

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi

Namangan muhandislik – pedagogika instituti

“Kasb ta'limi” fakulteti

“KT(Informatika va informatsion texnologiyalar” kafedra

P. Karimov

**“Matematik mantiq va diskret matematika”
fanidan**

MA'RUZA MATNI



Namangan - 2017y

Ushbu ma'ruzalar matni «Matematik mantiq va diskret matematika» fanini o'qitish bo'yicha mavzular bayon etilgan. Ma'ruzalar matni texnika oliy ta'lim muassasalari o'qituvchilari va talabalari hamda «Matematik mantiq va diskret matematika» fanini o'qitish uchun mo'ljallangan.

Tuzuvchi:

Karimov P. - NamMPI, “Kasb ta’limi (Informatika va informasion texnologiyalar)” kafedrasi dotsenti.

Taqrizchilar:

Ismanova K. - NamMPI, “Informatika va kompyuter texnikasi” kafedrasi mudiri, dotsenti, t.f.n.

Raximov R.- Namanagan sanoat KHK Informatika kafedrasi maxsus fan o'qituvchisi

Ma'ruzalar matni Namangan-muhandislik pedagogika institutining Ilmiy-uslubiy kengashining 201_ yil __ avgustdagi __-sonli qaroriga muvofiq o'quv jarayoniga tadbqiq qilish uchun tavsiya etilgan.

1 -ma'ruza. To'plamlar nazariyasi. To'plamlar ustida amallar. To'plamlar nazariyasining asosiy ayniyatlari.

To'plam - qandaydir umumiy xususiyatga ega elementlar yig'indisi.

Agar to'plamning har bir elementiga tartib raqamini mos qo'yish mumkin bo'lsa va bu raqam qaytarilmasa to'plam sanoqli yoki tugallangan deyiladi.

Agar har bir element uchun bunday raqam mavjud bo'lmasa, u holda bunday to'plam cheksiz to'plam deb ataladi.

Cheksiz to'plamni ba'zan kontinum ham deb ataladi (masalan: tekislikdagi nuqtalar to'plami).

Agar chekli to'plamdagi hamma elementlar sonini hisoblash mumkin bo'lsa, u holda u to'plamning *quvvati* deb ataladi.

To'plamni turli usullar bilan berish mumkin:

1. Uning hamma elementlarini sanash yo'li bilan.

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

2. Algoritmik shaklda (ketma-ketlik ko'rinishida yoki formulalar yordamida).

a) chekli

$$M=\{2;4;6;8\} \Leftrightarrow M=\{m|2n;n\text{-butun};1\leq n\leq 4\}$$

b) cheksiz

$$A=\{x| |x-1|<3\}$$

SANOQLI TO'PLAMNING HOSSALARI

1. Har qanday sanoqli to'plam chekli yoki hisobli

A to'plamning qism to'plami deb, hamma elementlari A to'plamga ta'lluqli bo'lgan A' to'plamga aytiladi

$$A' \subset A$$

Masalan: $N \subset R$

2. Hamma rastional sonlar to'plami *sanoqli*.

3. *Alfavit* deb istalgan bo'sh bo'lmagan to'plamga aytiladi.

Bo'sh to'plam - bironta elementga ega bo'lmagan to'plamdir.

Harbir A to'plam uchun qism to'plam mavjud.

TO'PLAMLAR USTIDA ASOSIY OPERATSIYALAR

1. Kirishlik(birlashma)

A to'plam V to'plamga kiradi, yoki A to'plam V to'plamni qism to'plami bo'ladi.

$$A \subset B$$

2. Yig'indi(birlashma)

$$C = A + B = A \cup B$$

$$C = A \cup B = \{c_i | c_i \in A \text{ yoki } c_i \in B\}$$

3. Kesishma(Ko'paytma)

$$C = A * B = A \cap B = \{c_i | c_i \in A \text{ va } c_i \in B\}$$

4. Ayirish (farq)

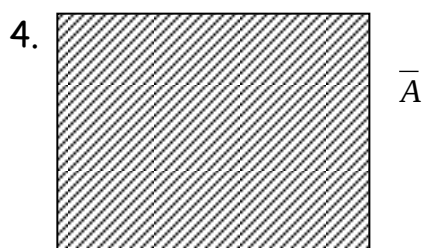
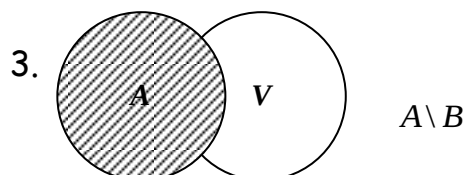
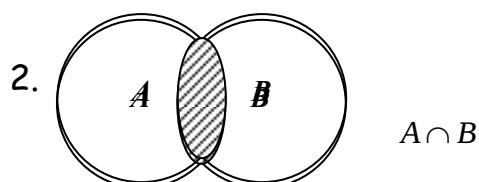
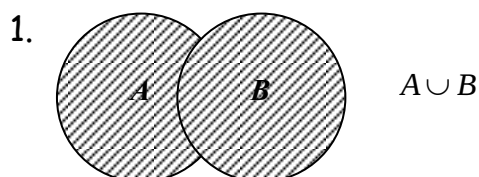
$$C = A \setminus B = \{c_i | c_i \in A \text{ u } c_i \notin B\}$$

5. To'ldiruvchi

U universal to'plam bo'lib, qaralayotgan hamma to'plamlar uning qism to'plami bo'ladi, uholda $\bar{A}$ to'ldiruvchi to'plam deyiladi uning elementlari A ga kirmaydi, lekin U ga tegishli bo'ladi.

GRAFIK TASVIRI

(Diagramma Eyler, Venn)



4. TO'G'RI KO'PAYTIRISH $A \times V$

A va V to'g'ri ko'paytirish deb M to'plamning $(a \cdot b)$ juftiga aytiladi, $a \in A \text{ u } b \in B$

Agar $A=V$, uholda ko'paytma A^2 deyiladi

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$(a_1 \times a_2 \times \dots a_n)$$

Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ lar uchun $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ u holda A^n

Agar to'plam chekli bo'lsa $A \times B$ ko'paytma quvvati $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

5. TO'PLAMLAR ALGEBRASINING ASOSIY XOSSALARI

Joylanishiga bog'liqligligi:

$$A \cup B = B \cup A \quad (1)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (2)$$

Assostiativligi:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad (3)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad (4)$$

Distributivligi:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (5)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (6)$$

$$A \cup \bar{A} = U \quad (7)$$

$$A \cap \bar{A} = 0 \quad (8)$$

$$A \cup 0 = A \quad (9)$$

$$A \cap U = A \quad (10)$$

$$A \cup A = A \quad (11)$$

$$A \cup U = U \quad (12)$$

de Morgan qonuni

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (1)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (2)$$

2-ma'ruza. To'plamlarning Dekart ko'paytmasi. To'plamlar Quvvati. In'ektiv, syur'ektiv va biektiv funkiiyalar. Funkstiyalar kompozistiyasi.

2.1. Dekart ko'paytma .

Ikki x va y dan tashkil topgan $(x; y)$ ko'rsatilgan tartibda o'rnatilgan juftlik tartiblangan juftlik deyiladi. Ikki $(x; y)$ va $(u; v)$ juftliklar teng bo'ladi faqat va faqat $x=u$ va $y=v$ bo'lsa.

Ta'rif. A va B - ikki to'plami berilgan bo'lsin. A va V to'plamlarni to'g'ri (dekart) ko'paytmasi deb, hamma tartiblangan juftliklarga aytiladi va har bir juftlikning birinchi elementi A ga ikkinchi elementi esa V ga tegishli bo'ladi:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Misol.1. $A = \{1; 2; 3\}$ va $B = \{r; s\}$ bo'lsin. Uholda

$$A \times B = \{(1; r), (1; s), (2; r), (2; s), (3; r), (3; s)\}.$$

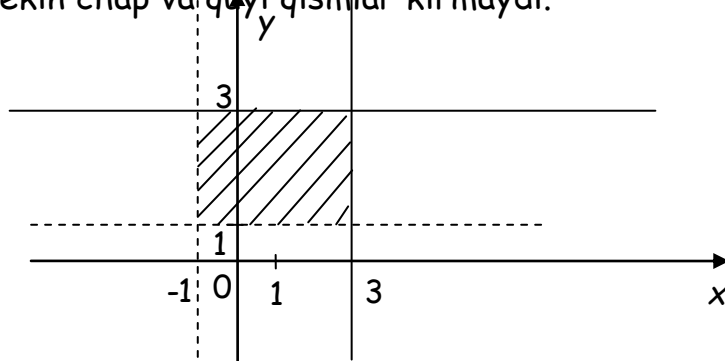
$$B \times A = \{(r, 1), (r, 2), (r, 3), (s, 1), (s, 2), (s, 3)\}.$$

Misol.2. Koordinata tekisligida quyidagi to'plamni quring:

$$(-1; 3] \times [1; 3)$$

echish. Birinchi to'plamni OX o'qida, ikkinchisini OY o'qida tasvirlaymiz.

Hamma juftliklar to'plami ya'ni Dekart ko'paytmasi bo'yalgan to'rtburchak ichida yotadi lekin chap va quyi qismlar kirmaydi.



Koordinata tekisligini $R^2 = R \times R$ ko'rinishda berish mumkin. Koordinatalar usulini birinchi bo'lib Rene Dekart (1596-1650) ishlatgan.

Xususiyl holda ,agar A bo'sh yoki B bo'sh bo'lsa u holda $A \times B$ bo'sh bo'ladi.

Dekart ko'paytmani umumlashtirish mumkin.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlar ko'paytmasi- bu :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1; a_2; \dots; a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}.$$

A_i to'plam turlicha bo'lishi shart emas.

A to'plamning darajasi deb uni o'zini- o'ziga ko'paytmasiga aytiladi:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ marta}}.$$

$$A^0 = \emptyset, A^1 = A, A^2 = A \times A \text{ va umuman } A^n = A \times A^{n-1}.$$

Misol.3. $B = \{0, 1\}$ bo'lsin. B^n ni toping.

Echish. B^n to'plam n uzunlikka ega bo'lgan nol va birlardan tashkil topadi. Ular bit qatori yoki n uzunlikka ega bo'lgan bit qatori deyiladi.

2.2. To'plam quvvati.

A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan deyiladi, agar A ning elementlariga B to'plamning bitta va faqat bitta elementi mos kelsa, hamda B to'plamning har bir elementiga A to'plamning ayrim elementlari mos kelsa. Bu holda A va B izomorf deyiladi $A \sim B$.

Ta'rif. Ikki A va B to'plamlar ekvivalent, yoki teng quvvatli deyiladi, agar bu to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa. Bu holda: $A \sim B$, yoki $|A|=|B|$, va A va B to'plamlar teng quvvatga ega deyishadi.

- Masalan.** 1) O'nli sanoq sonlar inson barmoqlari to'plami bilan teng quvvatli.
2) Juft natural sonlar ($2N$) hamma natural sonlar to'plamiga teng quvvatli (N).

Ta'rif. A to'plam to'plam chekli deyiladi, agar u J_n ga ekvivalent bo'lsa, bunda $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ - dastlabki n natural son to'plami.

Ta'rif. A chekli to'plamning quvvati, uning elementlari soniga teng. U $|A|=k$ kabi belgilanadi. Bo'sh to'plam chekli hisoblanib, uning quvvati $|\emptyset|=0$.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

Misol. 0 va 1000 sonlari orasida, bita 6 raqami mavjud butun sonlar nechta

Echish S - 0 va 1000 sonlari orasida, bita 6 raqami mavjud butun sonlar to'plami.

S_1, S_2 va S_3 to'plamlar S ning qism to'plami bo'lsinyu.

S_1 - bita 6 raqamini saqlagan bir xonali sonlar to'plam;

S_2 - bita 6 raqamini saqlagan iki xonali sonlar to'plami;

S_3 - bita 6 raqamini saqlagan uch xonali sonlar to'plami;

$$|S_1|=1.$$

S_2 da yo birinchi element yoki ikkinchi element 6 ga teng. Agar birinchi element 6 bo'lsa, u holda bunday elementlar soni 9 ta, ikkinchi element 6 bo'lganlari soni 8 ta., S_2 $8+9=17$ elementdan iborat ya'ni $|S_2|=17$.

S_3 ning birinchi, ikkinchi va uchinchi elementlari 6 ni saqlani mumkin. Agar 6 - birinchi raqam bo'lsa, u holda 9 ta variant ikkinchi raqamni tanlash va 9 ta uchinchi raqamni tanlash imkoniyatiga egamiz. S_3 $9 \times 9 = 81$ ta birinchi raqami 6 bo'lgan sonni saqlaydi. Agar 6 - ikkinchi raqam, u holda 9 variant uchinchi raqamni tanlash va 8 ta variant birinchi raqamni tanlash imkoniga ega bo'lamiz. Bundan kelib chiqadiki, S_3 ikkinchi raqami 6 bo'lgan $9 \times 8 = 72$ ta sonni o'zida saqlaydi. Xuddi shunga o'xshash, S_3 uchinchi raqami 6 bo'lgan 72 ta sonni saqlaydi. S_3 $81+72+72=225$ ta elementni saqlaydi ya'ni $|S_3|=225$.

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$|S| = |S_1 \cup S_2 \cup S_3| = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 1 + 17 + 225 = 243.$$

Misol. 1001 dan kichik bo'lgan nechta butun son 2, 3 yoki 5 ga bo'linadi?

Echish. X - 2, 3 yoki 5 ga bo'linadigan sonlar bo'lsin. Uchta X_1, X_2 va X_3 lar X ning qism to'plami.

X_1 - 2 ga bo'linadigan musbat sonlar to'plami:

$$|X_1| = \left[\frac{1001}{2} \right] = 500.$$

X_2 - 3 ga bo'linadigan musbat sonlar to'plami:

$$|X_2| = \left[\frac{1001}{3} \right] = 333.$$

X_3 - 2 ga bo'linadigan musbat sonlar to'plami:

$$|X_3| = \left[\frac{1001}{5} \right] = 200.$$

$X_1 \cap X_2$ - 2 va 3 ga bo'linadigan musbat sonlar to'plami:

$$|X_1 \cap X_2| = \left[\frac{1001}{2 \cdot 3} \right] = 166.$$

$X_1 \cap X_3$ - 2 yoki 5 ga bo'linadigan musbat sonlar to'plami: $|X_1 \cap X_3| = \left[\frac{1001}{2 \cdot 5} \right] = 100.$

$X_2 \cap X_3$ - 3 yoki 5 ga bo'linadigan musbat sonlar to'plami

$$|X_2 \cap X_3| = \left[\frac{1001}{3 \cdot 5} \right] = 66.$$

$X_1 \cap X_2 \cap X_3$ - 2, 3 yoki 5 ga bo'linadigan musbat sonlar to'plami:

$$|X_1 \cap X_2| = \left[\frac{1001}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right] = 33.$$

$$|X| = |X_1 \cup X_2 \cup X_3| = |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| - |X_2 \cap X_3| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734.$$

Funktsiya tushunchasi matematikada markaziy vazifalardan birini bajaradi. Qaysiki ular turli jarayonlarni tavsiflashda foydalanilib, ular yordamida bir to'plamning elementlari boshqa bir to'plamning elementlariga qaysidir yo'l bilan o'tadi. Elementlarni bunday almashtirish fundamental g'oya bo'lib, barcha hisoblash jarayonlari uchun birinchi darajali qiymat hisoblanadi.

Ta'rif1. $A \times B$ to'plamdagi f munosabat A dan B , **akslantirish (funktsiya)** deb ataladi, agar har bir $x \in A$ uchun bitta va faqat bitta $y \in B$ mos kelsa.

$$f: A \rightarrow B \text{ yoki } y = f(x)$$

A to'plam **aniqlanish sohasi** deyiladi. B - **qiymatlar sohasi**.

Agar $y = f(x)$, u holda x **argument**, y - **funktsiyaning qiymati** deyiladi.

$f: A \rightarrow B$ bo'lsin, u holda funktsiyaning aniqlanish sohasi:

$$f_A = \text{Dom } f = \{x \in A \mid \exists y \in B, y = f(x)\}$$

Qiymatlar sohasi:

$$f_B = \text{Im } f = \{y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$$

Funktsiyaning aniqlanish sohasi aniqlanish sohaning qism to'plami bo'ladi. ya'ni $\text{Dom } f \subseteq A$, funktsiyaning qiymatlar to'plami esa funktsiyaqiymatlari to'plamining qism to'plami bo'ladi, ya'ni $\text{Im } f \subseteq B$.

Agar $f_A \neq A$, u holda funktsiya **umumiy**, agar $f_A = A$ **xususiy funktsiya** deb ataladi

Ularni Venn diagrammasi orqali quyidagicha tasvirlash mumkin:

3-ma'ruza. Kombinatorika. Kombinatorikaning asosiy qoidalari Kiritish va chiqarish formulasi. Kombinatorika predmeti va paydo bo'lish tarixi.

Matematikaning kombinatorik tahlil, kombinatorik matematika, birlashmalar nazariyasi, qisqacha, **kombinatorika** deb ataluvchi bo'limida chekli yoki muayyan ma'noda cheklilik shartini qanoatlantiruvchi to'plamni (bu to'plamning elementlari qanday bo'lishining ahamiyati yo'q: harflar, sonlar, hodisalar, qandaydir predmetlar va boshqalar) qismlarga ajratish, ularni o'rinlash va o'zaro joylash ya'ni, **kombinatsiyalar, kombinatorik tuzilmalar** bilan bog'liq masalalar o'rganiladi. Hozirgi davrda kombinatorikaga oid ma'lumotlar inson faoliyatining turli sohalarida qo'llanilmoqda. Jumladan, matematika, kimyo, fizika, biologiya, lingvistika, axborot texnologiyalari va boshqa sohalar bilan ish ko'ruvchi mutaxassislar kombinatorikaning xilma-xil masalalariga duch keladilar.

To'plamlar nazariyasi iboralari bilan aytganda, kombinatorikada kortejlar va to'plamlar, ularning birlashmalari va kesishmalari hamda kortejlar va qism to'plamlarni turli usullar bilan tartiblash masalalari qaraladi. To'plam yoki kortej elementlarining berilgan xossaga ega konfiguratsiyasi bor yoki yo'qligini tekshirish, bor bo'lsa, ularni tuzish va sonini topish usullarini o'rganish hamda bu usullarni biror parametr bo'yicha takomillashtirish kombinatorikaning asosiy masalalari hisoblanadi.

Kombinatorikaning ba'zi elementlari eramizdan oldingi II asrda hindistonliklarga ma'lum edi. Ular hozirgi vaqtda gruppalashlar deb ataluvchi kombinatorik tushunchadan foydalanishgan. Eramizning XII asrida Bxaskara Acharya o'zining ilmiy tadqiqotlarida gruppalash va o'rin almashtirishlarni qo'llagan. Tarixiy ma'lumotlarga ko'ra, hindistonlik olimlar kombinatorika elementlaridan, jumladan, birlashmalardan foydalanib, she'riy asarlar tarkibiy tuzilishining mukammalligini tahlil qilishga uringanlar. O'rta Osiyo va G'arbiy Yevropada yashab ijod qilgan olimlarning kombinatorikaga oid ishlari haqida ushbu bobning 3-paragrafida ma'lumot keltirilgan.

