 4 maksimal elementlar bo'lishi ravshan.

Shunday qilib, maksimal elementlari bir nechta bo'lgan to'plamlar mavjud ekan. Minimal elementlari ham bir nechta bo'ladigan to'plamga misol keltirishni o'quvchilarga havola etamiz.

1.8.30-ta'rif. *Har qanday bo'sh bo'lmagan to'plamostisi minimal elementga ega chiziqli tartiblangan to'plam to'liq tartiblangan to'plam deyiladi.*

Chiziqli tartiblangan to'plamlarda minimal element tushunchasi eng kichik element tushunchasi bilan, maksimal element tushunchasi esa eng katta element tushunchasi bilan bir xil bo'lishi ravshan.

1.8.31-misol. N -natural sonlar to'plamida $<$ - tabiiy tartib munosabati bo'lsin. YA'ni agar $\forall a, b \in N$ uchun Shunday R topilib, $a = b + k$ bo'lsa, $b < a$ deymiz. U holda $(N, <)$ to'plam to'liq tartiblangan to'plamdir.

1.8.32-misol. R -haqiqiy sonlar to'plami tabiiy tartib munosabatga nisbatan to'liq tartiblangan bo'la olmaydi. Chunki R to'plamning eng kichik elementi yo'q.

Takrorlash uchun savollar

1. Akslantirish qanday munosabat?
2. Akslantirishning aniqlanish sohasini ta'riflang.
3. Akslantirishning qiymatlar to'plami qanday to'plam?
4. Akslantirishlar kompozitsiyasini tushuntiring.
5. Akslantirishlar kompozitsiyasi xossalarini ayting.
6. In'ektiv akslantirishga maktab matematikasidan misol keltiring.
7. Syur'ektiv akslantirishga maktab matematikasidan misol keltiring.
8. Biektiv akslantirish maktabda qanday nomlangan?
9. Ayniy akslantirishni tushuntiring.
10. Tartib munosabat turlarini maktab matematikasidan olingan misollar yordamida tushuntiring.
11. Tartiblangan to'plamlarga misollar keltiring.
12. Butun sonlar to'plami to'la tartiblangan to'plam bo'ladi-mi?

M a s h q l a r

1. R, S, T – binar munosabatlar uchun quyidagilarni tekshiring:

$$1) (R \cap S)^{\cup} = R^{\cup} \cap S^{\cup}.$$

$$2) (R \cup S)^{\cup} = R^{\cup} \cup S^{\cup}.$$

$$3) R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T.$$

$$4) (R \circ S)^{\cup} = S^{\cup} \circ R^{\cup}.$$

$$5) (R \cup S) \circ T = R \circ T \cup S \circ T.$$

$$6) R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T).$$

$$7) (R \cap S) \circ T \subset R \circ T \cap S \circ T.$$

$$8) R \circ (S \cap T) \subset R \circ S \cap R \circ T.$$

$$9) \text{Dom } (R^{\cup}) = \text{Im } R ..$$

$$10) \text{Im } (R^{\cup}) = \text{Dom } R ..$$

$$11) \text{Dom } (R \circ S) \subset \text{Dom } S.$$

$$12) \text{Im } (R \circ S) \subset \text{Im } R.$$

$$13) (R \setminus S)^{\cup} = R^{\cup} \setminus S^{\cup}.$$

$$14) R, S - \text{qat'iy tartib} \Rightarrow R \cup S, R \cap S, R^{\cup}, S^{\cup} - \text{qat'iy tartib}.$$

$$15) R, S - \text{qisman tartib} \Rightarrow R \cup S, R \cap S, R^{\cup}, S^{\cup} - \text{qisman tartib}.$$

$$16) R, S - \text{chiziqli tartib} \Rightarrow R \cup S, R \cap S, R^{\cup}, S^{\cup} - \text{chiziqli tartib}.$$

II BOB. ALGEBRALAR VA ALGEBRAIK SISTEMALAR

II.1-§. Binar algebraik amallar. Neytral, simmetrik elementlar.

II.1.1-ta'rif. A^n to'plamni A ga akslantiradigan har qanday akslantirish A to'plamda berilgan n -ar yoki n o'rinli algebraik amal deyiladi.

Bu erda n -manfiy bo'lmagan butun son bo'lib, *algebraik amalning rangi* deyiladi. $n=0$ bo'lsa, $A^0 = \emptyset$ bo'lgani uchun, 0-ar amal $f : \emptyset \rightarrow A$ ko'rinishidagi akslantirish bo'lib, $\emptyset$ ni A to'plamning birorta elementiga o'tkazadi. Boshqacha qilib aytganda, 0-ar amal A to'plamning ajratilgan elementidan iborat. Bir o'rinli amal $f : A \rightarrow A$ ko'rinishdagi funksiyadan iborat bo'lishi ravshan. Bir o'rinli algebraik amal qisqalik uchun ba'zan *unar amal* deyiladi.

$n=2$ bo'lganda ikki o'rinli algebraik amal $f : A \times A \rightarrow A$ akslantirishdan iborat bo'lib, *binar algebraik amal* deyiladi. Uch o'rinli algebraik amal *ternar algebraik amal* deyiladi. Agar ω A to'plamda berilgan n -ar algebraik amal bo'lsa, A to'plamni ω - n -ar algebraik amalga nisbatan *algebraik yopiq* deyiladi.

II.1.2-ta'rif. A^n to'plamdan A to'plamiga akslantirish A da aniqlangan n o'rinli qisman amal deyiladi.

II.1.3-misol. $B(A)$ - A to'plamining barcha to'plamostilaridan tuzilgan to'plam berilgan bo'lsin, u holda $f : B(A) \rightarrow B(A)$, $\forall X \in B(A)$ uchun $f(X) = A \setminus X$ tenglik yordamida aniqlanadigan amal unar algebraik amaldir.

II.1.4-misol. Q - rasinoal sonlar to'plamida bo'lish amali binar qisman amaldir.

II.1.5-misol. Natural sonlar to'plamida ixtiyoriy uchta songa ularning eng katta umumiy bo'luvchisini mos qo'yadigan amal, natural sonlar to'plamida aniqlangan ternar algebraik amaldir.

Binar algebraik amallarni $*$, $\bullet$, $+$, $\cdot$, $\odot$ ko'rinishlarda belgilash qabul qilingan.

II.1.6-misol. $+: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ ya'ni $+(a,b) = a+b$ tenglik yordamida aniqlangan amal - butun sonlar to'plamida qo'shish amali bo'lib, (a,b) butun sonlar juftligiga mos keladigan butun sonni $a+b$ ko'rinishida yozish qabul qilingan.

Shunga o'xshash A to'plamida $*$ binar algebraik amal berilgan bo'lsa, $*(a,b)$ o'rniga $a*b$ yozishni kelishib olamiz.

II.1.7-ta'rif. $A \neq 0$ to'plam va unda aniqlangan $*$ binar algebraik amal berilgan bo'lsin. U holda $(A,*)$ juftlik gruppoid deb ataladi.

II.1.8-misol. N -natural sonlar to'plami $\langle \bullet \rangle$ - N dagi ko'paytirish amali bo'lsa, u holda $(N, \bullet)$ -gruppoiddir.

II.1.9-ta'rif. $(A,*)$ -gruppoid berilgan bo'lsin, u holda

a) agar $\forall a, b \in A$ uchun $a*b = b*a$ bo'lsa, u holda $*$ - algebraik amal A to'plamda kommutativ deyiladi;

b) agar $\forall a, b, c \in A$ uchun $a*(b*c) = (c*b)*c$ shart bajarilsa, $*$ - A to'plamda assosiativ algebraik amal deyiladi;

v) Agar $\forall a \in A$ uchun Shunday $e \in A$ topilib, $e*a = a$ shart bajarilsa, e element $*$ amalga nisbatan chap neytral element, agar $a*e = a$ shart bajarilsa, o'ng neytral element, agar ikkala shart ham bajarilsa neytral element deyiladi.

II.1.8-ta'rif. $(A,*)$ -gruppoid berilgan bo'lsin. Agar $e \in A$ element $*$ -amalga nisbatan neytral element bo'lsa, u holda e gruppoidning neytral elementi deyiladi.

II.1.9-teorema. Agar $(A,*)$ -gruppoidda neytral element mavjud bo'lsa, u Yagonadir.

Isbot. Faraz qilaylik $(A,*)$ -gruppoidda ikkita e_1 va e_2 neytral elementlar mavjud bo'lsin, u holda neytral elementning ta'rifiga ko'ra $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$, ya'ni $e_1 = e_2$

II.1.10-natija. Agar $(A,*)$ -gruppoidda neytral element mavjud bo'lsa, uning barcha chap, o'ng neytral elementlari neytral elementga teng.

II.1.11-ta'rif. Agar $(A,*)$ -gruppoidda $*$ amal qo'shish amalidan iborat bo'lsa, gruppoid additiv gruppoid; agar $*$ amal, ko'paytirish amali bo'lsa,

gruppoid mul'tiplikativ gruppoid deyiladi.

Odatda qo'shish amali «+» orqali, ko'paytirish amali «•» orqali belgilanadi. Qo'shish amaliga nisbatan neytral elementni nol deb ataymiz va «0» orqali belgilaymiz. Ko'paytirish amaliga nisbatan neytral element birlik element deyilib «1» orqali belgilanadi.

II.1.12-misol. $(R,+)$ gruppoidning neytral elementi 0; $(R,\bullet)$ - gruppoidning neytral elementi 1. Bu erda R -haqiqiy sonlar to'plami, $+$, $\bullet$ - R dagi qo'shish va ko'paytirish amallaridir.

II.1.13-misol. $B(A)$ - A to'plamning barcha to'plamostilari bo'lsin, u holda $V(A)$ to'plamlarni qo'shish amaliga nisbatan gruppoid bo'lib, uning neytral elementi $\emptyset$ to'plamdir. $B(A)$ - to'plamlarning kesishmasi amaliga nisbatan ham gruppoid bo'lib, uning neytral elementi A to'plamdan iborat.

II.1.14-ta'rif. $(A,*)$ -gruppoid berilgan bo'lsin, u holda $a \in A$ element va $\forall b, c \in A$ elementlar uchun $a * b = a * c$ tenglikdan $b = c$ kelib chiqsa, u holda a element $(A,*)$ gruppoidning chap regulyar elementi, $b * a = c * a$ shartdan $b = c$ kelib chiqsa, a element $(A,*)$ gruppoidning o'ng regulyar elementi deyiladi. Ham chap, ham o'ng regulyar element regulyar element deyiladi.

II.1.18-misol. $(R,+)$ gruppoidning barcha elementlari regulyar elementlardir.

II.1.19 -ta'rif. $(A,*)$ -gruppoid neytral elementga ega bo'lsin. U holda $a \in A$ element uchun Shunday $a' \in A$ element topilib, $a' * a = e$ bo'lsa, a' element a elementga chap simmetrik element, $a * a' = e$ bo'lsa o'ng simmetrik, ikkala shart ham bajarilsa, simmetrik element deyiladi.

II.1.20-misol. $(R,+)$ gruppoidda $\forall a \in R$ element uchun a element simmetrik elementdir.

II.1.21-misol. $(R,\bullet)$ - gruppoidda $\forall a \in R, a \neq 0$ element uchun a^{-1} element simmetrik elementdir.

Agar $(A,*)$ -gruppoidda $*$ -amal qo'shish bo'lsa, «simmetrik» termini, «qarama-qarshi» termini bilan; agar $*$ -amali ko'paytirish bo'lsa, «teskari» termini bilan almashtiriladi.

II.1.22-ta'rif. $(A,*)$ -gruppoid, R esa A to'plamdagi ekvivalentlik munosabati bo'lsin. Agar $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ elementlar uchun $a_1 R b_1$ va $a_2 R b_2$ shartlardan $[a_1 * a_2] R [b_1 * b_2]$ kelib chiqsa, u holda R -ekvivalentlik munosabati $(A,*)$ gruppoidda kongruensiya deyiladi.

II.1.23-misol. $(\mathbb{Z}; +)$ gruppoidda $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ elementlar uchun $[x_1 R z_2] \Leftrightarrow [x_1 - z_2] \vdash 3$ qonun bilan aniqlangan ekvivalentlik kongruensiyadir. Haqiqatdan ham, $x_1 R y_1$ va $x_2 R y_2$ bo'lsin, ya'ni $x_1 - y_1 \vdash 3$ va $x_2 - y_2 \vdash 3$ u holda $[x_1 + x_2] \vdash [y_1 + y_2] \Leftrightarrow [x_1 - y_1] + [x_2 - y_2] \vdash 3$ ham 3 ga bo'linishi ravshan.

Takrorlash uchun savollar

1. Binar algebraik amalga maktab matematikasidan misollar keltiring.
2. n -ar algebraik amal ta'rifini ayting.
3. Unar algebraik amalga misol keltiring.
4. Gruppoid nima?
5. Gruppoidning neytral elementi xossalarini ayting.
6. Gruppoidning regulyar elementi ta'rifini ayting.
7. Gruppoidning simmetrik elementi nima?
8. Neytral, regulyar, simmetrik elementlarga o'rta maxsus ta'lim matematikasidan misollar keltiring.
9. Kongruensiyaning misollar yordamida tushuntiring.

M a s h q l a r

1. To'plamlarning kesishmasi assosiativ, kommutativ amal bo'lishini isbotlang.
2. To'plamlarning birlashmasi kommutativ, assosiativ amal bo'lishini isbotlang.
3. To'plamlarning ayirmasi kommutativ emasligini isbotlang.

4. Matrisalarni qo'shish kommutativ va assosiativ amal ekanligini isbotlang.
5. Matrisalarni ko'paytirish assosiativ, kommutativ bo'lmagan binar amal ekanligini isbotlang.
6. Matrisalarni ko'paytirish qo'shish amaliga nisbatan distributiv ekanligini isbotlang.
7. To'plamlarning kesishmasi birlashmasiga nisbatan distributivligini isbotlang.
8. Ixtiyoriy a, b, c kardinal sonlar uchun quyidagilarni isbotlang:
- 1) $a + b = b + a$;
 - 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
 - 3) $a \cdot b = b \cdot a$;
 - 4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
 - 5) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
 - 6) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$.

II.2-§. Algebra. Algebralar gomomorfizmi.

Algebraosti. Faktor-algebra

II.2.1-ta'rif. $(A,*)$ -gruppoidda $*$ -assosiativ amal bo'lsa, bunday gruppoid *yarimgrupp*a deyiladi.

Neytral elementga ega bo'lgan yarimgrupp *monoid* deyiladi.

II.2.2-misol. Natural sonlar to'plami qo'shish amaliga nisbatan yarimgruppadir. Kelgusida bu yarimgrupp $(N,+)$ orqali belgilanadi.

II.2.3-misol. Natural sonlar to'plami ko'paytirish amaliga nisbatan monoiddir. Bu monoidda $(N; \cdot, 1)$ tartiblangan uchlik ko'rinishida belgilanadi.

II.2.4-teorema. *Monoidda ixtiyoriy element ko'pi bilan bitta simmetrik elementga ega.*

Isbot. Faraz qilaylik $(A,*)$ - yarimgruppada a element uchun ikkita a_1 va a_2

simmetrik elementlar mavjud bo'lsin. U holda

$$a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2.$$

II.2.5-natija. Monoidda a element uchun simmetrik element mavjud bo'lsa, a elementga chap, o'ng simmetrik elementlar a ga simmetrik bo'lgan elementga teng bo'ladi.

II.2.6-teorema. $(A, *, e)$ - monoidda $a \in A$ elementga $a', b \in A$ elementga esa b' - simmetrik element bo'lsin, u holda $a * b$ elementga $b' * a'$ simmetrik element bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham,
 $(a * b) * (b' * a') = (a * (b * b')) * a' = (a * e) * a' = a * a' = e$ va
 $(b' * a')(a * b) = (b' * (a * a)) * b = (b' * e) * b = b' * b = e$

II.2.7-teorema. $(A, *, e)$ - monoid berilgan bo'lsin, agar $a \in A$ element uchun simmetrik element mavjud bo'lsa, bunday element regulyar elementdir.

Isbot. Haqiqatdan ham, $a \in A$ elementga $a' \in A$ element simmetrik bo'lsin, u holda $\forall b, c \in A$ elementlar uchun $a * b = a * c$ shart bajarilsa, $a' * (a * b) = a' * (a * c)$ yoki $(a' * a) * c = (a' * a) * c$ bo'ladi. Agar $a' * a = e$ bo'lishini hisobga olsak, $b = c$ bo'ladi.

II.2.8-ta'rif. $(A, *)$ -gruppoid va $B \subset A$ bo'lsin. Agar $\forall b_1, b_2 \in B$ elementlar uchun $b_1 * b_2 \in B$ bo'lsa, B to'plam $*$ algebraik amalga nisbatan algebraik yopiq deyiladi. $(B, *)$ juftlik esa $(A, *)$ gruppoidning qism gruppoidi yoki gruppoidosti deyiladi.

II.2.9-misol $(\mathbb{Q}, +)$ gruppoid $(\mathbb{R}, +)$ gruppoidning qism gruppoididir.

II.2.10-ta'rif. $A \neq \emptyset$ to'plam va A da bajariladigan algebraik amallar to'plami Ω berilgan bo'lsin. (A, Ω) - juftlik algebra deyiladi.

A - to'plam algebraning bosh to'plami, Ω -algebraning bosh amallari to'plami deyiladi.

(A, Ω) to'plam berilgan bo'lsa, A to'plam Ω dagi barcha amallarga nisbatan algebraik yopiq bo'lishi ravshan. Algebradagi Ω -amallar to'plami

chekli, ya'ni $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ bo'lsa, $(A, \omega_1, \dots, \omega_n)$ o'rniga yozuvni iychamlashtirish maqsadida (A, Ω) - deb yozishga kelishib olamiz.

II.2.11-misol. Har qanday grupoid algebradir.

II.2.12-misol. Haqiqiy sonlar to'plami va unda bajariladigan «•», «+» amallari 0-o'rinli amallar 0, 1 lar bilan birga, ya'ni $(R, +, \bullet, 0, 1)$ - algebradir. Bu algebraning bosh amallari to'plami $(+, \bullet, 0, 1)$ bo'lib, darajaga ko'tarish, ayirish amallarini hosilaviy amallar deb qarashimiz mumkin.

II.2.13-ta'rif. (A, Ω) va (B, Ω') algebralarning amallari to'plamlari Ω va Ω' lar orasida biektiv moslik o'rnatilgan bo'lib, Ω to'plamdagi har bir ω n-ar amalga nisbatan Ω' dan ω' n-ar amal mos qo'yilgan bo'lsa, bu algebralar bir hil turli algebralar deyiladi.

Agar (A, Ω) algebra berilgan bo'lsa, Ω -to'plamdagi amallarning ranglaridan iborat to'plam *algebraning turi* deyiladi. Xususan $(A; \omega_1, \dots, \omega_n)$ algebraning turi $r(\omega_1), \dots, r(\omega_n)$ to'plamdan iborat. Bir xil turdagi algebralarning bir-biriga mos keladigan amallarining ranglari bir xil bo'lishi ravshan.

II.2.14-misol. $(A, *)$ -grupoidning turi $\mathbb{Z}$ to'plamdan, $(\mathbb{A}, *, e)$ - monoidning turi esa $\mathbb{Z}_0$ to'plamdan iborat.

Algebradagi amallar to'plami chekli bo'lganda, bu algebraning turini ketma-ketlik sifatida yozish maqsadga muvofiq, ya'ni $(A; \omega_1, \dots, \omega_n)$ algebraning turi $(r(\omega_1), \dots, r(\omega_n))$ ketma-ketlik ko'rinishida ifoda qilinadi.

II.2.15-misol. $(R, +, \bullet, 0, 1)$ algebraning turi $(2, 2, 0, 0)$ ketma-ketlikdan iborat.

(A, Ω) va (B, Ω') bir xil turli algebralar berilgan bo'lsin. $\forall \omega \in \Omega$ amalga $\omega' \in \Omega'$ amal mos qo'yilgan deb faraz qilaylik. Agar $\varphi: A \rightarrow B$, akslantirish va $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ elementlar uchun $\varphi(\omega(a_1, \dots, a_n)) = \omega'(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$ tenglik bajarilsa, φ akslantirish ω amalni saqlaydi. ω amal A to'plamdagi ajratilgan element, ya'ni nol o'rinli amal bo'lsa, u holda ω ga mos keladigan ω' ham B to'plamning ajratilgan elementi bo'ladi, $\varphi(\omega) = \omega'$.

II.2.16-ta'rif. $(A, \Omega), (B, \Omega')$ algebralar berilgan bo'lsin. Ω dagi barcha amallarni saqlaydigan $\varphi: A \rightarrow B$ akslantirish (A, Ω) agebraning (B, Ω) algebraga gomomorfizmi deyiladi.

II.2.17-ta'rif. $\varphi: A \rightarrow B$ akslantirish (A, Ω) agebraning (B, Ω') algebraga gomomorfizmi bo'lsin. U holda agar φ - in'ektiv akslantirish bo'lsa, monomorfizm; φ - syur'ektiv akslantirish bo'lsa, epimorfizm; φ - biektiv akslantirish bo'lsa izomorfizm deyiladi. Monomorf akslantirishni izomorf joylashtirish deb ham yuritiladi.

II.2.18-ta'rif. Algebrani o'zini o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm; algebrani o'zini o'ziga izomorf akslantirish esa avtomorfizm deyiladi.

II.2.19-ta'rif. (A, Ω) algebrani (B, Ω') algebraga akslantiradigan kamida bitta izomorfizm mavjud bo'lsa, u holda (A, Ω) algebra (B, Ω') algebraga izomorf deyiladi.

II.2.20-misol. R - haqiqiy sonlar to'plami R^+ musbat haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin $(R^+, \bullet, 1)$ va $(R, +, 0)$ algebralar $(2, 0)$ tipli algebralar bo'lib, $\varphi: R^+ \rightarrow R, \varphi(x) = \lg x$ akslantirish birinchi algebrani ikkinchi algebraga izomorf akslantirishdir. Haqiqatdan ham, φ - biektiv akslantirish bo'lib $\varphi(a \bullet b) = \lg(a \bullet b) = \lg a + \lg b = \varphi(a) + \varphi(b)$.

II.2.21-teorema. $(A, \Omega_1), (B, \Omega_2), (C, \Omega_3)$ algebralar berilgan bo'lib, g A to'plamni B to'plamga, φ esa B to'plamni C to'plamga akslantirish, $\varphi \circ g$ esa bu akslantirishlarning kompozitsiyasi bo'lsin. U holda φ va g lar gomomorfizm bo'lishidan $\varphi \circ g$ ning gomomorfizm bo'lishi; φ va g lar epimorfizm bo'lishidan $\varphi \circ g$ ning epimorfizm bo'lishi; φ va g lar monomorfizm bo'lishidan $\varphi \circ g$ ning monomorfizm bo'lishi; φ va g larning izomorfizm bo'lishidan $\varphi \circ g$ ning izomorfizm bo'lishi kelib chiqadi.

Isbot. $\omega_1 \in \Omega_1$ n -ar algebraik amalga Ω_2 dan ω_2 n -ar algebraik amal mos qo'yilgan, ω_2 ga esa Ω_3 dan ω_3 n -ar algebraik amal mos qo'yilgan bo'lsin, u

holda $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ uchun teorema shartiga ko'ra φ va g akslantirishlar gomomorfizmlar bo'lishini inobatga olsak,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ g)(\omega_1(a_1, \dots, a_n)) &= \varphi(g(\omega_1(a_1, \dots, a_n))) = \varphi(\omega_2(g(a_1), \dots, g(a_n))) = \\ &= \omega_3(\varphi(g(a_1)), \dots, \varphi(g(a_n))) = \omega_3((\varphi \circ g)(a_1), \dots, (\varphi \circ g)(a_n)). \end{aligned}$$

Shunday qilib φ va g lar gomomorfizmlar bo'lishidan $\varphi \circ g$ ning gomomorfizm bo'lishini isbot qildik. Teoremaning qolgan tasdiqlari funksiyalar kompozitsiyasining xossaligidan bevosita kelib chiqadi.

II.2.22-teorema. Agar (A, Ω_1) algebraning (B, Ω_2) algebraga izomorfizmi bo'lsa, u holda φ ga teskari bo'lgan φ^{-1} akslantirish (B, Ω_2) algebraning (A, Ω_1) algebraga izomorfizmidir.

Isbot. φ -biektiv akslantirish bo'lganligi sababli φ^{-1} ham biektiv akslantirish bo'lishi Yuqorida isbot qilingandek. SHuning uchun teoremani isbot qilish uchun φ^{-1} akslantirish algebraik amallarni saqlanishini ko'rsatish kifoya.

Faraz qilaylik, $\omega_1 \in \Omega$ n -ar algebraik amalga Ω_2 to'plamidan ω_2 amal mos kelsin. $\forall b_1, \dots, b_n \in B$ elementlar uchun $\varphi(a_1) = b_1, \dots, \varphi(a_n) = b_n$ deb olsak, u holda $\varphi^{-1}(b_1) = a_1, \dots, \varphi^{-1}(b_n) = a_n$.

Endi $\varphi^{-1}(\omega_2(b_1, \dots, b_n)) = \omega_1(\varphi^{-1}(b_1), \dots, \varphi^{-1}(b_n))$ bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatdan agar φ -akslantirish amallarni saqlashini hisobga olsak,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\omega_2(b_1), \dots, \omega_2(b_n)) &= \varphi^{-1}(\omega_2(\varphi(a_1)), \dots, (\varphi(a_n))) = \varphi^{-1}(\varphi(\omega_1(a_1, \dots, a_n))) = \\ &= (\varphi^{-1} \circ \varphi)(\omega_1(a_1, \dots, a_n)) = \omega_1(a_1, \dots, a_n) = \omega_1(\varphi^{-1}(b_1), \dots, \varphi^{-1}(b_n)) \end{aligned}$$

II.2.23-natija. Algebralar izomorfizmi ekvivalentlik munosabatidir.

II.2.24-ta'rif. (A, Ω_1) va (A, Ω_2) bir xil tipli algebralar berilgan bo'lib, $B \subset A$ bo'lsin. Agar $\forall \omega_1 \in \Omega$ n -ar algebraik amalga Ω_2 dan mos keladigan n -ar algebraik amalni ω_2 orqali belgilaymiz. Agar $\forall b_1, \dots, b_n \in B$ uchun $\omega_2(b_1, \dots, b_n) = \omega_1(b_1, \dots, b_n)$ tenglik bajarilsa, u holda ω_2 n -ar algebraik amal ω_1 n -ar algebraik amalning B to'plami bo'yicha cheklangani (B, Ω_1) algebra

esa (A, Ω_2) algebraning qism algebrasi yoki algebraosti deyiladi.

II.2.25-misol. $(Q, +, \bullet, 0, 1)$ algebra $(R, +, \bullet, 0, 1)$ algebraning algebraosti bo'lib, Q dagi amallar R dagi amallarni Q to'plam bo'yicha cheklanganidir.

II.2.26-teorema. Algebraosti bo'lish munosabati refleksiv, antisimmetrik, tranzitiv munosabat, ya'ni noqat'iy tartib munosabatdir.

Isbot. Haqiqatdan ham, har qanday $(A; \Omega_1)$ algebra $(A; \Omega_1)$ algebraning algebraostidir. Agar (A, Ω_1) algebra (B, Ω_2) algebraning algebraosti bo'lsa va aksincha (B, Ω_2) algebra (A, Ω_1) algebraning algebraosti bo'lsa, $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'ladi, bundan $A = B$ kelib chiqadi. U holda, agar Ω_1 dagi ω_1 n -ar algebraik amalga Ω_2 dan ω_2 n -ar amal mos kelsa, $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ uchun $\omega_1(b_1, \dots, b_n) = \omega_2(b_1, \dots, b_n)$ bo'ladi.

Algebraosti munosabati tranzitiv bo'lishi ham bevosita tekshiriladi. Buni mustaqil isbotlash uchun talabalarga qoldiramiz.

Shunday qilib, algebraosti bo'lish munosabati refleksiv, antisimmetrik va tranzitiv munosabat, ya'ni, noqat'iy tartib munosabat ekan.

$(A_\alpha, \Omega_\alpha) \mid -\alpha \in M$ to'plam (B, Ω) algebraning algebraostilari to'plami bo'lsin. Algebraostining ta'rifiga ko'ra har bir $(A_\alpha, \Omega_\alpha)$ algebra (B, Ω) algebra bilan bir hil turli va $\forall \omega_2$ n -ar algebraik amal Ω dagi qandaydir ω -ar algebraik amalning cheklanganidir.

Faraz qilaylik $\bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha \neq \emptyset$ bo'lsin, u holda $\forall a_1, \dots, a_n \in \bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha$ uchun $\omega_\alpha(a_1, \dots, a_n) = \omega(a_1, \dots, a_n) \in \bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha$ bo'ladi. Demak, $\bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha$ - to'plam ω -ar algebraik amalning $\bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha$ dagi cheklanganlarini belgilasak: $(\bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha, \Omega')$ algebra (B, Ω) algebraning algebraosti bo'lishi ravshan. Bu algebrani $(A_\alpha, \Omega_\alpha)$ -algebraostilarning kesishmasi deb ataymiz.

II.2.27-teorema. Agar (A, Ω) algebrada hech bo'lmaganda bitta nol o'rinli algebraik amal bo'lsa, bu algebraning algebraostilari ixtiyoriy to'plamidagi

algebraostilar kesishmasi yana (A, Ω) ning algebraosti bo'ladi.

Isbot. Nol o'rinli amal ajratilgan element ekanligini hisobga olsak, bu element (A, Ω) algebraning har qanday algebraostining ham ajratilgan elementi bo'lishi kelib chiqadi. Demak, (A, Ω) algebraning algebraostilari ixtiyoriy to'plamidagi algebraostilari kesishmasi bo'sh emas. Natijada bu kesishma Yuqorida isbotlaganimizga ko'ra algebraosti bo'ladi.

II.2.28-natija. (A, Ω) algebra va $B \neq \emptyset$ to'plam A ning to'plamosti berilgan bo'lsin. $\{A_\alpha, \Omega_\alpha\} | - \alpha \in M$ to'plam esa (A, Ω) algebraning $B \subset A_\alpha$ shartni qanoatlantiradigan barcha algebraostilari bo'lsin. U holda barcha $(A_\alpha, \Omega_\alpha)$ -algebraostilarning kesishmasi (A, Ω) algebraning algebraosti bo'ladi. Bu algebraosti B to'plam yaratgan algebraosti deyiladi.

A to'plam va unda bajarilgan n -ar algebraik amal, $\sim$ -ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin. Agar $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ va $\forall b_1, \dots, b_n \in A$ elementlar uchun $a_i \sim b_i, i = 1, \dots, n$ shartdan $\omega(a_1, \dots, a_n) \sim \omega(b_1, \dots, b_n)$ kelib chiqsa, $\sim$ -ekvivalentlik munosabati ω - n -ar algebraik amalga nisbatan kongruensiya deyiladi. $A/\sim$ to'plam A ning ekvivalentlik munosabatiga nisbatan faktor to'plami bo'lsin. $[a_1], \dots, [a_n]$ lar $A/\sim$ ning ixtiyoriy elementlari bo'lsin. U holda $\forall ([a_1], \dots, [a_n])$ n likga $[\omega(a_1, \dots, a_n)]$ ekvivalentlik sinfini mos qo'yadigan akslantirish $A/\sim$ to'plamda aniqlangan n -ar algebraik amaldir. Haqiqatdan $[\omega(a_1, \dots, a_n)]$ sinf $[a_1], \dots, [a_n]$ ekvivalentlik sinflaridan olingan a_1 vakillarga bog'liq emas. Chunki, agar $i = 1, \dots, n$ lar uchun $b_i \in (a_i)$, ya'ni $b_i \sim a_i$ bo'lsa $\sim$ -ekvivalentlik munosabati kongruensiya bo'lgani uchun, $\omega(a_1, \dots, a_n) \sim \omega(b_1, \dots, b_n)$ bo'ladi, u holda $[\omega(a_1, \dots, a_n)] \sim [\omega(b_1, \dots, b_n)]$.

$A/\sim$ faktor to'plamda aniqlangan bu amalning $\sim$ -kongruensiya orqali ω - n -ar algebraik amal bilan assosirlangan amal deb ataymiz va ω^* orqali belgilaymiz. Shunday qilib $\forall [a_1], \dots, [a_n] \in A/\sim$ uchun $\omega^*([a_1], \dots, [a_n]) = ([\omega(a_1, \dots, a_n)])$.

II.2.29-ta'rif. (A, Ω) algebra va $\sim \Omega$ dagi har bir amalga nisbatan

kongruensiya bo'lsin. Ω^* to'plam esa $A/\sim$ faktor-to'plamda aniqlangan va Ω dagi amallar bilan assosirlangan barcha amallar to'plami bo'lsin. U holda $(A/\sim, \Omega^*)$ - algebra (A, Ω) algebraning $\sim$ - kongruensiya bo'yicha faktor-algebrasi deyiladi.

II.2.30-misol. Z - butun sonlar to'plami bo'lsin. Z da $a \sim b$ deymiz va a ga $a-b$ juft son bo'lsa, $\sim$ - munosabat kongruensiya bo'lishi ravshan. Bu munosabat bo'yicha ekvivalentlik sinflari faqat ikkita bo'lib, ular $\mathbb{Z}_2$ sinflardan iborat. Bu sinflar to'plamini $Z/\sim$ orqali belgilaylik, $\forall [a], [b] \in Z/\sim$ uchun $\oplus, \odot$ amallarini $[a] \oplus [b] = [a+b]$, $[a] \odot [b] = [a \cdot b]$ tengliklar orqali aniqlasak, $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot, [0], [1])$ algebra $(Z, \bullet, 0, 1)$ algebraning faktor algebrasi bo'ladi.

II.2.31-teorema. $\varphi: A \rightarrow B$ akslantirish (A, Ω_1) algebraning (B, Ω_2) algebraga epimorfizmi bo'lsin. U holda A to'plamda aniqlangan $R = \{(x' x'') \mid \forall x', x'' \in A, \varphi(x') = \varphi(x'')\}$ - munosabat Ω_1 to'plamdagi har bir amalga nisbatan kongruensiya bo'lib, A/R to'plam Ω_1^* amallar to'plamiga nisbatan (A, Ω_1) algebraning faktor algebrasi bo'ladi. Bu algebrani $(A/R, \Omega^*)$ orqali belgilaymiz.