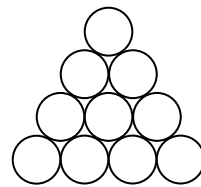
Umuman olganda, kombinatorikaning dastlabki rivoji qimor o'yinlarini tahlil qilish bilan bog'liq. Ba'zi atoqli matematiklar, masalan, B. Paskal, Yakob Bernulli, L. Eyler, P. L. Chebishev turli o'yinlarda (tanga tashlash, soqqa tashlash, qarta o'yinlari va shu kabilarda) ilmiy jihatdan asoslangan qaror qabul qilishda kombinatorikani qo'llashgan.

XVII asrda kombinatorika matematikaning alohida bir ilmiy yo'nalishi sifatida shakllana boshladi. B. Paskal o'zining "Arifmetik uchburchak haqida traktat" va "Sonli tartiblar haqida traktat" (1665 y.) nomli asarlarida hozirgi vaqtda binomial koeffitsientlar deb ataluvchi sonlar haqidagi ma'lumotlarni keltirgan. P. Ferma esa figurali sonlar bilan birlashmalar nazariyasi orasida bog'lanish borligini bilgan.

Figurali sonlar quyidagicha aniqlanadi. Birinchi tartibli figurali sonlar: 1, 2, 3, 4, 5, ... (ya'ni, natural sonlar); ikkinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga teng, 2-si dastlabki ikkita natural sonlar yig'indisi (3), 3-si dastlabki uchta natural sonlar yig'indisi (6) va hokazo (1, 3, 6, 10, 15, ...); uchinchi tartibli figurali sonlar: 1-si 1ga

teng, 2-si birinchi ikkita ikkinchi tartibli figurali sonlarlar yig'indisi (4), 3-si birinchi uchta ikkinchi tartibli figurali sonlarlar yig'indisi (10) va hokazo (1, 4, 10, 20, 35, ...); va hokazo.

1- misol. Tekislikda radiuslari o'zaro teng bo'lgan aylanalar bir-biriga uringan holda yuqoridan 1- qatorda bitta, 2- qatorda ikkita, 3- qatorda uchta va hokazo, joylashtirilgan bo'lsin. Masalan, aylanalar bunday joylashuvining dastlabki to'rt qatori 1- shaklda tasvirlangan. Bu yerda qatorlardagi aylanalar sonlari ketma-ketligi birinchi tartibli figurali sonlarni tashkil qiladi. Bu tuzilmadan foydalanib ikkinchi tartibli figurali sonlarni quyidagicha hosil qilish mumkin. Dastlab 1- qatordagi aylanalar soni (1), keyin dastlabki ikkita qatordagi aylanalar soni (3), undan keyin dastlabki uchta qatordagi aylanalar soni (6), va hokazo.



1

"Kombinatorika" iborasi G. Leybnisning "Kombinatorik san'at haqidagi mulohazalar" nomli asarida birinchi bor 1665 yilda keltirilgan. Bu asarda birlashmalar nazariyasi ilmiy jihatdan ilk bor asoslangan. O'rinlashtirishlarni o'rganish bilan birinchi bo'lib Yakob Bernulli shug'ullangan va bu haqdagi ma'lumotlarni 1713 yilda bosilib chiqqan "Ars conjectandi" (Bashorat qilish san'ati) nomli kitobining ikkinchi qismida bayon qilgan. Hozirgi vaqtda kombinatorikada qo'llanilayotgan belgilashlar XIX asrga kelib shakllandi.

Kombinatsiya - bu kombinatorikaning asosiy tushunchasidir. Bu tushuncha yordamida ixtiyoriy to'plamning qandaydir sondagi elementlaridan tashkil topgan tuzilmalar ifodalanadi. Kombinatorikada bunday tuzilmalarning **o'rin almashtirishlar**, **o'rinlashtirishlar** va **gruppalashlar** deb ataluvchi asosiy ko'rinishlari o'rganiladi.

1.2. Kombinatorikada ko'p qo'llaniladigan usul va qoidalar. Kombinatorika va graflar nazariyasida tasdiqlarni isbotlashning samarali usullaridan biri bo'lgan **matematik induksiya usuli** ko'p qo'llaniladi. Bu usulning ketma-ket bajariladigan ikkita qismi bo'lib, ular quyidagi umumiy g'oyaga asoslanadi.

Faraz qilaylik, isbotlanishi kerak bo'lgan tasdiq birorta xususiy $n = n_0$ qiymat (masalan, $n_0 = 1$) uchun to'g'ri bo'lsin (usulning bu qismi **baza** yoki **asos** deb ataladi). Agar bu tasdiqning istalgan $n = k > n_0$ uchun to'g'riligidan uning $n = k + 1$ uchun to'g'riligi kelib chiqsa, u holda tasdiq istalgan natural $n \geq n_0$ son uchun to'g'ri bo'ladi (**induksion o'tish**).

2- misol. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

tenglikning o'rinli bo'lishini matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

Baza: $n = 1$ bo'lsin, u holda yuqoridagi tenglik to'g'ri ekanligi ravshan:

$$1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$

Induksion o'tish: isbotlanish kerak bo'lgan tenglik $n = k > 1$ uchun to'g'ri, ya'ni

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

tenglik o'rinli bo'lsin. Bu tenglikning chap va o'ng tomonlariga $(k+1)^2$ ifodani qo'shib, uni

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

ko'rinishda yozamiz. Oxirgi tenglikning o'ng tomonida quyidagicha o'zgartirishlarni bajaramiz:

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= (k+1) \left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) \right] = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 4k + 3k + 6)}{6} = \\ &= \frac{(k+1)[2k(k+2) + 3(k+2)]}{6} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}. \end{aligned}$$

Demak,

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Oxirgi munosabat isbotlanishi kerak bo'lgan tenglikning $n=k+1$ bo'lgan holidir.

Shuni ta'kidlash kerakki, biror tasdiqni isbotlash uchun matematik induksiya usuli qo'llanilganda, bu usulning ikkala qismini ham tekshirib ko'rish muhimdir, ya'ni baza va induksion o'tish albatta tekshirilishi shart. Ulardan biri tekshirilmasa noto'g'ri natijalar hosil bo'lishi ham mumkin. Bundan tashqari, baza birorta xususiy qiymatdan boshqa ko'p, hattoki, juda ko'p xususiy hollar uchun tekshirilib, ijobiy natija olinganda ham, bu hollarni umumlashtiruvchi natijaviy tasdiq noto'g'ri bo'lib chiqishi mumkin. Bu mulohazalarning o'rinli ekanligini quyida keltirilgan misollar ko'rsatadi.

3- misol. "Ixtiyoriy n natural son uchun $2n-1$ son 2ga qoldiqsiz bo'linadi" degan tasdiqni tekshirishda matematik induksiya usulining baza qismi talabini bajarmasdan faqat induksion o'tishni tekshiramiz.

Bu tasdiq $n=k>1$ uchun to'g'ri bo'lsin, ja'ni $2k-1$ son 2ga qoldiqsiz bo'linsin deb faraz qilamiz. U holda $(2k-1)+2$ son ham, qo'shiuvchilarining har biri 2ga qoldiqsiz bo'linganligi sababli, 2ga qoldiqsiz bo'linadi. Shuning uchun $(2k-1)+2=2(k+1)-1$ tenglik asosida $2(k+1)-1$ son 2ga qoldiqsiz bo'linadi degan xulosa kelib chiqadi. Demak, yuqoridagi tasdiq $n=k+1$ uchun to'g'ri, ya'ni induksion o'tish bajarildi deb hisoblash mumkin.

Shunday qilib, matematik induksiya usulining baza qismini tekshirmasdan "ixtiyoriy natural n son uchun $2n-1$ son 2ga qoldiqsiz bo'linadi" degan xulosa qilish noto'g'ridir, chunki ixtiyoriy n natural son uchun $2n-1$ sonni 2ga bo'lganda 1 qoldiq qoladi.

4- misol. "Ixtiyoriy n natural son uchun n^2+n+17 ifodaning qiymati tub sonidir" degan tasdiqni tekshirish maqsadida matematik induksiya usulining faqat baza qismi talabini dastlabki 15ta natural sonlar uchun bajaramiz.

$n=1$ bo'lganda $n^2+n+17=1^2+1+17=19$ tub son hosil bo'ladi. $n=2, 15$ bo'lganda ham n^2+n+17 ifodaning qiymati sifatida 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227 va 257 tub sonlarni hosil qilamiz.

Induksion o'tishni tekshirmasdan "ixtiyoriy natural n son uchun $n^2 + n + 17$ ifodaning qiymati tub sonidir" degan xulosa qilish noto'g'ridir, chunki, masalan, agar $n=16$ bo'lsa, u holda bu ifodaning qiymati murakkab sonidir:
 $n^2 + n + 17 = 16^2 + 16 + 17 = 289 = 17 \cdot 17$.

5- misol. Biror n natural son uchun $991n^2 + 1$ son butun sonning kvadrati bo'ladimi? Bu savolga javob berish uchun, n ning dastlabki o'n, yuz, ming, million, milliard, hattoki, trillionta qiymatlari uchun $991n^2 + 1$ ifoda tekshirilganda, uning qiymatlaridan birortasi ham butun son kvadrati bo'lmasligi qayd etilgan. Shunday bo'lishiga qaramasdan bu tasdiq asosida, induksion o'tishni bajarmasdan, "ixtiyoriy natural n son uchun $991n^2 + 1$ ifodaning qiymati butun sonning kvadrati bo'lmaydi" degan xulosa qilish mumkin emas. $991n^2 + 1$ ifodaning qiymati butun sonning kvadrati bo'ladigan n natural sonning borligi va bunday sonning eng kichigini o'nli sanoq sistemasida yozganda 29ta (!) raqam bilan ifodala-nishi komp'yuter yordamida aniqlangan ([34]ga qarang).

Matematik induksiya usulining tadbqiqiga yana bir misol sifatida quyidagi teoremani isbotlaymiz.

1- teorema. Ixtiyoriy chekli A to'plam uchun $|2^A| = 2^{|A|}$ tenglik o'rinlidir.

Isboti. Matematik induksiya usulini berilgan to'plamning quvvati bo'yicha qo'llaymiz.

Baza. Dastlab A to'plamning elementlari soni nolga teng, ya'ni $|A|=0$ bo'lganda teoremaning tasdig'i bajarilishini ko'rsatamiz. $A_0 = \emptyset$ bo'lsin. U holda $A = A_0$ uchun $|A|=0$, $2^A = 2^\emptyset = \{\emptyset\}$ va $|2^A| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0 = 2^{|\emptyset|}$ bo'ladi. Demak, teoremaning tasdig'i $|A|=0$ bo'lgan hol uchun to'g'ridir.

Induksion o'tish. Chekli k elementli ixtiyoriy A_k to'plam uchun teoremaning tasdig'i to'g'ri bo'lsin, ya'ni $A = A_k$ bo'lganda $|2^A| = 2^{|A|}$ tenglik bajarilsin. $k+1$ elementli A_{k+1} to'plamni qaraymiz. Ravshanki, $A = A_{k+1}$ uchun $|A|=k+1$ bo'ladi. Qaralayotgan A to'plamning ixtiyoriy a elementi uchun 2^A bulean to'plamni o'zaro kesishmaydigan ikkita $B_a^- = \{X \mid X \subset 2^A, a \notin X\}$ va $B_a^+ = \{X \mid X \subset 2^A, a \in X\}$ to'plamlar birlashmasi sifatida yozish mumkin. Demak, $|2^A| = |B_a^-| + |B_a^+|$.

Tuzilishiga ko'ra, B_a^- to'plam k elementli to'plamning buleanidan iborat. Shuning uchun, induksion o'tish faraziga ko'ra $|B_a^-| = 2^k$ bo'ladi. B_a^+ to'plam esa B_a^- to'plamning har bir element-to'plamiga a elementni kiritish yordamida hosil qilingan. Bundan $|B_a^+| = |B_a^-| = 2^k$ kelib chiqadi. Demak, $|A|=k+1$ bo'lgan hol uchun

$$|2^A| = |B_a^-| + |B_a^+| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} = 2^{|A|}.$$

Ushbu bobning 3- paragrafida 1- teoremaning kombinatorik tushunchalarga asoslangan boshqa isboti keltiriladi.

Berilgan chekli A to'plamning buleani uning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan to'plam bo'lgani sababli 1- teoremada isbotlangan $|2^A| = 2^{|A|}$ tenglik A to'plamning buleanini 2^A ko'rinishda belgilashga asos bo'la oladi.

Kombinatorikada sodda, o'z-o'zidan ravshan bo'lgan, ammo muhim qoidalar bor. Bunday qoidalar sifatida qo'shish, ko'paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalari deb ataluvchi qoidalarni ko'rsatish mumkin.

m ta elementli A to'plam va n ta elementli B to'plamlar berilgan bo'lib, ular kesishmasin. **Qo'shish qoidasiga** ko'ra, A yoki B to'plamga tegishli bo'ladigan birorta elementni tanlash imkoniyatlari soni $(m+n)$ ga tengdir. **"Yoki" qoidasi** deb ham ataluvchi bu qoida mazmunini quyidagi teorema orqali ham ifodalash mumkin.

2- teorema. Agar ixtiyoriy chekli A va B to'plamlar uchun $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $|A \cup B| = |A| + |B|$ bo'ladi.

Isboti o'quvchiga havola qilinadi.

Demak, qo'shish qoidasiga ko'ra, kesishmaydigan ikkita to'plam birlashmasining quvvati shu to'plamlar quvvatlarining yig'indisiga tengdir.

Ko'paytirish qoidasiga asosan, m ta elementli A va n ta elementli B to'plamlarning elementlaridan tuzish mumkin bo'lgan barcha $\langle a, b \rangle$ ($a \in A, b \in B$) kortejlar (juftliklar) soni mn ga teng. Bu qoida **"va" qoidasi** deb ham ataladi. Uni quyidagi teorema ko'rinishda ifodalash ham mumkin.

3- teorema. Ixtiyoriy chekli A va B to'plamlar uchun $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ tenglik o'rinlidir.

Isboti o'quvchiga havola qilinadi.

Demak, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, ixtiyoriy ikkita chekli to'plam Dekart ko'paytmasining quvvati shu to'plamlar quvvatlarining ko'paytmasiga tengdir.

Umumiy holda, agar chekli A va B to'plamlar hech bo'lmaganda bitta umumiy elementga ega bo'lsa, u holda $|A| + |B|$ yig'indining qiymatini aniqlashda $A \cup B$ to'plamning ba'zi elementlarini, aniqrog'i, $A \cap B$ to'plamning elementlarini ikki marta hisobga olishga to'g'ri keladi. Bu mulohaza asosida quyidagi tasdiqqa kelamiz.

4- teorema. Ixtiyoriy chekli A va B to'plamlar uchun $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ tenglik o'rinlidir.

Isboti. Osonlik bilan ko'rish mumkinki:

a) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ va $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$;

b) $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ va $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

Bu munosabatlarga 2- teoremani qo'llasak, mos ravishda $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|$ va $|B| = |A \cap B| + |B \setminus A|$ tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklardan isbotlanishi kerak bo'lgan tenglikni hosil qilish qiyin emas.

4- teoremaning tasdig'ini umumiy holda ikkita chekli to'plamlar birlashmasining quvvatini hisoblash qoidasi deyish mumkin. Bu qoidaning ma'nosidan kelib chiqqan holda, uni **kiritish va chiqarish qoidasi** deb atash qabul qilingan.

Ravshanki, 4- teoremada keltirilgan tenglikdan foydalanib $|A|$, $|B|$, $|A \cup B|$ va $|A \cap B|$ miqdorlarning ixtiyoriy uchtasi ma'lum bo'lganda to'rtinchisini hisoblash formulasini hosil qilish mumkin.

Yuqorida bayon qilingan ikkita to'plam uchun qo'shish, ko'paytirish hamda kiritish va chiqarish qoidalarini chekli sondagi istalgan chekli to'plamlar uchun umumlashtirish mumkin.

Avvalo, kiritish va chiqarish qoidasining umumlasmasi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz.

5- teorema (umumlashgan kiritish va chiqarish qoidasi). *Ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlar uchun*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n| - \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \\ &\quad - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

munosabat o'rinlidir.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo'llaymiz. $k=1$ bo'lgan hol uchun teoremaning tasdig'i trivialdir.

Induksiya usulining bazasi sifatida $k=2$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig'i 3- teoreмага asosan to'g'ri.

Induksion o'tish: teoremaning tasdig'i $n=k$ uchun to'g'ri, ya'ni

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k| - \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{k-1} \cap A_k| + \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k| - \\ &\quad - \dots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| \end{aligned}$$

tenglik o'rinli bo'lsin. Tasdiqning $n=k+1$ bo'lgan holda to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz. Avvalo, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, A_{k+1}$ to'plamlarning $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}$ birlashmasini $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k) \cup A_{k+1}$ ko'rinishda ifodalaymiz. So'ngra 3- teoremani va kesishmaga nisbatan umumlashgan distributivlik qonunini qo'llab hamda teorema tasdig'ining $n=k$ uchun to'g'riligini hisobga olib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k) \cup A_{k+1}| &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k) \cap A_{k+1}| = \\ &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{k-1} \cap A_k| + \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k| - \\ &\quad - \dots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| + |A_{k+1}| - \\ &\quad - |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup (A_3 \cap A_{k+1}) \cup \dots \cup (A_k \cap A_{k+1})|. \end{aligned}$$

Bu ifodadagi oxirgi ayriluvchi $A_i \cap A_{k+1}$ ($i=1,2,3,\dots,k$) ko'rinishdagi k ta to'plamlar birlashmasining quvvatini ifodalaydi. Shuning uchun, induksiya faraziga ko'ra, bu ayriluvchini quyidagicha yozish mumkin:

$$|(A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup (A_3 \cap A_{k+1}) \cup \dots \cup (A_k \cap A_{k+1})| =$$

$$\begin{aligned}
& |A_1 \cap A_{k+1}| + |A_2 \cap A_{k+1}| + |A_3 \cap A_{k+1}| + \dots + |A_k \cap A_{k+1}| - \\
& - |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1})| - |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_3 \cap A_{k+1})| - \\
& - \dots - |(A_{k-1} \cap A_{k+1}) \cap (A_k \cap A_{k+1})| + \\
& + |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap (A_3 \cap A_{k+1})| + \\
& + |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap (A_4 \cap A_{k+1})| + \dots + \\
& + |(A_{k-2} \cap A_{k+1}) \cap (A_{k-1} \cap A_{k+1}) \cap (A_k \cap A_{k+1})| - \\
& - \dots + (-1)^{k-1} |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_2 \cap A_{k+1}) \cap \dots \cap (A_k \cap A_{k+1})| = \\
& = |A_1 \cap A_{k+1}| + |A_2 \cap A_{k+1}| + |A_3 \cap A_{k+1}| + \dots + |A_k \cap A_{k+1}| - \\
& - |A_1 \cap A_2 \cap A_{k+1}| - |A_1 \cap A_3 \cap A_{k+1}| - \dots - |A_1 \cap A_k \cap A_{k+1}| + \\
& + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_{k+1}| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_{k+1}| + \dots + \\
& + |A_1 \cap A_2 \cap A_k \cap A_{k+1}| + \dots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}|.
\end{aligned}$$

Bu ifodani o'z o'rniga qo'yib

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_k| + |A_{k+1}| - \\
&- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_k \cap A_{k+1}| + \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}| - \\
&- \dots + (-1)^k |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap A_{k+1}|
\end{aligned}$$

tenglikni hosil qilamiz.

6- teorema (umumlashgan qo'shish qoidasi). *Juft-jufti bilan kesishmaydigan ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlar uchun*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

tenglik o'rinlidir.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra barcha $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, indekslar uchun $A_i \cap A_j = \emptyset$ bo'lgani sababli 5- teorema asosida kerakli tenglikni hosil qilamiz.

7- teorema. *Ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlar uchun*

$$\begin{aligned}
|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n| - \\
&- |A_1 \cup A_2| - |A_1 \cup A_3| - \dots - |A_{n-1} \cup A_n| + \\
&+ |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_1 \cup A_2 \cup A_4| + \dots + |A_{n-2} \cup A_{n-1} \cup A_n| - \\
&- \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.
\end{aligned}$$

munosabat o'rinlidir.

Isboti o'quvchiga havola qilinadi.

8- teorema (umumlashgan ko'paytirish qoidasi). *Elementlari soni mos ravishda $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ bo'lgan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ to'plamlardan faqat bittadan element olib tuzilgan k uzunlikka ega kortejlar soni $n_1 n_2 n_3 \dots n_k$ ga tengdir.*

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo'llaymiz. $k=1$ bo'lgan hol uchun teoremaning tasdig'i trivialdir.

Induksiya usulining bazasi sifatida $k=2$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda teoremaning tasdig'i yuqorida keltirilgan ikkita to'plam uchun ko'paytirish qoidasidan kelib chiqadi.

Induksion o'tish: teoremaning tasdig'i $k=s$ ($s=\overline{1, k-1}$) uchun to'g'ri bo'lsin, ya'ni, $A_1, A_2, \dots, A_s$ to'plamlardan faqat bittadan element olib tuzilgan s uzunlikdagi kortejlar soni $n_1 n_2 \dots n_s$ bo'lsin deb faraz qilamiz. Teorema tasdig'ining $k=s+1$ uchun ham to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz.

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{s+1}$ to'plamlardan faqat bittadan element olib uzunligi $(s+1)$ ga teng bo'lgan kortejlar sonini aniqlash uchun turlicha usullardan foydalanish mumkin. Bu yerda quyidagi usul bilan kerakli natijani olsa bo'ladi. Dastlab uzunligi birga teng bo'lgan kortejlarni tuzamiz. Uzunligi birga teng bo'lgan kortejlar berilgan to'plamlarning ixtiyoriy biridan faqat bitta elementni tanlash yordamida tuzilishi ravshan. Tabiiyki, agar uzunligi birga teng kortejlar $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1}\}$ to'plamning elementlaridan tuzilsa, bunday kortejlar soni n_1 ga tengdir.

Uzunligi birga teng kortejlardan ixtiyoriy birini, masalan, a_{11} ni olib, uning o'ng tomoniga A_1 to'plamdan boshqa biror to'plamning, masalan, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n_2}\}$ to'plamning elementlaridan birini joylashtirib, birinchi koordinatasi a_{11} bo'lgan uzunligi ikkiga teng n_2 ta kortejlar hosil qilamiz. Uzunligi birga teng kortej sifatida n_1 ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini hisobga olib, hammasi bo'lib uzunligi ikkiga teng $n_1 n_2$ ta kortejlarga ega bo'lamiz.

Uzunligi ikkiga teng kortejlarning har biriga o'ng tomondan A_1 va A_2 to'plamlardan boshqa biror to'plamning, masalan, $A_3 = \{a_{31}, a_{32}, \dots, a_{3n_3}\}$ to'plamning n_3 ta elementlaridan birini joylashtirib, uzunligi uchga teng n_3 ta kortejlar hosil qilamiz. Bu yerda uzunligi ikkiga teng kortej sifatida $n_1 n_2$ ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini e'tiborga olib, uzunligi uchga teng $n_1 n_2 n_3$ ta kortejlarni hosil qilamiz.

Kortejlar hosil qilish jarayonini yuqoridagiga o'xshash mulohazalar bilan davom ettirib, bu kortejlarning har biriga o'ng tomondan $A_1, A_2, \dots, A_s$ to'plamlardan boshqa $A_{s+1} = \{a_{(s+1)1}, a_{(s+1)2}, \dots, a_{(s+1)n_s}\}$ to'plamning n_{s+1} ta elementlaridan birini joylashtirib, uzunligi $(s+1)$ ga teng bo'lgan n_{s+1} ta kortejlar hosil qilamiz. Bu yerda ham uzunligi s ga teng kortej sifatida $n_1 n_2 \dots n_s$ ta kortejlardan ixtiyoriy birini olish mumkinligini e'tiborga olamiz. Shunday qilib, $n_1 n_2 \dots n_s$ marta n_{s+1} ta kortej hosil bo'ldi. Demak, uzunligi $(s+1)$ ga teng bo'lgan kortejlar $n_1 n_2 \dots n_s n_{s+1}$ tadir.

4- ma'ruza. Tartiblangan va tartiblanmagan tanlanmalar. O'rin almashtirishlar.

Elementlari $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ bo'lgan to'plamni qaraymiz. Bu to'plam elementlarini har xil tartibda joylashtirib (yozib), tuzilmalar (kombinatsiyalar) hosil qilish mumkin, masalan,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n; a_2, a_1, a_3, \dots, a_n; a_2, a_3, a_1, \dots, a_n.$$

Bu tuzilmalarning har birida berilgan to'plamning barcha elementlari ishtirok etgan holda ular bir-biridan faqat elementlarning joylashish o'rinlari bilan farq qiladilar. Shu usul yordamida hosil qilingan kombinatsiyalarning har biri berilgan $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to'plam elementlarining **o'rin almashtirishi** deb ataladi.

Aslida "o'rin almashtirish" iborasi to'plam elementlarining o'rinlarini o'zgartirish harakatini anglatib, bu yerda uni shu harakat natijasidagi hosil bo'lgan tuzilma sifatida qo'llaymiz. Bu iboradan uning asl ma'nosida ham foydalanamiz.

O'rin almashtirishni ifodalashda uning elementlarini ajratuvchi belgi sifatida yuqorida "," (vergul) belgisidan foydalanildi. Ammo bu muhim emas, bu yerda boshqa belgidan ham foydalanish, hattoki, yozuvning ixchamligi maqsadida, elementlar orasidagi ajratuvchi belgilarni tushirib qoldirilish ham mumkin. Bu eslatma bundan keyin bayon etiladigan boshqa kombinatorik tuzilmalar uchun ham o'rinlidir.

To'plam tushunchasiga asoslanib, bu yerda qaralayotgan o'rin almashtirishlar tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday o'rin almashtirishlarni **betakror (takrorli emas) o'rin almashtirishlar** deb ham atash mumkin.

Berilgan n ta elementli to'plam uchun barcha o'rin almashtirishlar sonini P_n bilan belgilash qabul qilingan¹.

Bitta elementli $\{a\}$ to'plam uchun faqat bitta a ko'rinishdagi o'rin almashtirish borligi ravshandir: $P_1 = 1$.

Ikkita elementli $\{a, b\}$ to'plam elementlaridan o'rin almashtirishlarni bitta elementli $\{a\}$ to'plam uchun a o'rin almashtirishidan foydalanib quyidagicha tashkil qilamiz: b element a elementdan keyin yozilsa ab o'rin almashtirishga, oldin yozilsa esa ba o'rin almashtirishga ega bo'lamiz. Demak, ko'paytirish qoidasiga binoan ikkita o'rin almashtirish bor: $P_2 = 2 = 1 \cdot 2$.

Uchta elementli $\{a, b, c\}$ to'plam uchun o'rin almashtirishlar tashkil qilishda ikkita elementli $\{a, b\}$ to'plam uchun tuzilgan ab va ba o'rin almashtirishlardan foydalanish mumkin. Berilgan to'plamning c elementini ab va ba o'rin almashtirishning har biriga uch xil usul bilan joylashtirish mumkin: ularning elementlaridan keyin, elementlarining orasiga va elementlaridan oldin. Ko'paytirish qoidasini qo'llasak, uchta elementli $\{a, b, c\}$ to'plam uchun oltita ($P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$) har xil o'rin almashtirishlar hosil bo'lishini aniqlaymiz. Ular quyidagilardir:

¹ Fransuzcha "permutation" so'zi o'rin almashtirish ma'nosini anglatadi.

$abc, acb, cab, bac, bca, cba$.

To'rtta elementli $\{a, b, c, d\}$ to'plamni qarab, uchta elementli $\{a, b, c\}$ to'plam uchun tuzilgan oltita o'rin almashtirishlarning har biriga d elementni to'rt xil usul bilan joylashtirish imkoniyati borligini e'tiborga olsak, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, $P_4 = 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ bo'lishini topamiz. Bu yerda barcha o'rin almashtirishlar quyidagilardir:

$abcd, abdc, adbc, dabc,$
 $acbd, acdb, adcb, dacb,$
 $cabd, cadb, cdab, dcab,$
 $bacd, badc, bdac, dbac,$
 $bcad, bcda, bdca, dbca,$
 $cbad, cbda, cdba, dcba.$

Shu tarzda davom etib " n ta elementli to'plam uchun barcha o'rin almashtirishlar soni birdan n gacha bo'lgan barcha natural sonlarning ko'paytmasiga teng" deb faraz qilish mumkin: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n$. Bu farazning to'g'riligi quyidagi 1-teoremada isbot qilinadi.

Dastlabki n ta natural sonlar ko'paytmasini $n!$ ko'rinishida belgilash qabul qilingan, ya'ni $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$. $n!$ belgisidan bunday ma'noda birinchi bo'lib K. Kramp² 1808 yilda nashr etilgan algebra bo'yicha qo'llanmada foydalangan.

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ifodada $n=1$ bo'lganda faqat 1 soni ishtirok etadi, shuning uchun, ta'rif sifatida $1!=1$ deb hisoblash qabul qilingan. Bundan tashqari, $n=0$ bo'lganda esa $n!$ ifoda umuman ma'nosini yo'qotadi. Lekin, ta'rif sifatida $0!=1$ deb qabul qilinadi.

1- teorema. *Elementlari soni n ta bo'lgan to'plam uchun o'rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng, ya'ni $P_n = n!$.*

Isboti. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulidan foydalanamiz. Asos to'g'riligini, ya'ni teoremaning tasdig'i $n=1$ uchun to'g'riligini yuqorida ko'rdik. Induksion o'tish uchun teoremaning tasdig'i biror natural $n=k$ uchun to'g'ri bo'lsin deb faraz qilamiz, ya'ni $P_k = k!$ bo'lsin. Ravshanki, $(k+1)$ ta elementli to'plamni k ta elementli to'plamga yangi $(k+1)$ - elementni kiritish yordamida hosil qilish mumkin. Bu $(k+1)$ - elementni k elementli to'plam uchun barcha $k!$ ta o'rin almashtirishlarning har biriga quyidagicha $(k+1)$ xil usul bilan kiritish mumkin:

1- elementdan oldin,
1- va 2- elementlar orasiga,
2- va 3- elementlar orasiga,
.....
 $(k-1)$ - va k - elementlar orasiga,

² Kristian Kramp (Christian, 1760-1826) - olmon matematigi. Asosiy ishlari kombinatorika, geometriya va algebraga bag'ishlangan.

k - elementdan keyin.

Shunday qilib, ko'paytirish qoidasiga binoan, $(k+1)$ ta elementli to'plam uchun jami $k!(k+1) = (k+1)!$ ta o'rin almashtirishlar hosil bo'ladi, ya'ni $P_{k+1} = (k+1)!$.

1- misol. Besh nafar tomoshabinlarning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Agar tomoshabinlarni a, b, c, d, e harflar bilan belgilasak, u holda $T = \{a, b, c, d, e\}$ tomoshabinlar to'plamiga ega bo'lamiz. Tomoshabinlarni o'rinlarga joylashtirish imkoniyatlarining (variantlarining) har biriga tomoshabinlar T to'plami elementlarining qandaydir o'rin almashtirishi mos keladi. T to'plam beshta elementli bo'lgani uchun, 1- teoreмага asosan, $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ bo'ladi. Demak, besh nafar tomoshabinning beshta o'rinni egallash imkoniyatlari soni 120ga teng.

2- misol. Shaxmat bo'yicha musobaqada har birining tarkibida to'rt nafar o'yinchi bo'lgan ikkita komanda ishtirok etmoqda. Har bir komanda rahbariga to'rtta shaxmat taxtasida o'yinlar o'tkazish uchun o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash imkoniyati berilgan. Musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) sonini toping.

Har bir komanda a'zolari uchun shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlarini $P_n = n!$ formula yordamida hisoblash mumkin: $P_4 = 4! = 24$. Komandalardagi o'yinchilarni ixtiyoriy ravishda tartiblash mumkin bo'lganligidan, ko'paytirish qoidasiga ko'ra, musobaqa qatnashchilarining shaxmat taxtalarini egallash imkoniyatlari (variantlari) soni $24 \cdot 24 = 576$ bo'ladi.

O'rinlashtirishlar. n ta elementli $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Shu to'plamning ixtiyoriy m ta elementidan hosil qilingan tartiblangan $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\}$ tuzilmaga (kombinatsiyaga) n ta elementdan m tadan o'rinlashtirish deb ataladi.

Bu ta'rifdan ko'rinib turibdiki, elementlari soni bir xil bo'lgan ikkita har xil o'rinlashtirishlar bir-biridan elementlari bilan yoki bu elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladilar. Bundan tashqari, n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar uchun $m \leq n$ bo'lishi ham ravshan. Bu yerda qaralayotgan o'rinlashtirishlar tarkibidagi elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday o'rinlashtirishlarni **betakror (takrorli emas) o'rinlashtirishlar** deb ham atash mumkin. Berilgan n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar soni, odatda, A_n^m bilan belgilanadi³.

Ravshanki, berilgan n ta $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ elementlardan bittadan o'rinlashtirishlar n ta bo'ladi (bular: $a_1; a_2; \dots$ va hokazo, a_n), ya'ni $A_n^1 = n$.

n ta elementdan bittadan o'rinlashtirishlar yordamida n ta elementdan ikkitadan o'rinlashtirishlarni quyidagicha tuzish mumkin. n ta elementdan bittadan o'rinlashtirishlarning har biridagi elementdan keyin yoki oldin qolgan $(n-1)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirsa bo'ladi. Natijada, ko'paytirish qoidasiga

³ Fransuzcha "arrangement" so'zi o'rinlashtirish ma'nosini beradi.

binoan, jami soni $A_n^2 = n(n-1)$ ta bo'lgan n ta elementdan ikkitadan o'rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shu kabi, n ta elementdan uchta o'rinlashtirishlarni hosil qilish uchun n ta elementdan ikkitadan o'rinlashtirishlarga murojaat qilish mumkin. Bu yerda n ta elementdan ikkitadan o'rinlashtirishlarning har biri uchun uni tashkil etuvchi ikkita elementlardan oldin, elementlar orasiga yoki elementlardan keyin qolgan $(n-2)$ ta elementlardan ixtiyoriy bittasini joylashtirish imkoniyati bor. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra natijada jami soni $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ ta bo'lgan n ta elementdan uchta o'rinlashtirishlarni hosil qilamiz.

Shunga o'xshash mulohaza yuritib, n ta elementdan to'rtta, beshta va hokazo o'rinlashtirishlar soni uchun mos ifodalarni aniqlash qiyin emas.

2- teorema. n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar soni eng kattasi n ga teng bo'lgan m ta ketma-ket natural sonlarning ko'paytmasiga tengdir, ya'ni $A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$.

Isboti. n - ixtiyoriy natural son bo'lsin. Teoremani isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo'llab, teorema tasdig'ining n dan oshmaydigan ixtiyoriy m natural son uchun to'g'riligini ko'rsatamiz (ya'ni induksiyani m bo'yicha bajaramiz).

Baza: yuqorida $A_n^1 = n$ ekanligi aniqlangan edi, ya'ni teorema tasdig'i $m=1$ uchun to'g'ridir.

Induksion o'tish: $A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$ formula $m=k < n$ uchun to'g'ri bo'lsin deb faraz qilamiz va uning $m=k+1$ uchun ham to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz. n ta elementdan $(k+1)$ tadan o'rinlashtirishlarning ixtiyoriy bittasini quyidagicha hosil qilish mumkin. Bunday o'rinlashtirishning birinchi elementi sifatida berilgan $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to'plamning istalgan elementini, masalan, a_1 ni tuzilayotgan o'rinlashtirishga joylashtiramiz. Undan keyin umumiy soni A_{n-1}^k ga teng bo'lgan $(n-1)$ ta elementdan k tadan o'rinlashtirishlarning ixtiyoriy biridagi barcha elementlarni joylashtiramiz. Birinchi elementi a_1 dan iborat bo'lgan barcha n ta elementdan $(k+1)$ tadan o'rinlashtirishlarning soni A_{n-1}^k ga tengdir. Bunday o'rinlashtirishlarning birinchi elementi sifatida $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to'plamning ixtiyoriy elementini tanlash mumkinligini e'tiborga olsak, ko'paytirish qoidasiga binoan, berilgan n ta elementdan $(k+1)$ tadan o'rinlashtirishlar soni quyidagicha aniqlanishi kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} A_n^{k+1} &= nA_{n-1}^k = n(n-1)(n-2)\dots((n-1)-k+1) = \\ &= n(n-1)\dots(n-(k+1)+1). \end{aligned}$$

Bu munosabat isbotlanayotgan formulaning $m=k+1$ uchun to'g'riligini ko'rsatadi. ■

3- misol. Guruh 25 nafar talabadan tashkil topgan bo'lsin. Bu guruhda guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo'yicha vakilini saylash zarur. Har bir talaba bu vazifalardan faqat bittasini bajaradi deb hisoblansa, saylov natijalari uchun qancha imkoniyat mavjud?

Bu yerda 25ta elementli talabalar to'plamining tartiblangan uchta elementli (guruh sardori, guruh sardorining yordamchisi va kasaba uyushmasining guruh bo'yicha vakili) qism to'plamlari sonini aniqlash zarur. Bu esa 25ta elementdan

uchtadan o'rinlashtirishlar sonini topish demakdir. Qo'yilgan savolga javob topish maqsadida 2- teoremadagi isbotlangan formulani $n=25$ va $m=3$ bo'lgan holda qo'llab, $A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, guruhdagi saylov natijalari uchun 13800ta imkoniyat mavjud. ■

$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$ formulani $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ ko'rinishda ham yozish mumkin.