Isbot. Teoremani isbot qilish uchun $R - \Omega_1$ dagi har bir ω_1 n -ar amalga nisbatan kongruensiya bo'lishini ko'rsatish etarli. R - ekvivalentlik munosabati bo'lishi isbotlangan edi. SHuning uchun $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ va $b_1, \dots, b_n \in A$ elementlar uchun $a_i R b_i, i=1, \dots, n$ munosabatdan $\omega_1(a_1, \dots, a_n) R \omega_1(b_1, \dots, b_n)$ bo'lishini ko'rsatishimiz etarli.

Shartga ko'ra $\varphi(a_i) = \varphi(b_i), i=1, \dots, n$, u holda φ -gomomorfizm bo'lishi uchun

$$\varphi(\omega_1(a_1, \dots, a_n)) = \omega_1(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \omega_1(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)) = \varphi(\omega_1(b_1, \dots, b_n)).$$

Demak, $\omega_1(a_1, \dots, a_n) R \omega_1(b_1, \dots, b_n)$.

II.2.32-teorema. $\varphi: A \rightarrow B$ akslantirish (A, Ω_1) algebraning (B, Ω_2) algebraga epimorfizmi, $R = \{(x' x'') \mid \forall x', x'' \in A, \varphi(x') = \varphi(x'')\}$ -esa A da aniqlangan ekvivalentlik munosabati bo'lsin. U holda $(A/R, \Omega^*)$ faktor algebra (B, Ω_2) algebraga izomorfdir.

Isbot. Har bir $[a] \in A/R$ sinfga $\varphi(a)$ ni mos qo'yadigan $\Phi: A/R \rightarrow B$ akslantirish $(A/R, \Omega_1^*)$ algebrani (B, Ω_2) algebraga akslantiradigan izomorfizmdir. Undan tashqari $\forall [a_1], \dots, [a_n] \in A/R$ elementlar va

$$\begin{aligned} \forall \omega_1 \in \Omega_1^* \quad n\text{-ar algebraik amal uchun } \Phi(\omega_1^*(\underline{[a_1]}, \dots, \underline{[a_n]})) = \\ = \Phi(\underline{\omega_1(a_1, \dots, a_n)}) = \varphi(\omega_1(a_1, \dots, a_n)) = \omega_1(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \omega_1^*(\Phi(\underline{[a_1]}), \dots, \Phi(\underline{[a_n]})) \end{aligned}$$

II.2.33-teorema. $(A, *)$ gruppoid, $\sim$ -esa, A dagi kongruensiya munosabati $A/\sim$ to'plamning $\sim$ -ekvivalentlik munosabati bo'yicha faktor-to'plami bo'lsin. U holda $\forall \underline{[a_1]}, \underline{[a_2]} \in A/\sim$ ekvivalentlik sinflari uchun $\underline{[a_1]} * \underline{[a_2]} = \underline{[a_1 * a_2]}$ tenglik bilan aniqlanadigan munosabat A/N to'plamda algebraik amal bo'ladi.

Isbot. Teoremani isbot qilish uchun $\forall \underline{[a_1]}, \underline{[a_2]} \in A/\sim$ sinflarga teorema shartida ko'rsatilgan tenglik Yagona sinfni mos qo'yishini ko'rsatish etarli.

Faraz qilaylik, $\forall b_1 \in [a_1] \wedge \forall b_2 \in [a_2]$ bo'lsin, u holda $b_1 \sim a_1$ va $b_2 \sim a_2$. Teorema shartiga ko'ra $\sim$ -kongruensiya. Demak, $b_1 * b_2 \sim a_1 * a_2$ ya'ni, $\underline{[b_1]} * \underline{[a_2]} = \underline{[b_1]} * \underline{[b_2]}$. Demak, $\underline{[a_1]} * \underline{[a_2]}$ ifoda $\underline{[a_1]}$ va $\underline{[a_2]}$ ekvivalentlik sinflaridan olingan vakillarga bog'liq bo'lmagan Yagona ekvivalentlik sinfi ekan.

Shunday qilib, $A/\sim$ to'plam $*$ -amalga nisbatan gruppoid bo'lishini isbot qildik. Bu gruppoidni $(A, *)$ gruppoidning faktor gruppoidi deb ataymiz va $(A/\sim, \oplus)$ orqali belgilaymiz.

II.2.34-misol. $(Z, +)$ -gruppoidda $\forall z_1, z_2 \in A$ uchun $(z_1 \sim z_2) \Leftrightarrow ((z_1 - z_2) : 3)$ qonuniyat bilan aniqlangan munosabat kongruensiya bo'lishini Yuqorida ko'rdik. Z ning $\sim$ munosabat bo'yicha ekvivalentlik sinflari $Z_3 = \{\underline{[0]}, \underline{[1]}, \underline{[2]}\}$ -to'plamdan iborat. U holda $Z_3, \forall \underline{[a]}, \underline{[b]} \in Z_3$ uchun $\underline{[a]} \oplus \underline{[b]} = \underline{[a + b]}$ tenglik yordamida aniqlangan amalga nisbatan gruppoid bo'lib, Z ning faktor gruppoididir.

II.2.35-teorema. $\mathbb{G}_1, \Omega_1 \rhd \mathbb{G}_2, \Omega_2 \rhd \mathbb{G}, \Omega$ - bir xil turli algebralar berilgan bo'lib, $G_1 \cong G_2$, $\mathbb{G}_2, \Omega_2 \rhd$ algebra $\mathbb{G}, \Omega \rhd$ algebraning algebraostisi bo'lsin. U holda $\mathbb{G}_1, \Omega_1 \rhd$ qism algebradan iborat qism algebraga ega bo'lgan $\mathbb{G}, \Omega \rhd$ algebraga izomorf $\mathbb{G}_3, \Omega_3 \rhd$ algebra mavjud.

Isbot. Faraz qilaylik $\forall \omega_1 \in \Omega_1$ n -ar algebraik amalga $\omega_2 \in \Omega_2$ n -ar algebraik amal, $\omega_2 \in \Omega_2$ algebraik amalga esa $\omega \in \Omega$ n -ar algebraik amal mos kelsin va $\varphi: G_1 \in G_2$ izomorf akslantirish bo'lsin.

$G_3 = (G/G_2) \cup G_1$ to'plamda har bir $\omega \in \Omega$ n -ar algebraik amalga mos qilib ω_3 n -ar algebraik amalni $\forall a_1, \dots, a_k \in G \setminus G_2, \forall a_{k+1}, \dots, a_n \in G_1$ elementlar uchun, agar $\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n)) \in G_2$ bo'lsa,

$$\omega_3(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = \varphi^{-1}(\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n)));$$

Agar $\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n)) \in G \setminus G_2$ bo'lsa,

$\omega_3(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = \omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n))$ tengliklar yordamida aniqlaylik. Agar shunday usulda G_3 da aniqlangan barcha amallar to'plamini Ω_3 orqali belgilasak $\langle G_3, \Omega_3 \rangle$ - algebra hosil bo'ladi. Bu algebra teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiruvchi algebradir. Algebraning tuzilishiga asosan $\langle G_1, \Omega_1 \rangle$ algebra bu algebraning algebraostisi bo'lib, $\langle G_3, \Omega_3 \rangle$ va $\langle G_1, \Omega_1 \rangle$ algebralar bir xil turlidir.

$$\forall a_3 \in G_3 \text{ uchun } \psi(a_3) = \begin{cases} a_3, \text{ agar } a_3 \in G_1 / G_2; \\ \varphi(a_3), \text{ agar } a_3 \in G_1 \end{cases}$$

akslantirish $\langle G_3, \Omega_3 \rangle$ algebrani $\langle G, \Omega \rangle$ algebraga izomorf akslantiradi.

Haqiqatdan ham, ψ – tuzilishiga asosan biektiv akslantirish bo'lishi ravshan. shuning uchun ψ Ω_3 dagi amallarni saqlashini ko'rsatish kifoya $\forall \omega_3 \in \Omega, a_1, \dots, a_k \in G \setminus G_2, a_{k+1}, \dots, a_n \in G_1$ uchun $\psi(\omega_3(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)) = \omega(\psi(a_1), \dots, \psi(a_k), \psi(a_{k+1}), \dots, \psi(a_n))$ tenglikni isbot qilamiz va ψ lar ω_3 ning aniqlanishiga ko'ra agar $\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n)) \in G_T / G_2$ bo'lsa, $\psi(\omega_3(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)) = \psi(\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n))) = \omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n)) = \omega(\psi(a_1), \dots, \psi(a_k), \psi(a_{k+1}), \dots, \psi(a_n))$, agar $\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n)) \in G_2$ bo'lsa yana ω_3 va ψ larning aniqlanishiga va

$\varphi^{-1}(\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n))) \in G_1$ bo'lishiga ko'ra

$$\psi(\omega_3(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)) = \psi(\varphi^{-1}(\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n)))) =$$

$$\varphi(\varphi^{-1}(\omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \dots, \varphi(a_n)))) = \omega(a_1, \dots, a_k, \varphi(a_{k+1}), \varphi(a_n)) \\ = \omega(\psi(a_1), \dots, \psi(a_k), \psi(a_{k+1}), \dots, \psi(a_n)).$$

Takrorlash uchun savollar

1. YArimgruppa deb nimaga aytiladi?
2. Monoidga ta'rif bering va misol keltiring.
3. Algebra tushunchasiga maktab matematikasidan misollar keltiring.
4. Algebraning turi qanday aniqlanadi?
5. Algebralar gomomorfizmini tushuntiring.
6. Izomorfizm, avtomorfizm ta'rifidagi umumiy, farqli shartlarni aniqlang.
7. Biektiv akslantirishlar izomorfizm bo'la oladimi?

M a s h q l a r

1. $A = \{e, a\}$ to'plamda binar algebraik amal quyidagi jadval orqali aniqlangan:

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	a

A to'plam ushbu amalga nisbatan qisqartirish bajarib bo'lmaydigan yarimgruppa ekanligini isbotlang.

2. Natural sonlar to'plami ko'paytirish amaliga nisbatan yarimgruppa tashkil etishini isbotlang.

3. Natural sonlar to'plami qo'shish amaligan nisbatan yarimgruppa tashkil etishini isbotlang.

4. Barcha musbat ratsional sonlar to'plami bo'lish amaligan nisbatan gruppoid bo'ladi, lekin yarimgruppa tashkil etmaydi. Isbotlang.

5. Gomomorfizmlar kompozitsiyasi yana gomomorfizm ekanligini isbotlang.
6. Algebralar izomorfizmi ekvivalentlik munosabati ekanligini isbotlang.
7. Algebraostilar kesishmasi yana algebra bo'lishini isbotlang.

II.3-§. Gruppa. Halqa. Gruppalar, halqalar gomomorfizmi

II.3.1-ta'rif. Bizga $\langle G, * \rangle$ turli $(G, *, 1)$ algebra berigan bo'lib quyidagi shartlar bajarilsin:

1. $*$ -binar algebraik amal assosiativ, ya'ni $\forall a, b, c \in G$ uchun $(a * b) * c = a * (b * c)$ bo'lsin.
2. G da neytral element mavjud, ya'ni $\forall a \in G$ uchun Shunday $e \in G$ topilib, $e * a = a$ shart bajarilsin.
3. Har qanday $a \in G$ uchun $a' * a = e$ bo'lsin. U holda $\langle G, *, ' \rangle$ - algebra gruppasi deyiladi.

Gruppadagi amal kommutativ, ya'ni $\forall a, b \in G$ uchun $a * b = b * a$ shart bajarilsa, bunday gruppasi *abel gruppasi* deyiladi. Bunday gruppalar, gruppalar nazariyasidagi yuqori darajali tenglamalarni echilishi muamolarini qo'ygan I. G. Abel sharafiga abel gruppasi deb nomlangan.

Har bir $a \in G$ element uchun $a' \in G$ element a elementga chapdan *simmetrik* deyiladi. Gruppadagi elementlar soni uning *tartibi* deyiladi. Agar gruppasi tartibi natural sondan iborat bo'lsa, bunday gruppasi *chekli tartibli gruppasi*, aks holda *cheksiz tartibli gruppasi* deyiladi.

Gruppada $*$ - binar algebraik amal "+"- qo'shish amali yoki "•"- ko'paytirish amali bo'lishi mumkin. Bu amallarga nisbatan qo'llaniladigan tushunchalar quyidagi jadvalda keltirilgan:

*	•	+
1) binar amal	Ko'paytirish	Qo'shish
2) neytral element	Birlik element	Nol
3) Simmetrik element	Teskari element	Qarama-qarshi element

Birlik elementi ko'pincha e yoki 1 orqali, nolni "0"- orqali, a ga teskari elementni a^{-1} , a ga qarama-qarshi elementni $-a$ orqali belgilash qabul qilingan.

Gruppadagi binar algebraik amal " $\bullet$ " bo'lsa, bunday gruppani *multiplikativ grupp*a, "+" bo'lsa *additiv grupp*a deymiz. Gruppadagi amalni ko'paytirish deb qarash yozuvni ixchamlashtiradi, shu sabab, multiplikativ gruppaning terminlaridan foydalanamiz.

II.3.2-teorema. *Gruppadagi ixtiyoriy elementga chap teskari element, shu elementga o'ngdan ham teskari bo'ladi.*

Isbot. Gruppaga tegishli $\forall a$ elementga chapdan teskari a^{-1} element, o'ngdan ham teskari bo'lishini ko'rsatamiz. Shartga ko'ra $a^{-1} \bullet a = e$ undan tashqari $\left(a^{-1} \right)^{-1}$ element a^{-1} ga chapdan teskari element bo'lsa $\left(a^{-1} \right)^{-1} \bullet a^{-1} = e$ bo'lishi ham ravshan u holda, grupp ta'rifining 2 va 3 shartlariga ko'ra $a \bullet a^{-1} = e \left(a \bullet a^{-1} \right) = \left(a^{-1} \right)^{-1} \bullet a^{-1} = \left(a \bullet a^{-1} \right) = \left(a^{-1} \right)^{-1} \bullet a^{-1} = \left(a^{-1} \right)^{-1} \bullet \left(a^{-1} \right)^{-1} = \left(a^{-1} \right)^{-1} \bullet a^{-1} = e$

Shunday qilib $a \bullet a^{-1} = e$, ya'ni a^{-1} element a elementga o'ngdan teskari element ekan.

II.3.3-teorema. *Gruppada o'ng birlik element, chap birlik element bo'ladi.*

Isbot. Grupp ta'rifi va **II.3.2-teorema**ga ko'ra $a \bullet e = a \bullet \left(a^{-1} \bullet a \right) = \left(a \bullet a^{-1} \right) \bullet a = ea = a$.

II.3.4-teorema. *Gruppada birlik element yagonadir.*

Isbot. **II.3.3-** teorema da chap birlik element o'ng birlik elementga tengligini ko'rsatdik. Bu elementni *gruppaning birlik elementi* deb ataymiz. Endi ikkita e_1 va e_2 birlik elementlar mavjud deb faraz qilaylik. U holda $e_1 = e_1 \bullet e_2 = e_2 \bullet e_1 = e_2$

II.3.5-teorema. *Gruppada ixtiyoriy element uchun Yagona teskari element mavjud.*

Isbot. Haqiqatdan a_1 elementga a_1^{-1} va a_2^{-1} teskari elementlar mavjud bo'lsin, u holda $a_1^{-1} = a_1^{-1} \bullet e = a_1^{-1} \bullet \left(a_2 \bullet a_2^{-1} \right) = \left(a_1^{-1} \bullet a_2 \right) \bullet a_2^{-1} = e \bullet a_2^{-1} = a_2^{-1}$.

II.3.6-teorema. *Gruppaning ixtiyoriy a va b elementlari uchun $ax = b$ va*

$ya = b$ tenglamalarning har biri Yagona echimga ega.

Isbot. $x = a^{-1} \bullet b$ va $y = b \bullet a^{-1}$ elementlar mos ravishda bu tenglamalarning echimi bo'lishi ayon. Faraz qilaylik $ax = b$ tenglamaning ikkita x_1 va x_2 echimlari bo'lsin. U holda $ax_1 = b = ax_2$ yoki $ax_1 = ax_2$. Bu tenglikning ikkala tomonini a^{-1} ga ko'paytirsak $a^{-1} \bullet (ax_1) = a^{-1} \bullet (ax_2)$ yoki $(a^{-1} \bullet a)x_1 = (a^{-1} \bullet a)x_2$ u holda $ex_1 = ex_2$ demak $x_1 = x_2$ bo'ladi. Ikkinchi tenglama echimi Yagona bo'lishi Shunga o'xshash isbot qilinadi.

II.3.7-natija. Gruppaning ixtiyoriy a, b, c elementlar uchun $a \bullet b = a \bullet c$ yoki $b \bullet a = c \bullet a$ bo'lsa $A = C$ bo'ladi.

II.3.8-natija. Gruppada ixtiyoriy a, b, c elementlar uchun $a \bullet b = e$ yoki $c \bullet b = e$ bo'lsa, $b = e = c$ bo'ladi.

II.3.9-natija. Gruppada ixtiyoriy e element uchun $(a^{-1})^{-1} = a$, ya'ni a^{-1} elementning teskarisi a elementdir.

II.3.10-natija. Gruppaning ixtiyoriy a, b elementlar uchun $a \bullet b = e$ bo'lsa a va b elementlar bir-biriga teskari elementlardir.

Bu natijalarning isboti yuqoridagi teoremlardan bevosita kelib chiqadi, shuning uchun ularning isbotini o'quvchilarga mashq sifatida qoldiramiz.

Gruppalar nazariyasida gomomorfizm, izomorfizm, gruppaosti tushunchalari algebradagi mos tushunchalarning xususiy xollari bo'lib, ular quyidagicha kiritiladi: $(G, \bullet, ^{-1})$ va $(H, \bullet, ^{-1})$ gruppalar berilgan bo'lib, $h: G \rightarrow H$, G ni H ga akslantirish bo'lsin. U holda $\forall a, b \in G$ uchun $h(a \bullet b) = h(a) \bullet h(b)$ va $h(a^{-1}) = (h(a))^{-1}$ shartlar bajarilsa, h - gomomorf akslantirish deyiladi. Agar h - in'ektiv bo'lsa, monomorf; sur'ektiv bo'lsa, epimorf; biektiv bo'lsa, izomorf akslantirish deyiladi.

II.3.9-ta'rif. $(G, \bullet, ^{-1}), (H, \bullet, ^{-1})$ gruppalar berilgan bo'lsin. Agar G ni H ga akslantiradigan kamida bitta izomorf akslantirish mavjud bo'lsa bu gruppalar izomorf deyiladi va $G \cong H$ orqali belgilanadi.

II.3.10-ta'rif. *Gruppani o'zini o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, o'ziga o'zini izomorf akslantirish aftomorfizm deyiladi.*

II.3.11-teorema. $(G, \bullet, {}^{-1}), (H, \bullet, {}^{-1})$ gruppalar berilgan bo'lsin. G ni H ga akslantiradigan $\varphi: G \rightarrow H$ -akslantirish gomomorf akslantirish bo'lishi uchun G dagi binar amalni saqlash etarli, ya'ni $\forall a, b \in G$ uchun $\varphi(a \bullet b) = \varphi(a) \bullet \varphi(b)$ bo'lishi etarli.

Isbot. Berilgan gruppalarning birlik elementlari mos ravishda e va e' bo'lsin, u holda $\varphi(e) = e'$. Haqiqatdan ham, $\varphi(e) = \varphi(e \bullet e) = \varphi(e) \bullet \varphi(e)$.

Demak,

$e' = \varphi(e) \bullet \varphi(e)^{-1} = (\varphi(e) \bullet \varphi(e))\varphi(e)^{-1} = \varphi(e) \bullet (\varphi(e) \bullet \varphi(e)^{-1}) = \varphi(e) \quad \forall a \in G$ uchun
 $\varphi(a \bullet a^{-1}) = \varphi(a) \bullet \varphi(a^{-1})$ u holda $\varphi(a^{-1}) = \varphi(e) \bullet \varphi(a)^{-1} = e' \bullet \varphi(a)^{-1} = \varphi(a)^{-1}$,
 ya'ni $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

II.3.12-teorema. *Gruppalarning izomorfizmi ekvivalentlik munosabatidir.*

II.3.13-misol. R^+ -musbat haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. R^+ haqiqiy sonlarni ko'paytirish va teskarisini olish amallariga nisbatan multiplikativ gruppaga tashkil qiladi.

R - haqiqiy sonlar to'plami esa qo'shish va qarama-qarshisini olish amallariga nisbatan additiv gruppaga hosil qiladi. Bu gruppalarni mos ravishda $(R^+, \bullet, {}^{-1})$ va $(R, +, -)$ orqali belgilaylik. $\varphi: R \rightarrow R^+ \quad \varphi(x) = e^x$ -biektiv akslantirish bo'lib $\forall x_1, x_2 \in R$ elementlar uchun
 $\varphi(x_1 + x_2) = e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \bullet e^{x_2} = \varphi(x_1) \bullet \varphi(x_2)$.

II.3.14-ta'rif. *Gruppaning gruppadagi amallariga nisbatan yopiq bo'sh bo'lmagan to'plamostisi gruppaoosti deyiladi.*

$(G, \bullet, {}^{-1})$ -gruppaga berilgan bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra $H \neq \emptyset$ va $H \subset G$ to'plamosti gruppaoosti bo'lishi uchun $\forall a, b \in H$ elementlari uchun $a \bullet b \in H$ va $a^{-1} \in H$ bo'lishi etarli. U holda $a \bullet a^{-1} = e \in H$. YA'ni gruppaning neytral elementi gruppaoosti uchun ham neytral element ekan. $H \subset G$ bo'lganligi uchun gruppaoostida ham " $\bullet$ " binar algebraik amal assosiativdir. Shunday qilib, gruppaoosti

ham o'z navbatida gruppasi hosil qilar ekan.

II.3.15-teorema. $(G, \bullet, ^{-1})$ gruppasi berilgan bo'lsin $H \neq \emptyset$ $H \subset G$ to'plamosti gruppasi bo'lishi uchun $\forall a, b \in H$ elementlari uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ bo'lishi zarur va etarli.

Isbot. Agar $(H, \bullet, ^{-1})$ gruppasi bo'lsa, $\forall a, b \in H$ uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ bo'lishi ravshan. Faraz qilaylik $\forall a, b \in H$ uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ bo'lsin. U holda xususan $a = b$ bo'lsa $a \bullet a^{-1} = e \in H$ bo'lib, bundan $\forall e, b$ elementlari uchun $e \bullet b^{-1} \in H$, ya'ni $\forall b$ uchun $b^{-1} \in H$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $\forall a, b \in H$ uchun $a \bullet b^{-1} \in H$ shartda b ni b^{-1} bilan almashtirsak, $\forall a, b \in H$ uchun $a \bullet b \in H$ bo'lishi kelib chiqadi. Ya'ni H - gruppasi ekan.

II.3.16-teorema. Gruppasi bo'lish munosabati noqat'iy tartib munosabatidir.

II.3.17-teorema. $(G, \bullet, ^{-1})$ gruppasi gruppasiylaridan iborat bo'sh bo'lmagan B to'plamning barcha elementlarining kesishmasi yana gruppasi bo'ladi.

$(G, \bullet, ^{-1})$ gruppasi va G ning bo'sh bo'lmagan to'plamosti M birilgan bo'lsin. $M \subset G_\alpha$ shartni qanoqlantiradigan $(G, \bullet, ^{-1})$ ning barcha $(G_\alpha; \bullet, ^{-1})$ gruppasiylarning kesishmasi M to'plam yaratgan gruppasi deyiladi va bu gruppasi $(\langle M \rangle^{-1}, \bullet)$ orqali belgilanadi. Agar M -bir elementli to'plam bo'lsa, bu gruppasi siklik gruppasi deyiladi.

II.3.18-misol. $M = \{2, \dots, h\}$ to'plam berilgan bo'lsin. M ni M ga akslantiradigan har qanday biekktiv akslantirish M to'plamda aniqlagan o'ringa qo'yish deyiladi. M to'plamda aniqlangan barcha o'rniga qo'yishlar to'plamini S_n orqali belgilaymiz. S_n da ikkita φ va ψ o'rniga qo'yishlarning kompozitsiyasini $\forall x \in M$ uchun $\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x))$ ko'rinishda aniqlasak, S_n to'plam « $\circ$ » amalga nisbatan gruppasi tashkil etadi.

Haqiqatdan ham, ikkita biektiv funksiyalarning kompozitsiyasi yana biektiv funksiya bo'lib, assosiativdir. Har qanday biektiv funksiya teskari funksiya mavjud, $\varphi \circ \psi = x$ tenglik bilan aniqlangan o'rniga qo'yish esa kompozitsiya amaliga nisbatan neytral elementdir.

Bu misolni $n = 3$ uchun ko'rib chiqishni o'quvchilarga havola qilamiz.

II.3.19-misol. Muntazam k -burchakni diagonallari kesishgan nuqta atrofida $\frac{2\pi}{k} \bullet n, k = 3, 4, \dots, n-1$ burchaklarga burishlar to'plami, burishlarni ketma-ket bajarish amaliga nisbatan gruppasi hosil qiladi.

II.3.20-misol. G -tekislikdagi vektorlar to'plami bo'lsin. U holda G vektorlarni qo'shish amaliga nisbatan gruppasi hosil qiladi.

II.3.21-misol. $(\mathbb{Z}, +, -)$ -butun sonlar additiv gruppasi $(\mathbb{Q}, +, -)$ ratsional sonlar additiv gruppasining gruppaoستisidir.

II.3.22-misol. $(\mathbb{Q}, +, \bullet, ^{-1})$ -musbat ratsional sonlar multiplikativ gruppasi $(\mathbb{R}^+, \bullet, ^{-1})$ musbat haqiqiy sonlar multiplikativ gruppasining gruppaoستisidir.

II.3.23-ta'rif. Agar quyidagi shartlar bajarilsa $(K; +, \bullet)$ algebraga yarimhalqa deyiladi:

$$(1) \forall (a, b, c \in K)(a + b) + c = a + (b + c);$$

$$(2) \forall (a, b \in K) a + b = b + a;$$

$$(3) (\forall a, b, x \in K)(a + x = b + x \Rightarrow a = b) \wedge (x + a = x + b \Rightarrow a = b);$$

$$(4) \forall (a, b, c \in K)(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c);$$

$$(5) \forall (a, b, c \in K)(a + b) \bullet c = ac + bc \wedge (c \bullet (a + b) = ca + cb).$$

II.3.24-ta'rif. Agar $(K, +, -, \bullet)$ $(2,1,2)$ turli algebra uchun quyidagi shartlar bajarilsa

$$(1) (K, +, -, \bullet) \text{ abel' gruppasi};$$

$$(2) (K, \bullet) \text{ -yarim gruppasi};$$

$$(3) \forall a, b, c \in K \text{ uchun } a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c \text{ va } (b + c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$$

u holda $(K, +, -, \bullet)$ - algebra halqa deyiladi.

$(K, +, -, \bullet)$ additiv gruppaning neytral elementi halqaning noli deyiladi va 0

orqali belgilanadi.

Z halqa unda bajarilgan " $\bullet$ "-amalning xossalariga mos ravishda nomlanadi. Agar ko'paytirish amali assosiativ bo'lsa, halqa *assosiativ_halqa*, ko'paytirish amaliga nisbatan birlik element mavjud bo'lsa, halqa *birlik elementli halqa* deyiladi.

Agar halqada $a \neq 0$ va $b \neq 0$ elementlar uchun $a \bullet b = 0$ bo'lsa, a nolning chap bo'luvchisi, b esa nolning o'ng bo'luvchisi deyiladi. Nolning ham chap, ham o'ng bo'luvchisi bo'lgan element *nolning bo'luvchisi* deyiladi. Biz asosan birlik elementga ega bo'lgan assosiativ halqalarni o'rganamiz. Halqaning birlik elementini odatda 1 orqali belgilaymiz.

II.3.25-ta'rif. Nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan assosiativ, kommutativ halqada $1 \neq 0$ shart bajarilsa, bunday halqa *butunlik sohasi* deyiladi.

II.3.26-misol. Z -butun sonlar to'plami $+, -, \bullet$ amallariga nisbatan halqa bo'lib, $(Z, +, -, \bullet)$ orqali belgilanadi. Bu halqa butunlik sahasidir.

II.3.27-misol. $K = \{0, e, a, b\}$ to'plamda $+, -, \bullet$ amallari quyidagi jadvallar orqali berilgan bo'lsin:

$\oplus$	0	e	a	b	$\odot$	0	e	a	b
0	0	e	0	b	0	0	0	0	0
e	e	a	a	a	e	0	e	a	b
a	a	b	0	e	a	0	a	0	a
b	b	a	a	a	b	0	b	a	e

$(K, \oplus, \ominus, \odot)$ algebra kommutativ, assosiativ, birlik elementga ega bo'lgan halqadir. Lekin $a \bullet a = 0$, bo'lib a nolning bo'livchisidir.

II.3.28-teorema. $(K, +, -, \bullet)$ halqa berilgan bo'lib a, b, c lar halqaning ixtiyoriy elementlari bo'lsin, u holda

(I) agar $a + b = a$ bo'lsa, $b = 0$.

(II) agar $a + b = 0$ bo'lsa, $a = -b$.

(III) $-(-a) = a$.

$$(IV) 0 \bullet a = a \bullet 0 = 0.$$

$$(V) (-a)(-b) = a \bullet b.$$

$$(VI) (a - b) \bullet c = ca - bc.$$

$$(VII) c(a - b) = ca - cb.$$

Isbot. I, II, III, IV tasdiqlar $(K, +, -, \bullet)$ -kommutativ gruppalligidan bevosita kelib chiqadi. (VI)- xossaning isbotini keltiramiz.

$$a \bullet 0 = a(0 + 0) = a \bullet 0 + a \bullet 0 \Rightarrow a \bullet 0 = a \bullet 0 + a \bullet 0 \Rightarrow a \bullet 0 = 0$$

$0 \bullet a = 0$ tenglik Shunga o'xshash isbot qilinadi.

(V) tsadiqning isboti.

$$(-a) \bullet b + a \bullet b = ((-a) + a) \bullet b = 0 \bullet b = 0. \text{ Demak. } (-a) \bullet b = -(a \bullet b);$$

U holda $ab = -(-a) \bullet b$. Endi

$$(-a) \bullet (-b) + (-a) \bullet b = (-a)(-b + b) = (-a) \bullet 0 = 0 \text{ ni hisobga olsak}$$

$$(-a)(-b) = -(-a) \bullet b = ab.$$

(VII) tasdiq (VI) ga o'xshash isbotlanadi.

II.3.29-ta'rif. $(K, +, -, \bullet)$ va $(K', +, -, \bullet)$ halqalar berilgan bo'lsin. K ni K' ga akslantiradigan va $(K, +, -, \bullet)$ halqaning hamma amallarini saqlaydigan $\varphi : K \rightarrow K'$ akslantirish gomomorf akslantirish deyiladi.

Odatdagidek φ -in'ektiv bo'lsa, *monomorf*; sur'ektiv bo'lsa *epimorf*; biektiv bo'lsa *izomorf* akslantirish deyiladi. Halqani o'zini-o'ziga gomomorf akslantirish *endomorfizm*; izomorf akslantirish esa *avtomorfizm* deyiladi.

Huddi algebradagidek halqalarning izomorfizmi ekvivalentlik munosabati bo'lib, izomorf halqalar $(K, +, -, \bullet) \cong (K', +, -, \bullet)$ orqali belgilanadi.

II.3.30-misol $\mathbb{Z}, +, -, \bullet$ butun sonlar halqasi $(K, \oplus, \ominus, \odot)$ II.3.27-misoldagi halqa bo'lsin, u holda $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow K$,

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0, \text{ agar } z = 4k; \\ e, \text{ agar } z = 4k + 1; \\ a, \text{ agar } z = 4k + 2; \\ b, \text{ agar } z = 4k + 3 \end{cases}$$

akslantirish gomomorfizmdir.

Halqaosti tushunchasi ham, algebraosti tushunchasi kabi kiritiladi.

II.3.31-ta'rif. $(K, +, -, \bullet)$ halqa berilgan bo'lsin. L esa K ning bo'sh bo'lmagan to'plamostisi bo'lsin.

Agar L to'plam K dagi $+, -, \bullet$ amallariga nisbatan algebraik yopiq bo'lsa, ya'ni $\forall a, b \in L$ uchun $a + b \in L$, $a \bullet b \in L$, $-a \in L$ shartlar bajarilsa $(L, +, -, \bullet)$ -algebra $(K, +, -, \bullet)$ halqaning halqaostisi deyiladi.

Halqaosti o'z navbatida halqa bo'lishi ravshan, Chunki halqa ta'rifining qolgan shartlari $L \subset K$ munosabatdan kelib chiqadi.

II.3.32-teorema. Halqaning noli halqaostining ham noli bo'ladi. Agar halqada ko'paytirishga nisbatan neytral element mavjud bo'lsa, bu element L uchun ham ko'paytirishga nisbatan neytral element bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Gruppa ta'rifini keltiring. Uning asosiy xossalarini ayting.
2. Additiv, multiplikativ gruppalariga algebra, geometriya kursidan misollar keltiring.
3. Gruppalar gomomorfizmining qanday turlarini bilasiz?
4. Har qanday gomomorfizm izomorfizm bo'la oladimi, yoki aksincha?
5. Gruppalar avtomorfizmi nima?
6. Gruppaosti tushunchasiga misollar keltiring.
7. Halqaning qanday turlarini bilasiz?
8. Halqalar gomomorfizmi, izomorfizmiga misollar keltiring.
9. Halqalar avtomorfizmi ta'rifini bayon qiling.
10. Halqaostilar kesishmasi yana halqaosti bo'lishini isbotlang.

M a s h q l a r

1. Quyidagi to'plamlarni multiplikativ gruppa tashkil etishini isbotlang:

1.1. $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\}$.

$$1.2.G = \{a + bi\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\}.$$

$$1.3.G = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}.$$

$$1.4.G = \left\{ \begin{bmatrix} \sin \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$1.5.G = \{2^z \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Quyidagi to'plamlarni additiv gruppaga tashkil etishini isbotlang:

$$2.1.G = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

$$2.2.G = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

$$2.3.G = \left\{ \frac{a}{7^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$2.4.G = \{a - b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Z}; r - \text{ tub son} \}$$

3. Quyidagi to'plamlarni halqa tashkil etishini isbotlang:

$$3.1.K = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in 3\mathbb{Z} \right\}.$$

$$3.2.G = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Z}; r - \text{ tub son} \};$$

$$3.3. < \mathbb{Z}_5; +, \cdot >.$$

4. Quyidagi algebraik orasida izomorfizm o'rnatish:

$$4.1. < \{2^z \mid z \in \mathbb{Z}\}; \cdot, ^{-1}, \mathbf{1} > \wedge < \mathbb{Z}; +, -, 0 >.$$

$$4.2. < \mathbb{Z}; +, -, 0 > \wedge < 2\mathbb{Z}; +, -, \mathbf{0} >.$$

$$4.3. < \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}; +, -, 0 > \wedge < \mathbb{R}^2; +, -, \mathbf{0} >.$$

$$4.4. < \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}; +, \cdot > \wedge < \{a - b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}; +, \cdot >.$$

II.4-§. Algebraik sistemalar. Algebraik sistemalar gomomorfizmi

II.4.1-ta'rif. $A \neq \emptyset$ to'plam uchun Ω - A to'plamda aniqlangan amallar to'plami, Ω' - A to'plamda aniqlangan munosabatlar to'plami bo'lsin. U holda (A, Ω, Ω') - tartiblangan uchlik- algebraik sistema deyiladi.