Haqiqatdan ham,

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)(n-m)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Yuqorida ta'kidlaganganidek, n ta elementdan m tadan o'rilashtirishlar n elementli to'plamning bir-biridan tarkibi bilan ham, elementlarining joylashishi bilan ham farqlanadigan qism to'plamlaridan iboratdir. Agar bu o'rinlashtirishlarda n ta elementli to'plamning barcha elementlari qatnashsa (ya'ni $m=n$ bo'lsa), n ta elementli to'plam uchun barcha o'rin almashtirishlar hosil bo'lishi tabiiydir. Shu tufayli, o'rin almashtirishlarning oldin keltirilgan ta'rifiga ekvivalent quyidagi ta'rifni ham berish mumkin.

n ta elementli to'plam uchun o'rin almashtirishlar deb n ta elementdan n tadan o'rinlashtirishlarga aytiladi. Bunda har bir element faqat bir marta qatnashadi va ular bir-biridan faqat o'zaro joylashishlari bilan farq qiladilar.

O'rin almashtirishlarning bu ta'rifiga asosanib n ta elementli to'plam uchun o'rin almashtirishlar soni formulasini o'rinlashtirishlar soni formulasi yordamida hosil qilish mumkin. Haqiqatdan ham,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots(n-(n-1)) = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 = n!$$

yoki
$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

2.3. Gruppalashlar. $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Bu n elementli to'plamning elementlaridan m ta elementga ega qism to'plamlarni shunday tashkil etamizki, ular bir-biridan elementlarining joylashish tartibi bilan emas, faqat tarkibi bilan farq qilsinlar. Bunday m ta elementli qism to'plamlarning har biriga **n ta elementdan m tadan gruppalash** deb ataladi.

n ta elementdan m tadan gruppalashlar sonini C_n^m bilan belgilaymiz⁴.

Gruppalashlar sonini $\binom{m}{n}$ yoki $\binom{n}{m}$ shaklda belgilashlar ham uchraydi.

Gruppalash ta'rifidan $1 \leq m \leq n$ ekanligi va agar biror gruppalashda qandaydir usul bilan elementlar o'rinlari almashtirilsa, u (gruppalash sifatida) o'zgarmasligi kelib chiqadi. Bu yerda qaralaytgan gruppalash tarkibida elementlarning takrorlanmasligini eslatib o'tamiz. Shu sababli bunday gruppalashni **betakror (takrorli emas) gruppalash** deb ham atash mumkin. Ushbu bobning 4- paragrafida takrorli gruppalashlar o'rganiladi.

⁴ Fransuzcha "combinasion" so'zi gruppalash ma'nosini beradi.

Bir ($n=1$) elementli $\{a\}$ to'plam uchun faqat bitta gruppalar mavjud, u ham bo'lsa bir ($m=1$) elementlidir: a . Demak, $C_1^1=1$.

Ikki ($n=2$) elementli $\{a, b\}$ to'plam uchun bittadan ($m=1$) gruppalar ikkita (a va b), ikkitadan ($m=2$) gruppalar esa faqat bitta (ab). Demak, $C_2^1=2$, $C_2^2=1$.

Uch ($n=3$) elementli $\{a, b, c\}$ to'plam uchun gruppalar: bittadan ($m=1$) - a , b va c (uchta); ikkitadan ($m=2$) - ab , ac , bc (uchta); uchtadan ($m=3$) - abc (faqat bitta). Demak, $C_3^1=3$, $C_3^2=3$, $C_3^3=1$.

To'rtta ($n=4$) elementdan tashkil topgan $\{a, b, c, d\}$ to'plam elementlaridan tuzilgan gruppalar: bittadan - a , b , c va d (to'rtta); ikkitadan - ab , ac , ad , bc , bd , cd (oltita); uchtadan - abc , abd , acd , bcd (to'rtta); to'rttadan $abcd$ (faqat bitta). Demak, $C_4^1=4$, $C_4^2=6$, $C_4^3=4$, $C_4^4=1$.

Yuqoridagi mulohazalar gruppalar sonini hisoblash formulasi qanday bo'lishiga to'liq oydinlik kiritmasada, dastlabki tahlil uchun muhimdir. Masalan, n ta elementdan barcha elementlarni o'z ichiga oladigan faqat bitta gruppalar tashkil etish mumkin degan yoki n ta elementdan bittadan n ta gruppalar bor degan xulosalar ustida o'ylab ko'rish mumkin.

C_n^m sonni hisoblash uchun formula topish maqsadida quyidagicha mulohaza yuritamiz. Ravshanki, agar n ta elementdan m tadan barcha gruppalarlarning har birida elementlarning o'rinlari imkoniyat boricha almashtirilsa, natijada n ta elementdan m tadan barcha o'rinlashtirishlar hosil bo'ladi. Bu yerda n ta elementdan m tadan tuzilgan C_n^m ta gruppalarining har biridagi m ta elementdan $P_m = m!$ ta o'rin almashtirishlar hosil qilish mumkin bo'lganligi tufayli, ko'paytirish qoidasiga asosan, $P_m C_n^m = A_n^m$ tenglik to'g'ridir. Demak,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}$$

formula o'rinlidir. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

3- teorema. n ta elementdan m tadan gruppalar soni eng kattasi n ga teng bo'lgan m ta ketma-ket natural sonlar ko'paytmasining dastlabki m ta natural sonlar ko'paytmasiga nisbati kabi: $C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}$.

4- misol. Qurilish tashkilotining duradgorlar bo'limida 15 nafar ishchi bor. Ko'p qavatli uyning eshiklarini ta'mirlash uchun 3 nafar duradgorni tanlash zarur. Agar bo'limdagi har bir duradgor bu topshiriqni bajarishga layoqatli bo'lsa, bunday tanlash imkoniyatlari (variantlari) qancha?

Bo'limdagi har bir duradgor ta'mirlash ishini bajarishga layoqatli bo'lgani uchun, bu masalani hal qilishda gruppalar sonini topish formulasidan foydalanish mumkin. Bu yerda $n=15$, $m=3$ va $C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$. Demak, 15 nafar duradgorlar orasidan 3 nafarini tanlash imkoniyatlari soni 455 ekan.

Agar ta'rif sifatida $C_n^0=1$ qabul qilinsa, n ta elementdan m tadan gruppalar soni uchun yuqorida keltirilgan formula $m=0$ bo'lgan holda ham to'g'ri bo'ladi:

$C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1$. Tabiiyki, n ta elementdan barcha elementlarni o'z ichiga oladigan faqat

bitta gruppalash tashkil etish mumkin: $C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1$.

Gruppalashlar sonini hisoblash uchun

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots(n-m)}$$

ko'rinishdagi formulalardan ham foydalanish mumkin. Bu formulalar quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} C_n^m &= \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{\frac{n!}{m!}}{(n-m)!} = \\ &= \frac{\frac{n!}{(n-(n-m))!}}{(n-m)!} = \frac{A_n^{n-m}}{P_{n-m}} = \frac{n(n-1)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots(n-m)}. \end{aligned}$$

Ixtiyoriy natural n soni uchun gruppalashlar soni bir qator xossalarga ega, masalan,

$$\begin{aligned} C_n^m &= C_n^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n), \\ C_n^m + C_n^{m+1} &= C_{n+1}^{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Haqiqatdan ham,

$$\begin{aligned} C_n^m &= \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = C_n^{n-m}, \\ C_n^m + C_n^{m+1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = \\ &= \frac{n!}{m!(n-m-1)!} \left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m+1} \right) = \\ &= \frac{n!(n+1)}{m!(m+1)(n-m-1)!(n-m)} = \end{aligned}$$

5-mavzu. Takrorli kombinatsiyalar

Takrorli o'rin almashtirishlar. Kombinatorikada oldin qaralgan birlashmalardan tashqari tarkibidagi elementlari takrorlanishi mumkin bo'lgan boshqa birlashmalar ham o'rganiladi. Masalan, takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalar.

Avval o'rganilgan o'rin almashtirishlar shunday tuzilmalar ediki, ular tarkibidagi elementlar bir-biridan farq qilardi. Endi o'rin almashtirishlar tarkibidagi elementlar takrorlanishi mumkin bo'lgan holni qaraymiz. Tabiiyki, aynan bir xil elementlar o'rinlari almashtirilishi natijasida yangi o'rin almashtirish hosil bo'lmaydi. Shuning uchun tarkibidagi elementlari soni o'zgarmaganda elementlari takrorlanishi mumkin bo'lgan o'rin almashtirishlar soni turli elementlardan tashkil topgan o'rin almashtirishlar soniga qaraganda kichik bo'ladi.

Faraz qilaylik, qandaydir kortejning n ta elementlari orasida bir xil (aynan bir xil) n_1 ta birinchi tur, bir xil n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, bir xil n_k ta k - tur elementlar bo'lsin, bu yerda $n_1, n_2, \dots, n_k$ - hech bo'lmaganda bittasi 1dan farqli natural sonlar. Bu n ta elementlarning o'rinlarini imkoniyati boricha almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan kortejlar (kombinatsiyalar) **takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rin almashtirishlar** (qisqacha, **takrorli o'rin almashtirishlar**) deb ataladi.

n ta elementlari orasida n_1 ta birinchi tur, n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, n_k ta k - tur bir xil elementlar bo'lgan takrorli o'rin almashtirishlar sonini $C_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ bilan belgilaymiz.

1- teorema. *Takrorli o'rin almashtirishlar soni uchun*

$$C_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

formula o'rinlidir, bu yerda $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ - elementlar soni, k - turlar soni.

Isboti. Har bir o'rin almashtirishdagi elementlar soni $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ga teng. Bu n ta elementlarni quyidagi tartibda joylashtirib, o'rin almashtirishlardan birini qaraymiz: birinchi bo'lib barcha n_1 ta birinchi tur, ulardan keyin barcha n_2 ta ikkinchi tur, va hokazo, oxirda barcha n_k ta k - tur elementlar joylashgan bo'lsin. Qaralayotgan takrorli o'rin almashtirishda birinchi tur elementlar soni n_1 ga teng bo'lgani uchun ularning mumkin bo'lgan hamma o'rin almashtirishlari soni $n_1!$ ga teng. Ammo bu elementlar bir-biridan farq qilmaganligi sababli ularning o'rinlarini almashtirish natijasida yangi takrorli o'rin almashtirish hosil bo'lmaydi.

Qaralayotgan takrorli o'rin almashtirishda ikkinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlar soni $n_2!$ bo'lib, bu yerda ham bir-biridan farq qilmagan elementlar o'rinlarini almashtirishlar jarayonida yangi takrorli o'rin almashtirish hosil qilinmaydi. Ikkinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlar birinchi tur elementlarning o'rin almashtirishlariga bog'liqsiz ravishda amalga oshirilishi mumkinligini ta'kidlaymiz.

Uchinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlar soni $n_3!$ bo'lib, ularning ham hech qaysi biri yangi takrorli o'rin almashtirish hosil qilmaydi. Bu o'rin almashti-

rishlar $n_1!$ ta birinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlarga va $n_2!$ ta ikkinchi tur elementlarning o'rinlarini almashtirishlarga, jami, ko'paytirish qoidasiga asosan, $n_1!n_2!$ ta o'rin almashtirishlarga bog'liqsiz ravishda amalga oshirilishi mumkin.

Shunday davom etib, qaralayotgan takrorli o'rin almashtirishda oxirgi k - tur elementlar o'rinlarini almashtiramiz. Bunday o'rin almashtirishlar soni $n_k!$ ga teng bo'lib, bu o'rin almashtirishlar ham yangi takrorli o'rin almashtirishni hosil qilmaydi. Bu o'rin almashtirishlarni birinchi tur, ikkinchi tur va hokazo $(k-1)$ - tur elementlarning jami soni, umumlashgan ko'paytirish qoidasiga asosan, $n_1!n_2!...n_{k-1}!$ bo'lgan o'rin almashtirishlariga bog'liqsiz ravishda bajarish mumkin.

Shunday qilib, $n!$ ta o'rin almashtirishlarni har birida $n_1!n_2!...n_k!$ tadan bir xil o'rin almashtirishlar bo'lgan qismlarga ajratildi deb hisoblash mumkin. Demak, biz izlagan takrorli o'rin almashtirishlar soni $C_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ bo'ladi, bu yerda

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

1- misol. Ikkita a , bitta b va ikkita c harflardan tashkil topgan kortej uchun barcha takrorli o'rin almashtirishlarni tuzing.

Bu misolda uch turdagi ($k=3$) harflar soni beshga teng ($n=5$) bo'lib, $n_1=2$ (ikkita a), $n_2=1$ (bitta b) va $n_3=2$ (ikkita c). Dastlabki ikkita harflarning (xuddi shuningdek, oxirgi ikkita harflarning ham) o'rinlarini o'zaro almashtirsak yangi o'rin almashtirishlar hosil bo'lmaydi. Barcha takrorli o'rin almashtirishlar soni

$C_5(2,1,2) = \frac{5!}{2!1!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = 30$ bo'ladi. Bu o'ttizta o'rin almashtirishlarning hammasi quyida keltirilgan:

*aabcc, aacbc, aacbb, abacc, abcac, abcca ,
acabc, acacb, acbac, acbca, accab, accba ,
baacc, bacac, bacca, bcaac, bcaca, bccaa ,
caabc, caacb, cabac, cabca, cacab, cacba ,
cbaac, cbaca, cbcaa, ccaab, ccaba, ccbaa .*

Takrorli o'rinlashtirishlar. n ta elementlardan tashkil topgan to'plam berilgan bo'lsin. Bu elementlardan foydalanib, m ta elementdan tashkil topgan kortejlarni shunday tuzamizki, bu kortejlarga har bir element hohlagancha marta (albatta m dan oshmagan miqdorda) kirishi mumkin bo'lsin va bu kortejlar bir-biridan ularni tashkil etuvchi elementlar turlari bilan yoki bu elementlarning joylashishlari bilan farq qilishsin. Shunday usul bilan tuzilgan kortejlarning har biri **n ta turli elementlardan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan m tadan o'rinlashtirish** (qisqacha, **takrorli o'rinlashtirish**) deb ataladi.

n ta turli elementlardan m tadan takrorli o'rinlashtirishlar sonini $\overline{A}_n^m$ bilan belgilaymiz.

2- teorema. n ta turli elementlardan m tadan takrorli o'rinlashtirishlar soni n^m ga teng, ya'ni $\overline{A}_n^m = n^m$.

Isboti. Berilgan n uchun takrorli o'rinlashtirishdagi elementlar soni m bo'yicha matematik induksiya usulini qo'llaymiz. Baza: takrorli o'rinlashtirishlar $m=1$ bo'lganda bitta elementdan tuzilishi ravshan. Tabiiyki, bunda hech qanaqa takrorlanish haqida gap bo'lishi mumkin emas. Bu holda elementlar soni n bo'lgani uchun takrorli o'rinlashtirishlar soni ham n ga teng: $\overline{A}_n^1 = n = n^1$.

Induksion o'tish: teoremaning tasdig'i $m=k$ bo'lganda to'g'ri, ya'ni $\overline{A}_n^k = n^k$ bo'lsin. Bu tasdiq $m=k+1$ bo'lganda ham to'g'ri bo'lishini isbotlaymiz. Buning uchun n ta turli elementlardan k tadan takrorli o'rinlashtirishning istalgan birini olib, unga n elementli to'planning ixtiyoriy bitta elementini $(k+1)$ - element sifatida kiritamiz. Natijada qandaydir $(k+1)$ tadan takrorli o'rinlashtirishni paydo qilamiz. Tabiiyki, qarayotgan k tadan o'rinlashtirishlarning har biridan yangi n ta $(k+1)$ tadan takrorli o'rinlashtirishlar hosil qilish mumkin. Shunday usul bilan ishni davom ettirsak, barcha mumkin bo'lgan $(k+1)$ tadan takrorli o'rinlashtirishlarni hosil qilamiz, bu yerda birorta ham $(k+1)$ tadan takrorli o'rinlashtirishlar qolib ketmaydi va hech qaysi ilgari ko'rilgan $(k+1)$ tadan takrorli o'rinlashtirish qaytadan paydo bo'lmaydi. Ko'paytirish qoidasiga asosan n ta turli elementlardan $(k+1)$ tadan takrorli o'rinlashtirishlar soni k tadan takrorli o'rinlashtirishlar soniga nisbatan n marta ortiqdir, ya'ni $\overline{A}_n^{k+1} = n\overline{A}_n^k = nn^k = n^{k+1}$.

2- misol. Oila a'zolari besh kishidan iborat bo'lib, ular ikkita ishni bajarishlari zarur (masalan, non sotib olish va uni bo'laklash), bunda oilaning har bir a'zosi ikkala ishni ham bajarish imkoniyatiga ega. Oila a'zolariga bu ishlarni taqsimlashda mumkin bo'lgan imkoniyatlar soni aniqlansin.

Bu masalani hal qilish uchun oila a'zolarini a, b, c, d , va e harflari bilan belgilab, ishlar ikkita bo'lgani uchun beshta turli elementlardan ikkitadan barcha takrorli o'rinlashtirishlarni tuzamiz:

$$aa, ab, ac, ad, ae, ba, bb, bc, bd, be, ca, cb, cc, \\ cd, ce, da, db, dc, dd, de, ea, eb, ec, ed, ee.$$

Hammasi bo'lib 25ta ($\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$) takrorli o'rinlashtirishlar tuzildi. Demak, besh kishidan iborat oila a'zolariga ikkita ishlarni taqsimlashda mumkin bo'lgan imkoniyatlar soni 25dir.

3- misol. O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqami ikki qismdan iborat: lotin alifbosining ikkita harfi va yetti xonali son. O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining barcha mumkin bo'lgan raqamlari sonini aniqlang.

Lotin alifbosidagi yigirma oltita turli harflar yordamida 676ta ($\overline{A}_{26}^2 = 26^2 = 676$) ikkitadan takrorli o'rinlashtirishlar tashkil etish mumkin. O'nta 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 va 9 raqamlardan esa 10.000.000ta ($\overline{A}_{10}^7 = 10^7 = 10000000$) turli yetti xonali raqamlarni (bu raqamlarda dastlabki nollar tashlab yuborilmaydi) hosil qilish mumkin. Shunday qilib, O'zbekiston Respublikasi fuqarosi pasportining raqamlari soni 6.760.000.000ga ($\overline{A}_{26}^2 \overline{A}_{10}^7 = 6760000000$) teng.

Takrorli gruppashlar. Har bir elementi birlashmaga istalgancha marta kiritiladigan va turli n ta elementlardan m tadan olinadigan hamda elementlar tartibi

e'tiborga olinmaydigan birlashmalarni (kortejlarni) qaraymiz. Bunaqa birlashmalar **n ta turli elementlardan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppashlar** (qisqacha, **takrorli gruppashlar**) deb ataladi.

n ta elementlardan m tadan takrorlanuvchi elementlar qatnashgan gruppashlar ta'rifidan ko'rinib turibdiki, turli kombinatsiyalar bir-birlaridan hech bo'lmasa bitta elementi bilan farq qiladi. n ta elementdan m tadan takrorli gruppashlar sonini $\overline{C}_n^m$ deb belgilaymiz.

3- teorema. n ta elementdan m tadan takrorli gruppashlar soni C_{n+m-1}^m ga teng, ya'ni

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Isboti. $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ to'plam uchun n ta elementdan m tadan takrorli gruppashlar sonini aniqlash zarur. Har bir takrorli gruppashdagi elementlarni n ta qismga shunday bo'lish mumkinki, har bir i - bo'lakda a_i element qanchadir marta qatnashadi yoki biror marta ham qatnashmaydi. Har bir shunday gruppashni nol va birlardan iborat kod yordamida quyidagicha shifrlaymiz: har bir a_i element o'rniga bu element i - bo'lakda necha marta qatnashsa, shuncha birlar yozamiz (tabiiyki, bu element biror marta ham qatnashmasligi mumkin, u holda hech narsa yozilmaydi); turli bo'lak elementlarini bir-biridan nollar bilan ajratamiz (bu yerda yonma-yon joylashgan nollar hosil bo'lishi mumkin - bu nollar mos elementlarning gruppashda qatnashmaganligini anglatadi). Masalan, $\{a, b, c, d, e, f\}$ to'plam elementlaridan tuzilgan 6ta elementdan 9tadan takrorli $bbbcdddf$ gruppashga 0111010111001 shifr, 6ta elementdan 12tadan takrorli $aaaabeeeff$ gruppashga esa 111101001111011 shifr, aksincha, 10100011110 shifrga 6ta elementdan 6tadan takrorli $abeeee$ gruppash mos keladi.

Shunday qilib, n ta elementdan m tadan har bir takrorli gruppash uchun qandaydir m ta birlar va $(n-1)$ ta nollardan iborat ketma-ketlikni va, aksincha, m ta birlar va $(n-1)$ ta nollardan tashkil topgan har bir ketma-ketlik uchun n ta elementdan m tadan biror takrorli gruppashni mos qo'ygan bo'lamiz (bir qiymatli moslik o'rnatildi). Binobarin, n ta elementdan m tadan takrorli gruppashlar soni $(n-1)$ ta nol va m ta birlardan tashkil topgan kortej elementlaridan tuzilgan takrorli o'rin almashtirishlar soniga, ya'ni $C_{n+m-1}(m, n-1)$ ga tengdir. Demak,

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}(m, n-1) = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m.$$

4- misol. Har birining yoqlariga 1, 2, 3, 4, 5 va 6 sonlari yozilgan kub shaklidagi ikkita soqqalarni tashlaganda jami nechta sonlar juftligini hosil qilish mumkin?

Soqqalarni tashlaganda jami quyidagi 21 imkoniyatlardan biri ro'y beradi:

$$\begin{aligned} &<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <1,5>, <1,6>, <2,2>, \\ &<2,3>, <2,4>, <2,5>, <2,6>, <3,3>, <3,4>, <3,5>, \\ &<3,6>, <4,4>, <4,5>, <4,6>, <5,5>, <5,6>, <6,6>. \end{aligned}$$

Bu juftliklar oltita elementdan ikkitadan takrorli gruppashlarni tashkil etadi. Ularning soni 3- teoremaga asosan $\overline{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$ bo'ladi.

5 Ko'phad formulasi. Takrorli kombinatsiyalar vositasida Nyuton binomi tushunchasini umumlashtiramiz, ya'ni $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n$ ifodaning yoyilmasini topish muammosini qaraymiz. Buning uchun qaralayotgan ifodani n ta bir xil ifodalar ko'paytmasi, ya'ni

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_m)(a_1 + a_2 + \dots + a_m) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_m)}_{n \text{ ta ko'paytuvchi}}$$

shaklida yozib, qavslarni ochamiz va o'xshash hadlarni ixchamlaymiz. Natijada, $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n$ ifodaning yoyilmasi hosil bo'ladi. Yoyilmaning tarkibidagi qo'shiluvchilarning har birida $a_1, a_2, \dots, a_m$ elementlardan tashkil topgan takrorli o'rin almashtirishlar bor, bu yerda har bir qo'shiluvchi qandaydir koeffitsient va n ta elementlarning $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}$ ko'rinishdagi ko'paytmasidan iboratdir. Yoyilmadagi $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}$ ko'paytmaning koeffitsientini aniqlash uchun n ta ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$) elementli takrorli o'rin almashtirishlar sonini topish kerak, ya'ni $C_n(n_1, n_2, \dots, n_m)$ sonni hisoblash kerak. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

4- teorema. Ixtiyoriy haqiqiy $a_1, a_2, \dots, a_m$ va natural n sonlar uchun

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_m = n} C_n(n_1, n_2, \dots, n_m) a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}$$

formula o'rinlidir, bu formulaning o'ng tomonidagi yig'indi $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiymas butun $n_1, n_2, \dots, n_m$ sonlar uchun amalga oshiriladi.

Isbotlangan oxirgi tenglik ko'phad formulasi yoki umumlashgan Nyuton binomi formulasi deb ataladi. $C_n(n_1, n_2, \dots, n_m)$ sonlarni ko'phadiy koeffitsientlar deb ataymiz.

C_n^k binomial koeffitsient $C_n(n_1, n_2, \dots, n_m)$ ko'phadiy koeffitsientning $m=2$ bo'lgandagi xususiy holidir. Haqiqatdan ham, $n_1 + n_2 = n$ tenglikda $n_1 = k$ deb olsak, u holda $n_2 = n - n_1 = n - k$ va $C_n(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1! n_2!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = C_n^k$ bo'ladi.

5- misol. $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasini toping. Avvalo 3 sonini bo'laklaymiz, ya'ni 3ni mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlar bilan manfiymas butun sonlar yig'indisi shaklida yozamiz:

$$3=3+0+0, 3=2+1+0, 3=2+0+1, 3=1+2+0, 3=1+1+1, \\ 3=1+2+0, 3=0+3+0, 3=0+2+1, 3=0+1+2, 3=0+0+3.$$

Demak, ko'phad formulasiga ko'ra,

$$(a+b+c)^3 = C_3(3,0,0)a^3 + C_3(2,1,0)a^2b + C_3(2,0,1)a^2c + \\ + C_3(1,2,0)ab^2 + C_3(1,1,1)abc + C_3(1,0,2)ac^2 + C_3(0,3,0)b^3 + \\ + C_3(0,2,1)b^2c + C_3(0,1,2)bc^2 + C_3(0,0,3)c^3.$$

Takrorli o'rin almashtirishlar soni $C_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ formulasini qo'llab quyidag tenglikni hosil qilamiz:

$$(a+b+c)^3 = \\ = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3.$$

Ko'phad yoyilmasining hadlarini yozganda shunga e'tibor berish kerakki, agar $n_1, n_2, \dots, n_m$ ($n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$) sonlar $k_1, k_2, \dots, k_m$ ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$) sonlarning o'rin almashtirishlari yordamida hosil qilinishi mumkin bo'lsa, u holda $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}$ va $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$ hadlarning koefitsientlari o'zaro teng bo'ladi. Shuning uchun n sonining $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ ko'rinishda ifodalanishlaridan qandaydir shartni bajaradigan birortasini, masalan, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$ (yoki $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m$) shartni qanoatlantiradiganini topib, unga mos $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}$ ifodada daraja ko'rsatgichlarini mumkin bo'lgan barcha usullar bilan almashtirish kerak bo'ladi.

Masalan, 5- misoldagi a^2b , a^2c , ab^2 , ac^2 , b^2c va bc^2 hadlarning ko'phadiy koefitsientlari o'zaro tengdir. Yuqorida ko'rsatilgan shart asosida 3 sonini manfiy-mas butun sonlar yigindisi ko'rinishida bo'laklashning 3 imkoniyati bor: $3=3+0+0$, $3=2+1+0$, $3=1+1+1$. Shuning uchun, $(a+b+c)^3$ ifodaning yoyilmasida 3 xil turli koefitsientlarga egamiz: $C_3(3,0,0)=1$, $C_3(2,1,0)=3$ va $C_3(1,1,1)=6$. Demak,

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2) + 6abc.$$

Ko'phad formulasi yordamida ko'phadiy koefitsientlarning, ya'ni $C_n(n_1, n_2, \dots, n_m)$ sonlarning ba'zi xossalari osonlik bilan isbotlash mumkin. Masalan,

$$\sum_{n=n_1+n_2+\dots+n_m} C_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = m^n,$$

bu yerda yig'indi $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ shartni qanoatlantiruvchi barcha manfiy-mas butun $n_1, n_2, \dots, n_m$ sonlar uchun amalga oshiriladi va qo'shiluvchilar tartibi e'tiborga olinadi.

Haqiqatdan ham, agar ko'phad formulasida $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 1$ deb olsak, kerakli tenglikni hosil qilamiz.

6_mavzu. Mulohazalar algebrasi.

Mulohazalar ustida maxsus amallar bajariladi va buning natijasida yana mulohazalar xosil buladi. Bu amallarga logik (mantiqiy) amallar deb nom berilgan. Bu amallar quyidagilardir

1. Inkor qilish amali. x mulohazaning inkori deb atalgan $\bar{x}$ mulohaza shu bilan

harakterlanadiki x mulohaza 1 (chin) qiymatni qabul qilganda, mulohaza $\bar{x}$ 0 (yolg'on) qiymatni qabul qiladi va aksincha x ning qiymati 0 bo'lganda $\bar{x}$ ning qiymati 1 bo'ladi, inkor amali $\bar{x}$ belgilanganda bu tarif quyidagi jadval ko'rinishida bo'ladi.

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

x mulohazani «emas» so'zi vositasi bilan inkor qilish natijasida hosil bo'lgan mulohaza xuddi x ning $\bar{x}$ inkoriga mos keladi.

Masalan: x - Toshkent O'zbekistonning poytaxti. - chin. $\bar{x}$ - Toshkent O'zbekistonning poytaxti emas - yolg'on

yoki $y = \sin \alpha$ - uzluksiz funksiya emas - yolg'on. $\bar{y} = \sin \alpha$ - uzluksiz funksiya - chin.

2. Konyunksiya amali (k.a). x va y o'zgaruvchi mulohazalar ustida bajariladigan k.a ($\wedge$), ($\cdot$) yoki ($\&$) ko'rinishda va bu amal natijasida hosil bo'ladigan mulohazani $x \wedge y$ yoki $x \cdot y$ yoki $x \& y$ yoki $x \& y = \min(x, y)$ ko'rinishda belgilaymiz.

Ta'rif. Ikkala x va y mulohaza chin bo'lsagina ularning kon'yunksiyasi $x \wedge y$ mulohaza qiymati chin, x va y ning kamida bitasi yolg'on bo'lsa $x \wedge y$ mulohaza yolg'onidir.

Konyunksiya amali «va» bog'lovchisiga mos keladi. Bu tarif jadval ko'rinishida quyidagicha bo'ladi.

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

3. Dizyunksiya amali. x va y o'zgaruvchi mulohazalar ustida bajariladigan diz'yunksiya amali $\vee$ ko'rinishda va bu amal natijasida hosil bo'ladigan mulohazani $x \vee y$ yoki $x \vee y = \max(x, y)$ ko'rinishda belgilanadi.

Ta'rif. Ikkala x va y mulohaza xam yolg'on bo'lgandagina ularning dizyunksiyasi $x \vee y$ mulohaza qiymati yolg'on, x va y ning kamida bittasi chin bo'lsa $x \vee y$ chindir.

Dizyunksiya amali «yoki» bog'lovchisiga mos keladi. Bu tarif jadval ko'rinishida quyidagicha bo'ladi.

x	y	$x \vee y$
-----	-----	------------

1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

4. Implikasiya amali. x mulohaza y mulohazani implikasiyalaydi degan amal kiritilib, bu amal $\rightarrow$ ko'rinishda belgilanadi. Bu amal natijasida hosil bo'lgan mulohaza $x \rightarrow y$ shaklda yoziladi.

Ta'rif. Faqat x chin va y yolg'on bo'lgandagina $(x \rightarrow y)$ implikasiya yolg'on bo'lib, boshqa hamma hollarda $(x \rightarrow y)$ chindir.

$x \rightarrow y$ implikasiya ushbu mazmundagi mulohazalarga: x bajarilsa y bajariladi, x dan y hosil bo'ladi, x dan y kelib chiqadi, x bajarilgani uchun y bajariladi va x .k.larga mos keladi.

x	y	$x \rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Bunday mulohazalar shartli mulohazalar deyiladi.

Matematikada $x \rightarrow y$ implikasiya zaruriy shartni ifodalovchi, yani u bajarilishi uchun x bajarilishi zarur degan teorema mos keladi. Matematikada yana yetarli shartni ifodalovchi, yani u bajarilishi uchun x bajarilishi yetarli degan teorema xam implikasiyaga mos keladi.

5. Ekvivalensiya amali. x va u mulohazalar ustida bajariladigan ekvivalensiya amali $\leftrightarrow$ belgi va buning natijasida hosil bo'ladigan murakab mulohaza $x \leftrightarrow u$ shaklda yoziladi.

Ta'rif. x va u mulohozalar bir xil qiymatga ega bo'lgandagina $x \leftrightarrow u$ mulohaza chin bo'lib, boshqa hollarda $x \leftrightarrow u$ yolg'ondir.

Ekvivalentlik $\leftrightarrow$ yoki $\sim$ deb belgilanadi, $x \leftrightarrow u$ ekvivalensiya x bo'lsa u bo'ladi va u bo'lsa x bo'ladi yoki x dan u kelib chiqadi va u dan x kelib chiqadi degan mulohazaga mos keladi, ya'ni $x \leftrightarrow u = (x \rightarrow y) \wedge (u \rightarrow x)$ ko'rinishda ifodalash mumkin.

6. Ikki modul bo'yicha qo'shish. x va u mulohazalar ustida bajariladigan ikki modul bo'yicha qo'shish amali $\oplus$ bilan va buning natijasida hosil bo'lgan murakkab mulohaza esa $x \oplus u$ shaklda ifodalanadi.

Ta'rif. x va u mulohozalar bir xil qiymatga ega bo'lgandagina $x \oplus u$ murakab mulohaza yolg'on bo'lib, boshqa hollarda $x \oplus u$ chindir.

x	u	$x \oplus u$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

7. Pirs strelkasi amali. x va u mulohazalar ustida bajariladigan Pirs strelkasi amali $\downarrow$ bilan va uning natijasida hosil bo'lgan mulohaza esa $x \downarrow u$ shaklda ifodalanadi.

Ta'rif. x va u mulohazalarning ikkalasi xam yolg'on qiymatga ega bo'lgandagina $x \downarrow u$ murakab mulohaza chin bo'lib, qolgan boshqa hollarda $x \downarrow u$ yolg'ondir.

x	u	$x \downarrow u$	$\overline{x \vee y}$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

Albatta mulohazalar to'plamida aniqlanishi mumkin bo'lgan binar amallar yuqorida keltirilgan yetti amal bilan chegaralanmaydi.

Misol: $A = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y})} \wedge \bar{z} \rightarrow \overline{x \wedge y \vee z}$ formulani matematik almashtiring va soddalashtiring.

$$A = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge \bar{z} \rightarrow \overline{x \wedge y \vee z} = [x \rightarrow u = \bar{x} \vee u] = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge \bar{z} \vee x \wedge y \vee z} = [\bar{x} \vee \bar{y} = \bar{x} \wedge \bar{y};$$

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}] = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee \bar{z} \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge \bar{z}} =$$

[Yana shunga

asosan]=

$$\begin{aligned} & (\bar{x} \wedge y) \vee \bar{z} \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge \bar{z} = [\bar{x} = x] = (x \wedge y) \vee \bar{z} \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge \bar{z} = (x \wedge y) \vee (\bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{z} \vee z) \\ & \equiv \begin{bmatrix} x \vee y \equiv y \vee x \\ \bar{x} \\ x \vee \bar{x} \equiv 1 \end{bmatrix} = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge 1 = \begin{bmatrix} x \vee 1 = 1 \\ x \vee 0 = x \\ x \wedge 1 = x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x \vee y) \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} = [x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)] = (x \vee \bar{x}) \wedge (y \vee \bar{x}) \vee \bar{y} \vee \bar{z} = \\ & [x \vee \bar{x} = 1] = 1 \wedge (y \vee \bar{x}) \vee \bar{y} \vee \bar{z} \equiv \\ & \begin{bmatrix} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge 1 = x \end{bmatrix} = \bar{x} \vee y \vee \bar{y} \vee \bar{z} = [x \vee \bar{x} = 1] = \bar{x} \vee 1 \vee \bar{z} = 1 \end{aligned}$$

Demak A formula aynan chin formula ekan.

$x y z$	$\bar{x}$	$\bar{z}$	$\bar{x} \vee 1$	$\bar{x} \vee 1 \vee \bar{z}$
000	1	1	1	1
001	1	0	1	1
010	1	1	1	1
011	1	0	1	1
100	0	1	1	1
101	0	0	1	1
110	0	1	1	1
111	0	0	1	1

7-mavzu. Mulohazalar hisobi. Mulohazalar hisobi formulasi

Teng kuchli almashtirishlar bajarib, mulohazalar algebrasining formulalarini har xil ko'rinishlarda yozish mumkin. Masalan, $\bar{A} \rightarrow B$ formulani $A \vee \bar{B}$ yoki $(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B})$ ko'rinishlarda yoza olamiz.

Mantiq algebrasining kontakt va rele-kontaktli sxemalar, diskret texnikadagi tatbiqlarida va matematik mantiqning boshqa masalalarida formulalarning normal shakllari katta ahamiyatga ega.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{agar } \sigma = u, \\ \bar{x}, & \text{agar } \sigma = \bar{e}. \end{cases}$$

$\sigma^\sigma = \text{ch}$ ekanligi aniq.

Ta'rif.

$$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \quad (2.1)$$

ko'rinishdagi formulaga elementar kon'yunksiya deb aytamiz. Bu yerda $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ ixtiyoriy qiymatlar satri va x_i o'zgaruvchilar orasida bir xillari bo'lishi mumkin.

Ta'rif.

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n} \quad (2.2)$$

ko'rinishdagi formulaga elementar diz'yunksiya deb aytamiz. Bu yerda ham $\sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ ixtiyoriy qiymatlar satri va x_i o'zgaruvchilar orasida bir xillari bo'lishi mumkin.

Ta'rif. Elementar diz'yunksiyalarning kon'yunksiyasiga formulaning kon'yunktiv normal shakli (KNSh) va elementar kon'yunksiyalarning diz'yunksiyasiga formulaning diz'yunktiv normal shakli (DNSh) deb atiladi.

KNShga $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z)$ formula va DNShga $x y \vee \bar{x} z \vee x \bar{y} z$ formula misol bo'la oladi.

Teorema. Elementar mulohazalarning har bir P formulasiga tengkuchli kon'yunktiv normal shakldagi Q formula mavjud.