A -to'plam algebraik sistemaning asosiy to'plami, Ω -algebraik sistemaning bosh amallari to'plami, Ω' - algebraik sistemaning bosh munosabatlari to'plami

deyiladi.

Har qanday n -o'rinli algebraik amalni $(n+1)$ - o'rinli algebraik munosabat sifatida qarashimiz mumkinligi ayon. Haqiqatdan ham, $\omega : A^n \rightarrow A$ n -ar algebraik amalni

$R_\omega = \{(a_1, \dots, a_n); \omega(a_1, \dots, a_n) \mid \forall a_1, \dots, a_n \in A\}$ $n+1$ o'rinli munosabat deyishimiz mumkin. Agar (A, Ω, Ω') algebraik sistema berilgan bo'lsa, uni A to'plam va unda berilgan $\Omega \cup \Omega'$ - munosabatlar to'plamidan iborat $(A, \Omega \cup \Omega')$ - juftlik sifatida qarashimiz mumkin. Aytilganlarni hisobga olsak quyidagilarga ega bo'lamiz.

II.4.2-ta'rif. $A \neq \emptyset$ to'plam, unda aniqlangan Ω - munosabatlar to'plamidan iborat (A, Ω) juftlik algebraik sistema deyiladi.

II.4.3-ta'rif. (A, Ω_1) va (B, Ω_2) algebraik sistemalar berilgan bo'lsin. Agar Ω_1 va Ω_2 - munosabatlar to'plami orasida biektiv moslik o'rnatilgan bo'lib, natijada Ω_1 dagi har bir n - o'rinli ω_1 munosabatga Ω_2 da ham ω_2 k -o'rinli munosabat mos kelsa, bu algebraik sistemalar bir xil turli sistemalar deyiladi.

II.4.4-misol. $\mathbb{Z}$ - butun sonlar to'plami, unda bajarilgan $+, \bullet, 0, 1$ amallar va $\geq$ munosabatga nisbatan algebraik sistemadir. Uni $(\mathbb{Z}, +, \bullet, 0, 1, \geq)$ orqali belgilaymiz va butun sonlar sistemasi deb ataymiz.

II.4.5-misol. $\mathbb{Z}$ - butun sonlar to'plami, $2\mathbb{Z}$ esa juft butun sonlar to'plami bo'lsin, u holda $(\mathbb{Z}, +, 0, \geq)$ va $(2\mathbb{Z}, +, 0, \geq)$ algebraik sistemalar bir xil turli algebraik sistemalaridir.

(A, Ω_1) va (B, Ω_2) bir xil turli algebraik sistemalar berilgan bo'lib, $\omega_1 \in \Omega_1$ n - ar munosabatga $\omega_2 \in \Omega_2$ n - ar algebraik munosabat mos qo'yilgan bo'lsin. Agar, A to'plamni B to'plamga akslantiradigan $\varphi : A \rightarrow B$ akslantirish berilgan bo'lib, $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ elementlar uchun $(a_1, \dots, a_n) \in \omega_1$ bo'lishidan $(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) \in \omega_2$ bo'lishi kelib chiqsa, φ akslantirish, R_1 munosabatni saqlaydi deb ataymiz. A to'plamni B to'plamga akslantiradigan $\varphi : A \rightarrow B$ akslantirish Ω_1 dagi har bir ω_1 munosabatni saqlasa, bunday akslantirish (A, Ω_1)

algebraik sistemani (B, Ω_2) algebraik sistemaga *gomomorf akslantirish* deyiladi. Xuddi algebralardagidik φ - sur'ektiv bo'lsa, *epimorfizm*; in'ektiv bo'lsa *monomorfizm*; biektiv bo'lsa *izomorfizm* deyiladi.

Sistemaosti tushunchasi ham algebraosti tushunchasiga o'xshash usulda kiritiladi (A, Ω_1) va (B, Ω_2) bir xil turli algebraik sistemalar berilgan. $A \subset B$, va $\omega_1 \in \Omega_1$ n - ar munosabatga $\omega_2 \in \Omega_2$ n - ar algebraik munosabat mos qo'yilgan bo'lsin. Agar $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ uchun $(a_1, \dots, a_n) \in \omega_1$, bo'lishidan $(a_1, \dots, a_n) \in \omega_2$ bo'lishi kelib chiqsa ω_1 munosabat ω_2 munosabatning A to'plam bilan cheklangani deyiladi. Agar (A, Ω_1) sistemadagi har bir $\omega_1 \in \Omega$ munosabat bu munosabatga Ω_2 to'plamdan mos bo'lgan ω_2 munosabatning cheklangani bo'lsa, u holda (A, Ω_1) algebraik sistema (B, Ω_2) algebraik sistemaning sistemaostisi deyiladi.

Algebraik sistemaga xos bo'lgan boshqa tushunchalar va ba'zi teoremlar algebradagilarga mos ravishda ifodalanadi. Algebraik sistemalar haqida to'liqroq ma'lumotlar olishni istagan o'quvchilarga atoqli matematik A.I.Malsevning «Algebraicheskie sistemy» nomli risolasiga murojaat qilishni tavsiya qilamiz.

Takrorlash uchun savollar

1. Algebraik sistemaga ta'rif bering.
2. Akademik litsey, maktab matematikasidan algebraik sistemaga doir misollar keltiring.
3. Algebraik sistemalar gomomorfizmini tushuntiring.
4. Algebraik sistemalar avtomorfizmi deb nimaga aytiladi?
5. Algebraik sistema sistemaosti tushunchasiga ta'rif bering.

M a s h q l a r

1. $A = (A; +, \cdot), B = (B; \oplus, \otimes)$ algebraik sistemalar berilgan bo'lib, f birinchi algebraik sistemani ikkinchi algebraik sistemaga epimorf akslantirish bo'lsin. U

holda quyidagilarni isbot qiling:

1) agar birinchi algebraik sistemadagi ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributiv bo'lsa, u holda ikkinchi algebraik sistemada ham ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributiv bo'ladi;

2) agar birinchi algebraik sistemadagi birorta amal r xossaga ega bo'lsa, u holda ikkinchi algebraik sistemadagi unga mos amal ham shu xossaga ega bo'ladi (r -assosiativlik, kommutativlik va h.k.);

3) agar birinchi algebraik sistema halqa bo'lsa ikkinchi algebraik sistema ham halqa bo'ladi;

4) agar birinchi algebraik sistema maydon bo'lsa ikkinchi algebraik sistema ham maydon bo'ladi;

5) agar birinchi algebraik sistema jism bo'lsa ikkinchi algebraik sistema ham jism bo'ladi;

2. Har qanday A, B, C algebraik sistemalar uchun quyidagi xossalar o'rinli ekanligini isbotlang:

1) $A \cong A$;

2) $A \cong B \Rightarrow B \cong A$;

3) $A \cong B \wedge B \cong C \Rightarrow A \cong C$.

3. Agar $A = (A; +, \cdot, P)$ R maydon ustida qurilgan e birlik elementga ega chiziqli algebra bo'lsa, u holda bu algebraning R maydonga izomorf bo'lgan qism algebrasi mavjudligini isbotlang.

4. α, β lar $x^3 = 2$ tenglamaning ikkita turli kompleks ildizlari bo'lsin. U holda ratsional sonlar maydonining α, β sonlar orqali aniqlangan algebraik kengaytmalari izomorf bo'lishini isbotlang.

5. Bir biriga izomorf bo'lib, birinchisida qisqartirish bajarilib ikkinchisida qisqartirish bajarilmaydigan yarimgruppalar misol keltiring.

II.5-§. Tartiblangan algebralar

Tartiblangan yarim gruppalar.

II.5.1-ta’rif. $\langle A, +, \succ \rangle$ algebraik sistema uchun qo’yidagi shartlar bajarilgan bo’lsin:

1. $\langle A, + \rangle$ -sistema yarimgruppa.
2. $\langle A, \succ \rangle$ -tartiblangan to’plam.
3. YArimgruppadagi amallarga nisbatan $\succ$ binar munosabat monoton, ya’ni $\forall a, b, c \in A$ uchun $a \succ b \Rightarrow a + c \succ b + c \wedge c + a \succ c + b$. U holda $\langle A, +, \succ \rangle$ tartiblangan yarimgruppa deyiladi.

II.5.2-ta’rif. Agar $\langle A, +, \succ \rangle$ tartiblangan yarimgruppa bo’lib, $\langle A, + \rangle$ -algebra gruppaga bo’lsa, u holda $\langle A, +, \succ \rangle$ sistema tartiblangan gruppaga deyiladi.

$\succ$ -tartib munosabat mos ravishda $\succ$ - chiziqli tartib munosabat bo’lsa, $\langle A, +, \succ \rangle$ chiziqli tartiblangan gruppaga, agar qo’shish amali o’rnida ko’paytirish amali bo’lsa, u holda tartiblangan yarimgruppa – tartiblangan multiplikativ gruppaga deyiladi.

II.5.3-misol. $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 1 \rangle$ natural sonlar sistemasida $\forall a, b \in \mathbb{N}$ uchun Shunday q natural son topilib, $a = b \cdot q$ tenglik o’rinli bo’lsa, a natural son b natural songa bo’linadi deymiz va $a : b$ orqali belgilaymiz.

Bu munosabat natural sonlar to’plamida antisimmetrik, refleksiv, tranzitiv munosabat bo’lib, ko’paytirishga nisbatan monotondir. Demak $\langle \mathbb{N}, :, \geq \rangle$ noqat’iy tartiblangan yarim gruppaga bo’ladi.

II.5.4-misol. Agar $\forall a, b \in \mathbb{N}$ natural sonlar uchun Shunday q natural son topilib, $a = b + q$ tenglik bajarilsa, a natural son b natural sondan katta deymiz va $a > b$ orqali belgilaymiz.

$a > b \vee a = b$ bo’lsa, $a \geq b$ deb hisoblaymiz. $\langle \mathbb{N}, +, \geq \rangle$ algebraik sistema noqat’iy chiziqli tartiblangan yarimgruppa; $\langle \mathbb{N}, +, > \rangle$ qat’iy chiziqli tartiblangan yarimgruppadir.

Tartiblangan yarimgruppaning xossalari.

1⁰. $\langle A, +, > \rangle$ tartiblangan yarimgruppa bo'lsin, $\forall a, b, a', b' \in A$ uchun $a > b \wedge a' > b' \Rightarrow a + a' > b + b'$.

2⁰. $\langle A, +, > \rangle$ tartiblangan yarimgruppa n natural son bo'lsa, $\forall a, b \in A$ uchun $a > b \Rightarrow n \cdot a > n \cdot b$ $\left(n \cdot c = \underbrace{c + \dots + c}_n \right)$.

3⁰. Agar $\langle A, +, > \rangle$ qat'iy chiziqli tartiblangan yarimgruppa bo'lsa

1. $\forall a, b, c \in A$ uchun $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow a + c = c + b$.

2. $\forall a, b, c \in A$ uchun $a + c > b + c \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow a + c > c + b$.

Demak, har qanday qat'iy chiziqli tartiblangan yarimgruppa qisqartirishga ega bo'lgan yarimgruppa bo'lar ekan.

4⁰. Agar $\langle A, +, > \rangle$ qat'iy chiziqli tartiblangan yarimgruppa bo'lsa, u holda

1. $\forall a, x \in A$ $a + x = x \Leftrightarrow a + a = a \Leftrightarrow a + a = x$.

2. $\forall a, x \in A$ $a + x > x \Leftrightarrow a + a > a \Leftrightarrow a + a > x$.

3. $\forall a, x \in A$ $a > a + x \Leftrightarrow a > a + a \Leftrightarrow a > x + a$.

Bu xossalarning isboti bevosita ta'rifdan kelib chiqadi. Misol sifatida bir nechta xossaning isbotini ko'rib chiqamiz.

1⁰. xossaning isboti:

$\langle A, +, > \rangle$ tartiblangan yarimgruppa bo'lib, $a > b$ va $a' > b'$ bo'lsin, u holda ta'rifga asosan $a + a' > a' + b$ va $a' + b > b' + b$. Bundan $>$ munosabatning tranzitivlik xossasiga ko'ra $a' + a > b' + b$.

2⁰. xossaning isboti:

$a > b$ tengsizlikni o'zini-o'ziga n marta qo'shsak $n \cdot a > n \cdot b$ bo'ladi.

$\langle A, +, > \rangle$ tartiblangan yarimgruppaning $a + a > a$ shartni qanoatlantiradigan a elementi musbat element deyiladi. Agar $a > a + a$ shart bajarilsa, a yarimgruppaning manfiy elementi deyiladi.

$\langle A, +, > \rangle$ qat'iy chiziqli tartiblangan yarimgruppa bo'lsin. Agar $a + a \neq 0$ shart bajarilsa, buni gruppaning $a, 2a, 3a, \dots, n \cdot a, \dots$ qatorning bir xil hadlari mavjud emas. $a = 2a$ bo'lsa, $a = a + a$ Shartga zid. Demak $a \neq 2a$.

Tartiblangan yarimhalqa

II.5.5-ta'rif. $\langle A; +, \cdot, > \rangle$ algebra uchun:

1. $\langle A; +, \cdot \rangle$ yarimhalqa.
2. $\langle A; +, > \rangle$ tartiblangan yarimgruppa.
3. $\langle A; +, > \rangle$ tartiblangan yarimgruppaning musbat elementlari to'plamida kamida bitta element majjud.
4. $\forall a, b \in A$ va $\langle A; +, > \rangle$ yarimgruppaning s musbat elementi uchun $a > b \Rightarrow ac > bc \wedge ca > cb$ shartlar bajarilsa, $\langle A; +, \cdot, > \rangle$ algebraik sistema tartiblangan yarimhalqa; $\langle A; +, > \rangle$ yarimgruppa musbat elementi $\langle A; +, \cdot, > \rangle$ yarimhalqaning musbat elementi deyiladi.

Tartiblangan yarimhalqa, tartiblangan yarimmaydon tushunchalari keltirilgan ta'rif yordamida kiritiladi. Masalan, $\langle A; +, \cdot, 0, 1, > \rangle$ algebraik sistema tartiblangan yarimmaydon bo'lishi uchun 1- shartni $\langle A; +, \cdot, 0, 1 \rangle$ algebra maydon bo'lsin deb o'zgartirib, qolgan shartlarni o'z holicha qoldirish etarli.

Agar $\langle A; +, \cdot, > \rangle$ yarimhalqada $\forall a, b \in A$ elementlar uchun $n \cdot a > b$ shart bajariladigan n natural son mavjud bo'lsa, bunday yarimhalqa *arximedcha tartiblangan yarimhalqa* deyiladi.

$\langle \mathbb{N}; +, \cdot, 0, 1, > \rangle$ natural sonlar yarimhalqasida $\forall a, b \in \mathbb{N}$ uchun $k \in \mathbb{N}$ topilib, $a = b + k$ shart bajarilsa, a katta b deymiz, u holda $\langle \mathbb{N}; +, \cdot, 0, 1, > \rangle$ algebraik sistema qat'iy tartiblangan yarimhalqa bo'ladi. Bu yarimhalqa *natural sonlar tartiblangan yarimhalqasi* deyiladi.

II.5.6-teorema. Agar $\langle A; +, \cdot, > \rangle$ tartiblangan yarimhalqa bo'lsa, $\forall a, b, a', b' \in A^+$ elementlar uchun $a > b$ va $a' > b'$ shartlardan $a \cdot a' > b \cdot b'$ kelib chiqadi.

Isbot. Agar $a > b$ bo'lsa, $a \in A^+$ bo'lgani uchun $a \cdot a' > b \cdot b'$. U holda $a' > b'$ va $b' \in A^+$ bo'lgani uchun $a \cdot a' > b \cdot b'$. $>$ munosabat tranzitiv bo'lganligidan $a \cdot a' > b \cdot b'$ bo'ladi.

$\langle A; +, \cdot, > \rangle$ tartiblangan yarimhalqa, $\langle B; \oplus, \otimes \rangle$ esa $\langle A; +, \cdot \rangle$ yarimhalqaga

izomorf bo'lgan yarimhalqa bo'lsin. $\varphi: A \rightarrow B$ izomorf akslantirish bo'lsin. U holda $\forall b_1, b_2 \in B$ uchun $a_1 \in A$ b_1 ning $a_2 \in A$ b_2 ning proobrazi bo'lsin. Agar $a_1 > a_2$ bo'lsa, b_1 element b_2 element bilan ρ munosabatda deymiz.

II.5.7-teorema. Agar $(A; +, \cdot, >)$ tartiblangan yarimhalqa bo'lsa, $(B, \oplus, \cdot, \rho)$ ham tartiblangan yarimhalqa bo'ladi. Shuning bilan birga $>$ munosabatning barcha xossalari ρ uchun ham o'rinli bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik $>$ A to'plamda refleksiv binar munosabat bo'lsin. $\forall b \in B$ uchun Shunday $a \in A$ mavjud bo'lib, $a > a$ bo'ladi. Demak, $f \in \mathcal{F}_1 \supset f \in \mathcal{F}_2$ yoki $b \rho b$ bo'ladi. Demak, binar munosabat V to'plamda refleksivdir. $>$ binar munosabat A to'plamda chiziqli tartib munosabat bo'lsin, u holda ρ ham V to'plamda chiziqli tartib munosabat bo'ladi. Haqiqatdan ham $\forall b_1, b_2 \in B$ elementlar uchun $f \in \mathcal{F}_1 \supset b_1$ va $f \in \mathcal{F}_2 \supset b_2$ bo'lsin. U holda $a_1 = a_2$ bo'lsa, f -biektiv bo'lgani $b_1 = b_2$ bo'ladi. Agar $a_1 > a_2$ bo'lsa, $f \in \mathcal{F}_1 \supset f \in \mathcal{F}_2$ yoki $b_1 \rho b_2$ bo'ladi. Agar $a_2 > a_1$ bo'lsa $f \in \mathcal{F}_2 \supset f \in \mathcal{F}_1$ yoki $b_2 \rho b_1$ bo'ladi. Xuddi Shunday $>$ munosabatning boshqa xossalari ham B to'plamda bajarilishini tekshirib chiqish mumkin.

Chiziqli tartiblangan halqalar.

II.5.8-ta'rif. Agar $(A; +, 0, >)$ chiziqli tartiblangan gruppaga $(A; +, 0, \cdot)$ algebra halqa bo'lsa, u holda $(A; +, 0, \cdot, >)$ algebraik sistema chiziqli tartiblangan halqa deyiladi.

II.5.9-misol. Butun sonlar halqasi, butun sonlar halqasida aniqlangan tabiiy tartib munosabatga nisbatan chiziqli tartiblangan yarimhalqadir.

Butun sonlar halqasida $a - b > 0$ bo'lsa, $a > b$ deymiz. Bu munosabat butun sonlar halqasida chiziqli tartib munosabatdir.

Chiziqli tartiblangan halqada $>$ tartib munosabat aniqlangan bo'lsa, $\forall a, b \in A$ uchun $a > b \Leftrightarrow a > b \wedge a \neq b$ qat'iy tartib munosabatdir. Agar $<$

qat'iy tartib munosabat bo'lsa, $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$ munosabat noqat'iy tartib munosabat bo'ladi.

II.5.10-teorema. Chiziqli tartiblangan $(A; +, 0, \cdot, >)$ halqada qo'yidagilar o'rinli:

$$1^0 \quad a \in A^+ \Leftrightarrow a > 0.$$

$$2^0 \quad \forall a \in A \text{ uchun } a > 0 \vee a = 0 \vee a < 0.$$

$$3^0 \quad a, b \in A^+ \text{ uchun } a \cdot b \in A^+.$$

$$4^0 \quad \forall a, b \in A \text{ uchun } a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a < 0.$$

$$5^0 \quad \forall a \in A \wedge a \neq 0 \text{ uchun } a^2 > 0.$$

$$6^0 \quad \forall a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in A \text{ uchun}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge \dots \wedge a_n = 0.$$

Isbot. 1^0 -xossaning isboti. $a \in A^+$ bo'lsa, ta'rifga ko'ra $a + a > 0$, u holda $a + a > a + 0 \Rightarrow a > 0$. Aksincha, $a > 0$ bo'lsa, $a + a > 0 + a \Rightarrow a + a > a$.

4^0 -xossaning isboti. $a \cdot b = 0$ bo'lsin $a \neq 0$ va $b \neq 0$ bo'lsin, u holda qo'yidagi holatlar yuz berishi mumkin:

$$1) \quad a > 0 \wedge b > 0 \quad 2) \quad a > 0 \wedge b < 0 \quad 3) \quad a < 0 \wedge b > 0$$

$$4) \quad a < 0 \wedge b < 0.$$

Agar $a > 0$ va $b > 0$ bo'lsa, $ab > 0$;

Agar $-a > 0 \wedge b > 0$ bo'lsa, $-ab > 0$ yo $ab < 0$;

Agar $a < 0 \wedge b < 0$ bo'lsa, $ab > 0$;

Agar $a > 0 \wedge b < 0$ bo'lsa, $ab < 0$ bo'lib, tasdiq Shartga zid.

Qolgan xossalarning isboti mustaqil ishlash uchun qoldiriladi.

Chiziqli tartiblangan jismlar.

II.5.11-ta'rif. Agar $(A; +, \cdot, 0, >)$ algebraik sistema chiziqli tartiblangan halqa, $(A; +, \cdot, 0, 1)$ algebra jism bo'lsa, u holda $(A; +, \cdot, 0, >)$ algebratik sistema chiziqli

tartiblangan jism deyiladi.

$(T; +, \cdot, 0, e, >)$ jism uchun qo'yidagi belgilashlarni kiritamiz: $a \neq 0$ element uchun a^{-1} elementni $\frac{e}{a}$; $\forall a, b \in T \wedge a \neq 0$ elementlar uchun ab^{-1} o'rniga $a \cdot \frac{e}{b}$ va $b^{-1}a$ o'rniga $\frac{e}{b} \cdot a$ deb yozamiz. Agar $e \in T$ bo'lsa, $\underbrace{e + \dots + e}_n = ne$ deb belgilaymiz.

II.5.12-teorema. $(T; +, \cdot, 0, e, >)$ chiziqli tartiblangan jism bo'lsin. U holda qo'yidagi tasdiqlar o'rinli:

$$1^0 \quad e > 0.$$

$$2^0 \quad \forall a, b \in T, a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \left(a \cdot \frac{e}{b} > 0 \right) \wedge \left(\frac{e}{b} \cdot a > 0 \right).$$

$$3^0 \quad \forall a, b \in T, a > b > 0 \Rightarrow \left(a > \frac{e}{2e} \cdot \frac{e}{2e} > 0 \right) \wedge \left(a > \frac{e}{2e} \cdot \frac{e}{2e} > 0 \right).$$

$$4^0 \quad \forall a \in T \wedge \forall n \in N, n > 1, a > 0 \Rightarrow a > a \cdot \frac{e}{n \cdot e} > 0 \wedge a > \frac{e}{n \cdot e} \cdot a > 0.$$

Isbot.

1^0 -xossaning isboti. T chiziqli tartiblangan jism bo'lganligi uchun $e \neq 0$. U holda faqat $e > 0$ yoki faqat $-e > 0$.

$-e > 0$ bo'lsin, u holda $-e > 0$ bo'lgani uchun $(-e)^{-1} > 0$ yoki $e > 0$. Demak $-e > 0$ bo'lishi mumkin emas. U holda $e > 0$.

2^0 -xossaning isboti. $a > 0$ bo'lsa, $a^{-1} > 0$. Haqiqatdan ham, $a \geq a^{-1}$ bo'lsin. U holda $a \cdot 0 \geq aa^{-1} \Rightarrow 0 \geq e$ ziddiyat hosil bo'ladi. Demak $a^{-1} > 0$ yoki $\frac{e}{a} > 0$. $a > 0$ ni o'ngdan $\frac{e}{b}$ ga ko'paytirib, $a \cdot \frac{e}{b} > 0$ ni hosil qilamiz.

$\frac{e}{b} \cdot a > 0$ ni isboti Shunga o'xshash.

3^0 - xossaning isboti. $a > 0, b > 0$ dan $a + a > a + b > 0$ yoki

$(a + a) > (a + b) > 0$ kelib chiqadi. Bu tengsizlikning uchchala qismini $(a + a)^{-1}$

ga chapdan ko'paytirsak, $a > \frac{e}{2e} \cdot \frac{e}{2e} > 0, \frac{e}{2e} \cdot \frac{e}{2e} > \frac{e}{2e} \cdot \frac{e}{2e} > 0$ hosil bo'ladi.

$a > \mathbb{Q} + b \cdot \frac{e}{2e} > 0$ tengsizlikni isboti Yuqoridagidek bajariladi.

4^0 -xossaning isboti. $a > 0$, $a + a > a$. Hosil bo'lgan tengsizlikka $n - 1$ marta $a > 0$ tengsizlikni hadma-had qo'shib, $na > a$ yoki $\mathbb{Q} \cdot e \cdot a > a$ tengsizlikni hosil qilamiz. Natijada, tengsizlikni ikkala qismini $\mathbb{Q} \cdot e \cdot 1$ ga chapdan ko'paytirib, $a > \frac{e}{\mathbb{Q} \cdot e} \cdot a > 0$ ni hosil qilamiz.

4^0 -xossaning ikkinchi qismi $\mathbb{Q} \cdot e \cdot a = a \cdot \mathbb{Q} \cdot a$ dan kelib chiqadi.

II.5.13-teorema. Agar $(\mathbb{Q}; +, \cdot, 0, e, >)$ arxemedcha chiziqli tartiblangan jism bo'lsa, u holda $\forall a, b \in T$ uchun Shunday $n, m \in N$ mavjud bo'lib,

$$\mathbb{Q} > b \geq 0 \Rightarrow \left(a > \frac{n \cdot e}{m \cdot e} > b \right).$$

Isbot. $a > b \geq 0$ dan $a - b > 0$ va demak $\mathbb{Q} - b \cdot 1 > 0$ yoki $\frac{e}{a - b} > 0$ hosil bo'ladi. Arxemed aksiomasiga asosan Shunday $n \in N$ topilib, $me > \frac{e}{a - b}$. U holda, $((me) \cdot (a - b) > e) \Rightarrow (a \geq a - b > (me)^{-1})$.

Arxemed aksiomasiga asosan Shunday $k \in N$ topilib $k \cdot \mathbb{Q} \cdot e \cdot 1 \geq a$. Albatta, $k \neq 1$ bo'lishi ayon. U holda $(\mathbb{Q} + 1) \cdot \mathbb{Q} \cdot e \cdot 1 \geq a$ shartni qanoatlantiradigan eng kichik natural son n ni tanlab olsak, $n \cdot a > n \cdot \mathbb{Q} \cdot e \cdot 1$.

Demak. $(\mathbb{Q} + 1) \cdot \mathbb{Q} \cdot e \cdot 1 \geq a > n \cdot \mathbb{Q} \cdot e \cdot 1$.

II.5.14-ta'rif. $(\mathbb{A}, +, \cdot, 0, >)$ chiziqli tartiblangan halqa bo'lsin. $\forall a \in A$ uchun $a, -a$ elementlarning kattasini a elementning absolyut qiymati deb ataladi.

$(\mathbb{A}, +, \cdot, 0, >)$ - chiziqli tartiblangan halqada $\forall a \in A$ uchun absolyut qiymat qo'yidagi xossalarga ega:

$$1^0. |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

$$2^0. |a| > 0 \Leftrightarrow a \neq 0.$$

$$3^0. |-a| = |a|.$$

$$4^0. a \leq |a| \wedge -a \leq |a|.$$

$\forall a, b \in A$ uchun

$$5^0. |a + b| \leq |a| + |b|.$$

$$6^0. |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b.$$

$$7^0. |a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

$$8^0. \forall a, b, k, l \in A \quad \llbracket \leq a \leq k \wedge l \leq b \leq k \rrbracket \Rightarrow |a - b| \leq k - l.$$

Isbot. Hossalarning isboti bevosita ta'rifdan kelib chiqadi. Masalan, 1^0 - ning isbotini ko'rib chiqamiz. $|a| = 0$ bo'lsa, ta'rifga asosan a va $-a$ ning kattasi nolga teng. Demak, $a = 0$.

Aksincha, $a = 0$ bo'lsa, $a = 0, -a = 0$ bo'lib, $|a| = 0$ bo'ladi.

Halqani tartiblash.

$\langle K, +, \cdot, 0 \rangle$ halqa berilgan bo'lsin. M to'plam K to'plamning to'plamostisi bo'lib, qo'yidagi

$$1. \forall a \in K \text{ uchun } \llbracket a \in M \rrbracket \Rightarrow a \neq 0 \wedge -a \notin M.$$

$$2. \forall a \in K \text{ uchun } a \neq 0 \Rightarrow a \in M \vee -a \in M.$$

3. $\forall a, b \in M$ uchun $\llbracket a + b \rrbracket \in M \vee a \cdot b \in M$ shartlar bajarilsin, u holda M to'plam K to'plamning musbat elementlari to'plami deyiladi. K halqaning musbat elementlar to'plamini K^+ orqali belgilaymiz.

Faraz qilaylik, $K^+ \neq \emptyset$ bo'lsin. U holda $\forall a, b \in K$ uchun $a - b \in K^+$ shart bajarilsa, $a > b$ deymiz. " $>$ " munosabat K to'plamda qat'iy chiziqli tartib munosabat bulishini isbot qilamiz. Haqiqatdan:

1. $\forall a \in K$ uchun $a - a = 0 \notin K^+$. Demak $\forall a \in K$ uchun $\neg \llbracket a > a \rrbracket$. YA'ni, $>$ - antirefleksiv munosabatdir.

2. $a > b$ bo'lsin, u holda $a - b \in K^+$. K^+ ning ta'rifiga ko'ra $\neg \llbracket a - b \rrbracket \notin K^+$ yoki $b - a \notin K^+$. Demak, $\neg \llbracket b > a \rrbracket$. Shunday qilib, $>$ - antisimmetrik munosabatdir.

$$3. \forall a, b, c \in K \text{ uchun } \llbracket a > b \wedge b > c \rrbracket \Rightarrow a > c. \text{ Haqiqatdan ham,}$$

$a - b \in K^+ \wedge b - c \in K^+$ bo'lishidan $\langle a - b \rangle_+ \langle b - c \rangle_+ \Rightarrow a - c \in K^+$, ya'ni, $a > c$ kelib chiqadi.

$\forall a \neq b$ uchun $a - b \neq 0$. Demak, K^+ ning ta'rifiga ko'ra $a - b \in K^+$ yoki $-(a - b) \in K$, u holda $a > b$ yoki $a < b$ bo'ladi.

Yuqoridagilardan $>$ munosabat K halqada qat'iy chiziqli tartib munosabat bo'ladi deb xulosa chiqarsak bo'ladi.

$\forall a, b \in K$ uchun $a > b \Rightarrow a + c > b + c \wedge c + a > c + b$. Haqiqatdan ham, $a > b \Rightarrow a - b \in K^+ \Rightarrow \langle a + c \rangle_+ \langle b + c \rangle_+ \in K^+$. Demak, $a + c > b + c$.

$\forall a, b \in K$ va $c \in K^+$ bo'lsin, u holda $a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$. Haqiqatdan ham, $\langle a > b \rangle_+ \Rightarrow \langle a - b \in K^+ \rangle_+ \Rightarrow a \cdot c - b \cdot c = \langle a - b \rangle_+ c \in K^+ \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$.

Shunday qilib, aniqlangan munosabat K ni qat'iy chiziqli tartib munosabati bo'lib, K ni tartiblangan halqaga aylantirishi mumkin ekan.

Faraz qilaylik $\langle K, +, \cdot, 0, > \rangle$ qat'iy chiziqli tartiblangan halqa bo'lsin, u holda $a > 0$ shartni qanoatlantiradigan barcha elementlar to'plamini K^+ orqali belgilaymiz. Bu to'plam K halqaning musbat elementlari to'plamidan iborat bo'ladi. (isbot qilib ko'ring) va $K^+ \neq \emptyset$.

Xulosa qilib aytadigan bo'lsak, qo'yidagi teorema isbot qilindi:

II.5.15-teorema. $\langle K, +, \cdot, 0, > \rangle$ -halqani qat'iy chiziqli tartiblangan halqaga aylantirish uchun $K^+ \neq \emptyset$ bo'lishi zarur va etarli.

II.5.16-teorema. $\langle A, +, \cdot, 0, > \rangle, \langle B, +, \cdot, 0, >_1 \rangle$ chiziqli tartiblangan halqalar bo'lib, $\langle A, +, \cdot, 0 \rangle$ halqa $\langle B, +, \cdot, 0 \rangle$ halqaning qism halqasi bo'lsin. A^+ A ning, B^+ B ning musbat elementlar to'plami bo'lsin. $>_1$ tartib $>$ tartibning davomi bo'lishi uchun $A^+ \subset B^+$ shart bajarilishi zarur va etarli.

Isbot. $A^+ \subset B^+$ bo'lsin. $\forall a, b \in A$ uchun $a > b \Rightarrow a - b \in A^+$. Demak, $\langle a - b \in B^+ \rangle_+ \Rightarrow \langle a >_1 b \rangle_+$.

Endi $a >_1 b$ bo'lsin, u holda $a \neq b$. Demak, $a - b \in A^+$ yoki $-(a - b) \in A^+$. Agar $a - b \in A^+$ bo'lsa, $a > b$.

Agar $-(a-b) \in A^+$ bo'lsa, $-(a-b) \in B^+$. Bu esa $a >_1 b$ Shartga zid.

Takrorlash uchun savollar

1. Tartib munosabati deb nimaga aytiladi?
2. Tartib munosabatining turlari.
3. CHiziqli tartiblangan to'plam deb nimaga aytiladi?
4. Tartiblangan yarimgrupp deb nimaga aytiladi?
5. Tartiblangan grupp deb nimaga aytiladi?
6. Tartiblangan yarimhalqa deb nimaga aytiladi?
7. Tartiblangan halqa va tartiblangan maydon nima?
8. CHiziqli tartiblangan algebralar deb nimaga aytiladi?

M a s h q l a r

1. Butun sonlar multiplikativ gruppasini chiziqli tartiblash mumkin emasligini isbotlang.
2. Qisqartirish bajariladigan kommutativ yarimgrupp musbat elementlarining yig'indisi musbat bo'lishini isbotlang.
3. Qat'iy chiziqli tartiblangan yarimgrupp musbat elementlarining yig'indisi musbat bo'lishini isbotlang.
4. Yarimgrupp chiziqli tartiblangan bo'lishi uchun uning ixtiyoriy chekli bo'sh bo'lmagan to'plamostisi faqat bitta eng katta elementga ega bo'lishi zarur va etarli ekanligini isbotlang.
5. Tartiblangan kommutativ, qisqartirish bajariladigan yarimgruppada musbat elementdan katta bo'lgan element musbat bo'lmasligi mumkinligini isbotlang.

II.6- §. Normalangan maydonlar

$\langle A; +, \cdot, 0, 1 \rangle$ maydon va $\langle P; +, \cdot, 0, 1; > \rangle$ chiziqli tartiblangan maydon berilgan bo'lsin.

$\lambda : A \rightarrow P$ akslantirish uchun qo'yidagi shartlar bajarilsin:

1. $\forall a \in A$ uchun $\lambda(a) \geq 0$.
2. $\lambda(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
3. $\forall a, b \in A, \lambda(a \cdot b) \leq \lambda(a) \cdot \lambda(b)$.
4. $\forall a, b \in A, \lambda(a + b) \leq \lambda(a) + \lambda(b)$.

U holda λ akslantirish A maydonda P chiziqli tartiblangan maydon orqali aniqlangan *norma* deyiladi. (A, P, λ) uchlik esa *normalangan maydon* deyiladi. A maydon esa P chiziqli tartiblangan maydon orqali λ *norma bilan normalangan maydon* deyiladi.

Adabiyotlarda $\lambda(a)$ ni o'rniga ba'zan $\|a\|$ yozuv ishlatiladi.

II.6.1-misol. R tartiblangan haqiqiy sonlar maydonida $\lambda : a \rightarrow |a|$ akslantirish norma bo'ladi.

II.6.2-misol. A ixtiyoriy maydon R haqiqiy sonlar maydoni bo'lsin. $\forall a \in A$ uchun $\mu_a \equiv \begin{cases} 1, \text{ agar } a \neq 0; \\ 0, \text{ agar } a = 0. \end{cases}$

U holda μ norma bo'lishini tekshirish qiyin emas. (A, R, μ) uchlik tartiblangan maydon bo'lib, μ *trivial norma* deyiladi.

II.6.3-misol. P chiziqli tartiblangan maydon bo'lsin, u holda $a \rightarrow |a|$ akslantirish P da norma bo'ladi.

II.6.4-misol. Q ratsional sonlar maydoni bo'lsin, P tub son, θ esa $[0,1]$ intervalga tegishli birorta ratsional son bo'lsin, ya'ni $0 < \theta < 1$ bo'lsin.

Ixtiyoriy α ratsional sonni $\alpha = p^n \cdot \frac{a}{b}$, $\phi, a \rhd 1, \phi, b \rhd 1, n \in \mathbb{Z}$ shartlarni qanoatlantiradigan qilib yozib olish mumkin. Masalan, $p = 1, \alpha = \frac{7}{8}$ bo'lsin

$\alpha = 7^0 \cdot \frac{7}{8}$. Agar $\alpha = \frac{7}{27}$ bo'lsa, $\alpha = 3^{-3} \frac{7}{1}$ ko'rinishda yozish mumkin.

$\mu_p \lhd \rhd \theta^n$ akslantirish ratsional sonlar maydonida norma bo'lishini tekshirib chiqaylik:

$$1. \quad \lambda(\alpha) = \theta^n > 0, \quad \lambda(0) = p^n \cdot 0 = 0..$$

$$2. \quad \text{Agar } \alpha = p^n \frac{a_1}{b_1}, \beta = p^m \frac{a_2}{b_2}, \quad \lhd, a_1 \rhd \rhd \lhd, a_2 \rhd \rhd \lhd, b_1 \rhd \rhd \lhd, b_2 \rhd \rhd \rhd 1 \quad \text{bo'lsa,}$$

$$\alpha \cdot \beta = p^{n+m} \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}, \quad \lhd, a_1, a_2 \rhd \rhd \lhd, b_1, b_2 \rhd \rhd \rhd 1 \quad \text{bo'ladi.} \quad \text{U} \quad \text{holda}$$

$$\lambda(\alpha \cdot \beta) = \theta^{n+m} = \theta^n \cdot \theta^m = \lambda(\alpha) \cdot \lambda(\beta).$$

$$3. \quad \alpha = p^n \frac{a_1}{b_1}, \beta = p^m \frac{a_2}{b_2} \quad \text{bo'lsin aniqlik uchun } n > m \quad \text{deylik, u holda}$$

$$\alpha + \beta = p^n \frac{a_1}{b_1} + p^m \frac{a_2}{b_2} = p^m \left(p^{n-m} \frac{a_1}{b_1} + p^m \frac{a_2}{b_2} \right) = p^m \frac{p^{n-m} a_1 b_2 + b_1 a_2}{b_1 b_2},$$

$$(p, p^{n-m} a_1 b_2 + b_1 a_2) = 1, \quad \lhd, b_1 b_2 \rhd \rhd \rhd 1. \quad \text{Demak,}$$

$\lambda(\alpha \cdot \beta) = \theta^m \leq \theta^m + \theta^n = \lambda(\alpha) + \lambda(\beta)$. Bu norma p -adik norma deyiladi. Bu normani λ_p orqali belgilab olamiz.

II.6.5-teorema. A normalangan maydon, $\|a\|$ esa $a \in A$ element normasi bo'lsin, u holda quyidagi xossalar o'rinli:

$$1^0. \quad \|1\| = 1.$$

$$2^0. \quad \|-1\| = 1.$$

$$3^0. \quad a \neq 0 \Rightarrow \|a^{-1}\| = \|a\|^{-1}.$$

$$4^0. \quad \|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|.$$

Isbot.

$$1^0. \quad \|1\| = \|1 \cdot 1\| = \|1\| \cdot \|1\| \Rightarrow \|1\| = 1..$$

$$2^0. \quad \|1\| = \|-1\| \cdot \|-1\| \Rightarrow \|-1\|^2 = 1 \Rightarrow \|-1\| = 1.$$

$$3^0. \quad \|1\| = \|a \cdot a^{-1}\| = \|a\| \cdot \|a^{-1}\| \Rightarrow \|a^{-1}\| = \|a\|^{-1}.$$

II.6.6-natija. *A normalangan maydon bo'lsin, u xolda quyidagi xossalar o'rinli:*

$$1^0. \| -a \| = \| a \|.$$

$$2^0. \| a \cdot b^{-1} \| = \| a \| \cdot \| b \|^{-1}.$$

$$3^0. \| a \| > \| b \| - \| b - a \|.$$

Isbot. $1^0. \| -a \| = \| -1 \cdot a \| = \| -1 \| \cdot \| a \| = 1 \cdot \| a \| = \| a \|$ qolgan tasdiqlarni isboti Shunga o'xshash Yuqorida isbot qilingan teoremadan kelib chiqadi.

Normalangan maydonda ketma-ketliklar.

Bizga A maydon R chizikli tartiblangan maydon, λ - A dagi R maydon orqali aniqlangan norma berilgan bo'lsin.

II.6.7-ta'rif. *A maydonda aniqlangan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma - ketlik uchun Shunday $c \in P^+$ topilib, $\forall n \in N$ uchun $\lambda \llbracket a_n \rrbracket \leq c$ shart bajarilsa, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma - ketlik chegaralangan ketma - ketlik deyiladi.*

II.6.8-teorema. *$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma - ketlik chegaralangan ketma - ketlik bo'lishi uchun Shunday $c \in P^+$ mavjud bo'lib, $\forall n \in N$ uchun $\lambda \llbracket a_n \rrbracket \leq c$ shart bajarilishi zarur va etarli.*

Isbot. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsin, u xolda $\forall n \in N$ uchun $\exists c \in P^+ \lambda \llbracket a_n \rrbracket \leq c$ bo'ladi. Natijada $\lambda \llbracket a_n \rrbracket \leq c+1$ Aksincha $\forall n \in N$ uchun $\exists c \in P^+, \lambda \llbracket a_n \rrbracket \leq c \Rightarrow \lambda \llbracket a_n \rrbracket \leq c.$

II.6.9-ta'rif. *A normalangan maydondagi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma - ketlik uchun $\forall \varepsilon \in P^+, \exists n_0 \in N \bigwedge (n, k \in N) (n > n_0 \wedge k > n_0 \Rightarrow \lambda \llbracket a_n - a_k \rrbracket < \varepsilon$ shart bajarilsa, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma - ketlik λ normaga nisbatan fundamental ketma-ketlik deyiladi.*

II.6.10-teorema. *A normalangan maydondagi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma - ketlik fundamental ketma-ketlik bo'lishi uchun qo'yidagi shartlar bajarilishi zarur va etarli:*

$$\forall \varepsilon \in P^+, \exists n_0 \in N, \forall n, l \in N, n > n_0 \text{ uchun } \lambda \llbracket a_{n+l} - a_n \rrbracket < \varepsilon$$

Isbot. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ fundamental ketma-ketlik bo'lsin, u holda $\forall \varepsilon \in P^+, \exists n_0 \in N, \forall n, k \in N, n > n_0, k > n_0$ uchun $\lambda \mathbf{C}_n - a_k \lesssim \varepsilon, n \geq n_0$ bo'lsa, $n + l \geq n_0$. Demak, $\lambda \mathbf{C}_{n+l} - a_n \lesssim \varepsilon$. YA'ni (*) shart bajariladi. Aksincha (*) shart bajarilsa, $n > n_0, k > n_0$, aniqlik uchun $k > n$ deb faraz qilsak $\lambda \mathbf{C}_k - a_n \gtrsim \lambda \mathbf{C}_{n+\mathbf{C}-n} - a_n \lesssim \varepsilon$. Demak, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ fundamental ketma-ketlik ekan.

II.6.11-teorema. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ fundamental ketma-ketlik bo'lishi uchun $\forall \varepsilon \in P^+, \exists n_0 \in N, \forall n \in N, n > n_0, \lambda \mathbf{C}_n - a_{n_0} \lesssim \varepsilon$ shart bajarilishi zarur va etarli.

Isbot. Yuqoridagi teorema isbotiga o'xshash bajariladi.

II.6.11-ta'rif. A normalangan maydondagi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma – ketlik berilgan bo'lsin. Agar $\forall \varepsilon \in P^+$ uchun $\exists n_0 \in N, \exists a \in A, n > n_0$ dan $\lambda \mathbf{C}_n - a \lesssim \varepsilon$ shart bajarilsa, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik a elementga yaqinlashadi deyiladi.

Agar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik a elementga yaqinlashsa, a element $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning cheki yoki limiti deyiladi va $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$ deb yoki $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ deb yoziladi. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ bo'lsa, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik norma bo'yicha nol ketma-ketlik deyiladi.

II.6.12-ta'rif. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ va $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklar uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ shart bajarilsa, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ va $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklar teng kuchli deyiladi va $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ko'rinishida belgilanadi.

II.6.13-teorema. $\sim$ munosabat ekvivalentlik munosabatidir, ya'ni

1. $\sim$ – refleksiv.
2. $\sim$ – simmetrik.
3. $\sim$ – tranzitivlik munosabatidir.

II.6.14-teorema. (A, P, λ) normalangan maydon berilgan bo'lsin. U holda A maydondagi λ norma bo'yicha yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental

ketma-ketlik bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ bo'lsin, u holda $\forall n \in N, n > n_0$ uchun

$$\lambda(a_n - c) < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ bo'lsa, } \forall n, k \in N, n > n_0 \wedge k > k_0 \Rightarrow$$

$$\lambda(a_n - a_k) = \lambda(a_n - a + a - a_k) \leq \lambda(a_n - a) + \lambda(a - a_k) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Demak, $\lambda(a_n - a_k) < \varepsilon$.

II.6.15-teorema. (A, P, μ) normalangan maydon berilgan bo'lsin. Agar

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ A maydonda fundamental ketma-ketlik bo'lsa, u holda, $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ va $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklar ham fundamental ketma-ketlikdir.

2. Agar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a$ va $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow b$ bo'lsa, u holda $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a + b$ va $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow a - b$ bo'ladi.

3. Agar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$ va $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$.

4. Agar $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ va $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\{a_n \cdot c_n\} \sim \{b_n \cdot c_n\}$ bo'ladi.

5. Agar $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ bo'lsa, u holda $\{a_n + c_n\} \sim \{b_n + c_n\}$ bo'ladi.

6. Agar $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ bo'lsa, ixtiyoriy birining fundamental ketma-ketlik bo'lishidan ikkinchisining ham fundamental ketma-ketlik bo'lishi kelib chiqadi. Bu ketma-ketliklardan ixtiyoriy birining yaqinlashuvchi bo'lishidan ikkinchisining ham yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

7. Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar fundamental ketma-ketliklar bo'lsa u holda, $\{a_n \cdot b_n\}$ ketma-ketliklar ham fundamental ketma-ketlik bo'ladi. Agar $\{b_n\}$

ketma-ketlik nol ketma-ketlik bo'lmasa va $\forall n \in N$ uchun $b_n \neq 0$ bo'lsa $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

ham fundamental ketma-ketlik bo'ladi.

8. Agar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi, $\{a_n\} \rightarrow 0$ va

$\{b_n\} \rightarrow b$ bo'lsa, $\{a_n \cdot b_n\} \rightarrow ab$ bo'ladi; agar $b \neq 0$ va $\forall n \in N$ uchun $b_n \neq 0$ bo'lsa, u holda $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \rightarrow \frac{a}{b}$ bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Normalangan maydon ta'rifini ayting.
2. Norma xossalarini ayting.
3. Stasionar ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
4. Normalangan maydonda chegaralangan ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
5. Normalangan maydonda chegaralangan ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
6. Normalangan maydonda fundamental ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
7. Normalangan maydonda yaqinlashuvchi ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
8. Ekvivalent ketma-ketliklar ta'rifini ayting.

M a s h q l a r

1. Ratsional sonlar maydonini quyidagicha normalaymiz: c $0 < c \leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy son bo'lsin. U holda ixtiyoriy ratsional sonning normasi sifatida $|a|^c$ ni olamiz. Ratsional sonlar maydoni kiritilgan normaga ko'ra normalangan maydon bo'lishini isbotlang.

2. Normalangan maydonda har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik bo'lishini isbotlang.

3. Normalangan maydonda fundamental ketma-ketliklar yig'indisi yana fundamental ketma-ketlik bo'lishini isbotlang.

4. Normalangan maydonda ekvivalent ketma-ketliklardan biri fundamental ketma-ketlik bo'lsa, ikkinchisi ham fundamental ketma-ketlik bo'lishini isbotlang.

5. Normalangan maydonda ekvivalent ketma-ketliklardan biri yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'lsa, ikkinchisi ham yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'lishini isbotlang.

6. Normalangan maydonda ketma-ketliklarning ekvivalentlik munosabati refleksiv, simmetrik, tranzitiv binar munosabat ekanligini isbotlang.

III BOB. AKSIOMATIK NAZARIYALAR

III.1-§. Matematik nazariyalar haqida tushuncha

Aksiomatik nazariyalarni yaratishda qo'llaniladigan aksiomatik metod shu matematik nazariya ob'ektlari orasidagi eng sodda xossalarni ifoda qilishga asoslanganligi uchun matematik fanlarni aniq ifoda qilish imkonini beradi. Bu sodda xossalar aksiomalar deb atalib, ularga asoslanib teoremlar isbotlanadi.

Matematikada biror tushunchani ta'riflaganimizda boshqa soddaroq tushunchalardan foydalaniladi. Lekin o'sha sodda tushunchalarni ifodalash uchun yana boshqa bir tushunchalar ishlatilishi tabiiy va h.k. SHu nuqtai nazardan qarasak, biz ba'zi bir tushunchalarni ta'rifsiz qabul qilishga majbur bo'lamiz. Bu tushunchalarni aksiomatik nazariyaning asosiy tushunchalari deb ataymiz.

Xuddi Shunday, birorta matematik tasdiqni isbot qilganimizda boshqa isbot qilingan tasdiqlardan foydalanamiz, isbot qilingan tasdiqlar ham o'z navbatida boshqa tasdiqlarga asoslanib isbotlanadi va h.k. Shuning uchun ba'zi to'g'riligi shubha tug'dirmaydigan tasdiqlarni isbotsiz qabul qilishga majburmiz. Bu tasdiqlarni aksiomalar deb ataymiz. Aksiomalarga asoslanib teoremlar isbot qilinadi. Bu esa aksiomatik nazariyaning mazmunini tashkil etadi.

Aksiomatik nazariyalar formal va mazmunli (noformal) aksiomatik nazariyalar deb ataladigan ikki turga bo'linadi.

Mazmunli aksiomatik nazariyada keltirib chiqarish qoidalari aniq belgilab qo'yilmagan bo'lib, u ko'proq intuisiyaga asoslangan nazariyadir. Ya'ni, bu nazariyada teoremlar intuisiyaga asoslangan qoidalardan foydalanib isbotlanadi.

Mazmunli aksiomatik nazariyaga gruppalar nazariyasi, halqalar nazariyasi misol bo'la oladi.

Formal aksiomatik nazariya esa quyidagi sxema asosida quriladi :

Nazariya tili beriladi.

Formula tushunchasi aniqlanadi.

Aksiomalar deb ataladigan asosiy formulalar ro'yxati beriladi.

Keltirib chiqarish qoidalarini sanab chiqiladi.

Biz asosan *birinchi tartibli matematik nazariyalar* deb ataladigan nazariyalar bilan shug'ullanamiz. Bu nazariya bizga ma'lum bo'lgan asosiy matematik nazariyalarni qurish uchun etarlidir. Bunday nazariyalar ba'zan *elementar nazariyalar* deb ham ataladi. Birinchi tartibli tilda predikatning argumenti, predikat yoki funksiya bo'lgan predikatlar, kvantor bilan bog'langan predikat yoki funksiyalar qaralmaydi.

Takrorlash uchun savollar

1. Aksiomatik metod haqida tushuncha bering.
2. Aksioma bilan teoremaning farqini ayting.
3. Aksiomatik nazariyani qurish sxemasini keltiring.
4. Mazmunli aksiomatik nazariya haqida tushuncha bering va misol keltiring.
5. Formal aksiomatik nazariya haqida tushuncha bering va misol keltiring.

III.2-§. Birinchi tartibli til

Ixtiyoriy tabiatli simvollarning chekli to'plami - W berilgan bo'lsin. Bu to'plamni birinchi tartibli tilning *alifbosi* deb ataymiz. W alifbodagi simvollarning chekli ketma – ketligini birinchi tartibli tilning *so'zlari* deymiz. Ikkita $a_1, \dots, a_n$ va $b_1, \dots, b_n$ so'zlarning mos harflari teng, ya'ni $a_1=b_1, \dots, a_n=b_n$ bo'lsa, bu *so'zlar teng* deyiladi.

Faraz qilaylik, biror bir aksiomatik nazariya qaralayotgan bo'lsin. W – shu nazariyaning alifbosi, U – esa shu nazariyadagi so'zlar to'plami bo'lsin. U holda, (W, U) juftlik qaralayotgan *nazariyaning tili* deyiladi.

Birinchi tartibli til orqali birinchi tartibli nazariyalar ifodalanadi. Birinchi tartibli nazariyalar, umuman olganda, Yuqorida aytganimizdek predikatlar hisobini qamrab oladi. Ya'ni, predikatlar hisobining simvollari, aksiomalari, formulalari, keltirib chiqariluvchi formulalari birinchi tartibli nazariyaga kiradi.

Undan tashqari, birinchi tartibli nazariyada $f_i^{n_i}(i, n_i \in \mathbb{N})$ - n_i o'rinli funksiyaning simvollar qatnashishi mumkin. SHu munosabat bilan birinchi tartibli tilda formula tushunchasi biroz kengaytiriladi.

Birinchi tartibli nazariyalarda ikki xil ifodalar ishlatiladi. Bular term va formulalardir.

III.2.1–ta’rif. 1. *O'zgaruvchi predmetlar, doimiy predmetlar, ya'ni konstantalar termidir.*

2. *Agar $t_1, \dots, t_n$ – lar termlar, A – n o'rinli algebraik amal bo'lsa, u holda $A(t_1, \dots, t_n)$ – termidir.*

3. *Boshqa termlar yo'q.*

Ta'rifdan ko'rinadiki, algebraik amal bog'lovchilari vositasida termlarni bog'lab ham o'zgaruvchi predmetlar, konstantalardan farqli termlarni hosil qilishimiz mumkin ekan.

III.2.2–ta’rif. (Birinchi tartibli nazariyada formula tushunchasi).

A – n o'rinli predikat, $t_1, \dots, t_n$ – termlar bo'lsin, u holda $A(t_1, \dots, t_n)$ – formuladir.

Agar $\mathfrak{S}$ va $\mathfrak{R}$ lar formulalar bo'lsa, u holda $\mathfrak{S} \wedge \mathfrak{R}$, $\mathfrak{S} \vee \mathfrak{R}$, $\mathfrak{S} \Rightarrow \mathfrak{R}$, $\neg \mathfrak{S}$ - lar ham formulalardir.

Agar $\mathfrak{S}$ formula, u – erkin o'zgaruvchi bo'lsa, u holda $\forall u \mathfrak{S}$ va $\exists u \mathfrak{S}$ ifodalar ham formulalardir.

1, 2, 3 punktlarda aniqlangan formulalardan tashqari boshqa formulalar yo'q.

Predikatlar hisobining barcha aksiomalari birinchi tartibli til uchun ham o'rinli bo'lib, bu aksiomalar birinchi tartibli tilning mantiqiy aksiomalari deyiladi. Bundan tashqari birinchi tartibli til bilan ifoda qilinayotgan har bir nazariyaning o'ziga hos aksiomalari ham bo'ladi. Bu aksiomalar nazariyadan nazariyaga o'tganda o'zgarib turadi. SHuning uchun ularni maxsus aksiomalar deb ataymiz.

Birinchi tartibli til bilan ifoda qilinadigan deyarli barcha nazariyalarga tenglik aksiomalari kiritiladi. Ular quyidagilardan iborat:

III₁. $x = x$.

III₂. $x = y \Rightarrow (A(x) \Rightarrow A(y))$.

Birinchi tartibli tilda predikatlar hisobining keltirib chiqarish qoidalarining ba'zilariga o'zgartirishlar kiritiladi.

III.2.3. (O'zgaruvchi predmetlarni almashtirish qoidasi).

Agar $\mathfrak{S}$ keltirib chiqariluvchi formula bo'lsa, u holda $\mathfrak{S}$ dagi o'zgaruvchi predmetni $\mathfrak{S}$ da bog'langan o'zgaruvchi predmetlar qatnashmagan term bilan almashtirsak, hosil bo'lgan ifoda yana keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi.

III.2.4. (O'zgaruvchi predikatni almashtirish qoidasi).

$\mathfrak{S}$ keltirib chiqariluvchi formuladagi n o'rinli $F(t_1, \dots, t_n)$ - predikatni kolliziya holati yuz bermaydigan qilib $\mathfrak{R}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ - formula bilan almashtirsak, hosil bo'lgan ifoda yana keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi. Bu erda $t_1, \dots, t_n; \theta_1, \dots, \theta_n$ lar birinchi tartibli nazariyadagi termlardir.

Boshqa keltirib chiqarish qoidalari o'zgarishsiz qoladi.

Birinchi tartibli til uchun gipotezalardan keltirib chiqariluvchi formulalar tushunchasi, deduksiya teoremasi predikatlar hisobidagidan shaklan farq qilmaydi. Lekin mazmunan keltirib chiqariluvchi formulalar haqida gapirganimizda Yuqorida keltirilgan keltirib chiqarish qoidalarini e'tiborga olishimiz zarur.

III.2.5. Nazariya tilining interpretasiyasi.

Nazariya tilining interpretasiyasi tushunchasi bilan tanishib chiqamiz.

Faraz qilaylik, W – to'plam nazariyaning alifbosi bo'lsin. W' – esa boshqa birorta aksiomatik yoki intuitiv nazariyaning simvollari to'plami (alifbosi) bo'lsin. W to'plamning har bir elementiga W' ning aniq bitta elementini Shunday mos qo'yamiz – ki natijada, W dagi konstantaga W' dagi konstanta, W da o'zgaruvchi predmetga W' dagi o'zgaruvchi predmet yoki konstanta mos kelsin, W da aniqlangan har bir predikatga W' da aniqlangan Yagona predikat, W da

aniqlangan har bir funksional simvolga W' da aniqlangan aniq bitta funksional simvol mos kelsin. U holda birinchi nazariyada aniqlangan har bir ifodaga ikkinchi nazariyada aniqlangan aniq ifoda mos keladi. Aniqroq qilib aytadigan bo'lsak, birinchi nazariyadagi har bir termga ikkinchi nazariyadan aniq bitta term, birinchi nazariyadagi har bir formulaga ikkinchi nazariyadagi aniq bitta formula mos keladi. U holda ikkinchi nazariya birinchi nazariyaning ifodasi yoki *interpretasiyasi* deyiladi.

Agar bir nazariyaning har bir keltirib chiqariluvchi formulasi shu nazariyaning interpretasiyasida aynan rost formula yoki keltirib chiqariluvchi formula bo'lsa u holda bunday interpretasiya berilgan *nazariyaning modeli* deyiladi.

III.2.6–ta’rif. Berilgan nazariyaning ikkita W_1 , W_2 – to'plamlarida aniqlangan ikkita interpretasiyasi berilgan bo'lsin. W_1 , W_2 to'plamlar orasida shunday o'zaro bir qiymatli moslik, ya'ni biektiv moslik o'rnatilgan bo'lsin. Natijada, birinchi interpretasiyadagi har bir o'zgaruvchi predmetga ikkinchi interpretasiyadagi o'zgaruvchi predmet, birinchi interpretasiyadagi konstantaga ikkinchi interpretasiyadagi konstanta, birinchi interpretasiyadagi har bir n ($n \geq 0$) o'rinli funksional simvolga ikkinchi interpretasiyadagi n o'rinli funksional simvol, birinchi interpretasiyadagi har bir n ($n \geq 0$) o'rinli predikat simvoliga ikkinchi interpretasiyadagi n ($n \geq 0$) o'rinli predikat simvoli mos qo'yilgan bo'lib, natijada birinchi interpretasiyadagi har bir keltirib chiqariluvchi (aynan rost) formulaga ikkinchi interpretasiyaning keltirib chiqariluvchi (aynan rost) formulasi mos kelsa, u holda bunday ikkita interpretasiya izomorf deyiladi.

III.2.7–ta’rif. Agar matematik nazariyaning har qanday ikkita modeli izomorf bo'lsa, bunday matematik nazariya qat'iy nazariya deyiladi.

Evklid geometriyasi, natural sonlar nazariyasi, butun sonlar nazariyasi, ratsional sonlar nazariyasi, haqiqiy sonlar nazariyasi, kompleks sonlar nazariyasi qat'iy matematik nazariyalarga misol bo'la oladi.

Gruppalar nazariyasi esa noqat'iy aksiomatik nazariyaga misol bo'la oladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Matematik nazariya tili nima ?
2. Birinchi tartibli til haqida tushuncha bering.
3. Birinchi tartibli nazariyada formula tushunchasi ta'rifini ayting.
4. Birinchi tartibli tilning mantiqiy aksiomalarini keltiring.
5. Birinchi tartibli tilning keltirib chiqarish qoidalarini ayting.
6. Interpretasiya haqida tushuncha bering.
7. Matematik nazariyaning modeli nima?
8. Gruppalar aksiomatik nazariyasi modeliga misollar keltiring.

III.3-§. Matematik nazariyalarning zidsizlik, to'liqlik, yechilish muammolari

Zidsizlik muammosi.

III.3.1-ta'rif. Agar matematik nazariyada $\mathfrak{S}$ va $\neg \mathfrak{S}$ formulalar keltirib chiqariluvchi bo'lsa, bunday matematik nazariyalar ziddiyatli matematik nazariyalar deyiladi.

Ziddiyatli nazariyani qurishning ma'nosi yo'q, Chunki bunday nazariyada har qanday formula keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $\vdash \mathfrak{S}$ va $\vdash \neg \mathfrak{S}$ bo'lsa, u holda $\vdash \mathfrak{S} \wedge \neg \mathfrak{S}$ bo'ladi. Bundan, ixtiyoriy $\mathfrak{R}$ formula uchun $\vdash \mathfrak{S} \wedge \neg \mathfrak{S} \Rightarrow \mathfrak{R}$ ekanligi kelib chiqadi. Bu formulaga (MR) qoidani qo'llasak, $\vdash \mathfrak{R}$ bo'ladi.

III.3.2-ta'rif. Matematik nazariyada $\mathfrak{S}$ va $\neg \mathfrak{S}$ formulalardan kamida bittasi keltirib chiqarilmaydigan formula bo'lsa, bunday nazariya zidsiz nazariya deyiladi.

Matematik nazariyaning zidsizligini ko'rsatish uchun, shu nazariyaning kamida bitta zidsizligi ma'lum bo'lgan modelini ko'rsatish etarli.

Haqiqatdan ham, berilgan nazariya ziddiyatli nazariya bo'lsa, u holda shunday $\mathfrak{S}$ formula topilib, $\vdash \mathfrak{S}$ va $\vdash \neg \mathfrak{S}$ bo'lar edi. U holda $\mathfrak{S}$ formulaga modelda mos kelgan $\mathfrak{S}'$, $\neg \mathfrak{S}$ ga modelda mos keladigan $\neg \mathfrak{S}'$ formulalar ham keltirib chiqariluvchi formulalar bo'lib, model ziddiyatli bo'lar edi.

III.3.3-misol. Gruppalar nazariyasi zidsiz nazariyadir. Haqiqatdan ham, masalan, $G = \{ -1, 1 \}$ ikki elementli multiplikativ gruppalar nazariyasi uchun zidsiz model bo'ladi.

Matematik nazariyaning keng ma'noda to'liqligi.

III.3.4-ta'rif. Agar matematik nazariyadagi ixtiyoriy $\mathfrak{S}$ formula uchun $\mathfrak{S}$ yoki $\neg \mathfrak{S}$ formulalardan kamida bittasi keltirib chiqariluvchi formula bo'lsa, bunday aksiomatik nazariya keng ma'noda to'liq nazariya deyiladi.

Agar matematik nazariya keng ma'noda to'liq bo'lsa, bu nazariyaning ixtiyoriy $\mathfrak{S}$ formulasi yoki bu formulaning inkori ixtiyoriy modelda keltirib chiqariluvchi formula bo'ladi.

Matematik nazariyaning tor ma'noda to'liqligi.

III.3.5-ta'rif. Agar matematik nazariya aksiomalari sistemasiga shu nazariyaga isbot qilinmaydigan formulani aksioma sifatida qo'shib, keltirib chiqarish qoidalarini o'zgarishsiz qoldirsak, natijada hosil bo'lgan nazariya ziddiyatli nazariya bo'lsa, u holda matematik nazariya tor ma'noda to'liq deyiladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Matematik nazariyalarda zidsizlik muammosi.
2. Matematik nazariyalarning to'liqligi deganda nimani tushunasiz?
3. Matematik nazariyalarda echilish muammosi haqida nimalarni bilasiz?

III.4-§. Matematik nazariyalarga namunalar

III.4.1. Qisman tartiblanish nazariyasi.

Bu nazariyada ikki o'rinli R predikat qatnashib $R(x,y)$ – « $x < y$ » munosabatni bildiradi.

Bu nazariyaning maxsus aksiomalari :

I. $\forall x \neg (x < x)$ – antirefleksivlik munosabati.

II. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 < x_2) \wedge (x_2 < x_3) \Rightarrow (x_1 < x_3))$ – tranzitivlik munosabati.

Bu nazariyaning ixtiyoriy modeli qisman tartiblangan struktura deyiladi.

III.4.2. Gruppalar nazariyasi.

Gruppalar nazariyasini ifodalash uchun bitta predikat simvoli A va bitta funksional simvol f va bitta a_1 – konstanta etarli.

$A(t, s)$, $t = s$ predikatni;

$f(t, s)$, $t + s$ - amalni;

$a_1 = 0$ ni bildirsin.

Gruppalar nazariyasining maxsus aksiomalari quyidagilardan iborat:

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3)$ – assosiativlik.

$\forall x_1 (0 + x_1 = x_1 = x_1 + 0)$ – 0 ning xossasi.

$\forall x_1 \exists x_2 (x_1 + x_2 = x_2 + x_1 = 0)$ – qarama-qarshi elementning mavjudligi.

Bu nazariyaning har qanday modeli gruppaga deyiladi. Masalan, $(\mathbb{Z}; +, 0)$ – butun sonlar gruppasidir.

III.4.3. Natural sonlar nazariyasi.

Natural sonlar nazariyasini ifoda qilish uchun konstanta 0 ; funksional simvollar: $+$, $\cdot$, $'$ (birni qo'shish); « $=$ » predikat simvoli etarli.

Bu nazariyaning maxsus aksiomalari quyidagilardan iborat:

$x_1 = x_2$.

$x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1$.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1 = x_3 \Rightarrow x_2 = x_3).$$

$$0 \neq x_1'.$$

$$x_1' = x_2' \Rightarrow x_1 = x_2.$$

$$x_1 + 0 = x_1.$$

$$x_1 + x_2' = (x_1 + x_2) '.$$

$$x_1 \cdot 0 = 0.$$

$$x_1' \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1.$$

$$A(0) \Rightarrow (\forall x (A(x) \Rightarrow A(x')) \Rightarrow \forall x A(x)),$$

bunda $A(x)$ – natural sonlar nazariyasining ixtiyoriy formulasidir.

10–aksioma o'zida cheksiz ko'p aksiomalarni mujassamlagan sxemadir. Uni odatda matematik induksiya prinsipi deb ataydilar.

III.4.4. To'liqsizlik haqida Gyodel teoremasi.

1931- yil K. Gyodel formal arifmetikaning to'liq emasligini ko'rsatib berdi. YA'ni hech bo'lmaganda formal arifmetikani qamrab olgan har qanday formal nazariyada Shunday yopiq $\mathfrak{S}$ formula topilib, $\mathfrak{S}$ ni ham $\neg \mathfrak{S}$ ni ham bu nazariyada isbot qilib bo'lmasligini ko'rsatib berdi. Bundan tashqari ba'zi shartlar bajarilganda $\mathfrak{S}$ formula sifatida shu nazariya zidsiz degan tasdiq olinishi mumkinligini isbot qilib berdi.