Bu teoremani isbotlashda ushbu tengkuchliliklardan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} 1. \overline{A \wedge B} &= \bar{A} \vee \bar{B}; & 2. \overline{A \vee B} &= \bar{A} \wedge \bar{B}; & 3. A \rightarrow B &= \bar{A} \vee B; \\ 4. \overline{A \rightarrow B} &= A \wedge \bar{B}; & 5. A \leftrightarrow B &= (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}); \\ 6. \overline{A \leftrightarrow B} &= (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Teorema. P formula doimo chin bo'lishi uchun uning KNSh dagi har bir elementar diz'yunktiv hadida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Misol. 1. $P = x \wedge \bar{x} \rightarrow y \wedge \bar{y} = \overline{x \wedge \bar{x}} \vee \overline{y \wedge \bar{y}} = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y.$

$P = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y$ - aynan chindir.

2. $\overline{x \wedge \bar{x} \wedge (y \wedge \bar{y} \rightarrow z)} = (\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y) \vee z = P(\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y \vee z)$ - aynan chin formuladir.

Diz'yunktiv normal shakl. Eslatib o'tamizki, elementar kon'yunksiyalarning diz'yunksiyasiga formulaning diz'yunktiv normal shakli (DNSh) deb atiladi.

Teorema. Elementar mulohazalarning istalgan P formulasini DNShga keltirish mumkin.

Teorema. P formula aynan yolg'jon bo'lishi uchun, uning diz'yunktiv normal shaklidagi har bir elementar kon'yunksiya ifodasida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Misol.
$$P = \overline{\overline{\overline{x \wedge x} \rightarrow \overline{y \wedge y}}} = \overline{\overline{\overline{x \wedge x}} \vee \overline{y \wedge y}} = \overline{\overline{\overline{x \vee \bar{x}}} \vee \overline{y \vee \bar{y}}} = \overline{\overline{\overline{x \vee \bar{x}}} \vee \overline{y \vee \bar{y}}}$$

$$\overline{P} = (x \vee \bar{x}) \vee (y \vee \bar{y}) \text{ - aynan chin.}$$

$$P = (\bar{x} \wedge x) \wedge (\bar{y} \wedge y) \text{ - aynan yolg'jon.}$$

Mukammal kon'yunktiv va diz'yunktiv normal shakllar. Mantiq algebrasining bitta formulasi uchun bir nechta DNSh (KNSh) mavjud bo'lishi mumkin. Masalan, $(x \vee y)$ $(x \vee z)$ formulani quyidagi $x \vee yz$, $x \vee xy \vee xz$ DNShlarga keltirish mumkin. Bular distributivlik va idempotentlik qonunlarini qo'llash natijasida hosil qilingan.

Formulalarni bir qiymatli ravishda normal shaklda tasvirlash uchun takomil diz'yunktiv normal shakl va takomil kon'yunktiv normal shakl (TDNSh va TKNSh) deb ataluvchi ko'rinishlari ishlatiladi.

n ta $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementar mulohazalarning

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n} \quad (2.4)$$

elementar diz'yunksiyalari va

$$x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n} \quad (2.5)$$

elementar kon'yunksiyalari berilgan bo'lsin.

Ta'rif. (2.4) elementar diz'yunksiya ((2.5) elementar kon'yunksiya) to'g'ri elementar diz'yunksiya (elementar kon'yunksiya) deb atiladi, shunda va faqat shundagina, qachonki (2.4)ning ((2.5)ning) ifodasida har bir elementar mulohaza x_i bir marta qatnashgan bo'lsa.

Masalan, $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ va $\overline{x_1} \vee x_4 \vee x_6$ elementar diz'yunksiyalar va $x_1 x_2 x_3$ va $\overline{x_1} \overline{x_3} x_6$ elementar kon'yunksiyalar mos ravishda to'g'ri elementar diz'yunksiyalar va elementar kon'yunksiyalar deb aytiladi.

Ta'rif. (2.4) elementar diz'yunksiya ((2.5) elementar kon'yunksiya) $x_1, x_2, \dots, x_n$ mulohazalarga nisbatan to'liq elementar diz'yunksiya (elementar kon'yunksiya) deb aytiladi, qachonki ularning ifodasida $x_1, x_2, \dots, x_n$ mulohazalarning har bittasi bir martagina qatnashgan bo'lsa.

Masalan, $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$ va $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$ elementar diz'yunksiyalar va $\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}$, $x_1 x_2 \overline{x_3}$ elementar kon'yunksiyalar x_1, x_2, x_3 mulohazalarga nisbatan to'liq elementar diz'yunksiyalar va elementar kon'yunksiyalar bo'ladi.

Ta'rif. Diz'yunktiv normal shakl (kon'yunktiv normal shakl) TDNSh (TKNSh) deb aytiladi, agar DNSh (KNSh) ifodasida bir xil elementar kon'yunksiyalar (elementar diz'yunksiyalar) bo'lmasa va hamma elementar kon'yunksiyalar (elementar diz'yunksiyalar) to'g'ri va to'liq bo'lsa.

Masalan, $xyz \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z$ DNSh x, y, z mulohazalarga nisbatan TDNSh bo'ladi. $(x \vee y)(x \vee \overline{y})(\overline{x} \vee y)$ KNSh x, y mulohazalarga nisbatan TKNSh bo'ladi.

8-mavzu. Matematik mantiq funksiyalarini minimallashtirish muammolari Bul funksiyasini to'liq sistemaning funksiyalari orqali cheksiz ko'p ifodalash mumkin. Ular orasida kamida bitta shunday formula mavjudki, undagi o'zgaruvchilar, harflar soni boshqa formulardagi o'zgaruvchilar, harflar soniga nisbatan eng kam bo'ladi. Bunday shakl berilgan funksiyaning minimal shakli, uni topish bilan bog'liq bo'lgan masalalar esa minimallashtirish masalalari deyiladi.

Ma'lumki, ixtiyoriy funksiyalar sistemasi uchun minimallashtirish masalasini umumiy holda yechish juda qiyin va hozirgi vaqtgacha hal etilmagan. Bu masalada, muhim natijalar asosan, $(-, \vee, \wedge)$ lardan iborat to'liq sistema uchun olingan. Unda funksiyaning diz'yunktiv va kon'yunktiv normal shakli asos qilib olinadi. Bunday masala Bul funksiyalarini minimallashtirishning kanonik masalasi deyiladi. Minimallik shartlari har xil bo'lishi mumkin.

Biz faqat simvollar, o'zgaruvchilar, inkorlar va elementar konyunksiyalar yig'indilari soni bo'yicha minimallashtirish usularinini keltiramiz.

Ma'lumki, ixtiyoriy $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ funksiyani DNSh ko'rinishda ifodalash mumkin, ya'ni $f(x_1, \dots, x_n) = \text{DNSh}$.

Agar DNSh sifatida TDNSh olsak, u holda

$$\text{TDNSh} = \bigvee_{\substack{(\delta_1, \dots, \delta_n) \\ f(\delta_1, \dots, \delta_n) = 1}} x_1^{\delta_1} \& \dots \& x_n^{\delta_n}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Ta'rif. E.k (E.d)da ishtirok etuvchi o'zgaruvchilar soniga, shu e.k.(ed)ning rangi deyiladi va r bilan belgilanadi.

$$K = x_1 \& x_2 \& \bar{x}_3; \quad r(K) = 3$$

Masalan:

$$D = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3; \quad r(D) = 3$$

Bizga ixtiyoriy $f(x_1, \dots, x_n)$ funksiyani ifodalovchi $f(x_1, \dots, x_n) = \text{DNSh}$ berilgan bo'lsin.

DNSh ning quyidagi 3 xil o'lchami mavjud:

- 1) Kon'yunksiyalar soni;
- 2) O'zgaruvchilar soni;
- 3) Inkor amallari soni.

Bu o'lchamlarning har biri quyidagi 4 ta aksiomani qanoatlantiradi. Umuman o'lcham tushunchasini R desak,

- 1) R_u - o'zgaruvchilar soni;
- 2) R_i - inkorlar soni;
- 3) R_k - konyunksiyalar soni;

bo'ladi.

$R(\text{DNSh})$ orqali DNSh ning murakabligini ifodalaydigan, "oddiylik indeksi"ni belgilaymiz. Funktsional $R(\text{DNSh})$ uchun quyidagi aksiomalarning bajarilishini talab qilamiz.

I aksioma: - Manfiymaslik aksiomasi.

$$\text{Ixtiyoriy } \text{DNSh} \text{ uchun } R(\text{DNSh}) \geq 0.$$

II aksioma: - Monotonlik aksimasi (konyunksiyaga nisbatan). Aytaylik

$$\mathcal{D}H\mathcal{I}I = \mathcal{D}H\mathcal{I}I' \vee x_i^{\delta_i} K' \text{ bo'lsin.}$$

U holda $R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I) \geq R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I') \vee R(K^1)$.

III aksioma: - Qavariqlik aksiomasi (dizyunksiyaga nisbatan). Aytaylik

$\mathcal{D}H\mathcal{I}I = \mathcal{D}H\mathcal{I}I_1 \vee \mathcal{D}H\mathcal{I}I_2$, agar $\mathcal{D}H\mathcal{I}I_1$ & $\mathcal{D}H\mathcal{I}I_2 = 0$ bo'lsa, u holda

$$R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I) \geq R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_1) + R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_2)$$

IV aksioma: - Invariantlik aksiomasi (izomorflikka nisbatan). Aytaylik $\mathcal{D}H\mathcal{I}I^1$

o'zgaruvchilarni kayta nomlash usuli bilan DNSh dan olingan bo'lsin. U holda

$$R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I^1) = R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I).$$

Misol: $f(x_1, x_2, x_3) = T\mathcal{D}H\mathcal{I}I$ ko'rinishda berilgan bo'lsin.

$x_1 x_2 x_3$	$f(x_1 x_2 x_3)$	$x_1 x_2 x_3$	$f(x_1 x_2 x_3)$
0 0 0	1	1 0 0	1
0 0 1	0	1 0 1	1
0 1 0	0	1 1 0	1
0 1 1	0	1 1 1	1

$$\mathcal{D}H\mathcal{I}I_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = 1.$$

Ushbu funksiyaning minimallashtirsak quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\mathcal{D}H\mathcal{I}I_2 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 = 1$$

Ushbu misol uchun $R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_1)$ va $R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_2)$ oddiylik indeksini keltiramiz.

$$1. R_y(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_1) = 15; \quad R_y(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_2) = 3 \Rightarrow R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_2) < R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_1);$$

$$2. R_h(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_1) = 7 \quad R_h(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_2) = 2 \Rightarrow R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_2) < R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_1);$$

$$3. R_k(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_1) = 5 \quad R_k(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_2) = 2 \Rightarrow R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_2) < R(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_1)$$

Endi $R_y(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_1), R_y(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_2), R_h(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_1), R_h(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_2), R_k(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_1), R_k(\mathcal{D}H\mathcal{I}I_2)$,

indekslar uchun I-IV aksiomalar bajariladi. Bittasini tekshirib ko'ramiz ya'ni R_y

1. $R_y(\mathcal{D}H\mathcal{I}\mathcal{I}_1) = 15 \geq 0; R_y(\mathcal{D}H\mathcal{I}\mathcal{I}_2) = 3 \geq 0$
2. $R_y(\mathcal{D}H\mathcal{I}\mathcal{I}_1) = 15 \geq; R_y(\mathcal{D}H\mathcal{I}\mathcal{I}_1 \vee K^1);$
3. $R_y(\mathcal{D}H\mathcal{I}\mathcal{I}_1) = 15 \geq; R_y(\mathcal{D}H\mathcal{I}\mathcal{I}_1) + R_y(\mathcal{D}H\mathcal{I}\mathcal{I}_2);$
4. $R_y(\mathcal{D}H\mathcal{I}\mathcal{I}_1) = 15 \geq; R_y(\mathcal{D}H\mathcal{I}\mathcal{I}_1)$

Ma'lumki $\{x_1, \dots, x_n\}$ o'zgaruvchilardan 3^n ta turli xil elementar konyunksiyalar tuzish mumkin.

Masalan $n = 2$ hol uchun $\{1, x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \bar{x}_1\bar{x}_2, \bar{x}_1x_2, x_1\bar{x}_2, x_1x_2\}$

Mumkin bo'lgan barcha Bul funksiyalar soni $2^{3^2} = 2^9$; bo'ladi.

Ta'rif. $f(x_1, \dots, x_n)$ funksiyani ifodalaydigan barcha DNSh lar (2^{3^n}) ichida eng kam o'zgaruvchilarga ega bo'lgan DNSh f funksiyaning minimal DNSh deyiladi R_u ga nisbatan.

Masalan: $\mathcal{D}H\mathcal{I}\mathcal{I}_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1$ minimal DNSh dir, chunki $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiya $x_1x_2x_3$ o'zgaruvchilardan bog'liq, shuning uchun f funksiyani ifodalaydigan DNSh da 3 ta o'zgaruvchidan kam o'zgaruvchi bo'lmasligi kerak.

Ta'rif. $f(x_1, \dots, x_3)$ funksiyani ifodalovchi barcha DNSh lar ichida eng kam elementar konyunksiyaga ega bo'lgan DNSh f funksiyaning qisqa DNSh deyiladi.

Masalan $\mathcal{D}H\mathcal{I}\mathcal{I} \quad \bar{x}_2x_3 \vee x_1$ minimal (qisqa) DNSh dir. Chunki bu DNSh da e.k. soni 2 ta.

DNSh ni minimallashtirishning trivial usuli. Funksiyalarning minimal (qisqa) DNSh sini aniqlash usullari bir qancha bo'lib, ulardan eng soddasi va umumiy *trivial* usul

hisoblanadi. Bu usul $\forall f(x_1, \dots, x_n)$ funksiya uchun $x_1, \dots, x_n \quad \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ simvollardan barcha elementlar konyunksiyalar tuziladi, ulardan barcha $f_1, f_2, \dots, f_k$, ya'ni $k = 2^{3^n}$ ta DNSh qurilib, e.k. lar soni o'sib borish bo'yicha tartiblanadi. Har bir f_i uchun

$f_i = f(x_1, \dots, x_n)$ munosabat tekshiriladi. Bu munosabatni qanoatlantiruvchi birinchi DNSh berilgan $f(x_1, \dots, x_n)$ funksiyalarni minimal (qisqa) DNSh ni bildiradi.

Bu usulni algoritm ko'rinishida quyidagicha beramiz.

1. $\forall f(x_1, \dots, x_n)$ uchun $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ dan 3^n ta e.k. tuziladi.
2. Barcha 3^n ta e.k. uchun $f_1, \dots, f_{2^{3^n}}$ funksiyalarining qiymati hisoblanadi.
3. $f_i, i = 1, \dots, 2^{3^n}$ funksiyalar e.k. sonining o'sib borishi tartibida joylashtiriladi.
4. Har bir f_i uchun $f_i = f(x_1, \dots, x_n)$ tekshiriladi. Agar tenglik o'rinli bo'lsa, $f_i = f(x_1, \dots, x_n)$ funksiya minimal DNSh bo'ladi.

Bu usul amaliy jihatdan qo'llanilishi qiyin, chunki $n \geq 3$ bo'lganda $2^{3^3} = 2^{27}$ ta DNSh kurish kerak va ularni tekshirib ko'rish kerak.

Minimal (qisqa) DNSh ko'rinishning bir necha usuli bor, ulardan ba'zilarini quyida keltiramiz.

Aytaylik DNSh - ixtiyoriy DNSh bo'lib,

$\mathcal{DHSH} = \mathcal{DHSH}^1 \vee K$ eku $\mathcal{DHSH} = \mathcal{DHSH}^1 \vee \underbrace{x_i^{\delta_i} K^1}_K$ bo'lsin. Bu yerda K-DNSh dan olingan

e.k., $\text{DNSh}^1 - K$ e.k. dan tashqari DNSh tarkibidagi K_i e.k. lar dizyunksiyasi, $x_1^{\delta_i} - K^1$ e.k.

dagi had, K' , $x_1^{\delta_i}$ haddan tashqari K dagi hadlarning konyuksiyasi. DNSh uchun quyidagi ikkita almashtirishlarni qaraymiz.

I. *Elementar kon'yunksiyalarni tashlab yuborish masalasi.* DNSh dan DNSh^1 ni DNSh tarkibidan ba'zi bir e.k. K_i ni tashlab yuborish yo'li bilan olish. K_i ni tashlash mumkin, qachonki $\text{DNSh}^1 = \text{DNSh}$ bo'lsa, ya'ni $K_1 \vee K_1 = K_1$ ga asosan.

II. *Kadlarni tashlab yuborish masalasi.* $\mathcal{DHSH} = \mathcal{DHSH}^1 \vee x_i^{\delta_i} K^1$ dan $\mathcal{DHSH}_1 = \mathcal{DHSH}^1 \vee K^1$ ga $x_i^{\delta_i}$ hadni tashlab yuborish yo'li bilan o'tish mumkin, qachonki $\mathcal{DHSH} = \mathcal{DHSH}_1$ bo'lsa.

Ta'rif. $f(x_1, \dots, x_n)$ funksiyaning ifodalovchi DNSh- tupikli DNSh deyiladi, agarda uning tarkibida birorta ham e.k. va birorta ham $x_i^{\delta_i}$ hadni tashlab yuborish mumkin bo'lmasa.

Masalan: $\overline{DHIII}_2 = x_1 V \overline{x_2 x_3}$ tupikli DNSh, chunki bundan x_1 ёки x_2 ёки x_3 ni tashlab yuborish, shuningdek, $K_1 = x_1$ ёки $K_2 = \overline{x_2 x_3}$ e.k. ni ham tashlab yuborish mumkin emas.

Faraz qilaylik, $\overline{DHIII}_1, \overline{DHIII}_2$ lar $f(x_1, x_2)$ funksiyani ifodalaydigan tupikli DNSh lar bo'lsin.

Ta'rif. Agar DNSh₁ tupikli DNSh ning o'zgaruvchilar soni, DNSh₂ tupikli DNSh ning o'zgaruvchilar soniga nisbatan kichik bo'lsa, u xolda tupikli DNSh₁ minimal DNSh deyiladi.

Ta'rif. Agar DNSh₁ tupikli DNSh ning kon'yunksiyalar soni, DNSh₂ tupikli DNSh ning konyunksiyalar soniga nisbattan kichik bo'lsa, u xolda tupikli DNSh₁ qisqa DNSh deyiladi.

Ta'rif. Har qanday minimal DNSh eng qisqa DNSh bo'ladi.

Ta'rif. Har qanday qisqa DNSh minimal DNSh bo'lmaydi.

Ta'rif. E.k. $K = x_1^{\delta_1}, x_2^{\delta_2}, \dots, x_n^{\delta_n}$ da ishtirok etayotgan barcha belgilar $(-, \vee, \wedge)$ soni K ning uzunligi deyiladi.

Masalan, $K = \overline{x_1 \& x_2 \& \overline{x_3}}$ ning uzunligi $R(K) = 7$.

Ta'rif. Tupikli DNSh eng qisqa DNSh deyiladi, agarda undagi konyunksiyalari uzunliklarining yig'indisi boshqa tupikli DNSh larga nisbatan eng kichik bo'lsa.