Takrorlash uchun savollar

1. Matematik nazariyalarga misollar keltiring.
2. Gyodel teoremasini tushuntiring.
3. Matematik nazariyalarning mantiqiy va maxsus aksiomalari orasidagi farqlarni ayting.

IV BOB. SONLI SISTEMALAR

IV.1-§. Natural sonlar mazmunli aksiomatik nazariyasi

Boshlang'ich tushunchalar va belgilar

Natural sonlar to'plami, birlik element natural sonlar aksiomatik nazariyasining asosiy tushunchalari bo'lib, ular ta'rifsiz qabul qilinadi.

Natural sonlar to'plamini – N , birlik elementni – 1 simvollar ko'rinishida belgilab olamiz, undan tashqari $+$, $\cdot$ simvollar orqali mos ravishda N to'plamdagi qo'shish va ko'paytirish amallari belgilanadi.

Bu belgilardan tashqari $\exists!c \in A - A$ ga tegishli Yagona c element mavjudligini ifodalasin; $a+b$ orqali a va b elementlar yig'indisini; $A+B$ orqali esa $\{a+b \mid \forall a \in A \wedge \forall b \in B\}$ to'plam belgilanadi.

IV.1.1- misol. $\{1,3\} + \{7,8\} = \{8,9,10,11\}$.

Natural sonlar nazariyasining aksiomalari.

1°. $1 \in N \wedge \forall a, b \in N$ uchun $a+b \neq 1$ ya'ni, 1 natural son bo'lib, bir hech qanday natural sonlar yig'indisiga teng emas.

2°. $\forall a \in N$ uchun $\exists!a' \in N$ $a' = a+1$, ya'ni har qanday a natural son uchun, bevosta a dan keyin keluvchi Yagona a' natural son mavjud.

3°. $\forall a, b \in N$ uchun $a+1 = b+1$ bo'lsa, $a = b$ bo'ladi.

4°. $\forall a, b \in N$ uchun $a+b$ aniqlangan bo'lsa, $(a+b)+1 = a+(b+1)$. Bu aksioma $+$ amali assosiativligining engillashtirilgan ko'rinishi deyiladi.

5°. $\forall a \in N$ uchun $a \cdot 1 = a$.

6°. $\forall a, b \in N$ uchun $ab+a$ va $a(b+1)$ ifodalar aniqlangan bo'lsa, $ab+a = a(b+1)$ bo'ladi. Bu aksioma ko'paytirish amalini qo'shish amaliga nisbatan distributivligining engillashtirilgan ko'rinishi deyiladi.

7°. Agar M natural sonlar to'plamining to'plamostisi bo'lib, $1 \in M$ va $\forall a \in M$ bo'lishidan $a+1 \in M$ kelib chiqsa, u holda $M = N$ bo'ladi. Bu aksioma induksiya aksiomasi deyiladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Natural sonlar aksiomalar sistemasidagi asosiy tushunchalar va belgilashlarni ayting.
2. Natural sonlar aksiomatik nazariyasi aksiomalarini ayting.
3. Induksiya aksiomasini tushuntiring.
4. Matematik induksiya metodining qanday turlarini bilasiz?
5. Matematik induksiya metodi bilan induksiya aksiomasining farqini tushuntiring.
6. Elementar matematikadan matematik induksiya metodi bilan isbotlanadigan tasdiqlarga misollar keltiring.

M a s h q l a r

1. Agar M ixtiyoriy to'plam bo'lib, (M faqat natural sonlardan iborat bo'lmasligi ham mumkin) quyidagi shartlar bajarilsin:

$$1 \in M;$$

$$\forall a \in N \wedge a \in M \Rightarrow a + 1 \in M.$$

U holda natural sonlar to'plami M to'plamning qism to'plami bo'lishini isbotlang.

2. Isbotlang:

$$2.1. (4^n + 15n - 1) : 9.$$

$$2.2. (x_1 + \dots + x_n)^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2(x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n).$$

$$2.3. 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$2.4. (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \dots (1 - \frac{1}{(n-1)^2}) = \frac{n+2}{2n+2}.$$

$$2.5. \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{4}{4n+1}.$$

$$2.6. 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

$$2.7. (6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n) : 11.$$

$$2.8. \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1).$$

$$2.9. \quad \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

$$2.10. \quad \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

$$2.11. \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad (n > 1).$$

$$2.12. \quad \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \dots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}} \quad (|x| \neq 1).$$

$$2.13. \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n-2} > 1.$$

$$2.14. \quad 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2.15. \quad \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

$$2.16. \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

IV.2-§. Natural sonlar to'plamida qo'shish amali va uning xossalari

IV.2.1-teorema. (qo'shish amalini aniqlash). $\forall a, b \in N$ uchun Shunday

Yagona $c \in N$ mavjud bo'lib, $a + b = c$ bo'ladi.

Isbot. Matematik induksiya aksiomasidan foydalanib isbotlaymiz.

Isbot tushunarli bo'lishi uchun, avval, isbotni $a = 1$ bo'lgan hol uchun ko'rib chiqamiz. 1 va b natural sonlar uchun Yagona c natural son mavjud bo'lib, $1 + b = c$ tenglik o'rinli bo'ladigan barcha b lar to'plamini M_1 orqali belgilab olamiz. U holda $1 \in M_1$. Haqiqatdan ham, 2^o-aksiomaga asosan $1' = 1 + 1$.

$b \in M_1$ bo'lsa, $b + 1 \in M_1$ bo'lishini isbotlaymiz. 4^o-aksiomaga asosan $1 + (b + 1) = (1 + b) + 1$, u holda 2^o-aksiomaga asosan bevosita $(1 + b)$ dan keyin keluvchi Yagona element mavjud. $(1 + b) + 1 = (1 + b)'$. Demak, $b + 1 \in M_1$. U holda induksiya aksiomaga asosan. $M_1 = N$, ya'ni 1 va ixtiyoriy b natural sonlar uchun

ularning yig'indisi bo'lgan Yagona $1+b$ natural son mavjud.

Isbotni ixtiyoriy a natural son uchun takrorlaymiz. M_a orqali a va b natural sonlar uchun ularning yig'indisi bo'lgan Yagona $a+b$ natural son mavjud bo'ladigan barcha b natural sonlar to'plamini belgilaylik, ya'ni, $M_a = \{b | \exists! c \in N \ a + b = c\}$. U holda,

1) N_2 aksiomaga $\exists! a' \in N \ a + 1 = a'$. Demak, $1 \in M_a$.

2) $b \in M_a$ bo'lsin $b + 1 = b' \in M_a$ bo'lishini ko'rsatamiz.

$b \in M_a$ bo'lsa $\exists! c \in N \ a + b = c$. Bunda $a + (b + 1) = (a + b) + 1 = c + 1 = c'$.

Induksiya faraziga ko'ra Yagona c mavjud. 2^o-aksiomaga asosan esa Yagona c' mavjud. Demak, $c + 1 \in M_a$. U holda, induksiya aksiomasiga asosan $M_a = N$.

Shunday qilib $\forall a, b \in N$ uchun $\exists! c \in N \ a + b = c$.

Induksiya aksiomasidan matematik induksiya metodi deb ataladigan qo'yidagi tasdiq bevosita kelib chiqadi:

IV.2.2-teorema. x – natural songa bog'liq bo'lgan $P(x)$ predikat berilgan bo'lsin. Agar $P(1)$ - rost bo'lib, ixtiyoriy $k \in N$ uchun $P(k)$ rostligidan $P(k+1)$ rostligi kelib chiqadi. YA'ni, $\forall k \in N$ uchun $P(k) = 1 \rightarrow P(k+1) = 1$ bo'lsa, u holda $\forall n \in N$ uchun $P(k)$ rost mulohazadir.

Shunday qilib, $P(x)$ predikatning har qanday $x \in N$ uchun rostligini isbot qilish uchun:

1) $P(1)$ rost bo'lishi isbot qilinadi. Bu qadamni biz *induksiya bazisi* deb ataymiz.

2) k natural son uchun $P(k)$ rost deb faraz qilinadi. Bu qadam *induksiya farazi* deb ataladi.

3) $P(k)$ rost bo'lishidan $P(k+1)$ rost bo'lishi isbot qilinadi. Bu qadam *induksiya isboti* deyiladi.

IV.2.3-teorema. Natural sonlar to'plamida qo'shish amali assosiativ amaldir, ya'ni, $\forall a, b, c \in N \ (a + b) + c = a + (b + c)$.

Isbotni matematik induksiya metodi bilan bajaramiz.

1. Induksiya bazisi. Agar $c=1$ bo'lsa, $(a+b)+1=a+(b+1)$ tenglik to'g'riligi 4^o-aksioma tasdig'idan iborat.

2. Induksiya farazi. c natural son uchun $(a+b)+c=a+(b+c)$ tenglik to'g'ri deb faraz qilaylik.

3. Isbot. 4^o-aksiomaga asosan $(a+b)+(c+1)=\langle(a+b)+c\rangle+1$. Induksiya faraziga asosan $\langle(a+b)+c\rangle+1=\langle a+(b+c)\rangle+1$, ya'ni, 4^o-aksiomani hisobga olsak $\langle a+(b+c)\rangle+1=a+\langle(b+c)+1\rangle=a+(b+(c+1))$ tenglikka ega bo'lamiz, u holda $(a+b)+(c+1)=a+(b+(c+1))$.

Shunday qilib, $\forall c \in N$ va fiksirlangan a, b natural sonlar uchun $(a+b)+c=a+(b+c)$.

a, b natural sonlar o'rniga boshqa natural sonlar qo'yib, isbotni so'zma-so'z takrorlash mumkin. Demak, $\forall a, b, c \in N$ uchun $(a+b)+c=(a+b)+c$.

IV.2.4-teorema. $\forall a \in N$ uchun $a+1=1+a$.

Isbot. 1. Induksiya bazisi. $a=1$ bo'lsa, $1+1=1+1$.

2. Induksiya farazi. $a+1=1+a$ bo'lsin.

3. Induksiya faraziga va assosiativlik qonuniga asosan

$$(a+1)+1=(1+a)+1=1+(a+1).$$

IV.2.5-teorema. Ixtiyoriy a, b natural sonlar uchun $a+b=b+a$, ya'ni, natural sonlar to'plamida qo'shish amali amali kommutativ amaldir.

IV.2.6-teorema. $\forall a, b, c \in N$ uchun $a+c=b+c$ tenglikda $a=b$ kelib chiqadi.

Ushbu teoremlarning isboti o'quvchilarga havola qilinadi.

Takrorlash uchun savollar

1. Binar algebraik amal ta'rifini ayting.
2. Kommutativ binar algebraik amal deb nimaga aytiladi?
3. Assosiativ binar algebraik amal ta'rifini ayting.
4. Nol o'rinli algebraik amalni tushuntiring.

M a s h q l a r

1. Natural sonlar to'plamida ixtiyoriy natural son uchun ularning yig'indisi yana Yagona natural sondan iborat bo'lishini isbotlang.
2. Har qanday a, b natural sonlar uchun $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$ ekanligini asoslang.
3. Natural sonlar to'plamida qo'shish amali assosiativ amali ekanligini isbotlang
4. Ixtiyoriy a natural son uchun $a + 1 = 1 + a$ ekanligini isbotlang.
- 4.1. Natural sonlar to'plamida qo'shish amali kommutativligini isbotlang.
- 4.2. $\forall a, b \in N$ uchun $a + 2 = b + 2$ ekanligini isbotlang.
- 4.3. $\forall a, b \in N$ uchun $a + b' = b' + b \Rightarrow a = b$ ekanligini isbotlang.
- 4.4. $\forall a, b, c \in N$ uchun $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ ekanligini isbotlang.

IV.3-§. Natural sonlarni ko'paytirish va uning hossalari

IV.3.1-teorema. *Har qanday a, b natural sonlar uchun Shunday Yagona c natural son mavjud bo'lib, $a \cdot b = c$ tenglik o'rinli bo'ladi.*

Isbot. Matematik induksiya metodi orqali isbot qilamiz.

1. Induksiya bazisi. $b = 1$ bo'lsin, u holda 5^o-aksiomaga asosan $a \cdot 1 = a$.
2. Induksiya farazi. b natural son uchun Shunday Yagona p natural son mavjud bo'lib, $a \cdot b = p$ bo'lsin.
3. Isbot. 6^o-aksiomaga asosan $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$, induksiya faraziga asosan Shunday Yagona p natural son mavjud bo'lib, $a \cdot b + a = p + a$. Ikkita natural son uchun ularning yig'indisi bo'lgan Yagona natural son mavjud. Isbotni yakunlash uchun ixtiyoriy ikkita natural son uchun ularning yig'indisi bo'lgan Yagona natural son mavjudligini eslash etarli.

IV.3.2-teorema. $\forall a, b, c \in N$ uchun $(a + b) \cdot c = ac + bc$, ya'ni, natural sonlarni ko'paytirish amali natural sonlarni qo'shish amaliga nisbatan chap

tomondan distributiv.

Isbot. 1. Induksiya bazisi. $c=1$ bo'lsin, u holda 5^o-aksiomaga asosan $\forall a, b \in N$ uchun $(a+b) \cdot 1 = a+b = a \cdot 1 + b \cdot 1$.

2. Induksiya farazi $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ bo'lsin.

3. *Isbot.* $(a+b) \cdot (c+1) = a(c+1) + b(c+1)$ tenglik o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

Haqiqatdan ham, 6^o-aksiomaga asosan $(a+b) \cdot (c+1) = (a+b) \cdot c + (a+b)$, lekin induksiya faraziga ko'ra $(a+b) \cdot c + (a+b) = (ac+bc) + (a+b)$. Qo'shishning xossalriga asosan $(ac+bc) + (a+b) = (ac+a) + (bc+b)$. Oxrigi ifodaga 6^o-aksiomani qo'llaymiz, $(ac+a) + (bc+b) = a(c+1) + b(c+1)$. Shunday qilib, $(a+b) \cdot (c+1) = a(c+1) + b(c+1)$. Demak, $\forall a, b, c \in N$ uchun $(a+b) \cdot c = ac + bc$.

IV.3.3-teorema. $\forall a \in N$ uchun $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Isbot. 1. Induksiya bazisi. $a=1$ bo'lsin, u holda $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$.

2. Induksiya farazi $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ bo'lsin deb faraz qilamiz.

3. *Isbot.* $(a+1) \cdot 1 = 1 \cdot (a+1) = a+1$ bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, 5^o-aksiomaga asosan $(a+1) \cdot 1 = a+1 = a \cdot 1 + 1$. Induksiya faraziga va 6^o-aksiomaga asosan $a \cdot 1 + 1 = 1 \cdot a + 1 = 1 \cdot (a+1)$. Demak, $(a+1) \cdot 1 = 1 \cdot (a+1) = a+1$. Shunday qilib, $\forall a \in N$ uchun $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

IV.3.4-teorema. $\forall a, b \in N$ uchun $a \cdot b = b \cdot a$ ya'ni, natural sonlarni ko'paytirish kommutativ.

Isbot. 1. $b=1$ bo'lsin, u holda Yuqorida isbot qilganimizga ko'ra $a \cdot 1 = 1 \cdot a$.

2. b natural son uchun $a \cdot b = b \cdot a$ bo'lsin.

3. $a(b+1) = (b+1) \cdot a$ bo'lishini isbot qilamiz. 6^o-aksioma, Yuqorida isbot qilingan teorema va farazga ko'ra $a(b+1) = ab + a = ba + a = ba + 1a = (b+1)a$. Demak, $a(b+1) = (b+1)a$.

IV.3.5-teorema. $\forall a, b, c \in N$ uchun $c(a+b) = ca + cb$.

Isbot. Yuqorida isbot qilingan teoremalarga asosan

$$c(a+b) = (a+b)c = ac+bc = ca+cb$$

IV.3.6-teorema. $\forall a, b, c \in N$ uchun $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Isbot. 1. $(a \cdot b) \cdot 1 = ab = a(b \cdot 1)$

2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ bo'lsin.

3. $(a \cdot b)(c+1) = abc + ab = a(bc + b) = a(b(c+1))$.

Shunday qilib, natural sonlar to'plami qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbat kommutativ yarimhalqa bo'lishi isbot qilindi. Bundan so'ng $(N+, \cdot)$ – algebrani *natural sonlar yarimhalqasi* deb ataymiz.

Endi quyidagi belgilashlarni qabul qilishimiz mumkin:
 $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ va h.k. $L = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \dots \{\emptyset\} \dots\}\}\}$ bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $n \in N$ uchun $n+1$ sifati $\{\emptyset \cdot n\}$ to'plamni qabul qilsak, hosil bo'lgan to'plam uchun Peano aksiomalarini bajarilishini tekshirib chiqish qiyin emas.

Agar hosil bo'lgan belgilashlarga ko'ra $1+1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2$. Xuddi Shunday, $2+1 = \{\emptyset 2\} = \{\emptyset \{\emptyset \{\emptyset\}\}\} = 3$, Shunga o'xshash, $3+1 = 4$ va h.k. bo'lishini isbot qilish qiyin emas.

Endi Yuqoridagilarga asoslanib $2 \cdot 2 = 4$ bo'lishini ko'rsatamiz:

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot (1+1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 2 + (1+1) = (2+1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

SHu usulda $2 \cdot 3 = 6$, ..., $9 \cdot 9 = 81$ tengliklarni ham isbot qilish mumkin.

Takrorlash uchun savollar

1. Natural sonlar to'plamida ko'paytirish amali qanday aniqlanadi?
2. Ko'paytirish amalining qanday xossalari bilasiz?
3. Ko'paytirish amalining qo'shish amaliga nisbatan o'ng va chap distributivligi qonunlarini tushuntiring.

M a s h q l a r

1. Quyidagilarni isbotlang:

$$1) 2 \cdot 5 = 10; \quad 2) 9 \cdot 7 = 63; \quad 3) 12 \cdot 3 = 36.$$

IV.4-§. Natural sonlar to'plamida tartib munosabati

IV.4.1-ta'rif. Agar a va b natural sonlar uchun Shunday k natural son topilib $a = b + k$ tenglik o'rinli bo'lsa a natural son b natural sondan katta deymiz va $a > b$ deb belgilaymiz.

$1' = 1 + 1$ bo'lgani uchun $1' > 1$ deb yozishimiz mumkin. Ya'ni $<$ binar munosabat bo'sh bo'lmagan to'plam.

IV.4.2-teorema. Natural sonlar to'plamida aniqlangan " $<$ " binar munosabat tartib munosabatdir, ya'ni " $<$ " – antisimmetrik va tranzitiv munosabat.

Isbot. Agar $a > b$ bo'lsa, u holda $b > a$ bo'la olmasligini ko'rsatamiz. $a > b$ bo'lsa, ta'rifga ko'ra $\exists k \in N, a = b + k(1)$.

Faraz qilaylik, $b > a$ bo'lsin. U holda Shunday $l \in N$ topilib, $b = a + l(2)$ bo'ladi. (1) va (2) dan $a = a + (l + k)$ hosil bo'ladi, buning esa bo'lishi mumkin emas.

Haqiqatdan ham, 1. $a = 1$ bo'lsa, $1 = 1 + (k + b)$. Bu esa 2^0 -aksiomaga zid.

2. $a \neq a + (k + l)$ bo'lsin.

3. $a + 1 \neq (a + 1) + (k + l)$ bo'lishini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz. $a + 1 = a + 1 + (k + l)$ bo'lsin, u holda $a + 1 = (a + (k + l)) + 1$. Endi 3^0 -aksiomani qo'llasak, $a = a + (k + l)$ hosil bo'ladi, bu esa induksiya faraziga zid. Shunday qilib " $<$ " munosabat antisimmetrik munosabat bo'lishini isbotladik. Endi " $<$ " munosabat tranzitiv munosabat bo'lishini isbot qilamiz. Faraz qilaylik, $(a < b) \wedge (b < c)$ bo'lsin, u holda Shunday k va l natural sonlar mavjud bo'lib $a = b + k, b = c + l$ tengliklar o'rinli bo'ladi. U holda, $a = b + k = (c + l) + k = c + (l + k)$. Ya'ni $a = c + (l + k)$. Demak, $a > c$.

IV.4.3-teorema. Har qanday a, b natural sonlar uchun quyidagi tasdiqlardan faqat birigina o'rinli

1. $a = b$;
2. $a > b$;
3. $b > a$.

Bu teoremani isbot qilish uchun oldin quyidagi lemmani isbot qilib olamiz.

IV.4.4-lemma. $\forall a \in N$ natural son uchun $a \neq 1$ bo'lsa, u holda $\exists k \in N$ bo'lib $a = 1 + k$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Agar $a = 1$ bo'lsa, teorema sharti bajarilmaydi. Demak, xulosa ham bajaralishi mumkin emas.

Faraz qilaylik, a uchun teorema to'g'ri bo'lsin. U holda $a + 1 = (1 + k) + 1 = a + 1 = 1 + (k + 1)$. Ya'ni teorema to'g'ri.

Teorema isboti 1. $b = 1$ bo'lsin. U holda $a = 1$ bo'lsa, $a = b$. Agar $a \neq 1$ bo'lsa, lemmaga asosan $a = 1 + k$. U holda $a > 1$.

2. b uchun teorema to'g'ri bo'lsin, ya'ni, $b = a$, $b > a$, yoki $a > b$ shartlarning faqat biri bajarilsin.

3. $b + 1$ uchun ham teorema o'rinli bo'lishini isbotlaymiz.

Agar $b = a$ bo'lsa, $b + 1 = a + 1$ bo'lib $b + 1 > a$. Agar $b > a$ bo'lsa, Shunday k topilib $b = a + k$ yoki $b + 1 = a(k + 1)$ ekanligidan $b + 1 > a$ bo'ladi. Agar $a > b$ bo'lsa, Shunday l topilib $a = b + l$. Bu holda, agar $l = 1$ bo'lsa $b + 1 = k$, agar $l \neq 1$ bo'lsa, Shunday k topilib $l = 1 + k$ bo'ladi. Bundan $a = b + (1 + k) = (b + 1) + k$, ya'ni, $a > b + 1$ bo'lishi ravshan. Demak $b + 1$ uchun ham teorema to'g'ri ekan.

Bundan keyin $a > b$ bo'lsa, b soni a sonidan kichik deb tushunishimiz va $b < a$ yozuvni ishlatishimiz mumkin.

$(a < b) \vee (a = b)$ o'rniga $a \leq b$; $(a > b) \vee (a = b)$ o'rniga $a \geq b$ yozuv ishlatiladi. YA'ni ta'rifga ko'ra

$$a \leq b \equiv (a < b) \vee (a = b);$$

$$a \geq b \equiv (a > b) \vee (a = b).$$

Shuningdek,

$$a < b \wedge b < c \equiv a < b < c;$$

$$a > b \wedge b > c \equiv a > b > c.$$

IV.4.5-teorema. Natural sonlar to'plamida " $<$ " munosabati yana quyidagi xossalarga ega:

$$1^\circ. \forall a, b \in N \text{ uchun } a \neq b \Rightarrow a > b \vee b > a.$$

2°. $\forall a \in N$ uchun $\neg(a > a)$.

3°. $\forall a, b \in N$ uchun $a > b \Rightarrow \neg(b > a)$.

4°. $\forall a, b, c \in N$ uchun $a > b \wedge b > a$

5°. $\forall a \in N$ uchun $a + a > a$, ya'ni har qanday natural son musbat.

6°. $\forall a, b, c \in N$ uchun $a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$, ya'ni $>$ munosabat ko'paytirish amaliga nisbatan monoton.

Takrorlash uchun savollar

1. Tartib munosabat ta'rifini ayting.
2. Qat'iy tartib munosabati deb nimaga aytiladi?
3. Noqat'iy tartib munosabati deb nimaga aytiladi?
4. CHiziqli tartib munosabati deb nimaga aytiladi?
5. Qanday to'plam to'liq tartiblangan to'plam deyiladi?
6. Natural sonlar to'plamiga tartib munosabati qanday kiritiladi?
7. Binar munosabatga nisbatan monoton binar amal deb qanday binar amalga aytiladi?

M a s h q l a r

1. Har qanday $a, b, c \in N$ uchun $a + c > b + c \Leftrightarrow a > b$ ekanligini isbotlang.
2. Har qanday $a, b, c \in N$ uchun $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b$ ekanligini isbotlang.
3. Har qanday $a, b, c \in N$ uchun $a \cdot c > b \cdot c \Leftrightarrow a > b$ ekanligini isbotlang.
4. Har qanday $a \in N$ uchun $1 \leq a$ ekanligini isbotlang.
5. Har qanday $a, b \in N$ uchun $a \leq ab$ ekanligini isbotlang.
6. Har qanday $a, b \in N$ va Shunday $c \in N$ uchun $b \cdot c > a$ ekanligini isbotlang.
7. Har qanday $a, b \in N$ uchun $a + 1 \geq b \wedge b > a \Rightarrow b = a + 1$ ekanligini isbotlang.
8. Har qanday $a, b \in N$ uchun $a + 1 > b \wedge b \geq a \Rightarrow b = a$ ekanligini isbotlang.
9. Har qanday $a, b \in N$ uchun $2a \neq 2b + 1$ ekanligini isbotlang.
10. Har qanday $a, b \in N$ uchun $a^2 \neq 2b^2$ ekanligini isbotlang

IV.5-§. Natural sonlar aksiomatik nazariyasi xossalari

Aksiomalar sistemasining erkinligi.

Aksiomatik nazariyaning (A) aksiomasi qolgan aksiomalardan keltirib chiqarmasligini isbot qilinsa (A) qolganlaridan *erkli* deb ataladi. Agar aksiomatik nazariyaning har bir aksiomasi qolganlaridan erkli bo'lsa bunday *aksiomatik nazariya erkli* deyiladi.

Aksiomatik nazariyaning biror (A) aksiomasini qolganlaridan kelib chiqmasligini keltirish uchun (A)- aksioma bajarilmay qolgan barcha aksiomalar bajariladigan *interpretasiya* qurish etarli.

Induksiya aksiomasining boshqa aksiomalardan kelib chiqmasligini ko'rsataylik. $Z_2 = \overline{0}, \overline{1}$ - 2 modul bo'yicha chegirmalar halqasi berilgan bo'lsin. $N' = N \times Z_2$ to'plamda

$$\begin{aligned} \langle \overline{a}, \overline{x} \rangle \oplus \langle \overline{b}, \overline{y} \rangle &= \langle \overline{a+b}, \overline{x+y} \rangle \\ \langle \overline{a}, \overline{x} \rangle \otimes \langle \overline{b}, \overline{y} \rangle &= \langle \overline{a \cdot b}, \overline{x \cdot y} \rangle \end{aligned}$$

tengliklar orqali N' to'plamda $\oplus$ - qo'shish, $\otimes$ - ko'paytirish amallari aniqlangan bo'lsin. Hosil bo'lgan $\langle N', \otimes, \oplus \rangle$ -algebra natural sonlar aksiomatik nazariyasi uchun interpretasiya bo'lib, bu interpretasiyada induksiya aksiomasi bajarilmaydi, qolgan aksiomalar esa bajariladi.

Haqiqatdan ham,

$$1. (1,1) \text{ element birlik element bo'lib, } \langle \overline{a}, \overline{x} \rangle + \langle \overline{b}, \overline{y} \rangle = \langle \overline{a+b}, \overline{x+y} \rangle \quad (1,1) \quad (1,1)$$

bo'lsa, u holda $a+b=1$ bunday bo'lishi mumkin emas.

$$2. \langle \overline{a}, \overline{x} \rangle + \langle \overline{1}, \overline{1} \rangle = \langle \overline{a+1}, \overline{x+1} \rangle \text{ Yagona element bo'lishi ravshan.}$$

$$3. \langle \overline{a}, \overline{x} \rangle + \langle \overline{1}, \overline{1} \rangle = \langle \overline{b}, \overline{y} \rangle + \langle \overline{1}, \overline{1} \rangle \text{ berilgan bo'lsin, u holda } \langle \overline{a+1}, \overline{x+1} \rangle = \langle \overline{b+1}, \overline{y+1} \rangle \text{ bo'lib, } a+1=b+1, \overline{x+1}=\overline{y+1} \text{ bo'lganda } a=b, \overline{x}=\overline{y} \text{ kelib chiqadi. YA'ni } \langle \overline{a}, \overline{x} \rangle = \langle \overline{b}, \overline{y} \rangle \text{ bo'ladi.}$$

$$4. \langle \overline{a}, \overline{x} \rangle + \langle \overline{b}, \overline{y} \rangle + \langle \overline{1}, \overline{1} \rangle = \langle \overline{a}, \overline{x} \rangle + \langle \overline{b}, \overline{y} \rangle + \langle \overline{1}, \overline{1} \rangle.$$

$$5. \langle \overline{a}, \overline{x} \rangle \cdot \langle \overline{1}, \overline{1} \rangle = \langle \overline{a \cdot 1}, \overline{x \cdot 1} \rangle = \langle \overline{a}, \overline{x} \rangle \text{ bo'lishi ravshan.}$$

6. $\langle x, \bar{x} \rangle + \langle y, \bar{y} \rangle + 1 = \langle x, \bar{x} \rangle + \langle y, \bar{y} \rangle + \langle 1, \bar{1} \rangle$ bo'lishi ravshan.

7. Induksiya aksiomasi bajarilmasligi ravshan.

Haqiqatdan ham, $M = \langle a, 0 \rangle \mid a \in N \cup \langle a-1, 1 \rangle \mid a \in N$ to'plam uchun $\langle 1, 1 \rangle \in M$, $\langle 1, 1 \rangle \in M$ bo'lishidan $\langle x, \bar{x} \rangle + \langle 1, 1 \rangle = \langle x+1, \bar{x}+1 \rangle \in M$. Lekin, $\langle 1, 0 \rangle \in M$.

Natural sonlar aksiomatik nazariyasining qat'iyligi.

IV.5.1-ta'rif. Agar aksiomatik nazariyalariniig ixtiyoriy 2ta modeli izomorf bo'lsa, bunday aksiomatik nazariya qat'iy aksiomatik nazariya deyiladi.

IV.5.2-teorema. Natural sonlar aksiomatik nazariyasi qat'iy aksiomatik nazariyadir.

Isbot. N_1 va N_2 natural sonlar aksiomatik nazariyasi uchun 2ta interpretasiya bo'lsin, u holda $\varphi \langle 1_1 \rangle = 1_2$, $\varphi \langle 1_1 \rangle = n_2$ bo'lsa, $\varphi \langle 1_1 + 1 \rangle = n_2 + 1$ orqali $\varphi \langle N_1 \rangle \rightarrow N$ akslantirish teorema shartlarini qanoatlantiruvchi akslantirishdir.

φ -biektiv akslantirish bo'lib, $\forall m, n \in N$ uchun $\varphi \langle m + n \rangle = \varphi \langle m \rangle + \varphi \langle n \rangle$, $\varphi \langle m \cdot n \rangle = \varphi \langle m \rangle \cdot \varphi \langle n \rangle$ shartlar bajariladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Aksiomatik nazariya qachon erkin deyiladi?
2. Natural sonlar aksiomatik nazariyasining erkinligini tushuntiring.
3. Natural sonlar aksiomatik nazariyasining qat'iyligini tushuntiring

IV.6-§. Butun sonlar halqasi

IV.6.1-ta'rif. Natural sonlar yarimhalqasining minimal kengaytmasi bo'lgan halqa butun sonlar halqasi deyiladi.

Bizga natural sonlar yarimhalqasi berilgan bo'lsin. Butun sonlar halqasini qurish sxemasini ko'rib chiqamiz.

$N \times N$ –dekart ko'paytmada $\forall (a,b), (c,d) \in N \times N$ uchun $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow (a+b=b+c)$ binar munosabat ekvivalentlik munosabatidir. Haqiqatdan ham, $\forall (a,b) \in N \times N$ uchun $(a,b) \sim (a,b)$ Chunki, $a+b=b+a$ bo'lib, $\sim$ munosabat refleksiv munosabatdir. $\forall (a,b), (c,d) \in N \times N$ juftliklar uchun $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow (c,d) \Rightarrow (a,b)$. Haqiqatdan ham, $a+d=b+c \Rightarrow c+b=d+a$. Demak, $(c,d) \sim (a,b)$, nihoyat $(a,b) \sim (c,d)$ va $(c,d) \sim (e,f)$ bo'lsa, $a+d=b+c$ va $c+f=d+c$ bo'lishidan $a+d+c+f=b+c+d+e$ yoki $a+f=b+e$ kelib chiqadi, bundan $(a,b) \sim (e,f)$. Demak, $\sim$ tranzitiv munosabatdir.

Shunday qilib, $N \times N / \sim$ faktor to'plam haqida gapirish mumkin. Bu to'plamni Z_1 orqali belgilab olamiz. N da aniqlangan "+" amalidan foydalangan holda Z_1 to'plamda $\oplus$ amalini quyidagi tenglik orqali aniqlash mumkin:

$\forall (\overline{a,b}), (\overline{c,d}) \in Z_1$ uchun $(\overline{a,b}) \oplus (\overline{c,d}) = (\overline{a+c, b+d})$. Bu tenglik $(\overline{a,b})$ va $(\overline{c,d})$ sinflardan olingan vakillarga bog'liq emas. Haqiqatdan, $(a,y) \in (\overline{a,b})$ $(z,t) \in (\overline{c,d})$ bo'lsin, u holda $x+b=a+y$ va $z+d=c+t$. Bundan, $(x+z) \oplus (b+d) = (b+d) \oplus (y+t)$ kelib chiqadi. Demak, $(\overline{x+z, y+t}) = (\overline{a+c, b+d})$.

Shunga o'xshash, $\forall (\overline{a,b}), (\overline{c,d}) \in Z_1$ uchun

$$(a,b) \otimes (c,d) = (\overline{ac+bd, ad+bc}) \quad (1)$$

$$\forall (\overline{a,b}) \in Z_1 \text{ uchun } \ominus (\overline{a,b}) = (\overline{b,a}) \quad (2)$$

$$\bar{0} = (\overline{1,1}), \quad \bar{1} = (\overline{2,1}) \quad (3)$$

tengliklar mos ravishda sinflarni ko'paytirish, sinfga qarama-qarshi sinfni topish, nol element, birlik elementni aniqlaydi.

$(Z_1; \oplus, \otimes, \ominus, \bar{0}, \bar{1})$ – algebra natural sonlar yarimhalqasiga izomorf bo'lgan yarim halqaning minimal kengaytmasi bo'lgan halqadir. Bu algebra halqa bo'lishi bevosita tekshiriladi.

$N_1 = (N \times \{1\}) / \sim \setminus \{0\}$ to'plam esa natural sonlar yarimhalqasiga izomorf bo'lgan yarimhalqadir. Demak, $N \cong N_1$ bo'lib, Z_1 halqa N_1 ning minimal kengaytmasi bo'lgan halqa, u xolda algebraik kengaytma haqidagi (II g) teoremdan natural sonlar yarimhalqasining minimal kengaytmasi bo'lgan halqa mavjudligi kelib chiqadi.

Takrorlash uchun savollar

1. Yarimhalqaga ta'rif bering.
2. Yarimhalqa kengaytmasi nima?
3. Halqaga ta'rif bering.
4. Faktor-to'plam ta'rifini eslang.
5. Butun sonlar halqasi deb nimaga aytiladi?
6. Natural sonlar yarimhalqasi minimal kengaytmasining mavjudligini isbotlang

Masalalar

1. Butun sonlar to'plami halqa tashkil etishini isbotlang.
2. $m \in N$ bo'lsin. m ga karrali butun sonlar to'plami Z_m halqa tashkil etishini isbotlang.
3. Har qanday $m \in Z, m > 0$ son uchun chegirmalar sinflari to'plami $Z /_{(m)}$ halqa tashkil etishini isbotlang.
4. K halqa ustida olingan ko'phadlar to'plami $K[x]$ uchun quyidagilarni isbotlang:
 - 1) $K[x]$ – halqa;
 - 2) K birlik elementga ega bo'lsa, $K[x]$ ham birlik elementga ega;
 - 3) K kommutativ halqa bo'lsa, $K[x]$ ham kommutativ halqa bo'ladi;
 - 4) K butunlik sohasi bo'lsa, $K[x]$ ham butunlik sohasi bo'ladi.

IV.7-§. Butun sonlar sistemasining aksiomatik nazariyasi

Boshlang'ich tushunchalar.

1. Z – butun sonlar to'plami.
2. “ $\oplus$ ” “ $\odot$ ” - Z dagi ko'paytirish va qo'shish amallari.
3. $\bar{0}$ – Z ning natural elementi.
4. N - natural sonlar to'plami.
5. $+$, $\cdot$ – N dagi qo'shish va ko'paytirish amallari.

IV.7.1. $(Z, \oplus, \odot, \bar{0}, N, +, \cdot)$ algebraik sistema uchun quyidagi aksiomalar o'rinli bo'lsa, uni butun sonlar sistemasi deyiladi:

1. $\forall a, b \in Z$ uchun $\exists! c \in Z$ $a \oplus b = c$.
2. $\forall a, b, c \in Z$ uchun $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ - qo'shishning assosiativligi xossasi.
3. $\forall a, b \in Z$ uchun $a \oplus b = b \oplus a$ – qo'shishning kommutativligi aksiomasi.
4. $\forall z \in Z$ uchun $z \oplus \bar{0} = z$ nol elementning xossasini ifodalovchi aksioma.
5. $\forall a \in Z$ uchun $\exists a' \in Z$ $a + a' = 0$ qarama-qarshi element mavjudligini kafolatlaydigan aksioma.
6. $\forall a, b \in Z$ uchun $\exists! p \in Z$ $a \cdot b = p$ ko'paytirish amalining bajarilishi aksiomasi.
7. $\forall a, b, c \in Z$ uchun $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – ko'paytirish amalining assosiativligi.
8. $\forall a, b, c \in Z$ uchun $(a + b) \cdot c = ac + bc$ $\wedge c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$.
9. $(N, +, \cdot)$ – natural sonlar yarimhalqasi.
10. $N \subset Z$.
11. $\forall a, b \in N$ uchun $a \oplus b = a + b$.
12. $\forall a, b \in N$ uchun $a \odot b = a \cdot b$.
13. Agar biror M to'plam uchun
 - 1). $M \subset Z$.

2). $\forall a, b \in M$ va b' element $b + b' = 0$ shartni qanoatlantirsin, u holda $a + b' \in M$.

3). $N \subset M$

shartlar bajarilsa $M = \mathbb{Z}$ bo'ladi. Bu aksioma minimallik aksiomasi deb ataladi.

Keyinchalik, tushunmovchilik yuzaga kelmaydigan hollarda yozuvni ixchamlashtirish uchun $\oplus$ o'rniga "+", $\ominus$ o'rniga esa "·" belgilar ishlatiladi. $(\mathbb{Z}; +, 0)$ butun sonlarning additiv grappasi $(\mathbb{Z}; \cdot)$ algebra esa butun sonlarning multiplikativ yarimgruppasi deb ataladi.

Butun sonlar aksiomatik nazariyasining zidsizligi.

Yuqorida ko'rilgan $(\mathbb{Z}_1; \oplus, \ominus, \Theta, \bar{0}, \bar{1})$ algebra butun sonlar aksiomatik nazariyasidagi barcha 13 ta aksiomani qanoatlantiradi. Ya'ni, butun sonlar aksiomatik nazariyasi uchun model vazifasini bajaradi. Demak, butun sonlar aksiomatik nazariyasi zidsizdir.

Butun sonlar halqasining ba'zi xossalari

$(\mathbb{Z}; +, \cdot, 0, N)$ butun sonlar sistemasi bo'lsin.

5-aksimaga asosan $\forall a \in \mathbb{Z}$ uchun shunda a' mavjud bo'lib, $a + a' = 0$. Bundan keyin $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ uchun $a + b'$ ni $a - b$ ko'rinishda yozib olamiz va a va b natural sonlarning ayirmasi deb ataymiz.

IV.7.2-teorema. Har qanday butun son, ikkita natural son ayirmasiga teng.

Isbot. Morqali ikkita natural sonlar ayirmasi sifatida ifoda qilinadigan barcha butun sonlar to'plamini belgilaymiz. U holda, $\forall n \in N$ uchun $n = (n+1) - 1$ bo'lganidan $N \subset M$. Bundan tashqari $\forall a, b \in M$ bo'lsa, $\exists m, n, k, l \in N$ $a = m - n$, $b = k - l$ va $a - b = (m - n) + (k - l)^1 = (m - n) + (l - k) = (m + 1) - (n + k)$. Demak $a - b \in M$. U holda $M = \mathbb{Z}$.

IV.7.3-teorema. $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ – algebra birlik elementga ega bo'lgan kommutativ halqadir.

Isbot. Halqa bo'lishi Yuqoridagi aksiomalardan kelib chiqadi. $\forall a \in \mathbb{Z}$ uchun $\exists m, n \in \mathbb{N} \ a = m - n, \ a = m + n', \ a \cdot 1 = (m + n') \cdot 1 = m \cdot 1 + n' \cdot 1 = m + n' = a$.

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ uchun $\exists m, n, k, l \in \mathbb{Z} \ a = m - n, \ b = k - l$.
 $(m - n) \cdot (k - l) = (k - l)(m - n)$ tenglik bevosita tekshiriladi.

Butun sonlar aksiomatik nazariyasidagi aksiomalardan $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ uchun $n' = -n \in \mathbb{Z}, 0 \in \mathbb{Z}$ bo'lishi kelib chiqadi.

Agar $a \in \mathbb{Z}$ uchun $\exists m, n \in \mathbb{N}$ bo'lib $a = m - n = m + n'$,
 agar $m = n$ bo'lsa, $a = 0$;
 agar $m > n$ bo'lsa, a natural son;
 agar $n > m$ bo'lsa, $n + m'$ – natural son bo'lib, $a = (n + m')'$, ya'ni $n + m'$ – natural songa qarama-qarshi bo'lgan son.

Butun sonlar halqasida tartib munosabat.

Agar $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a - b \in \mathbb{N}$ bo'lsa $a > b$ deyimiz. $>$ munosabat qat'iy tartib munosabatidir. Bu munosabat antirefleksiv munosabatdir. $\forall a \in \mathbb{Z}, a - a = 0 \notin \mathbb{N}$.

Bu munosabat antisimmetrik munosabatdir. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ uchun $a > b$ ya'ni, $a - b \in \mathbb{N}$ bo'lsa $b - a = -(a - b) \notin \mathbb{N}$. $>$ munosabat tranzitiv munosabatdir.

Haqiqatdan ham, $a - b \in \mathbb{N}, b - c \in \mathbb{N}$ bo'lsa, $(a - b) + (b - c) \in \mathbb{N}$ ya'ni, $a - c \in \mathbb{N}$ bo'ladi.

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ agar $a \neq 1$ bo'lsa, $a > b$ yoki $b > a$. Haqiqatdan ham, $a - b$ yoki natural son yoki 0 yoki natural songa qarama-qarshi son. Shunday qilib, har qanday butun son yoki natural son yoki 0 yoki natural songa qarama-qarshi bo'lgan son ekan.

Butun sonlar aksiometrik nazariyasining qat'iyligi.

Ma'lumki, aksiometrik nazariyaning ixtiyoriy ikkita modeli izomorf bo'lsa, bunday aksiomatik nazariya qat'iy aksiomatik nazariya deyiladi.

IV.7.4-teorema. Butun sonlar aksiomatik nazariyasi qat'iy aksiomatik nazariyadir.

Isbot. $(Z_1, +, \cdot, 0_1, N_1); (Z_2, \oplus, \odot, 0_2, N_2)$ butun sonlar aksiomatik nazariyasining ixtiyoriy ikkita modeli bo'lsin. Natural sonlar aksiomatik nazariyasi qat'iy aksiomatik nazariya bo'lganligi uchun, N_1 va N_2 orasida izomorfizm o'rnatadigan akslantirish mavjud. Biz yozuvni ixchamlashtirish maqsadida N_1 dagi qo'shish, ko'paytirish amallarini $+, \cdot$ orqali, ya'ni, Z dagi amallar simvollari bilan; N_2 dagi qo'shish, ko'paytirish amallarini esa $\oplus, \odot$ orqali, ya'ni Z_1 dagi qo'shish va ko'paytirish belgilangan simvollar bilan belgilab olamiz. $\varphi: N_1 \rightarrow N_2$ izomorf akslantirish bo'lsin, demak-ki φ -biektiv va $\forall a_1, b_1 \in N_1$ uchun $\varphi(a_1 + b_1) = \varphi(a_1) \oplus \varphi(b_1)$; $\varphi(a_1 \cdot b_1) = \varphi(a_1) \odot \varphi(b_1)$.

$\forall z_1 \in Z_1$ uchun Shunday $m_1, n_1 \in N_1$ topilib $z_1 = m_1 - n_1$ bo'lishi Yuqorida isbotlangan edi. Shunga asoslanib $\forall z_1 \in Z_1$ uchun $\Phi(z_1) = \varphi(m_1) \ominus \varphi(n_1)$ tenglik orqali Z_1 ni Z_2 ga akslantiramiz.

Bu akslantirish bir qiymatli akslantirishdir. Haqiqatdan ham, agar $z_1 = m_1 - n_1 = k_1 - l_1$ bo'lsa $\varphi(m_1) \ominus \varphi(n_1) = \varphi(k_1) \ominus \varphi(l_1)$. Chunki $m_1 + l_1 = k_1 + n_1$ bo'lgani uchun $\varphi(m_1 + l_1) = \varphi(k_1 + n_1) \Rightarrow \varphi(m_1) \oplus \varphi(l_1) = \varphi(k_1) \oplus \varphi(n_1) \Rightarrow \varphi(m_1) \ominus \varphi(n_1) = \varphi(k_1) \ominus \varphi(l_1)$. Φ -biektiv akslantirishdir.

$\forall a_1, b_1 \in Z$, $a_1 \neq b_1$ uchun $\exists m_1, n_1, k_1, l_1 \in N$ $a_1 = m_1 - n_1$; $b_1 = k_1 - l_1$ bo'lsin. $b_1 \neq a_1$ bo'lgani uchun $m_1 + l_1 \neq k_1 + n_1$, demak $\varphi(m_1) \oplus \varphi(l_1) \neq \varphi(k_1) \oplus \varphi(n_1)$. U holda $\varphi(m_1) \ominus \varphi(n_1) \neq \varphi(k_1) \ominus \varphi(l_1)$. YA'ni $\Phi(a_1) \neq \Phi(b_1)$. Agar $\forall a_2 \in Z$ bo'lsa, $\exists m_2, n_2 \in N_2$ bo'lib, $a_2 = m_2 \ominus n_2$. U holda φ -biektiv bo'lgani uchun $\exists m_1, n_1 \in N_1$, $\varphi(m_1) = m_2$, $\varphi(n_1) = n_2$.

Demak, $\Phi(m_1 - n_1) = \varphi(m_1) \ominus \varphi(n_1) = m_2 \ominus n_2 = a_2$. YA'ni, Φ -sur'ektiv akslantirishdir.

Φ akslantirish $+$ va $\cdot$ amallarini saqlaydi. Φ araz qilaylik $\forall a_1, b_1 \in Z$ uchun $\exists m_1, n_1, k_1, l_1 \in N$ bo'lsa $a_1 = m_1 - n_1$, $b_1 = k_1 - l_1$ bo'lsin.

U holda $\Phi(a_1 + a_2) = \Phi((m_1 - n_1) + (k_1 - l_1)) = \Phi((m_1 + k_1) - (n_1 + l_1)) =$
 $= \varphi(m_1 + k_1) \ominus \varphi(n_1 + l_1) = \varphi(m_1) + \varphi(k_1) \ominus (\varphi(n_1) + \varphi(l_1)) = (\varphi(m_1) \ominus \varphi(k_1) \ominus$
 $\varphi(n_1) \ominus \varphi(l_1)) = (\varphi(m_1) \ominus \varphi(n_1)) + (\varphi(k_1) \ominus \varphi(l_1)) = \Phi(a_1) + \Phi(b_1)$. Shunday qilib,
 $\forall a_1, b_1 \in Z_1$ uchun $\Phi(a_1 + b_1) = \Phi(a_1) \oplus \Phi(b_1)$.

$\forall a_1, b_1 \in Z_1$ uchun $\Phi(a_1 \ominus b_1) = \Phi(a_1) \odot \Phi(b_1)$ tenglikni isbot qilishni o'quvchilarga mustaqil vazifa sifatida qoldiramiz.

Butun sonlar halqasining butunlik sohasi bo'lishi

IV.7.5-teorema: $\forall m, n \in N$ uchun quyidagi xossalar o'rinli:

$$1^\circ. m \cdot 0 = 0.$$

$$2^\circ. m(-n) = -mn.$$

$$3^\circ. (-m) \cdot n = -mn.$$

$$4^\circ. (-m) \cdot (-n) = mn.$$

Isbot: $1^\circ. m \cdot 0 = m(0 + 0) = m \cdot 0 + m \cdot 0$ bundan $m \cdot 0 = 0$ kelib chiqadi.

$$2^\circ. m \cdot 0 = m(n - n) = mn + m(-n) = 0.$$

Demak, $m(-n) = -mn$.

3° -, 4° - tasdiqlar Shunga o'xshash isbot qilindi.

IV.7.6-teorema: $\forall a, b \in Z$ uchun $(a \cdot b = 0) \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$.

Isbot: Teskarisini faraz qilamiz. $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ bo'lsin, u holda a va b lar ikkalasi ham natural sonlar yoki ikkalasi ham natural sonlarga qarama-qarshi sonlar yoki biri natural, ikkinchisi natural songa qarama-qarshi son bo'ladi. Bundan Yuqorida isbot qilingan teoremaga asosan $a \cdot b \neq 0$ kelib chiqadi. Bu teorema shartiga zid.

Takrorlash uchun savollar

1. Butun sonlar aksiomatik nazariyasining boshlang'ich tushunchalarini ayting.

2. Butun sonlar aksiomatik nazariyasining aksiomalarini sharhlang.
3. Har qanday butun son natural sonlar ayirmasi ko'rinishida ifodalanishini isbotlang.
4. Butun sonlar to'plamida tartib munosabatini aniqlang.
5. Butun sonlar aksiomatik nazariyasining qat'iyligini isbotlang.

Mashqlar

1. Butun sonlar halqasida $2x=1$ tenglama echimga ega emasligini isbotlang.
2. Butun sonlar halqasida $x^2 = 2y^2$ tenglama faqat $(0,0)$ echimga ega ekanligini isbotlang.
3. Butun sonlar multiplikativ yarimgruppasini qat'iy va chiziqli tartiblab bo'lmashligini isbotlang.
4. Quyidagilarni isbotlang:
 - 4.1. $(Z; +, \cdot, 0, 1)$ - butun sonlar halqasida « $>$ »- chiziqli tartib munosabati quyidagi shartlar orqali aniqlanadi:
 - 1) $\forall a, b \in Z$ uchun $a > b \Rightarrow a \neq b$;
 - 2) $\forall a, b, c \in Z$ uchun $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$;
 - 3) $\forall a, b \in Z$ uchun $a > b \Rightarrow a + 1 > b + 1$;
 - 4) $\forall a, b \in Z$ uchun $a > b \Rightarrow a - 1 > b - 1$;
 - 5) $1 > 0$.
 - 4.2. Yuqorida keltirilgan shartlarning hech biri qolganlari orqali ifodalanmaydi.

IV.8-§. Ratsional sonlar maydoni

IV.8.1-ta'rif. Butun sonlar halqasining minimal kengaytmasi bo'lgan maydon ratsional sonlar maydoni deyiladi.

Ratsional sonlar maydonini qurish sxemasini beramiz. $Z^* = Z \setminus \{0\}$ bo'lsin. $Z \times Z^*$ to'plamni R orqali belgilab olamiz. R to'plamda " $\sim$ " – ekvivalentlik

munosabatini quyidagicha aniqlaymiz:

$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow (ad = bc)$. Bu munosabat haqiqatdan ham ekvivalentlik munosabatidir:

1. $\forall (a,b) \in P$ uchun $((a,b) \sim (a,b) \Leftrightarrow (a \cdot b = b \cdot a))$
2. $\forall (a,b) \in P, (c,d) \in P$ uchun $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow (a \cdot d = bc) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (bc = ad) \Rightarrow ((c,d) \sim (a,b))$.
3. $\forall (a,b) \in P, (c,d) \in P, (m,n) \in P, (a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (m,n) \Rightarrow ad =$
 $= bc \wedge cn = dm \Rightarrow adcn = bcdm \Rightarrow an = bm \Rightarrow (a,b) \sim (m,n)$.

Demak, $\sim$ munosabat R to'plamda reflektiv, simmetrik, tranzitiv munosabat, ya'ni, $\sim$ -ekvivalentlik munosabati ekan.

$P/\sim$ faktor to'plamni Q_1 orqali belgilaymiz. $\forall (a,b) \in P$ uchun $\overline{ab}$ orqali $P/\sim$ faktor-to'plamdagi (a,b) element yaratgan ekvivalentlik sinfini belgilaymiz.

Q_1 da $\oplus, \odot$ amallari quyidagicha aniqlanadi:

$\forall (a,b), (c,d) \in Q_1$ uchun $\overline{(a,b)} \oplus \overline{(c,d)} = \overline{(ad + bc, bd)}$ $\overline{(a,b)} \odot \overline{(c,d)} =$
 $= \overline{(a \cdot c, b \cdot d)}$. Bu yozuvlardagi $+, \cdot$ amallari Z to'plamdagi qo'shish va ko'paytirish amallaridir.

IV.8.2-teorema. Q to'plamda

1°. $\oplus, \odot$ ko'paytirish amallari sinflardan olingan vakillarga bog'liq emas, ya'ni bir qiymatli aniqlangan.

2°. $\oplus, \odot$ amallari Q_1 to'plamda kommutativ, assosiativ bo'lib, $\odot$ amali $\oplus$ amaliga nisbatan distributivdir.

3°. $\overline{(1,1)}$ sinf $\odot$ amaliga nisbatan neytral element, ya'ni birlik elementdir.

4°. $\overline{(0,1)}$ sinf $\oplus$ amaliga nisbatan neytral ya'ni nol elementdir.

5°. $\forall \overline{(a,b)} \in Q_1$ sinf uchun $\overline{(-a,b)}$ sinf $\oplus$ ga nisbatan qarama-qarshi element bo'ladi, ya'ni $\overline{(a,b)} + \overline{(-a,b)} = \overline{(0,1)}$.

6°. $\forall \overline{(a,b)} \in Q_1 \wedge (a \neq 0)$, ya'ni, $\overline{(a,b)} \neq \overline{(0,1)}$ sinf uchun $\overline{(b,a)}$ sinf $\odot$ amaliga nisbatan teskari element bo'ladi.

$$7^\circ. (\overline{1,1}) \neq (\overline{0,1}).$$

Isbot. Teoremadagi tasdiqlar bevosita tekshrib chiqiladi. Masalan, 4° :
 $(\overline{0,1}) + (\overline{a,b}) = (\overline{0 \cdot b + 1 \cdot a, 1 \cdot b}) = (\overline{a,b}).$

$6^\circ. (\overline{ab}) \neq (\overline{0,1})$ bo'lsa, u holda $(\overline{ba}) \in Q_1$ bo'lib,
 $(\overline{a,b}) \cdot (\overline{b,a}) = (\overline{ab, a,b}) = (\overline{1,1}).$

Qolgan tasdiqlarni tekshirib chiqishni o'quvchilarga havola qilamiz.

Shunday qilib, $(Q_1, \oplus, \odot, (\overline{1,1})(\overline{0,1}))$ algebra, qisqacha $(Q_1, \oplus, \odot)$ -algebra maydon bo'lar ekan. Bu maydon butun sonlar halqasiga izomorf bo'lgan halqaostiga ega. Aniqrog'i $Z \times \{1\} / \sim$ faktor-to'plam $\oplus, \odot$ amallariga nisbatan yopiq bo'lib, halqa hosil qiladi. Bu halqa butun sonlar halqasiga izomorf bo'lgan halqadir. Faraz qilaylik, Q' maydon uchun $Z \times \{1\}$ – halqa, halqaosti bo'lsin, u holda $\forall (0,1) \in Z \times \{1\}, (b,1) \in Z \times \{1\} \quad b \neq 0$ elementlar uchun $(a,1) \cdot (b,1)^{-1} = (a,1) \cdot (1,b) = (a,b) \in Q'$ bo'ladi. Demak, $Q_1 \subset Q'$. YA'ni, Q_1 maydon $Z \times \{1\}$ – halqaning minimal kengaytmasi bo'lgan maydondir. U holda algebrlik kengaytma haqidagi teorema asosan Z butun sonlar halqasining minimal kengaytmasi bo'lgan maydon mavjud. Bu maydon ratsional sonlar maydoni deb yuritiladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Halqaning kengaytmasi deb nimaga aytiladi.
2. Maydon ta'rifini ayting.
3. Ratsional sonlar maydonini quring.

M a s h q l a r

1. Berilgan $(P; +, \cdot, 0)$ maydonning har qanday $a, b, a', b' \in P \wedge b \neq 0, b' \neq 0$ elementlari uchun quyidagilarni isbotlang:

$$1) \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + ba'}{bb'};$$

$$2) \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{ab' - ba'}{bb'};$$

$$3) \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{a \cdot a'}{bb'};$$

$$4) a' \neq 0 \Rightarrow \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a'}{b'}} = \frac{a \cdot b'}{b \cdot a'};$$

$$5) \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b.$$

2. Ratsional sonlar juftliklaridan iborat bo'lgan P to'plamda qo'shish va ko'paytirish amallari quyidagicha aniqlangan:

$$(a, b) \oplus (a', b') = (a + a', b + b');$$

$$(a, b) \otimes (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + a'b).$$

$(P; \oplus, \otimes)$ maydon tashkil etishini isbotlang.

3. Kompleks sonlar maydoni ustida qurilgan ikkinchi tartibli kvadrat matrisalar to'plami matrisalarni qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan kommutativ bo'lmagan, nolning bo'luvchilariga ega halqa tashkil etishini isbotlang.

4. Agar ε son $x^3 = 2$ tenglamaning ixtiyoriy kompleks ildizi va $Q(\varepsilon) = \{a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in Q\}$ bo'lsa, u holda kompleks sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan $Q(\varepsilon)$ to'plam maydon tashkil etishini isbotlang.

IV.9-§. Ratsional sonlarning aksiomatik nazariyasi

Boshlang'ich tushunchalar

1. Q - ratsional sonlar maydoni.

2. $\oplus, \cdot$ mos ravishda ratsional sonlar maydonidagi qo'shish va ko'paytirish amallari.

3. $+, \cdot$ amallari mos ravishda $\mathbb{Z}$ - butun sonlar halqasidagi qo'shish va ko'paytirish amallari.

Aksiomalar:

1. $\forall a, b \in Q$ uchun $\exists! C \in Q$ bo'lib, $a \oplus b = c$ bo'ladi.
2. $\forall a, b, c \in Q$ uchun $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ ya'ni, Q da $+$ amali assosiativ.
3. $\forall a, b \in Q$ uchun $a \oplus b = b \oplus a$ qo'shish amali kommutativ.
4. $0 \in Q$ va $\forall a \in Q$ uchun $0 \oplus a = a$.
5. $\forall a \in Q$ uchun Shunday $\exists a' \in Q$ bo'lib $a \oplus a' = 0$.
6. $\forall a, b \in Q$ uchun $\exists! p \in Q$ bo'lib $a \odot b = p$.
7. $\forall a, b, c \in Q$ uchun $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$.
8. $\forall a, b \in Q$ uchun $a \odot b = b \odot a$.
9. $\forall a, b, c \in Q$ uchun $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$.
10. $\forall a, b \in Q$ uchun esa $a \neq 0$ bo'lsa $\exists x \in Q$ $a \odot x = b$.
11. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ - butun sonlar halqasi.
12. $\mathbb{Z} \subset Q$.
13. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ uchun $a \odot b = a \cdot b$.
14. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ uchun $a \oplus b = a + b$.
15. Minimallik aksiomasi. Ixtiyoriy M to'plam uchun
 1. $M \subset Q$;
 2. $\mathbb{Z} \subset M$;
 3. $\forall a, b, b \neq 0$ uchun agar $bx = a$ ekanligidan $x \in M$ shartlar bajarilsa, u holda $M = Q$.

Ratsional sonlarning xossalari

Yozuvni ixchamlashtirish maqsadida, tushunmovchilik yuzaga kelmaydigan hollarda $\oplus, \odot$ simvollarini o'rniga mos ravishda $+, \cdot$ simvollarini ishlatamiz.

10-aksiomaga asosan $\forall a, b \in Q \ a \neq 0$ ratsional sonlar uchun $ax = b$ tenglama echimga ega. Xususan $a = b$ bo'lgan holda $\forall a \in Q_1 \ a \neq 0$ uchun $a \cdot x = x \cdot a < a$. U holda, ta'rifga ko'ra x ko'paytirishga nisbatan neytral element bo'ladi deb belgilaymiz. Demak 10-aksiomaga nisbatan x ratsional sonidir.

IV.9.1-teorema. *Q to'plamda $\cdot$ amaliga nisbatan neytral element Yagona.*

Isbot. Faraz qilaylik ikkita neytral element mavjud bo'lsin, ya'ni $\forall a \in Q \ a \neq 0$ uchun $ax_1 = x_1 \cdot a = a$ va $ax_2 = x_2 \cdot a = a$ bo'lsin. U holda xususan, birinchi tenglikdagi a ni x_2 bilan, ikkinchi tenglikdagi a ni x_1 bilan almashtirsak $x_2 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_2 = x_2$ va $x_1 x_2 = x_2 x_1 = x_1$ tengliklar hosil bo'ladi. U holda $x_1 = x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1 = x_2$.

Bundan keyin $x_1 = x_2$ ni e orqali belgilaymiz.

IV.9.2-teorema. $\forall a \in Q$ uchun $a \cdot 0 = 0$.

Isboti ravshan.

Xususan, $e \cdot 0 = 0 \cdot e = 0$.

10-aksiomaga asosan $\forall a \neq 0, \ a \in Q$ uchun $ay = e$ tenglama echimga ega. YA'ni, $a \cdot y = y \cdot a = e$ tenglikni qanoatlantiradigan ratsional son mavjud. x ni a ga teskari ratsional son deb ataymiz.

IV.9.3-teorema. $\forall a \in Q, \ a \neq 0$ ratsional son uchun Yagona teskari ratsional son mavjud.

Isbot. Faraz qilaylik, $ay_1 = y_1 a = e$ va $ay_2 = y_2 a = e$ bo'lsin. U holda $y_1 = y_1 \cdot e = y_1 \cdot (ay_2) = (y_1 \cdot a) \cdot y_2 = e \cdot y_2 = y_2$.

Kelgusida $a \neq 0$ ratsional songa teskari sonni a^{-1} yoki $\frac{1}{a}$ orqali belgilaymiz.

IV.9.4-teorema. $\forall a \neq 0, \ a \in Q$ va $\forall b \in Q$ elementlar uchun $ax = b$ tenglama Yagona echimga ega.

Isbot. $\forall a, b \in Q \ a \neq 0$ ratsional sonlar uchun $ax = b$ tenglama echimi mavjudligi 10-aksiomada kafolatlangan. Echim Yagonalagini isbotlaymiz. $ax_1 = b, \ ax_2 = b$ bo'lsin, u holda $ax_1 - ax_2 = 0 \Rightarrow (a(x_1 - x_2) = 0) \wedge (a \neq 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

$\forall a, b \in Q, b \neq 0$ ratsional sonlar uchun $a \cdot b^{-1}$ sonni $\frac{a}{b}$ ko'rinishda belgilaymiz hamda uni a va b ratsional sonlarning nisbati deymiz.

IV.9.5-teorema. Har bir ratsional son ikkita butun son nisbatiga teng. YA'ni

$$\forall a \in Q \text{ uchun } \exists m, n \in Z, n \neq 0 \text{ bo'lib, } a = \frac{m}{n}.$$

$$\text{Agar } \exists l, k \in Z, k \neq 0 \text{ bo'lib, } a = \frac{l}{k} \text{ bo'lsa, } m \cdot k = k \cdot n.$$

Isbot. Ikkita butun son nisbati ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lgan barcha ratsional sonlar to'plamini M orqali belgilaymiz. $\forall z \in Z$ uchun

$$z = z \cdot 1 = z \cdot 1^{-1} = \frac{z}{1} \in M. \text{ Demak, } M \subset Q.$$

$$\text{Agar } \frac{m}{n}, \frac{k}{l} \in M, \frac{k}{l} \neq 0$$

$$\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{k}{l}\right)^{-1} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{k} = \frac{m \cdot l}{n \cdot k} \in M. \text{ U holda } M = Q.$$

$$\begin{aligned} \text{Endi } \frac{m}{n} = \frac{k}{l} \text{ bo'lsin, u holda } \frac{m}{n} \cdot n = \frac{k}{l} \cdot n \Rightarrow m = \frac{k \cdot n}{l} \Rightarrow ml = \frac{k \cdot n}{l} \cdot l \Rightarrow \\ \Rightarrow ml = kn. \end{aligned}$$

$\forall \frac{m}{n} \in Q$ uchun $m \cdot n \in N$ bo'lsa, bu ratsional son musbat deyiladi. Barcha musbat ratsional sonlar to'plamini Q^+ orqali belgilab olamiz.

$\forall a, b \in Q$ uchun $a - b \in Q^+$ bo'lsa, $a > b$ deymiz. Bu munosabat Q da qat'iy chiziqli tartib munosabat deyiladi.

Haqiqatdan ham, $\forall a \in Q$ uchun $a - a = 0 \notin Q^+$ demak, $\neg(a > a)$.

$\forall a, b \in Q$ uchun $a - b \in Q^+$ bo'lsa, shundan $m, n, k, l \in Z$ topilib, $a = \frac{m}{n}, b = \frac{k}{l}$ va $a - b = \frac{m \cdot l - n \cdot k}{n \cdot l}$ bo'lib, $(m \cdot l - n \cdot k) \cdot nl \in N$. U holda

$$b - a = \frac{n \cdot k - ml}{n \cdot l}, (nk - ml) \cdot nl \notin N. \text{ YA'ni, } > \text{ munosabat antisimmetrik}$$

munosabatdir. $>$ munosabat tranzitiv bo'lishi ham bevosita tekshiriladi.

$a - b = \frac{ml - n \cdot k}{n \cdot l}$ uchun $(ml - n \cdot k) \cdot nl \in N$ bo'lsa, $b - a = \frac{mk - ml}{n \cdot l}$ uchun $(n \cdot k - ml)nl = -(ml - n \cdot k) \cdot n \cdot l \notin N$.

Demak $a \neq b$ bo'lsa $a - b \in Q^+$ yoki $b - a \in Q^+$. YA'ni, $a > b$ yoki $b > a$ bo'ladi.

Bu tartib munosabat Q ratsional sonlar maydonini arximedcha tartiblaydi va butun sonlar halqasidagi tartib munosabatning davomi bo'ladi.

Shunday qilib quyidagi teorema o'rinli.

IV.9.6-teorema. $(Q; +, \cdot, 0, 1; >)$ algebraik sistema qat'iy chiziqli, arximedcha tartiblangan maydon bo'lib, $>$ tartib munosabat butun sonlar halqasidagi tartib munosabatini davom ettiradigan tartib munosabatdir.

IV.9.7-ta'rif. $(a \geq b) \Leftrightarrow (a > b) \vee (a = b)$;

agar $a > b$ bo'lsa $b < a$ deymiz;

$(b \leq a) \Leftrightarrow (b < a) \vee (b = a)$.

$\geq, \leq$ tartib munosabatlar Q da noqat'iy tartib munosabatdir.

Ratsional sonlar aksiomatik nazariyasining zidsizligi

IV.9.8-teorema. Ratsional sonlar aksiomatik nazariyasi zidsiz aksiomatik nazariyadir.

Yuqorida butun sonlar halqasining minimal kengaytmasi bo'lgan maydon qurish usulini ko'rib chiqqan edik. Xosil bo'lgan maydonda ratsional sonlar aksiomatik nazariyasining barcha aksiomalari o'rinli bo'ladi. YA'ni, maydon ratsional sonlar aksiomatik nazariyasining modeli bo'ladi.

Ratsional sonlar aksiomatik nazariyasining qat'iyligi

IV.9.9-teorema. Ratsional sonlar aksiomatik nazariyasi qat'iy aksiomatik nazariyadir.

Isbot. $(Q_1; +, \cdot)(Q; \oplus, \odot)$ maydonlar ratsional sonlar aksiomatik nazariyasi

uchun ikkita turli modellar bo'lsin.

Faraz qilaylik, Z_1, Z_2 lar butun sonlar aksiomatik nazariyasining ikkita har xil modellari bo'lib, $Z_1 \subset Q$ va $Z_2 \subset Q_2$ bo'lsin. $\varphi: Z_1 \rightarrow Z_2$ izomorfizm bo'lsin.

$\forall r \in Q_1$ uchun $\exists p, q \in Z_1, q \neq 0, r = \frac{p}{q}$ bo'lsa $\Phi(r) = \Phi(\frac{p}{q}) = \frac{\varphi(p)}{\varphi(q)}$ akslantirish $(Q_1; +, \cdot)$ ni $(Q_2; +, \cdot)$ ga izomorf akslantiradi.