Masalan, $m.\overline{DHIII}_1 = \overline{x_1 \& \overline{x_2} V \overline{x_1} \& x_2 \& \overline{x_3}}; R(m.\overline{DHIII}_1) = 13$
 $m.\overline{DHIII}_2 = \overline{x_1 \& x_2 V x_1 \& x_3 V x_1 \& x_2}; R(m.\overline{DHIII}_2) = 12$
 $m.\overline{DHIII}_3 = \overline{x_1 \& \overline{x_2} V x_1 \& \overline{x_3} V x_1 \& x_2}; R(m.\overline{DHIII}_2) = 14$

Demak, $mDNSh_2$ minimal DNSh bo'ladi, chunki

$$R(m.\overline{DHIII}_3) \geq R(m.\overline{DHIII}_1) \geq R(m.\overline{DHIII}_2) = 12$$

Endi qisqatiritirilgan DNSh larni hosil qilishining umumiy qonuniyatlarini ko'rib chiqamiz:

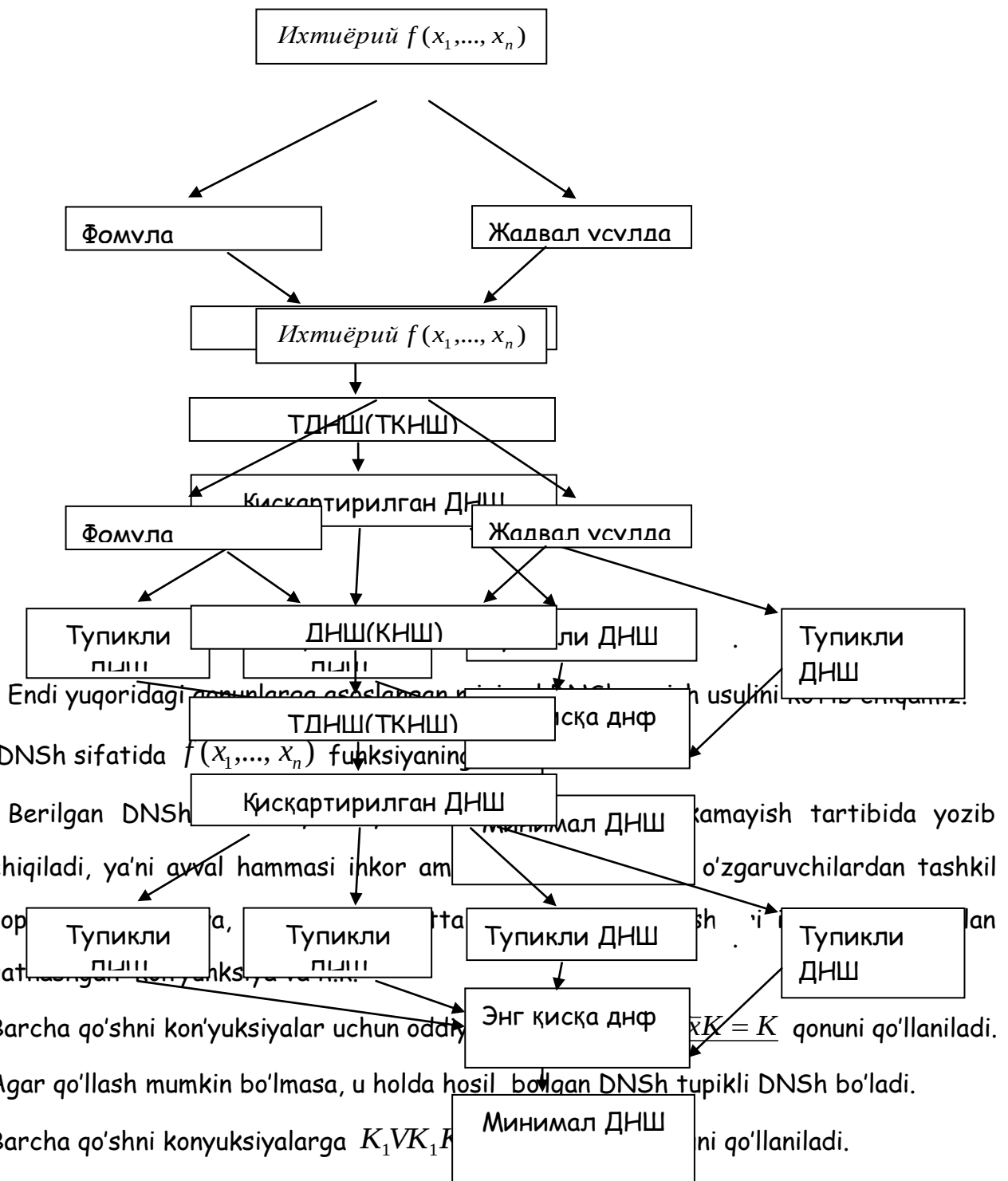
1. $xKV\overline{x}K = K(xv\overline{x}) = K \cdot 1 = K$ - oddiy birlashtirish qonuni.

2. $K_1VK_1K_2 = K_1$ - yutilish qonuni.

3. $K_1xVK_2\overline{x} = xK_1V\overline{x}K_2VK_1K_2$ -umumiy birlashtirish qonuni.

4. $KxVK\overline{x} = KxVK\overline{x}VK$ - to'liq bo'lmagan birlashtirish qonuni.

Minimal va eng qisqa DNSh qurishning sxemasini keltiramiz:



1-misol. $\bar{X}_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2 \vee X_1X_2$ TDNSh berilgan.

1. Inkor bo'yicha tartiblashtiramiz

$$\bar{X}_1X_2 \vee X_1X_2 \vee X_1\bar{X}_2.$$

2. $xK \vee \bar{x}K = K$ birlashtirish qonunga asosan

x_1x_2	$f(x_1, x_2, x_3)$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1x_2 \vee x_1x_2 &= (\bar{x}_1 \vee x_1)x_2 = x_2 \\ x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 &= (x_1 \vee \bar{x}_2)x_1 = x_1 \end{aligned} \right\}$$

hosil qilinadi.

3. $x_1 \vee x_2$ - minimal DNSh.

2-misol. $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyaning qiymati jadval usulda berilgan.

$x_1x_2x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

1. Ushbu jadvaldan $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$ TDNSh ni xosil qilamiz.
2. TDNSh da elementar kon'yunksiyalar inkorlar sonining kamayishi bo'yicha tartiblangan.

3. TDNSh dan $xK \vee \bar{x}K = K$ ga asosan

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2(\bar{x}_3 \vee x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2,$$

$$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 = \bar{x}_2x_3, \quad x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 = x_1x_3 \text{ larni xosil qilamiz.}$$

$$\text{U holda qisqartirilgan DNSh } \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_3$$

keladi.

Endi qisqartirilgan DNSh dan tupikli DNSh hosil qilish algoritmi ko'rib o'tamiz.

1. Qisqartirilgan DNSh dagi har bir e.k.

$$K_i = f_j(x_1, \dots, x_n); \quad i = 1, \dots, s; \quad j = 1, \dots, 2^n \quad \text{funksiyaning}$$

qiymatlarini hisoblash uchun quyidagi jadval tuziladi.

	α_1^n	α_2^n	$\dots$	$\alpha_{2^n}^n$
K_1	β_{11}	β_{12}	$\dots$	β_{12^n}
K_2	β_{21}	β_{22}	$\dots$	β_{22^n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
K_s	β_{s1}	β_{s2}	$\dots$	β_{s2^n}

2. Jadval katakchalari $\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } K_i(\alpha_j^n) = 1 \\ 0, & \text{aks holda, } j = \overline{1, s}; \quad j = \overline{1, 2^n}; \end{cases}$ qoidaga asosan

to'ldiriladi.

	α_1^n	α_2^n	$\dots$	$\alpha_{2^n}^n$
K_1	0	1	$\dots$	1
K_2	1	0	$\dots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
K_s	1	0	$\dots$	0

3. Jadvaldagi har bir ustunda β_{ij} larning qiymati $\beta_{ij} = 1$ bo'lgan joylarda

$\beta_{ij} = a_i$ ($i = 1, s, j = 1, 2^n$) larni qo'yib chiqamiz va har bir ustun uchun $a_1, a_2, \dots, a_s$ larning elementar diz'yunksiyasini $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_s$ tuzamiz. Har bir ustun uchun tuzilgan elementar diz'yunksiyalarning kon'yunksiyasini tuzsak, natijada KNSh hosil bo'ladi.

4. Hosil bo'lgan KNSh ni DNSh ga keltiramiz va soddalashtiramiz. Hosil bo'lgan DNSh da har bir elementar kon'yunksiyani aloxida-aloxida qaraymiz. Ushbu kon'yunksiyalardagi kon'yunksiya belgisini diz'yunksiya belgisiga almashtirib chiqamiz hamda 3- qadamdagi almashtirishga teskari almashtirish bajaramiz. Ya'ni a_1 belgisini K_1 kon'yunksiya bilan, a_2

ni K_2 bilan, a_3 ni K_3 va x.k a_5 ni K_5 bilan almashtiramiz. Natijada 4- qadamda hosil bo'lgan DNSh da nechta kon'yunksiyalar bo'lsa, shuncha DNSh lar hosil bo'ladi. Bu DNSh larning har biri tupikli DNSh hisoblanadi.

Misol: Kisqartirilgan DNSh berilgan bo'lsin. DNSh

$$= \bar{x} \bar{y} \vee \bar{y} z \vee x z \vee x y \vee y \bar{z} \vee \bar{x} \bar{z}.$$

	000	001	010	011	100	101	110	111
$\bar{x} \bar{y}$	1(a_1)	1(a_1)	0	0	0	0	0	0
$\bar{y} z$	0	1(a_2)	0	0	0	1(a_2)	0	0
$x z$	0	0	0	0	0	1(a_3)	0	1(a_3)
xy	0	0	0	0	0	0	1(a_4)	1(a_4)
$y \bar{z}$	0	0	1(a_5)	0	0	0	1(a_5)	0
$\bar{x} \bar{z}$	1(a_6)	0	1(a_6)	0	0	0	0	0

$$KNSh = (a_1 \vee a_6) \& (a_1 \vee a_2) \& (a_5 \vee a_6) \& (a_2 \vee a_3) \& (a_4 \vee a_5) \& (a_3 \vee a_4);$$

Qavslarni ochamiz, ya'ni KNSh ni DNSh ga keltiramiz.

$$a) (1,2): (a_1 \vee a_6) \& (a_1 \vee a_2) = a_1 a_1 \vee a_1 a_2 \vee a_1 a_6 \vee a_2 a_6 = \vee a_1 \vee a_1 a_2 \vee a_1 a_6 \vee a_2 a_6 = \\ [[K_1 \vee K_2 K_2 = K_1 \vee K_1] = a_1 \vee a_1 a_2 = a_1] = \underbrace{a_1 \vee a_1 a_6 \vee a_2 a_6}_{a_1} = a_1 \vee a_2 a_6$$

$$b) (3,4): (a_5 \vee a_6) \& (a_2 \vee a_3) = a_2 a_5 \vee a_3 a_5 \vee a_2 a_6 \vee a_3 a_6$$

$$c) (5,6): (a_4 \vee a_5) \& (a_3 \vee a_4) = a_3 a_4 \vee a_4 a_4 \vee a_3 a_5 \vee a_4 a_5 = \underbrace{a_3 a_4 \vee a_4}_{a_4} \vee a_3 a_5 \vee a_4 a_5 =$$

$$a_4 \vee a_3 a_5 \vee a_4 a_5 = \underbrace{a_4 \vee a_4 a_5}_{a_4} \vee a_3 a_5 = a_4 \vee a_3 a_5$$

$$1) a_1 a_2 a_5$$

$$2) a_1 a_3 a_5$$

$$3) a_1 a_2 a_6 \vee a_2 a_6 = [K_1 \vee K_1 K_2 = K_1] = a_2 a_6$$

$$4) a_1 a_2 a_6$$

$$5) a_2 a_5 a_6 \vee a_2 a_3 a_5 a_6 = [K_1 \vee K_1 K_3 = K_1] = a_2 a_5 a_6$$

$$6) a_2 a_6 \vee a_2 a_3 a_6 = [K_1 \vee K_1 K_2 = K_1] = a_2 a_6$$

$$7) a_2 a_6 \vee a_2 a_6 = a_2 a_6;$$

$$8) a_2 a_6 \vee a_2 a_5 a_6 = a_2 a_6$$

$$\text{Demak DNSh} = a_1 a_2 a_5 \vee a_1 a_3 a_5 \vee a_1 a_2 a_1 \vee a_1 a_3 a_6 \vee a_2 a_6$$

$$c)(5,6) \& (7,2) \& (3,4) = (a_4 \vee a_3 a_5)(a_1 a_2 a_5 \vee a_1 a_3 a_5 \vee a_1 a_3 a_6 \vee a_2 a_6) = a_1 a_2 a_4 a_5 \vee a_1 a_3 a_4 a_5 \vee a_2 a_4 a_6 \vee a_1 a_2 a_3 a_5 \vee a_1 a_3 a_5 \vee a_1 a_3 a_5 a_6 \vee a_2 a_3 a_5 a_6 = a_1 a_2 a_4 a_5 \vee a_1 a_3 a_5 \vee a_1 a_3 a_4 a_6 \vee a_3 a_5 a_6 \vee a_2 a_4 a_6 a_2.$$

Endi $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \quad \text{HH} \quad a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ ga almashtiramiz.

U holda

$$1) \quad a_1 a_2 a_4 a_5 \Rightarrow \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xy \vee y\bar{z}; \quad R = 19;$$

$$2) \quad a_1 a_3 a_5 \Rightarrow \bar{x}\bar{y} \vee xz \vee y\bar{z}; \quad R = 14;$$

$$3) \quad a_1 a_3 a_4 a_6 \Rightarrow \bar{x}\bar{y} \vee xz \vee xy \vee x\bar{z}; \quad R = 19;$$

$$4) \quad a_2 a_4 a_6 \Rightarrow \bar{y}\bar{z} \vee xy \vee x\bar{z}; \quad R = 14;$$

$$5) \quad a_2 a_3 a_5 a_6 \Rightarrow \bar{y}\bar{z} \vee xz \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}; \quad R = 19.$$

Bulardan minimali 2) va 4) chilaridir.

$$\text{Demak DNSh}_m = \bar{x}\bar{y} \vee xz \vee y\bar{z} \quad \text{yoki DNSh}_m = \bar{y}\bar{z} \vee xy \vee \bar{x}\bar{z}.$$

Asosiy mantiqiy amallarning TDNSh va TKNSh ko'rinishlari quyidagicha bo'ladi: a)

$$\text{MDNSh: } \bar{\bar{x}} = \bar{x}; \quad xy = xy; \quad x \vee y = xy \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}; \quad x \rightarrow y = xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y};$$

$$x \rightarrow y = xy \vee \bar{x}\bar{y}.$$

$$\text{b) TKNSh: } \bar{\bar{x}} = \bar{x}; \quad xy = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(x \vee y);$$

$$x \vee y = x \vee y; \quad x \rightarrow y = \bar{x} \vee y; \quad x \rightarrow y = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y}).$$

Teorema. n ta elementar mulohazaning aynan chin formulasidan farqli har bir A formulani takomil kon'yunktiv normal shaklga (TKNSh) keltirish mumkin.

Misol. 1. $A = (\bar{x} \rightarrow x) \wedge (y \rightarrow \bar{y}) \vee (z \leftrightarrow u)$ formula quyidagi TKNSh ga ega bo'ladi.

$$A = (x \vee \bar{z} \vee u) \wedge (x \vee z \vee \bar{u}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee u) \wedge (\bar{y} \vee z \vee \bar{u})$$

$$2. \quad A = (\bar{x} \vee z) \wedge (x \rightarrow y) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$$

$$A = [\bar{x} \vee (y \wedge \bar{y}) \vee (z \wedge \bar{z})] \wedge [(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee \bar{z}] \wedge$$

$$\wedge (\bar{x} \vee y \vee (z \wedge \bar{z})) = [(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge$$

$$(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})] \wedge [(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge$$

$$\wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})] \wedge [(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})]$$

$$A = (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge$$

$$\wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

$$3. A = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee t)$$

$$A = [z \vee y \vee (z \wedge \bar{z}) \vee (t \wedge \bar{t})] \wedge [(x \wedge \bar{x}) \vee y \vee z \vee (t \wedge \bar{t})] \wedge$$

$$\wedge [(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee z \vee t] = [(x \vee y \vee z \vee t) \wedge (x \vee y \vee \bar{z} \vee t) \wedge$$

$$\wedge (x \vee y \vee z \vee \bar{t}) \wedge (x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t})] \wedge [(x \vee y \vee z \vee t) \wedge$$

$$(\bar{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge (x \vee y \vee z \vee \bar{t}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t})] \wedge$$

$$\wedge [(x \vee y \vee z \vee t) \wedge x \vee \bar{y} \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee t)]$$

n mulohazali mukammal kon'yunktiv normal shakl

$$\wedge (x_1^1 \vee x_2^1 \vee \dots \vee x_n^1)$$

ifodasida $\wedge$ o'rniga $\vee$ ni va aksincha, $\vee$ o'rniga $\wedge$ ni qo'yganimizda

$$\vee (x_1^1 \wedge x_2^1 \wedge \dots \wedge x_n^1)$$

biz n mulohazali mukammal diz'yunktiv normal shaklga ega bo'lamiz.

Mukammal diz'yunktiv normal shaklning har bir $x_1^1 \wedge x_2^1 \wedge \dots \wedge x_n^1$ hadi **kon'yunktiv**

konstituyent deb ataladi.

Teorema. n ta elementar mulohazalarning aynan yolg'on formulasidan farqli har bir

A formulasini mukammal diz'yunktiv normal shaklga keltirish mumkin.

$$\text{Misol. } A = [(\bar{x} \rightarrow x) \wedge (y \rightarrow \bar{y})] \vee (z \leftrightarrow u)$$

$$A = (x \vee \bar{z} \vee u) \wedge (x \vee z \vee \bar{u}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee u) \wedge (\bar{y} \vee z \vee \bar{u}) \wedge$$

$$\wedge (x \vee \bar{z} \vee u) \vee (y \wedge \bar{y}) = (x \vee \bar{z} \vee u \vee y) \wedge (x \vee \bar{z} \vee u \vee \bar{y})$$

9-ma'ruza. Graflar nazariyasi. Graflar nazariyasining asosiy tushunchalari. Graflarning ba'zi maxsus turlari. graflarning berilish usullari.

Graflar nazariyasi haqida umumiy ma'lumotlar. 1736 yilda L. Eyler tomonidan o'sha davrda qiziqarli amaliy masalalardan biri hisoblangan Kyonigsberg ko'priklari haqidagi masalaning qo'yilishi va yechilishi **graflar nazariyasining** paydo bo'lishiga asos bo'ldi.

Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yettita ko'priklar joylashuvi 1- shakldagi qadimiy xaritada tasvirlangan va qurilishi tartibida 1, 2, 3, 4, 5, 6 va 7 raqamlar bilan belgilangan. Pregel daryosi Kyonigsberg shahrini o'sha davrda to'rtta *A*, *B*, *C* va *D* qismlarga bo'lgan. Shaharning ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib yettita ko'priklardan faqat bir martadan o'tib, yana o'sha uyga qaytib kelish mumkinmi? Kyonigsberg ko'priklari haqidagi bu masalani hal qilish jarayonida graflarda maxsus marshrut (hozirgi vaqtda graflar nazariyasida bu marshrut Eyler sikli nomi bilan yuritiladi, mavjudligi shartlari ham topildi. Bu natijalar e'lon qilingan tarixiy ilmiy ishning birinchi sahifasi 2- shaklda keltirilgan. L. Eylerning bu maqolasi yuz yildan ko'p vaqt mobaynida graflar nazariyasi bo'yicha yagona ilmiy ish bo'lib keldi.