1) F – biektiv akslantirish bo'lishi φ ning biektiv akslantirish bo'lishidan bevosita kelib chiqadi.

2) $\forall r_1, r_2 \in Q$ uchun $\exists m, n, l, k \in Z, n \neq 0, r_1 = \frac{m}{n}, r_2 = \frac{l}{k}$ bo'lsin.

$$\begin{aligned} \text{U holda } \Phi\left(\frac{m}{n} + \frac{l}{k}\right) &= \Phi\left(\frac{mk + nl}{nk}\right) = \frac{\varphi(mk + nl)}{\varphi(nk)} = \frac{\varphi(mk) + \varphi(n \cdot l)}{\varphi(n)\varphi(k)} = \\ &= \frac{\varphi(m)\varphi(k) + \varphi(n)\varphi(l)}{\varphi(n)\varphi(k)} = \frac{\varphi(m)}{\varphi(n)} + \frac{\varphi(l)}{\varphi(k)} = \Phi\left(\frac{m}{n}\right) + \Phi\left(\frac{l}{k}\right). \end{aligned}$$

$\Phi(r_1 \cdot r_2) = \Phi(r_1) \cdot \Phi(r_2)$ bo'lishi ham Yuqoridagidek isbot qilinadi.

Takrorlash uchun savollar

1. Ratsional sonlar aksiomatik nazariyasining boshlang'ich tushunchalarini ayting.
2. Ratsional sonlar aksiomatik nazariyasining aksiomalarini sharhlang.
3. Ratsional sonlar to'plamining asosiy xossalarini bayon qiling.
4. Ratsional sonlar aksiomatik nazariyasining zidsizligini isbotlang.
5. Ratsional sonlar aksiomatik nazariyasining qat'iyligini isbotlang.

M a s h q l a r

1. Ratsional sonlar maydonida $x^2 = 2$ tenglama
2. Har qanday $\alpha \in Q$ son uchun Yagona $a \in Z$ son mavjudki, $a \leq \alpha < a + 1$ ekanligini isbotlang.

3. Quyidagilarni isbotlang:

1) ratsional sonlar maydonida «>»-tartib munosabati quyidagi shartlar orqali aniqlanadi:

$$\forall a, b \in Q \text{ uchun } a > b \Rightarrow a \neq b;$$

$$\forall a, b, c \in Q \text{ uchun } a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c;$$

$$\forall a, b, c \in Q \text{ uchun } a > b \Rightarrow a + c > b + c;$$

$$\forall a, b \in Q \text{ uchun } a \neq b \Rightarrow a > b \vee b > a;$$

$$1 > 0.$$

2) Yuqorida keltirilgan shartlarning hech biri qolganlari orqali ifodalanmaydi.

IV.10-§. Haqiqiy sonlar maydoni.

IV.10.1-ta’rif. *Har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo’ladigan tartiblangan maydon to’liq maydon deyiladi.*

IV.10.2-ta’rif. *Arximedchasiga tartiblangan to’liq maydon haqiqiy sonlar maydoni deyiladi.*

Haqiqiy sonlar maydonini ratsional sonlar maydonidan foydalanib qurish sxemasini beramiz. Q - ratsional sonlar maydoni, N -natural sonlar sistemasi bo’lsin. Q^N to’plam hadlari ratsional sonlardan iborat bo’lgan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ko’rinishdagi barcha ketma-ketliklardan hosil qilingan to’plamdir.

Q^N to’plamdagi $\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ elementlar uchun

$$\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \oplus \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \otimes \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\Theta \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$\{1\} = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}, \forall k \in N$ uchun $e_k = 1$ tenglik orqali mos ravishda ketma-ketliklarni qo’shish, ko’paytirish, qarma-qarshisini olish, birlik elementini ajratish amallari aniqlanadi.

R orqali Q^N to'plamdagi barcha fundamental ketma-ketliklar to'plamini belgilaymiz. Q –maydonda norma sifatida sonning absolyut qiymati olinadi. $(R, \oplus, \otimes, \ominus, 1)$ -algebra kommutativ halqa bo'lishi bevosita tekshiriladi. R to'plamdan $\{a_n\} \{b_n\} \Leftrightarrow \{a_n - b_n\} \rightarrow 0$ ekvivalentlik munosabati orqali P/N faktor-to'plam hosil qilamiz.

Bu to'plamni R_1 orqali belgilaymiz. $\forall \{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty \in R_1$ elementlari uchun $\{a_n\}_{n=1}^\infty + \{b_n\}_{n=1}^\infty = \{a_n + b_n\}_{n=1}^\infty$, $\{a_n\}_{n=1}^\infty \cdot \{b_n\}_{n=1}^\infty = \{a_n b_n\}_{n=1}^\infty$, $-\{a_n\}_{n=1}^\infty = \{-a_n\}_{n=1}^\infty$, $1 = \{1\}_{n=1}^\infty$ orqali $+$, $\cdot$, $-$, birlik elementni ajratish amallarini aniqlaymiz. $\langle R_1; +, \cdot, -, 1 \rangle$ algebra maydon bo'ladi (isbot qiling).

Agar $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty \in R_1$ elementlar uchun Shunday $n_0 \in N$ va Shunday musbat ε ratsional son topilib, barcha $k > n_0, k \in N$ natural sonlar uchun $a_k - b_k > \varepsilon$ shart bajarilsa $\{b_k\}_{k=1}^\infty < \{a_k\}_{k=1}^\infty$. Agar $\{b_n\}_{n=1}^\infty < \{a_n\}_{n=1}^\infty$ bo'lsa, $\{a_n\}_{n=1}^\infty < \{b_n\}_{n=1}^\infty$ deb hisoblaymiz. $<$ munosabat R_1 da tartib munosabat bo'lib, $(R_1; +, \cdot, -, 1; <)$ algebraik sistema arximedcha tartiblangan to'liq maydon bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Fundamental ketma-ketlik ta'rifini ayting.
2. YAqinlashuvchi ketma-ketlik nima?
3. Maydon ta'rifini ayting.
4. To'liq maydon deb nimaga aytiladi.
5. Haqiqiy sonlar maydonini quring.

M a s h q l a r

1. Haqiqiy sonlar juftliklaridan iborat bo'lgan P to'plamda qo'shish va ko'paytirish amallari quyidagicha aniqlangan:

$$(a, b) \oplus (a', b') = (a + a', b + b');$$

$$(a, b) \otimes (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

$(P; \oplus, \otimes)$ maydon tashkil etishini isbotlang.

2. Dedekind usulida haqiqiy sonlar maydonini quring.
3. Haqiqiy sonlar maydonida tartib munosabatini aniqlang.
4. Har qanday haqiqiy son ratsional sonlar ketma-ketligining limiti ekanligini isbotlang.
5. Har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'lishini isbotlang.
6. Yaqinlashuvchi bo'lmagan fundamental ketma-ketlikka misol keltiring.

IV.11-§. Haqiqiy sonlar aksiomatik nazariyasi.

Asosiy tushunchalar, belgilashlar

R – haqiqiy sonlar to'plami.

$+, \cdot, -$ R to'plamdagi binar algebraik amallar.

$0, 1$ - R to'plamdagi ajratilgan elementlar.

$<$ - R dagi binar munosabat.

Haqiqiy sonlar nazariyasining aksiomalari:

1. $\forall \alpha, \beta \in R$ uchun $\exists! \gamma \in R$ $\alpha + \beta = \gamma$, ya'ni R da qo'shish amali bir qiymatli aniqlangan.
2. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ uchun $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ - qo'shish amali assosiativ.
3. $\forall \alpha, \beta \in R$ uchun $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ - qo'shish amali kommutativ.
4. $0 \in R, \forall \alpha \in R$ uchun $\alpha + 0 = 0$ - nolni aniqlash.
5. $\forall \alpha \in R$ uchun $\exists \alpha' \in R$ bo'lib, $\alpha + \alpha' = 0$ bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy haqiqiy son uchun unga qarama-qarshi bo'lgan haqiqiy son mavjud.

6. $\forall \alpha, \beta \in R$ uchun $\exists! \gamma \in R \quad \alpha \cdot \beta = \gamma$ ko'paytirish amalini bir qiymatli aniqlash.

7. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ uchun $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ ko'paytirish amalining assosativligi.

8. $\forall \alpha, \beta \in R$ uchun $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ - ko'paytirish amali kommutativ.

9. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ uchun $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ - ko'paytirish amalining qo'shish amaliga nisbatan distributivligi.

10. $1 \in R \wedge 1 \neq 0$ haqiqiy sonlar maydonida kamida ikkita har xil element mavjud.

11. $\alpha \in R$ uchun $\alpha \cdot 1 = \alpha$ - birining xossasi.

12. $\alpha \in R \wedge \alpha \neq 0$ uchun $\exists \alpha' \in R \quad \alpha' \cdot \alpha = 1$ noldan farqli har qanday haqiqiy songa teskari bo'lgan haqiqiy son mavjud.

13. $\forall \alpha, \beta \in R$ uchun $\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha < \beta \vee \beta < \alpha$ - munosabatning chiziqliligi.

14. $\forall \alpha \in R$ uchun $\neg (\alpha < \alpha)$ ning antirefleksivligi.

15. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ uchun $(\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma) \Rightarrow \alpha < \gamma$ - munosabatning tranzitivligi.

16. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ uchun $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$ - munosabatning qo'shish amaliga nisbatan monotonligi.

17. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ uchun $\alpha < \beta \wedge 0 < \gamma$ bo'lsa, $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ - munosabatning ko'paytirish amaliga nisbatan monotonligi.

18. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R, \quad 0 < \alpha \wedge 0 < \gamma$ uchun $\exists n \in N$ bo'lib, $\alpha < n\beta$.

19. Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan har qanday $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ fundamental ketma-ketlik R da yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'ladi. YA'ni, $\exists a \in R$ bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Haqiqiy sonlar aksiomatik nazariyasining zidsizligi.

Ratsional sonlar maydoni orqali haqiqiy sonlar maydonini qurish sxemasini oldingi paragraflarda ko'rib chiqqan edik. Natijada hosil qilingan $(R_1; +, \cdot, -, 1, <)$ algebraik sistema haqiqiy sonlar nazariyasi uchun model vazifasini bajaradi. Demak, haqiqiy sonlar aksiomatik nazariyasi zidsiz aksiomatik nazariyadir.

Haqiqiy sonlarning xossalari.

Har qanday haqiqiy sonlar sistemasi ratsional sonlar maydoniga izomorf bo'lgan maydonostiga ega ekanligi ma'lum. Bu maydonostida ratsional sonlar maydonining barcha aksiomalari bajariladi. Demak, haqiqiy sonlar maydonini ratsional sonlar maydonining har qanday fundamental ketma-ketligi limitga ega bo'ladigan kengaytmasi sifatida qarashimiz mumkin.

IV.11.1-teorema. *Har qanday haqiqiy son hadlari ratsional sonlardan iborat ketma-ketlik limitidan iboratdir.*

Isbot. $\forall r \in R$ uchun $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n \in N$ uchun $r_n = r$ stasionar ketma-ketlikni mos qo'yamiz. U holda, hadlari ratsional sonlardan iborat Shunday $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik mavjud bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r = r.$$

IV.11.2-teorema. $\forall \alpha \in R, \forall n \in N$ uchun agar $\alpha \geq 0$ bo'lsa, Shunday $\beta \geq 0, \beta \in R$ haqiqiy son mavjud bo'lib, $\beta^n = \alpha$ bo'ladi.

Isbot. α -haqiqiy son uchun hadlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan Shunday $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ fundamental ketma-ketlik mavjud. $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^k = \alpha^k$ bo'lsa, $\beta^n = \alpha$ bo'ladi.

IV.11.3-teorema. *Haqiqiy sonlar maydonini faqat bitta usulda qat'iy chiziqli tartiblash mumkin.*

Matematik analiz kursida isbotlangan quyidagi teoremani keltiramiz:

IV.11.4-teorema. (kesim haqidagi teorema). *Haqiqiy sonlar to'plami quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan ikkita A va B ekvivalentlik sinflariga ajralgan bo'lsin:*

$$1. A = \emptyset \wedge B = \emptyset;$$

$$2. A \cup B = \mathbb{R};$$

$$3. A \cap B = \emptyset;$$

4. $\forall \alpha \in A$ va $\forall \beta \in B$ uchun $\alpha < \beta$. U holda yoki A sinfida eng katta element γ mavjud yoki B sinfida eng kichik element mavjud.

Haqiqiy aksiomatik nazariyasining qat'iyligi

IV.11.5-teorema. *Haqiqiy sonlar aksiomatik nazariyasi qat'iy nazariyadir.*

Isbot. $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, >)$ haqiqiy sonlar aksiomatik nazariyasi uchun ikkita model bo'lsin. Q va Q_1 lar mos ravishda bu sistemalardagi ratsional sonlar maydoni bo'lsin. Ratsional sonlar aksiomatik nazariyasi qat'iy aksiomatik nazariya bo'lgani uchun $Q \cong Q_1$.

$\phi: Q \rightarrow Q_1$ akslantirish ular orasidagi izomorfizm bo'lsin. U holda, agar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik Q da fundamental ketma-ketlik bo'lsa, uning obrazi bo'lgan $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik ham fundamental ketma-ketlik bo'lib, uning limiti mavjud. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ning limitiga $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ning limitini mos qo'ygan R va R_1 modellar orasida izomorfizm o'rnatgan bo'lamiz. Bu akslantirish haqiqatdan biektiv akslantirish bo'lib, hamma amallarni va $<$ munosabatni saqlaydi (tekshirib ko'ring).

Takrorlash uchun savollar

1. Haqiqiy sonlar aksiomatik nazariyasining asosiy tushunchalarini ayting.
2. Haqiqiy sonlar aksiomatik nazariyasining aksiomalarini bayon qiling.
3. Haqiqiy sonlarning xossalari ayting.
4. Haqiqiy sonlar aksiomatik nazariyasining xossalari bayon qiling.

M a s h q l a r

1. Har qanday $\alpha, \beta, r, q \wedge \alpha > 0, \beta > 0$ haqiqiy sonlar uchun quyidagilarni isbotlang:

1) $\alpha^r > 0$;

2) $\alpha^r \cdot \alpha^q = \alpha^{r+q}$;

3) $(\alpha^r)^q = \alpha^{rq}$;

4) $(\alpha\beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r$.

2. Ikki, to'rt, sakkiz, to'qqiz elementli maydonga misollar keltiring.

3. Ixtiyoriy r tub son uchun elementlari soni r ga teng maydon mavjudligini isbotlang.

4. r tub va n natural son uchun elementlari soni p^n ga teng bo'lgan maydon mavjudligini isbotlang.

5. $\alpha, \beta \in R, \alpha > 0, \beta > 0$ sonlar va $r \in Q, r > 0$ son uchun $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^r > \beta^r$.

Isbotlang.

6. $\alpha \in R, \alpha > 1 \wedge r, q \in Q$ sonlar $r > q \Leftrightarrow \alpha^r > \alpha^q$ bo'lishini isbotlang.

7. $a, b, c, d \in R \wedge a > 0, b > 0, n \in N$ sonlar uchun $0 < c < a^n < d$ va $0 < c < b^n < d$ bo'lsa, u holda quyidagilarni isbotlang:

1) $a^n - b^n < (a - b)nd^{\frac{n-1}{n}}$;

2) $a - b < \frac{a^n - b^n}{nc^{\frac{n-1}{n}}}$.

IV.12-§. Cistematik sonlar

Butun sistematik sonlar

Birdan katta g natural sonlar uchun $0, 1, 2, 3, 4, \dots, g-1$ natural sonlarni g asosli sanoq sistemasining raqamlari deb ataymiz. Agar a natural son va $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m \in \{0, 1, 2, 3, \dots, g-1\}$ raqamlar uchun

$a = a_0 g^m + a_1 g^{m-1} + \dots + a_{m-1} g + a_m$ tenglik o'rinli bo'lsa, a natural son g asosli sanoq sistemasida yozilgan deymiz va $a = \overleftarrow{a_0, a_1, \dots, a_m}_g$ ko'rinishda belgilaymiz.

Masalan, $a = \overleftarrow{321}_{10} = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$ - 10 asosli sanoq sistemada yozilgan. $b = \overleftarrow{011}_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 8 + 2 + 1 = \overleftarrow{11}_2$ son 2 lik sanoq sistemasida yozilgan.

IV.12.1-teorema. Agar $0, 1, 2, 3, 4, \dots, g-1$ butun sonlar g asosli sanoq sistemasining raqamlari bo'lsa, har qanday natural son $a = a_0 g^m + a_1 g^{m-1} + \dots + a_{m-1} g + a_m$ ko'rinishda bir qiymatli ifodalanadi.

Isbot. Matematik induksiya bilan isbotlaymiz.

Agar $a < g$ bo'lsa, a g asosli sanoq sistemasining raqami bo'lib, bu ifoda bir qiymatli aniqlanadi. Faraz qilaylik, barcha a dan kichik sonlar uchun teorema o'rinli bo'lsin, u holda qoldikli bo'lish haqidagi teorema asosan Shunday Yagona bir juft b va r manfiymas butun sonlar mavjud bo'lib, $a = g \cdot b + r$, $0 \leq r < g$ shart bajariladi. Induksiya faraziga ko'ra, Shunday $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ raqamlar topilib, $b = a_0 g^{m-1} + a_1 g^{m-2} + \dots + a_{m-2} g + a_{m-1}$ bo'ladi. U holda $a = a_0 g^m + a_1 g^{m-1} + \dots + a_{m-1} g + a_m + r$, $r < g$ bo'lgani uchun r raqam. Demak, r ni a_m orqali belgilasak, $a = a_0 g^m + a_1 g^{m-1} + \dots + a_{m-1} g + a_m$. Bu ifoda bir qiymatli aniqlanganligi induksiya farazi va qoldikli bo'lish haqidagi teoremadan kelib chiqadi.

Agar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik haqiqiy sonlar maydoni elementlari bo'lsa,

$S_n = \sum_{x=0}^n a_x$ orqali $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ yig'indi belgilanadi. $\sum_{x=0}^{\infty} a_x$ ifoda esa qator

deyiladi. Agar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha$ bo'lsa, α

soni qatorning yig'indisi deyiladi va $\sum_{x=0}^{\infty} a_x = \alpha$ deb yoziladi.

IV.12.2-teorema. Agar g birdan katta butun son bo'lsa,

$$1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots = \sum_{x=0}^{\infty} g^{-x} = \frac{g}{g-1}.$$

$$\text{Isbot. } S = \frac{1}{1 - \frac{1}{g}} = \frac{g}{g-1}.$$

IV.12.3-teorema. Agar g -birdan katta butun son bo'lib, hadlari butun sondan iborat bo'lgan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik uchun $0 \leq a_n$ shart bajarilsa, qo'yidagi tasdiqlar o'rinli:

1. $\sum_{x=0}^{\infty} a_n g^{-n}$ qator yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

2. Agar α Yuqorida aytilgan qatorning yig'indisi bo'lsa, $a_0 \leq \alpha \leq a_0 + 1$.

3. $\alpha = a_0 + 1$ bo'lishi uchun $a_n = g - 1 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$ tenglik o'rinli bo'lishi zarur va etarli.

Isbot.

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} a_n g^{-n} &= a_0 + \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \dots + \frac{a_n}{g^{-n}} + \dots < a_0 + \frac{g-1}{g} + \frac{g-1}{g^2} + \dots + \frac{g-1}{g^{-n}} + \dots = \\ &= a_0 + \frac{g-1}{1 - \frac{1}{g}} = a_0 + 1. \end{aligned}$$

Demak, $\sum_{x=0}^{\infty} a_n g^{-n}$ qator yaqinlashuvchi qatordir. Agar α bu qator yig'indisi bo'lsa, $a_0 < \alpha < a_0 + 1$ bo'lishi ayon.

IV.12.4-teorema. Agar g birdan katta butun son bo'lsa, har qanday α musbat haqiqiy son $\alpha = g^n \sum_{x=0}^{\infty} a_x \cdot g^{-x}$ ko'rinishda Yagona usulda ifoda qilinadi.

Isbot. Oldin isbot qilingan teoremaga asosan

$$a_0 < \sum_{x=0}^{\infty} a_x g^{-x} < a_0 + 1.$$

Faraz qilaylik $\alpha = g^n \sum_{x=0}^{\infty} a_x g^{-x}$ bo'lsin. U holda $g^n \leq \alpha < g^{n+1}$. Agar α

haqiqiy son berilgan bo'lsa bu tengsizlik orqali n bir qiymatli aniqlanadi, demak a_0 ham bir qiymatli aniqlangan.

Agar $g^m(g^{-n}\alpha - \sum_{x=0}^{\infty} a_x g^{-x}) = \sum_{x=m}^{\infty} a_x g^{-x+m}$ tenglik to'g'riligini e'tiborga olsak

$$a_m \leq g^m(g^{-n}\alpha - \sum_{x=0}^{m-1} a_x g^{-x}) < a_m + 1$$

kelib chiqadi. Bundan esa $a_0, \dots, a_{m-1}$ aniqlangan deb faraz qilsak a_m ham bir qiymatli aniqlanishi kelib chiqadi. Faraz qilaylik $n, a_0, a_1, \dots$ sonlar aniqlangan bo'lsin. U holda

$$a_m g^{-m+n} \leq (\alpha - g^n \sum_{x=0}^{m-1} a_x g^{-x}) < a_m + 1.$$

Demak,

$$\alpha = g^n \sum_{x=0}^{\infty} a_x g^{-x}.$$

IV.12.5-natija. Agar α – manfiy son bo'lsa, $\alpha = -g^n \sum_{x=0}^{\infty} a_x g^{-x}$, agar $\alpha = 0$ bo'lsa, $n = 0$ va $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0$.

Agar $\alpha \neq 0, n$ va a_x lar butun sonlardan iborat bo'lib, $a_0 > 0$ va $\forall x \in \{0, 1, 2, \dots\}$ uchun $0 \leq a_x \leq g - 1$. Undan tashqari, Shunday n_0 natural son topilib, har qanday $x > n_0$ uchun $a_x = g - 1$ bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. g asosli sistematik son deb nimaga aytiladi?
2. g asosli sistematik sonni ifodalashda qanday raqamlar qatnashadi?
3. Har qanday natural son g asosli sistematik son sifatida bir qiymatli ifodalanishini isbotlang.
4. Qatorning yig'indisi deb nimaga aytiladi?

M a s h q l a r

1. Yettilik sanoq sistemasida qo'shish va ko'paytirish amallarining jadvalini tuzing.

2. 5378 sonni 6 asosli sanoq sistemasida yozing.

3. a natural sonni n asosdan m va k asosga o'tkazing:

3.1. $a = 124352$; $n = 6$; $m = 7$; $k = 12$.

3.2. $a = 675438$; $n = 9$; $m = 5$; $k = 11$.

3.3. $a = 8709546$; $n = 11$; $m = 3$; $k = 13$.

3.4. $a = 6738(10)4$; $n = 12$; $m = 2$; $k = 14$.

IV.13-§. p -adik sonlar sistemasi

p -adik sonlar maydoni

Ixtiyoriy birdan katta natural n son uchun barcha birdan chiqarilgan n – darajali kompleks ildizlar to'plami multiplikativ gruppaga bo'lishi algebra kursidan ma'lum. Agar birorta tub son r uchun birdan chiqarilgan p^n darajali ildizlar to'plami,

yaratuvchi elementi $a_n = \cos \frac{2\pi}{p^n} + i \sin \frac{2\pi}{p^n}$ dan iborat siklik gruppaga

bo'ladi. Biz siklik gruppani $\langle a_n \rangle$ orqali belgilasak $\bigcup_{n=1}^{\infty} \langle a_n \rangle$ yig'indi ham

multiplikativ gruppaga bo'lib, bu *gruppaga* p^∞ tipda deyiladi. a_n – sonlar sistemasi bu gruppaning yaratuvchi elementlari sistemasi bo'ladi. U holda

$a_1^{p^1} = 1, a_2^{p^2} = 1, \dots, a_n^{p^n} = 1$ va demak

$$a_{n+1}^p = \left(\cos \frac{2\pi}{p^{n+1}} + i \sin \frac{2\pi}{p^{n+1}} \right)^p = \cos \frac{2\pi \cdot p}{p^{n+1}} + i \sin \frac{2\pi \cdot p}{p^{n+1}} = \cos \frac{2\pi}{p^n} + i \sin \frac{2\pi}{p^n} = a_n,$$

ya'ni $a_{n+1}^p = a_n$ (1)

Bu gruppani G_{p^∞} orqali belgilab olamiz.

G_{p^∞} gruppaning barcha endomorfizmlari to'plamini topamiz. Agar $\varphi: G_{p^\infty} \rightarrow G_{p^\infty}$ endomorfizm bo'lsa, bu endomorfizm yaratuvchi elementlar obrazlari orqali to'liq aniqlanadi. Haqiqatdan ham, $\varphi(a_n^k) = k\varphi(a_n)$ (2)

a_n -yaratuvchi elementning tartibi p^n bo'lganidan $\varphi(a_n)$ ning tartibi ham p^n -dan oshmasligi kelib chiqadi. Lekin tartibi p^n dan oshmaydigan elementlar $\langle a_n \rangle$ ga tegishli, u holda, Shunday k_n butun son mavjud bo'lib $\varphi(a_n) = a_n^{k_n}$, $n = 1, 2, \dots$, $0 \leq k_n < p^n$ (3)

φ -endomorfizm bo'lgani uchun (1) tenglikdan $\varphi(a_{n+1})^p = \varphi(a_n)$ (4) kelib chiqadi. U holda $(a_{n+1}^{k_{n+1}})^p = a_n^{k_{n+1}} = a_n^{k_n}$. Bundan esa $(k_{n+1} - k_n): p^n$ kelib chiqadi. YA'ni $k_{n+1} \equiv k_n \pmod{p^n}$ (5).

Shunday qilib, har bir endomorfizm uchun (3) va (5) shartni qanoatlantiruvchi manfiy bo'lmagan $(k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$ (6) ketma-ketlikni mos qo'yish mumkin. Bu moslik biektiv moslikdir (isbot qilib ko'ring).

(3) va (5) shartlarni qanoatlantiruvchi bunday ketma-ketliklar to'plami ketma-ketliklarni mos elementlarini hadma-had qo'shish va hadma-had ko'paytirish amallariga nisbatan xalqa hosil qiladi.

Haqiqatdan ham, shu toifadagi ikkita $(k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$ $(m_1, \dots, m_k, \dots)$ ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. $(k_1 + m_1, k_2 + m_2, \dots, k_n + m_n, \dots)$ ketma-ketlik ham (3) va (5) shartlarni qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

$0 \equiv k_n + m_n \leq p^{k_n+m_n}$; $k_{n+1} \equiv k_n \pmod{p^n}$ va $m_{n+1} \equiv m_n \pmod{p^n}$, u holda, $k_{n+1} + m_{n+1} \equiv k_n + m_n \pmod{p^n}$.

Shunga o'xshash $(k_1 \cdot m_1, k_2 \cdot m_2, \dots, k_n \cdot m_n, \dots)$ ketma-ketlik uchun $k_{n+1} \cdot m_{n+1} \equiv k_n \cdot m_n \pmod{p^n}$ o'rinli.

(1, 1, ...) ketma-ketlik xalqaning birlik elementi, (0, 0, ...) ketma-ketlik esa xalqaning noli bo'ladi. Bu xalqa assosiativ, kommutativ, birlik elementga ega, nolning bo'luvchilari yo'q bo'lgan xalqadir.

p-adik sonlarni o'zimizga qulay bo'lgan boshqa ko'rinishda yozib olishimiz mumkin.

$$\text{Agar } a_0 = k_1, a_n = \frac{k_{n+1} - k_n}{p^n}, n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

deb olsak, barcha a_n lar p – modul bo'yicha musbat chegirmalardan iborat, ya'ni

$$0 \leq a_n < p, n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

(8) ga asosan

$$k_n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_{n-1} p^{n-1}, n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

U holda ixtiyoriy α p-adik songa (8), (9) shartlarni qanoatlantiradigan

$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n + \dots$ cheksiz qatorni mos qo'yishimiz mumkin. Bu moslik biektiv moslik bo'lib, bunday qatorlar ustida $+$ va $\cdot$ amallari quyidagicha aniqlanishi mumkin.

Agar $\beta = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n + \dots$ bo'lsa, u holda $\alpha + \beta = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots + c_n p^n + \dots$ bo'lsa,

$$c_0 = a_0 + b_0 - p g_0$$

$$c_n = a_n + b_n + g_{n-1} - p g_n, n = 1, 2, \dots$$

$$\alpha \cdot \beta = d_0 + d_1 p + d_2 p^2 + \dots + d_n p^n + \dots$$

$$d_0 = a_0 b_0 - p s_0, d_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l + s_{n-1} - p s_n, n = 1, 2, \dots$$

p-adik sonlarning bunday ifodalanishida $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$ kelib chiqadi.

Ya'ni p-adik sonlar xalqasida nolning bo'luvchilari yo'q. Demak, p-adik sonlar xalqasi butunlik sohasi bo'lib, uning nisbatlar maydonini tuzish mumkin. Bu maydon *p-adik sonlar maydoni* deyiladi.

Bu maydonni qurish sxemasini keltiramiz

$$a_k p^k + a_{k+1} p^{k+1} + \dots + a_n p^n + \dots, k \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{Z}p. \quad (10)$$

ko'rinishdagi barcha qatorlarni qaraylik, bu qatorda chekli sondagi manfiy darajali ildizlar bo'lishi mumkin. Agar (10) dagi hamma koeffisientlar nolga teng bo'lsa,

bu elementni maydonning noli deb hisoblaymiz aks holda $a_k \neq 0$ deb hisoblaymiz.

(10) ko'rinishdagi qatorlar ustida Yuqoridagidek $+$, $\cdot$ amallarini aniqlaymiz. Natijada hosil bo'lgan qatorlar to'plami $+$, $\cdot$ amallariga nisbatan maydon hosil qiladi. Bu maydon *p-adik sonlar maydoni* deyiladi.

$a_k p^k + a_{k+1} p^{k+1} + \dots + a_n p^n + \dots$ elementga $b_{-k} p^{-k} + b_{-k+1} p^{-k+1} + \dots + b_n p^n$ element teskari bo'lsa

$$a_k b_{-k} - p \cdot s_{-k} = 1,$$

$$a_k b_{-k+1} + a_{k+1} b_{-k} + s_{-k} - p s_{-k+1} = 0,$$

$$a_k b_n + a_{k+1} b_{n-1} + \dots + a_{n+2k} b_{-k} + s_{n-1} - p s_n = 0$$

tengliklardan topiladi. r tub son bo'lgani uchun bu tenglamalar echimga ega.

$k \geq 0$ bo'lgan (10) ko'rinishdagi qatorlar to'plami *p-adik sonlar maydonining p-adik sonlar xalqasiga izomorf bo'lgan xalqaosti* bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Gruppaning yaratuvchi elementi deb nimaga aytiladi?
2. Siklik grupp ta'rifini ayting.
3. p^∞ tipdagi grupp qanday grupp?
4. p^∞ tipdagi gruppaning yaratuvchi elementlarini ko'rsating.
5. p^∞ tipdagi gruppaning endomorfizmi qanday aniqlanadi?
6. *p-adik sonlar* qanday hosil qilinadi?
7. *p-adik sonlar maydonini* qurish sxemasini bayon eting.

M a s h q l a r

1. Birdan chiqarilgan barcha kompleks ildizlar to'plami grupp tashkil etishini isbotlang.

2. Amallarni bajaring:

$$2.1. ((351_6 \cdot 14_6 - 1153_6 : 31_6 - 150_6) : 205_6) : 25_6 ;$$

- 2.2. $((215_8 + 532_8) \cdot 16_8 - (11031_8 - 527_8) : 32_8) : 14775_8$;
- 2.3. $(3333_4 + 2222_4) \cdot 12_4 - (231020_4 + 333333_4) : 23_4$;
- 2.4. $3215_7 \cdot 24_7 - 11461_7 : 25_7 + 1532_7 - 115044_7$;
- 2.5. $120111_3 : 102_3 + (201_3 \cdot 12_3 - 11220_3) \cdot 20110_3$;
- 2.6. $232011_5 : 104_5 + 1234_5 \cdot 322_5 - 122334_5$;
- 2.6. $11111101_2 : 10111_2 + 1100101_2 \cdot 1011_2 - 1010101_2$;
- 2.7. $1141043_5 : 23_5 + 23411_5 \cdot 32_5 - 34231_5$;
- 2.8. $51(10)3406_{11} : 548_{11} + 98(10)12_{11} \cdot 1232_{11} - 234219_{11}$;

IV.14-§. p-adik sonlar aksiomatik nazariyasi

Boshlang'ich terminlar

1. Q, R, Q_p – mos ravishda ratsional, haqiqiy, p-adik sonlar to'plami.
2. $+$ va $\cdot$ binar algebraik amallar.
3. $>$ binar munosabat.
4. $0, e, p * e - Q$ ning elementlari, p – tub son.
5. v, θ mos ravishda Q va Q_p to'plamlarni R ga akslantirishlar.

Aksiomalar

1. $(R, +, \cdot, 0, 1)$ – haqiqiy sonlar sistemasi.
2. $(Q, +, \cdot, 0, e)$ – ratsional sonlar maydoni $p * e - Q$ ning tub elementi.
3. (Q, R, v) – normalangan maydon bo'lib, v – p-adik norma, $\{p^n * e\}_n$ – ketma-ketlik v norma bo'yicha nol ketma-ketlikdir.
4. $(Q_p, +, \cdot)$ – maydon.
5. (Q_p, R, θ) – normalangan maydon.
6. Q_p maydon Q ning kengaytmasi.
7. θ norma v normaning davomi, ya'ni $\forall a \in Q$ uchun $v(a) = \theta(a)$.
8. Q ning v norma bo'yicha fundamental bo'lgan har qanday ketma-ketligi

θ norma bo'yicha Q_p ning elementiga yaqinlashadi.

9. Minimallik aksiomasi.

Agar $M \subset Q_p$ bo'lib, v norma bo'yicha Q da fundamental bo'lgan har qanday ketma-ketlik θ norma bo'yicha Q_p ning elementiga yaqinlashsa, u holda $M = Q_p$ bo'ladi.

IV.14.1-teorema. *p-adik sonlar aksiomatik nazariyasi zidsiz aksiomatik nazariyadir.*

Isboti. Oldingi paragrafda p -adik sonlar maydonini qurish sxemasi ko'rsatildi. Demak, p -adik sonlar aksiomatik nazariyasi zidsiz nazariya ekan.

IV.14.2-teorema. *p-adik sonlar aksiomatik nazariyasi qat'iy aksiomatik nazariyadir.*

Takrorlash uchun savollar

1. *p-adik* sonlar aksiomatik nazariyasining boshlang'ich terminlarini ayting.
2. *p-adik* sonlar aksiomatik nazariyasining aksiomalarini ayting.
3. *p-adik* sonlar aksiomatik nazariyasining minimallik aksiomasini bayon eting.
4. *p-adik* sonlar aksiomatik nazariyasining qanday xossalarini bilasiz?

M a s h q l a r

1. *p-adik* sonlar aksiomatik nazariyasining zidsizligini isbotlang.
2. *p-adik* sonlar aksiomatik nazariyasining qat'iyligini isbotlang.
3. *p-adik* sonlarni qo'shish, ko'paytirish amallarini tushuntiring.

IV.15-§. Kompleks sonlar sistemasi

1. Kompleks sonlar maydonini qurish

Haqiqiy sonlar maydonining $x+1=0$ tenglama echimga ega bo'ladigan minimal kengaytmasi *kompleks sonlar maydoni* deb tushuniladi.

R haqiqiy sonlar maydoni bo'lsin, u holda $R^2 = R \cdot R$ to'plamda $+$ va $\cdot$ amallarini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\forall (a,b), (c,d) \in R^2 \text{ uchun } (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d),$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c - b \cdot d, ad + bc)$$

bu amallarga nisbatan R^2 to'plam maydon hosil qiladi. Bu maydon kompleks sonlar maydoni.

$(1, 0)$ kompleks sonlar maydonining birlik elementi, $(0,1)^2 = (-1, 0)$. R^* (0) to'plam $R \cdot R$ maydonning maydonostisi bo'lib, R – haqiqiy sonlar maydoniga izomorfdir. Har qanday $(a,b) \in R \cdot R$ uchun $(a,b) = a \cdot (1, 0) + b(0,1)$.

Agar $(1,0)$ ni 1 bilan $(0,1)$ ni i bilan belgilasak $(a,b) = a \cdot 1 + bi = a + bi$ bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Kompleks son deb nimaga aytiladi?
2. Maydon ta'rifini eslang.
3. Kompleks sonlar maydonini haqiqiy sonlar maydonining kengaytmasi sifatida quring.
4. Kompleks sonlar maydonida haqiqiy sonlar maydoniga izomorf maydon mavjudligini isbotlang.

M a s h q l a r

1. Tenglamani eching:

1.1. $\bar{z} = 5 - z$.

1.2. $\bar{z} = -3z - 1 + 2i$.

1.3. $z^2 + \bar{z} = 1$.

1.4. $z^2 - 2z\bar{z} - 3 = 3i$.

2. Quyidagi tengsizliklarni eching va echimlar to'plamini Dekart koordinatalar tekisligida ifodalang:

2.1. $|z + 2| \geq |z|$.

2.2. $|z - 1 + i| < |z + 1|$.

2.3. $|z - 5 + i| < 4$.

2.4. $|z + 1 - i| \leq |z - 2|$.

3. Hisoblang:

3.1. $\sqrt{5+12i}$.

3.2. $\sqrt{5-17i}$.

3.3. $\sqrt{4+11i}$.

3.4. $\sqrt{-22-15i}$.

4. Ildizlarni hisoblang :

4.1. $\sqrt[8]{\left(\frac{-5+7i}{i}\right)^3}$.

4.2. $\sqrt[7]{-1-2i}$.

4.3. $\sqrt[6]{\frac{1-i}{-\sqrt{3}+i}}$.

4.4. $\sqrt[4]{\frac{1}{2}((\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i)}$.

4.5. $\sqrt[5]{4-5i}$.

IV.16-§. Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasi

Boshlang'ich terminlar

1. C – kompleks sonlar to'plami.
2. $\oplus, \odot, C$ dagi binar algebraik amallar.
3. $0, 1, i \in C$.
4. $+, \cdot$ R - dagi algebraik amallar.

Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasining aksiomalari

1. $\forall a, b \in C$ uchun $\exists! c \in C$ bo'lib $a \oplus b = c$, ya'ni kompleks sonlar maydonida $\oplus$ amali bajariladi.

2. $\forall a, b, c \in C$ uchun $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ -kompleks sonlarni qo'shish amali assosiativ amaldir.

3. $\forall a, b \in C$ uchun $a \oplus b = b \oplus a$ – kompleks sonlarni qo'shish kommutativ.

4. $0 \in C$ bo'lib, ixtiyoriy $a \in C$ uchun $a + 0 = 0$ – qo'shishga nisbatan neytral elementning hossasi.

5. $\forall a \in C$ uchun $\exists a' \in C$ bo'lib, $a + a' = 0$, ya'ni ixtiyoriy kompleks son uchun qarama-qarshi kompleks son mavjud.

6. $\forall a, b \in C$ uchun Shunday $\exists! c \in C$ bo'lib, $a \odot b = c$, ya'ni kompleks sonlar to'plamida kompleks sonlarni ko'paytirish amali aniqlangan.

7. $\forall a, b, c \in C$ uchun $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ – ko'paytirishning assosiativligi.

8. $\forall a, b \in C$ uchun $a \cdot b = b \cdot a$ – ko'paytirishning kommutativligi.

9. $\forall a, b, c \in C$ uchun $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) + (a \odot c)$ – ko'paytirish amalining $\oplus$ amaliga nisbatan distributivligi.

10. $1 \in C \wedge 1 \neq 0$ va $\forall a \in C$ $a \cdot 1 = a$ ko'paytirish amaliga nisbatan 1 neytral elementdir.

11. $(R, +, \cdot, 0, 1)$ – haqiqiy sonlar maydoni.

12. $\forall a, b \in R$ uchun $a \oplus b = a + b$ – S dagi qo'shish amali R dagi qo'shish amalining davomi.

13. $\forall a, b \in R$ uchun $a \odot b = a \cdot b$ – C dagi ko'paytirish amali R dagi ko'paytirish amalining davomi.

14. $i \in C$ va $i^2 = -1$.

15. (minimallik aksiomasi). Agar $M \subset C$ uchun

1) $R \subset M$; 2) $i \in M$; 3) $a, b \in M$ uchun $a + b \in M$ va $a \cdot b \in M$ kelib chiqsa, $M = C$.

Kompleks sonlarning xossalari

Har doimgidek, tushunmovchilik yuzaga kelmaydigan hollarda C to'plamda ham qo'shish va ko'paytirish amallarini $+$, $\cdot$ simvollarini orqali belgilaymiz.

IV.16.1-teorema. *Har qanday z kompleks son uchun $\exists! a, b \in R, z = a + bi$ bo'ladi, z uchun bu ifoda Yagona.*

Isbot. Minimallik aksiomasidan foydalanamiz. $M - a + bi$ ko'rinishda ifoda qilinishi mumkin bo'lgan barcha kompleks sonlar to'plami bo'lsin. U holda $i = 0 + 1 \cdot i$ bo'lgani uchun $R \subset M$.

$\forall z_1, z_2 \in M$ bo'lsin, u holda $\exists a, b, c, d \in R$ bo'lib, $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ bo'ladi, u holda $z_1 + z_2 \in M, z_1 \cdot z_2 \in M$ bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Demak, $M = C$.

$z = a + bi = c + di$ bo'lsin u holda, $(a - c) + (b - d)i = 0$ yoki $a - c = 0 \wedge b - d = 0$ yoki $a = c$ va $b = d$.

Oliy algebra kursida quyidagi teorema isbot qilingan:

IV.16.2-teorema. *Kompleks sonlar maydonida n -darajali ko'phad roppa-rosa n ta kompleks ildizga ega.*

Bu tasdiqda $n \in N$, ya'ni kompleks sonlar maydoni algebraik maydondir.

IV.16.3-teorema. *Kompleks sonlar maydonini chiziqli tartiblash mumkin emas.*

Isboti. Kompleks sonlar maydonida $i^2 > 0$ bajarilmaydi.

IV.16.4-teorema. *Kompleks sonlar maydonining additiv gruppasini qat'iy, chiziqli tartiblash mumkin.*

Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasining zidsizligi

IV.16.5-teorema. *Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasi zidsiz nazariyadir.*

Isbot. Oldin ko'rganimizdek, kompleks sonlar maydonini qurish mumkin. Bu maydonda kompleks sonlar aksiomatik nazariyasining barcha aksiomalari bajariladi. Demak, kompleks sonlar maydoni kompleks sonlar aksiomatik nazariyasining modelidir.

Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasi uchun yana bitta model ko'rsatamiz.

Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan barcha $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi matrisalar to'plamini K orqali belgilaymiz.

K to'plamda matrisalarni qo'shish, matrisaga qarama-qarshi matrisa topish va ko'paytirish amallari aniqlangan:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix},$$

$$-\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -(-b) & -a \end{pmatrix}.$$

Matrisalarni qo'shish, ko'paytirish amallari assosiativ, matrisalarni ko'paytirish amali esa matrisalarni qo'shish amaliga nisbatan distributiv. Undan tashqari

$$\tilde{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{pmatrix} \in K, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} \in K, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Agar } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \neq 0 \text{ bo'lsa, u holda } \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0; \quad a^2 + b^2 \text{ yig'indini } \Delta$$

$$\text{orqali belgilasak, } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{b}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix} \in K.$$

Shunday qilib, K to'plam $+$, $\cdot$ amallariga nisbatan maydon hosil qiladi. Bu maydonda $P = \{aE \mid \forall a \in R\}$ to'plam haqiqiy sonlar maydoniga izomorf bo'lgan maydonostidir.

$$\text{Agar } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hosil bo'lgan maydon kompleks sonlar aksiomatik nazariyasining yana bitta modeli bo'ladi.

Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasining qat'iyliigi

IV.16.6-teorema. Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasi qat'iy aksiomatik nazariyadir.

Isbot. $(K, +, \cdot, R)$ $(P; \oplus, \odot, e, R')$ kompleks sonlar aksiomatik nazariyasining ikkita modeli, R va R' lar esa haqiqiy sonlar aksiomatik nazariyasining modellari bo'lsin. U holda R ni R' ga akslantiradigan φ -izomorf akslantirish mavjud.

$\forall a, b \in R$ uchun $\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$, $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$ bo'lsin. U holda $\forall a + bi \in R$ uchun $f(a + bi) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)i$ tenglik bilan aniqlangan akslantirish R ni P ga izomorf akslantiradi. Haqiqatdan ham, φ – bietiv akslantirish bo'lib $\forall a + bi; c + di \in K$ uchun

$$\begin{aligned} \varphi(a + bi) + (c + di) &\stackrel{\sim}{=} \varphi(a + c) + (b + d)i \stackrel{\sim}{=} \varphi(a + c) \oplus i\varphi(b + d) = \\ &= \varphi(a) \oplus \varphi(c) \stackrel{\sim}{\oplus} \varphi(b) \oplus \varphi(d)i \stackrel{\sim}{=} \varphi(a) + \varphi(b)i \stackrel{\sim}{+} \varphi(c) + \varphi(d)i \stackrel{\sim}{=} \\ &= \varphi(a + bi) \oplus \varphi(c + di). \end{aligned}$$

Shunga o'xshash $\varphi(a + bi) \cdot (c + di) \stackrel{\sim}{=} \varphi(a + bi) \odot \varphi(c + di)$ tenglik o'rinli bo'lishi ko'rsatiladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasining boshlang'ich terminlarini ayting.
2. Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasining aksiomalarini izohlang.
3. Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasidan kompleks sonlar to'plami maydon tashkil qilishi kelib chiqishini asoslang.
4. Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasidan haqiqiy sonlar maydoni kompleks sonlar maydonining kengaytmasi bo'lishi kelib chiqadimi?
5. Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasining xossalarini ayting.

M a s h q l a r

1. Har qanday z kompleks sonning $a, b \in R$ sonlar orqali $z = a + bi$ ko'rinishda Yagona usulda ifodalanishini isbotlang.
2. Kompleks sonlar maydoni algebraik yopiqqligini isbot qilish sxemasini keltiring.
3. Kompleks sonlar maydonini chiziqli tartiblash mumkin emasligini isbotlang.
4. Kompleks sonlar maydonining additiv gruppasini qat'iy chiziqli tartiblash mumkinligini isbotlang.
5. Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasining zidsizligini isbotlang.
6. Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasining qat'iyligini isbotlang.

IV.17-§. Chekli rangli algebralar

IV.17.1-ta'rif. F maydon ustida berilgan V vektor fazo uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

1. V da vektorlarni ko'paytirish amali aniqlangan, ya'ni $\forall a, b \in V$ uchun $a \cdot b \in V$.
2. $\forall a, b, c \in V$ elementlar uchun $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ va $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.
3. $\forall \lambda \in F$ va $\forall a, b \in V$ uchun $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$.

U holda V chiziqli algebra deyiladi.

V chiziqli fazoning bazisi chiziqli algebraning ham bazisi deyiladi. V chiziqli fazoning o'lchovi esa *chiziqli algebraning rangi* deyiladi.

IV.17.2-misol. $C = \{a + bi \mid \forall a, b \in R\}$ kompleks sonlar maydoni R maydon ustida aniqlangan, rangi 2 ga teng chiziqli algebra bo'ladi.

IV.17.3-misol. $F^{n \times n}$ — elementlari F maydonga tegishli barcha kvadrat matrisalar to'plami chiziqli algebra bo'ladi, bu algebra *matrisali to'liq algebra*

deyiladi. Bu algebraning rangi n^2 ga teng.

IV.17.4-misol. Faraz qilaylik, $\gamma, \gamma^3 = 2$ shartni qanoatlantiruvchi birorta kompleks son bo'lsin. U holda, $Q(\gamma) = \{a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 \mid \forall a_0, a_1, a_2 \in Q\}$ to'plam rangi 3 ga teng bo'lgan chiziqli algebradir.

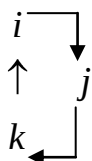
IV.17.5-misol. $\forall z = a + bi$ kompleks son uchun $\bar{z}$ orqali bu kompleks songa qo'shma bo'lgan $a - bi$ kompleks sonni belgilaymiz, u holda z_1, z_2 kompleks sonlar uchun $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ hossalarning bajarilishini tekshirib chiqish qiyin emas.

K orqali barcha $q = \begin{pmatrix} \frac{z_1}{-z_2} & \frac{z_2}{z_1} \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi matrisalar to'plamini belgilaymiz. K to'plam rangi 4 ga teng bo'lgan algebradir. K ga izomorf bo'lgan har qanday algebra *kvaternionlar algebrasi* deyiladi. Bundan keyin q larni

kvaternionlar deb ataymiz. Agar $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

belgilarni kiritsak

e, i, j, k elementlar chiziqli erkli bo'lib, $q = a_0e + a_1i + a_2j + a_3k$ tenglik bajariladi. Demak, $\{e, i, j, k\}$ vektorlar sistemasi bu algebraning bazisi bo'ladi. Bazis elementlaridan i, j, k larni ko'paytirish



sxema asosida bajarilishi o'rinli bo'lishini tekshirish qiyin emas. YA'ni, $i j = k$, $j k = i$, $ki = j$, $ik = -j$, $kj = -i$, $ji = -k$, $i^2 = j^2 = k^2 = -e$ bo'lishini tekshirish qiyin emas, undan tashqari e ni ko'paytirishga nisbatan birlik element bo'lishini e'tiborga olsak,

$$q_1 = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k, \quad q_2 = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$$

kvaternionlar uchun kvaternionlarni ko'paytirishni distributivlik xossasidan foydalanib hadma-had bajarish mumkin:

$$\begin{aligned}
q_1 \cdot q_2 &= (a_0 b_0 + a_0 b_1 i + a_0 b_2 j + a_0 b_3 k) + (a_1 b_0 i + a_1 b_1 i^2 + a_1 b_2 ij + a_1 b_3 ik) + (a_2 b_0 j + \\
&+ a_2 b_1 ji + a_2 b_2 j^2 + a_2 b_3 jk) + (a_3 b_0 k + a_3 b_1 ki + a_3 b_2 kj + a_3 b_3 k^2) = \\
&= (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + (a_0 b_0 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_3)i + (a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + \\
&+ a_3 b_1)j + (a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_2)k.
\end{aligned}$$

$\overline{q_1} = a_0 e - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ kvaternion q_1 kvaternionga *qo'shma kvaternion* deyiladi.

$$q_1 \cdot \overline{q_1} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \text{ son } q_1 \text{ kvaternionning normasi deyiladi.}$$

Agar e birlik elementga ega bo'lgan algebrada $\forall a \neq 0$ element uchun Shunday a' element topilib $a \cdot a' = a' \cdot a = e$ shart bajarilsa, bunday algebra *bo'lish amali bajariladigan algebra* deyiladi. 1-,3-,4- misollardagi algebralarda bo'lish amali bajariladigan algebralardir.

Kelgusida faqat bo'lish amali bajariladigan assosiativ algebralarga qaratiladi.

Agar A algebra P maydon ustida, bo'linish amali bajariladigan assosiativ algebra bo'lsa, P -maydon A ning algebraosti yoki A ning P ga izomorf algebraosti mavjud bo'ladi.

IV.17.6-teorema. Agar A rangi n ga teng bo'lgan P maydon ustidagi algebra bo'lsa, $\forall \alpha \in P$ uchun $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}, \alpha^n$ chiziqli bog'liq bo'lib, α – element koeffisientlari P dan olingan birorta n - darajali ko'phad ildizidan iborat.

Takrorlash uchun savollar

1. Maydon ta'rifini ayting.
2. CHiziqli fazo deb nimaga aytiladi?
3. CHiziqli algebraga ta'rif Bering.
4. CHiziqli fazoning bazisi nima?
5. CHiziqli fazoning o'lchovi nima?
6. CHiziqli algebraning rangi ta'rifini ayting.

M a s h q l a r

1. Haqiqiy sonlar to'plami rangi 1 ga teng chiziqli algebra bo'lishini isbotlang.

2. Kompleks sonlar maydoni rangi 2 ga teng chiziqli algebra bo'lishini isbotlang.

3. F maydon ustida olingan 2-tartibli kvadrat matrisalar to'plami rangi 4 ga teng chiziqli algebra bo'lishini isbotlang.

4. Kvaternionlar algebrasini quring.

IV.18-§. Frobenius teoremasi

IV.18.1-teorema. $(A; +, \cdot, R)$ haqiqiy sonlar maydoni ustida bo'lish amali bajariladigan rangi n ga teng assosiativ algebra bo'lsin. Agar

$n=1$ bo'lsa, u holda $A \cong R$ bo'ladi;

$n=2$ bo'lsa, u holda $A \cong C$ bo'ladi;

$n \neq 3$;

$n=4$ bo'lsa, u holda $A \cong K$ bo'ladi;

$n \leq 4$.

Bu erda R – haqiqiy sonlar maydoni, S – kompleks sonlar maydoni, K – kvaternionlar algebrasi.

Isbot. 1. $n=1$ bo'lib, $\{u\}$ A ning bazisi bo'lsin. U holda $A = u \cdot R$. Demak, $A \cong R$ (isbot qiling).

2. $n=2$ bo'lib, $\{1, u\}$ vektorlar sistemasi A ning bazisi bo'lsin. U holda har qanday $\alpha \in A$ uchun $\alpha = a_0 + a_1 u$ $a_0, a_1 \in R$ $u \notin R$, aks holda A - bir o'lchovli bo'lib qoladi. Bundan $1, u, u^2$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqligidan Shunday $a_0, a_1, a_2 \in R$ haqiqiy sonlar mavjud va

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 = 0 \quad (1)$$

tenglik o'rinli, ya'ni u - koefitsientlari haqiqiy sonlardan iborat $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ kvadrat uchhad ildizi bo'ladi. $u \notin R$ bo'lganligi uchun $u \in C$. U holda $\bar{u}$ ham (1) tenglamaning ildizi bo'ladi. Faraz qilaylik, $u = a + bi$ bo'lsin, u holda $\bar{u} = a - bi$. Bundan $a_0 + a_1 u + a_2 u^2 = a_2 (x - (a + bi))(x - (a - bi)) = a_2 ((x - a)^2 + b^2)$. Demak, u vektor

R maydonda keltirilmaydigan $(x-a)^2 + b^2$ kvadrat uchhadning ildizi ekan. U holda har qanday $\alpha \in A$ uchun Shunday $a_0, a_1 \in R$ mavjud bo'lib,

$\alpha = a_0 + a_1 u$. Agar $u = a + bi$ bo'lsa, u holda

$$a_0 + a_1(a + bi) = a_0 + a_1 a + a_1 bi = (a_0 + a_1 a) + (a_1 b)i. \quad \text{Har qanday}$$

$\alpha = a_0 + a_1 u \in A$ uchun $z = (a_0 + a_1 a) + (a_1 b)i$ kompleks soni mos qo'ysak, u

holda bu akslantirish Ani kompleks sonlar maydoniga izomorf akslantiradi. Bu

akslantirishni φ orqali belgilasak, $\varphi: A \rightarrow C$ va

$\varphi(a_0 + a_1 u) = (a_0 + a_1 a) + (a_1 b)i, u = a + bi$. Bu akslantirish biektiv akslantirishdir.

Haqiqatdan ham, agar $\alpha = a_0 + a_1 u \neq a'_0 + a'_1 u = \alpha'$ bo'lsa, u holda

$(a_0 + a_1 a) + (a_1 b)i \neq (a'_0 + a'_1 a) + (a'_1 b)i$. Aks holda

$$\begin{cases} a_0 + a_1 a = a'_0 + a'_1 a \\ a_1 b = a'_1 b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_0 - a'_0) + a(a_1 - a'_1) = 0 \\ a_1 = a'_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = a'_0 \\ a_1 = a'_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \alpha' \quad \text{ziddiyat}$$

kelib chiqadi.

Har qanday $c + di \in C$ uchun $\varphi(x + yu) = c + di$ bo'lsin. U holda

$$x + y(a + bi) = c + di \Rightarrow (x + ya) + ybi = c + di \Rightarrow \begin{cases} x + ya = c \\ ybi = di \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c - \frac{ad}{b}, \\ y = \frac{d}{b}. \end{cases}$$

Har qanday $\alpha = a_0 + a_1 u$ va $\alpha' = a'_0 + a'_1 u$ lar uchun

$$\varphi(\alpha + \alpha') = \varphi((a_0 + a'_0) + (a_1 + a'_1)u) = (a_0 + a'_0 + (a_1 + a'_1)a) + (a_1 + a'_1)bi =$$

$$= ((a_0 + a_1 a) + a_1 bi) + ((a'_0 + a'_1 a) + a'_1 bi) = \varphi(\alpha) + \varphi(\alpha').$$

Shunga o'xshash $\varphi(\alpha \cdot \alpha') = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\alpha')$ tenglik o'rinli ekanligi isbotlanadi.

A algebraning bazisi $1, \alpha$ bo'lsa, φ akslantirishni Shunday tanlab olish

mumkin-ki, natijada $u^2 = -1$ tenglik o'rinli bo'ladi. Haqiqatdan ham,

$u = a + bi \Rightarrow u^2 = -1$ bo'lsa, $u = i$ bo'lishi kelib chiqadi.

3. Faraz qilaylik A rangi uchga teng bo'lgan algebra bo'lib, $1, u, v$ vektorlar sistemasi bu algebraning bazisi bo'lsin. U holda $u^2 = -1$ deb hisoblashimiz mumkin. Agar $1, u, v$ sistema chiziqli erkli bo'lsa, $1, u, v, uv$ sistema ham chiziqli

erkli bo'lishini ko'rsatamiz.

$$a_0 + a_1u + a_2v + a_3uv = 0 \quad (2)$$

bo'lsin. Tenglamaning ikkala tomonini ham u ga o'ng tomondan ko'paytirsak,

$$a_0u - a_1 + a_2v - a_3v = 0 \Rightarrow -a_1 + a_0u + (a_2 - a_3)v = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_0 = 0, a_2 = a_3.$$

U holda $(2) \Rightarrow a_2v + a_3uv = 0 \Rightarrow a_3(v + uv) = 0$. Bundan A bo'linish amali bajariladigan algebra bo'lgani uchun $a_3 = 0 \vee uv = -v \Rightarrow u = -1$ kelib chiqadi, lekin, $u \notin R$, demak, $a_3 = 0$.

Shunday qilib, $a_0 + a_1u + a_2v + a_3uv = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Demak, bo'linish amali bajariladigan haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan assosiativ algebra rangi ≥ 4 ekan.

4. A-haqiqiy sonlar maydoni ustida bo'linishga ega bo'lgan rangi $n(n \geq 4)$ ga teng algebra bo'lsin. Yuqorida ko'rganimizdek, bu algebrada kamida 4 ta chiziqli erkli vektorlar bor. $1, u, v, uv$ -chiziqli erkli elementlar bo'lsin. $1, u$ elementlar yaratgan algebra kompleks sonlar maydoniga izomorf bo'lishi ham isbotlangan edi. Huddi Shunday, $1, v$ elementlar yaratgan chiziqli algebra ham kompleks sonlar maydoniga izomorf bo'lishini ko'rsatish mumkin. U holda u, v elementlarni Shunday tanlab olish mumkin-ki, natijada $u^2 = v^2 = -1$ bo'ladi. Demak, u va v elementlar haqiqiy sonlar maydoniga tegishli emas. U holda $u + v$ va $u - v$ elementlar ham haqiqiy sonlar maydoniga tegishli emas. Demak, bu elementlar haqiqiy sonlar maydonida keltirilmaydigan, koeffisientlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan kvadrat tenglamaning ildizlari bo'ladi. Bundan ularning kvadratlari mos ravishda shu elementlar va 1 ning chiziqli kombinatsiyasidan iborat:

$$(u + v)^2 = a_0 + a_1(u + v), a_0, a_1 \in R;$$

$$(u - v)^2 = b_0 + b_1(u - v), b_0, b_1 \in R;$$

yoki

$$\begin{aligned} -2 + (uv + vu) &= a_0 + a_1(u + v); \\ -2 - (uv + vu) &= b_0 + b_1(u - v), \end{aligned} \quad (3)$$

Hosil bo'lgan tengliklarni hadma-had qo'shsak,

$-4 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)u + (a_1 - b_1)v$ ga ega bo'lamiz. $1, u, v$ lar chiziqli erkli bo'lganligi uchun $a_1 + b_1 = a_1 - b_1 = 0 \wedge a_0 + b_0 = -4$. U holda (3) dan $uv + vu$ element haqiqiy son bo'lishi kelib chiqada. Uni $2r$ orqali belgilasak,

$$uv + vu = 2r = a_0 + 2 = -(b_0 + 2) \quad (4)$$

tenglikka ega bo'lamiz. $u + v \wedge u - v$ elementlar mos ravishda ildiz bo'ladigan ikkita kvadrat uchhadlar haqiqiy sonlar maydonida keltirilmaydigan ko'phadlar bo'lganligi uchun $a_0 = b_0 = 0$ dan $a_0 < 0 \wedge b_0 < 0$ bo'lishi kelib chiqadi. U holda (4) tenglikka asosan $-1 < r < 1$. Demak,

$$p = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (5)$$

son noldan farqli haqiqiy son bo'ladi. Agar $j = r \cdot p \cdot u + p \cdot v$ belgilashni kiritsak, $p \neq 0$ dan $1, u, j$ elementlar chiziqli erkli bo'lib (4), (5) dan $j^2 = -1 \wedge uv + ju = 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Agar u ni i orqali, $ij = -ji$ ni k orqali belgilasak, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ bo'lib, $1, i, j, k$ lar chiziqli erkli sistema hosil qiladi. Haqiqatdan ham, agar $c_0, c_1, c_2 \in R$ sonlar mavjud bo'lib, $k = c_0 + c_1i + c_2j$ deb faraz qilsak, tenglikning ikkala tomonini o'ng tomondan i ga ko'paytirib $j = c_0i - c_1 - c_2k = c_0i - c_1 - c_2(c_0 + c_1i + c_2j)$ tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikdagi j element koeffisientlarini tenglashtirsak $-c_2^2 = 1$ kelib chiqadi. Bu esa $c_2 \in R$ Shartga zid.

Shunday qilib, $1, i, j, k$ lar chiziqli erkli.

Hosil bo'lgan chiziqli erkli elementlar yaratgan algebra kvaternionlar algebrasiga izomorf bo'lishi ravshan.

5. $n \geq 5$ bo'lsin deb faraz qilsak, $1, i, j, k, l$ chiziqli erkli vektorlar sistemasi bo'lsa, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ deb Yuqoridagi usulda $il + li, jl + lj, kl + lk$ ifodalar haqiqiy sonlar maydoniga tegishli bo'lishini ko'rsatish mumkin. Bu ifodalarni mos

ravishda $a, b, c \in R$ haqiqiy sonlarga teng bo'lsin. YA'ni, $il + li = a$, $jl + lj = b$, $kl + lk = d$ bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} ai + bj + ck &= (aj - bi + c)k = (aj - bi + kl + lk)k = (aj - bi + ij + lk)k = \\ &= (aj - i(b - jl)lk)k = (aj - ilj + lk)(-k) = ((a - il)j + lk)k = \\ &= (lij + lk)k = (lk + lk)k = -2l. \end{aligned}$$

Bu esa $1, i, j, k, l$ vektorlar chiziqli erkli degan farazimizga zid.

Takrorlash uchun savollar

1. Bo'linish amali bajariladigan algebra ta'rifini ayting.
2. Assosiativ algebra ta'rifini ayting.
3. Haqiqiy sonlar maydoni ustida bo'lish amali bajariladigan chekli rangli assosiativ algebraning rangi 1 ga teng bo'lsa, u haqiqiy sonlar chiziqli algebrasiga izomorf bo'ladimi?
4. Haqiqiy sonlar maydoni ustida bo'lish amali bajariladigan chekli rangli assosiativ algebraning rangi 2 ga teng bo'lsa, u kompleks sonlar chiziqli algebrasiga izomorf bo'ladimi?
5. Haqiqiy sonlar maydoni ustida bo'lish amali bajariladigan chekli rangli assosiativ algebraning rangi 4 ga teng bo'lsa, u kvaternionlar chiziqli algebrasiga izomorf bo'ladimi?

M a s h q l a r

1. Rangi 1,2,4ga teng chiziqli algebralarga misollar keltiring.
2. Haqiqiy sonlar, kompleks sonlar maydoni, kvaternionlar algebrasi bo'linish amali bajariladigan haqiqiy sonlar maydoni ustida chekli rangli assosiativ algebra bo'lishini isbotlang.
3. Haqiqiy sonlar maydoni ustida bo'lish amali bajariladigan chekli rangli assosiativ algebra rangi 3 ga teng bo'lmasligini isbotlang.
4. Haqiqiy sonlar maydoni ustida bo'lish amali bajariladigan chekli rangli assosiativ algebra rangi 4dan katta bo'lmasligini isbotlang.
5. Rangi 3 ga teng bo'lgan chiziqli algebraga misol keltiring.

Adabiyotlar

Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz, 1 va 2-tomlar. T., «O'qituvchi», 1994, 1995.

Burbaki N. Teoriya mnojеств. M., «Mir», 1965.

Kargapolov M.I., Merzlyakov YU.I. Основы теории групп. M., «Nauka», 1972.

Kostrikin A.I. Vvedenie v algebru. M., «Nauka», 1977.

Kulikov L.YA. Algebra i teoriya chisel. M., «Vysshaya shkola», 1979.

Kurosh A.G. Lekcii po obshchey algebre. M., «Nauka», 1973.

Nechaev V.I. Числовые системы. M., «Prosveshenie», 1975.

Novikov P.S. Elementy matematicheskoy logiki. M., «Nauka», 1973.

Stol R.R. Mnojestva. Logika. Aksiomaticheskie teorii. M., «Prosveshenie», 1968.

Fuks L. Частично упорядоченные алгебраические системы. M., «Mir», 1965.

Xinchin A.YA. Сепные дроби. M., Fizmatgiz, 1961.

YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari. T., «Yangi asr avlodi», 2006.

MUNDARIJA

Soʻz boshi	
I-BOB. TOʻPLAMLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI	
I. 1-§. Toʻplam. Toʻplamlar ustida amallar.	
I.2-§. Mulohaza. Mulohazalar ustida amallar	
I.3 -§. Mulohazalar algebrasi. Mulohazalar algebrasi alfaviti,	
I.4 - § . Teng kuchli formulalar. Tautologiya – mantiq qonuni.	
I.5- §. Predikat tushunchasi. Predikatlar ustida amallar.	
I.6-§. Predikatlar algebrasining formulalari.	
I.7-§. Dekart koʻpaytma. n-ar munosabat. Ekvivalentlik munosabati.	
I.8-§. Akslantirish (funksiya). Tartib munosabati.	
II BOB. ALGEBRALAR VA ALGEBRAIK SISTEMALAR	
II.1-§. Binar algebraik amallar turlari, xossalari. Neytral, simmetrik elementlar. Kongruensiya	
II.2-§. Algebra. Algebralar gomomorfizmi. Algebraosti va uning xossalari. Faktor-algebra	
II.3-§. Gruppa. Halqa. Xossalari. Gruppalar, halqalar gomomorfizmi	
II.4-§. Algebraik sistemalar. Algebraik sistemalar gomomorfizmi	
II.5-§. Tartiblangan algebralar	
II.6-§. Normalangan maydonlar	
III BOB. AKSIOMATIK NAZARIYALAR HAQIDA TUSHUNCHA	
III.1-§. Matematik nazariyalar haqida tushuncha	
III.2-§. Birinchi tartibli til	
III.3-§. Matematik nazariyalarning zidsizlik, toʻliqlik, yechilish muammolari	

III.4-§. Matematik nazariyalarga na'munalar	
IV BOB. SONLI SISTEMALAR	
IV.1-§. Natural sonlar nazariyasining mazmunli aksiomatik nazariyasi	
IV.2-§. Natural sonlar to'plamida qo'shish amalini aniqlash va uning xossalari	
IV.3-§. Natural sonlar to'plamida ko'paytirish amalining hossalari	
IV.4-§. Natural sonlar to'plamida tartib munosabat	
IV.5-§. Natural sonlar aksiomatik nazariyasini xossalari	
IV.6-§. Butun sonlar xalqasi	
IV.7-§. Butun sonlar sistemasining aksiomatik nazariyasi	
IV.8-§. Ratsional sonlar maydoni	
IV.9-§. Ratsional sonlarning aksiomatik nazariyasi	
IV.10-§. Haqiqiy sonlar maydoni	
IV.11-§. Haqiqiy sonlarni aksiomatik nazariyasi	93
IV.12-§. Sistematik sonlar	96
IV.13-§. p-adik sonlar sistemasi	99
IV.14-§. p-adik sonlar aksiomatik nazariyasi	102
IV.15-§. Kompleks sonlar sistemasi	103
IV.16-§. Kompleks sonlar aksiomatik nazariyasi	104
IV.17-§. Chekli rangli algebralar	108
IV.18-§. Frobenius teoremasi	110
Adabiyotlar	114