1

XIX asrning o'rtalarida graflar nazariyasi bilan bog'liq tadqiqotlar G. Kirxgof va A. Keli ishlarida paydo bo'ldi.

"Graf" iborasi D. Kyonig tomonidan 1936 yilda graflar nazariyasiga bag'ishlangan dastlabki darslikda uchraydi.

Graflar nazariyasi bo'yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo'llaniladi. Ulardan ba'zilari quyidagilardir: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o'yinlar; yo'llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok-sxemalar va komp'yuter uchun programmalarni tadqiq qilish va hokazo.

1.2. Grafning abstrakt ta'rifi va u bilan bog'liq boshlang'ich tushunchalar.

Avvalo, grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta'rifini va boshqa ba'zi sodda tushunchalarni keltiramiz. V qandaydir bo'shmas to'plam bo'lsin. Uning $v_1 \in V$ va $v_2 \in V$ elementlaridan tuzilgan $\langle v_1, v_2 \rangle$ ko'rinishdagi barcha juftliklar (kortejlar) to'plamini (V to'plamning o'z-o'ziga Dekart ko'paytmasini) $V \times V$ bilan belgilaymiz.

Graf deb shunday $\langle V, U \rangle$ juftlikka aytiladiki, bu yerda $V \neq \emptyset$ va $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ ($v_1 \in V, v_2 \in V$) ko'rinishdagi juftliklar korteji⁵ bo'lib, $V \times V$ to'plamning elementlaridan tuzilgandir.

Bundan buyon grafni belgilashda $\langle V, U \rangle$ yozuv o'rniga (V, U) yozuvdan foydalanamiz. Grafning tashkil etuvchilarini ko'rsatish muhim bo'lmasa, u holda uni lotin alifbosining bitta harfi, masalan, G bilan belgilaymiz.

$G = (V, U)$ graf berilgan bo'lsin. V to'plamning elementlariga G **grafning uchlari**, V to'plamning o'ziga esa, **graf uchlari to'plami** deyiladi.

Graflar nazariyasida "uch" iborasi o'rniga, ba'zan, **tugun** yoki **nuqta** iborasi ham qo'llaniladi. Umuman olganda, hanuzgacha graflar nazariyasining ba'zi iboralari bo'yicha umumiy kelishuv qaror topmagan. Shuning uchun, bundan keyingi ta'riflarda, imkoniyat boricha, muqobil (alternativ) iboralarni ham keltirishga harakat qilamiz.

$G = (V, U)$ grafning ta'rifiga ko'ra, U bo'sh kortej bo'lishi ham mumkin. Agar U bo'sh bo'lmasa, u holda bu kortej (a, b) ($a \in V, b \in V$) ko'rinishdagi juftliklardan⁶ tashkil topadi, bunda $a = b$ bo'lishi hamda ixtiyoriy (a, b) juftlik U kortejda istalgancha marta qatnashishi mumkin.

$(a, b) \in U$ juftlikni tashkil etuvchi a va b uchlarning joylashish tartibidan bog'liq holda, ya'ni yo'nalishning borligi yoki yo'qligiga qarab, uni turlicha atash mumkin. Agar (a, b) juftlik uchun uni tashkil etuvchilarning joylashish tartibi ahamiyatsiz, ya'ni $(a, b) = (b, a)$ bo'lsa, (a, b) juftlikka **yo'naltirilmagan (oriyentirlanmagan) qirra** (yoki, qisqacha, **qirra**) deyiladi. Agar bu tartib muhim, ya'ni $(a, b) \neq (b, a)$ bo'lsa, u holda (a, b) juftlikka **yoy** yoki **yo'naltirilgan (oriyentirlangan) qirra** deyiladi.

U kortejning tarkibiga qarab, uni yo **grafning qirralari korteji**, yo **yoylari korteji**, yoki **qirralari va yoylari korteji** deb ataymiz.

Grafning uchlari va qirralari (yoylari) uning **elementlari** deb ataladi. $G = (V, U)$ graf elementlarining soni $(|V| + |U|)$ ga tengdir, bu yerda G grafning uchlari soni $|V| \neq 0$ va $|U|$ bilan uning qirralari (yoylari) soni belgilangan.

Grafning qirrasi (yoyi), odatda, uni tashkil etuvchi uchlar yordamida (a, b) , yoki ab , yoki $(a; b)$ ko'rinishda belgilanadi. Boshqa belgilashlar ham ishlatiladi: masalan, yoy uchun $\overrightarrow{(a, b)}$ yoki $\overleftarrow{(a, b)}$, qirra uchun $\overleftrightarrow{(a, b)}$, yoy yoki qirra uchun u (ya'ni uchlari ko'rsatilmasdan bitta harf vositasida) ko'rinishda.

Graf yoyi uchun uning chetki uchlari ko'rsatish tartibi muhim ekanligini ta'kidlaymiz, ya'ni (a, b) va (b, a) yozuvlar bir-biridan farq qiluvchi yoylarni ifodalaydi. Agar yoy (a, b) ko'rinishda ifodalangan bo'lsa, u holda a uning **boshlang'ich uchi**, b esa **oxirgi uchi** deb ataladi. Bundan tashqari, yoy (a, b) ko'rinishda yozilsa, u haqida a

⁵ Bundan keyin "juftliklar korteji" iborasi o'rniga, qisqacha kortej iborasini qo'llaymiz.

⁶ Bu yerda ham juftlikning (kortejning) odatdagi $\langle a, b \rangle$ yozuvi o'rniga (a, b) yozuvdan foydalanamiz.

uchdan chiquvchi (boshlanuvchi) va b **uchga kiruvchi (uchda tugovchi)** yoy deb ay-
tish ham odat tusiga kirgan.

Qirra uchun uning (a,b) yozuvidagi harflar joylashish tartibi muhim rol
o'ynamaydi va a va b elementlar **qirraning uchlari** yoki **chetlari** deb ataladi.

Agar grafda yo (a,b) qirra, yo (a,b) yoy, yoki (b,a) yoy topilsa, u holda a va b
uchlar tutashtirilgan deyiladi. Agar grafning ikkita uchini tutashtiruvchi qirra yoki
yoy bor bo'lsa, u holda ular **qo'shni uchlar** deb, aks holda esa, **qo'shni bo'lmagan**
uchlar deb aytiladi.

Grafning ikkita uchi qo'shni bo'lsa, ular shu uchlarni tutashtiruvchi **qirraga**
(yoyga) insident, o'z navbatida, qirra yoki yoy bu **uchlarga insident** deyiladi.

Grafda ikkita qirra (yoy) umumiy chetga ega bo'lsa, ular **qo'shni qirralar (yoy-
lar)** deyiladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, qo'shnilik tushunchasi grafning bir jinsli, insidentlik
tushunchasi esa uning turli jinsli elementlari orasidagi munosabatni ifodalaydi.

Ba'zan graf undagi elementlar soniga qarab, ya'ni **uchlar soni** m va **qirralar**
(yoylar) soni n ga qarab belgilanadi va bu holda grafni (m,n) -**graf** deb ataydilar.

Agar $G=(V,U)$ grafda U kortej faqat qirralardan iborat bo'lsa, u holda
yo'naltirilmagan (oriyentirlanmagan) va faqat yo'naltirilgan (oriyentirlangan) qirra-
lardan (ya'ni, yoylardan) tashkil topgan bo'lsa, u holda u **yo'naltirilgan (oriyentirlan-
gan) graf** deb ataladi. Oriyentirlangan graf, qisqacha, **orgraf** deb ham ataladi.

Qator hollarda oriyentirlanmagan qirralari ham, oriyentirlangan qirralari ham
bo'lgan graflar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bunday graflar **aralash graflar** deb
ataladi.

Agar $G=(V,U)$ grafning (orgrafning) U korteji tarkibida $V \times V$ to'plamdan olin-
gan takrorlanuvchi elementlar bo'lsa, u holda ular **karrali** yoki **parallel qirralar (yoy-
lar)** deb ataladi. Karrali qirralari yoki yoylari bo'lgan graf **multigraf** deyiladi.

Ikkala chetki (boshlang'ich va oxirgi) uchlari ustma-ust tushgan qirra (yoy),
ya'ni grafning $(a,a) \in U$ elementi **sirtmoq** deb ataladi. Sirtmoq, odatda,
yo'naltirilmagan deb hisoblanadi. Qirralari (yoylari) orasida sirtmoqlari bo'lgan graf
psevdograf deyiladi.

Umumiy holda uchlar to'plami V va (yoki) qirralar (yoylar, qirra va yoylar)
korteji U cheksiz ko'p elementli bo'lishi mumkin. Bundan keyin V to'plam va U
kortej faqat chekli bo'lgan $G=(V,U)$ graflarni qaraymiz. Bunday graflar **chekli**
graflar deb ataladi.

Hech qanaqa qirra (yoy) bilan bog'lanmagan uch **yakkalangan (ajralgan, xolis,
yalong'och) uch** deb ataladi.

Faqat yakkalangan uchlardan tashkil topgan graf (ya'ni, grafda qirralar va
yoylar bo'lmasa) **nolgraf** yoki **bo'sh graf** deb ataladi. Uchlari soni m ga teng bo'lgan
bo'sh grafni O_m yoki N_m kabi belgilash qabul qilingan.

Istalgan ikkita uchlari qo'shni bo'lgan sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz oriyentirlanmagan graf **to'la graf** deb ataladi. Uchlari soni m ga teng bo'lgan to'la graf K_m bilan belgilanadi. Ravshanki, K_m grafning qirralar soni $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$ bo'ladi.

Agar orgrafning istalgan ikkita uchini har bir yo'nalishda tutashtiruvchi faqat bittadan yoy mavjud bo'lsa, u holda unga **to'la orgraf** deb ataladi. Ravshanki, to'la grafdagi qirralarning har birini ikkita (yo'nalishlari bir-biriga qarama-qarshi bo'lgan) yoylarga almashtirilsa, natijada to'la orgraf hosil bo'ladi. Shuning uchun, to'la orgrafdagi yoylar soni oriyentirlanmagan to'la grafdagi qirralar sonidan ikki baravar ko'pdir, ya'ni uchlari m ta bo'lgan to'la orgrafdagi yoylar soni $2C_m^2 = m(m-1)$ bo'ladi.

Agar grafning uchlariga qandaydir belgilar, masalan, $1, 2, \dots, m$ sonlari mos qo'yilgan bo'lsa, u **belgilangan graf** deb ataladi.

Agar $G=(V, U)$ va $G'=(V', U')$ graflarning uchlari to'plamlari, ya'ni V va V' to'plamlar orasida uchlarning qo'shnilik munosabatini saqlaydigan o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, u holda G va G' graflar **izomorf graflar** deb ataladi. Bu ta'rifni quyidagicha ham ifodalash mumkin: agar $\forall x, y \in V$ va ularga mos bo'lgan $x', y' \in V'$ ($x \leftrightarrow y$, $x' \leftrightarrow y'$) uchun $xy \leftrightarrow x'y'$ ($xy \in U$, $x'y' \in U'$) bo'lsa, u holda G va G' graflar izomorfdir. Agar izomorf graflardan biri oriyentirlangan bo'lsa, u holda ikkinchisi ham, albatta, oriyentirlangan bo'lishi va ulardagi mos yoylarning yo'nalishlari ham bir-birlariga mos bo'lishlari shart.

Graf uchiga insident qirralar soni shu **uchning lokal darajasi**, yoki, qisqacha, **darajasi**, yoki **valentligi** deb ataladi. Grafdagi a uchning darajasini $\rho(a)$ bilan belgilaymiz.

Sirtmoqqa insident bo'lgan uchning darajasini aniqlashda shuni e'tiborga olish kerakki, qarayotgan masalaga bog'liq holda sirtmoqni bitta qirra deb ham, ikkita qirra deb ham hisoblash mumkin. Ravshanki, ajralgan uchning darajasi nolga teng. Darajasi birga teng uch **chetki** (yoki **osilgan**) **uch** deb ataladi. Chetki (osilgan) uchga insident qirra ham **chetki** (yoki **osilgan**) **qirra** deb ataladi.

Agar grafning barcha uchlari bir xil r darajaga ega bo'lsa, u holda bunday graf r **darajali regulyar graf** deb ataladi. Uch darajali regulyar graf **kubik** (yoki **uch valentli**) **graf** deb ataladi. O_m graf nol darajali regulyar graf ekanligini, K_m esa $(m-1)$ darajali regulyar graf ekanligini ta'kidlaymiz.

Ko'rinib turibdiki, oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalarining yig'indisi qirralar sonining ikki baravariga teng juft son bo'ladi, chunki qirralarni sanaganda har bir qirra hisobda ikki marta qatnashadi. Shunday qilib, XVIII asrdayoq L. Eyler tomonidan isbotlangan quyidagi tasdiq o'rinalidir.

1 - lemma ("ko'rishishlar" haqida). *Ixtiyoriy oriyentirlanmagan grafda barcha uchlar darajalari yig'indisi qirralar sonining ikki baravariga teng.*

Agar grafning uchlar to'plamini o'zaro kesishmaydigan shunday ikkita qism to'plamlarga (bo'laklarga) ajratish mumkin bo'lsaki, grafning ixtiyoriy qirrasi bu to'plamlarning biridan olingan qandaydir uchni ikkinchi to'plamdan olingan biror uch bilan tutashtiradigan bo'lsa, u holda bunday graf **ikki bo'lakli graf** (**bixromatik** yoki

Kyonig grafi) deb ataladi. Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, ikki bo'lakli grafning har bir bo'lagidagi ixtiyoriy ikkita uchlar qo'shni bo'la olmaydi. Biror bo'lagida faqat bitta uch bo'lgan to'la ikki bo'lakli graf **yulduz** deb ataladi.

Agar ikki bo'lakli grafning turli bo'laklariga tegishli istalgan ikkita uchi qo'shni bo'lsa, u holda bu graf **to'la ikki bo'lakli graf** deb ataladi. To'la ikki bo'lakli grafni $K_{m,n}$ bilan belgilaymiz, bu yerda m va n bilan grafning bo'laklaridagi uchlar sonlari belgilangan. $K_{m,n} = (V, U)$ graf uchun $|V| = m + n$ va $|U| = mn$ bo'lishi ravshan, bu yerda $|V|$ - $K_{m,n}$ grafning uchlari soni, $|U|$ - uning qirralari soni.

Grafning ikki bo'lakli graf bo'lishi haqidagi ba'zi qo'shimcha ma'lumotlar (Kyonig teoremasi) ushbu bobning 4- paragrafidagi keltirilgan.

Ikkidan katta ixtiyoriy natural k son uchun k **bo'lakli graf** tushunchasini ham kiritish mumkin.

1- misol. O'zbekiston Respublikasi hududidagi aeroportlar to'plamini V bilan, bu shaharlar orasida belgilangan vaqt mobaynida amalga oshirilayotgan samolyotlarning uchib qo'nish hodisalari kortejini U bilan belgilaymiz. U holda (V, U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu yerda grafning uchlariga aeroportlar, yo'ylariga esa samolyotlarning uchib qo'nish hodisalari mos keladi. Tabiiyki, (V, U) grafda karrali yo'ylar bo'lishi mumkin, agar, qandaydir sababga ko'ra, samolyot uchgan aeroportga qaytib qo'nsa, u holda bu hodisaga qarayotgan grafdagi sirtmoq mos keladi. ■

2- misol. Qadimgi boshqotirma masalalar qatoriga kiruvchi quyidagi masalani qaraymiz. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikki qismga bo'ling⁷. 8, 5 va 3 birlik hajmli idishlardagi suyuqlik hajmini mos ravishda a , b va c bilan belgilab, muayyan bir vaqt uchun idishlardagi suyuqlikning hajmlari asosida qarayotgan sistemaning holatini ifodalovchi $\langle a, b, c \rangle$ uchliklarni tuzamiz. Masalaning shartiga ko'ra a , b va c o'zgaruvchilar butun qiymatlar qabul qilgan holda $0 \leq a \leq 8$, $0 \leq b \leq 5$ va $0 \leq c \leq 3$ shartlarni qanoatlantirishlari kerak. Bu shartlarni qanoatlantiruvchi holatlar quyidagilardir:

$\langle 8, 0, 0 \rangle$, $\langle 7, 1, 0 \rangle$, $\langle 7, 0, 1 \rangle$, $\langle 6, 2, 0 \rangle$, $\langle 6, 1, 1 \rangle$, $\langle 6, 0, 2 \rangle$, $\langle 5, 3, 0 \rangle$, $\langle 5, 2, 1 \rangle$, $\langle 5, 1, 2 \rangle$,
 $\langle 5, 0, 3 \rangle$, $\langle 4, 4, 0 \rangle$, $\langle 4, 3, 1 \rangle$, $\langle 4, 2, 2 \rangle$, $\langle 4, 1, 3 \rangle$, $\langle 3, 5, 0 \rangle$, $\langle 3, 4, 1 \rangle$, $\langle 3, 3, 2 \rangle$, $\langle 3, 2, 3 \rangle$,
 $\langle 2, 5, 1 \rangle$, $\langle 2, 4, 2 \rangle$, $\langle 2, 3, 3 \rangle$, $\langle 1, 5, 2 \rangle$, $\langle 1, 4, 3 \rangle$, $\langle 0, 5, 3 \rangle$.

Holatlar to'plamini V bilan belgilaymiz. Suyuqlikni (yoki uning bir qismini) idishlarning biridan boshqa birortasiga quyish natijasida sistema bir holatdan boshqa holatga o'tishi mumkin. Ta'kidlash kerakki, yuqoridagi holatlarning ixtiyoriysidan boshqa birortasiga bevosita yoki bilvosita o'tish imkoniyati mavjud bo'lmasligi ham mumkin. Sistemaning bir holatdan boshqa holatga bevosita o'tishlari to'plamini U bilan belgilaymiz. Natijada hosil bo'lgan (V, U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu

⁷ Bu masalani fransuz shoiri va yozuvchisi Bashe de Mezeriakning (1587-1638) matematikaga bag'ishlangan ishlarida topish mumkin.

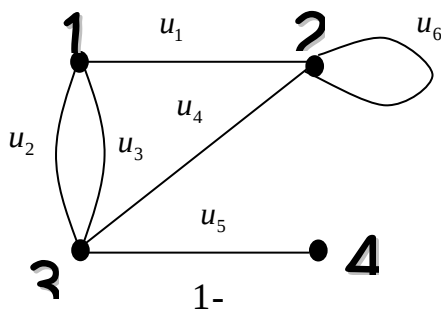
grafning uchlari sistema holatlariga, yoylari (qirralari) esa, bevosita o'tishlarga mos keladi.

Berilgan masalani hal qilish uchun (V, U) grafning yoylaridan tashkil topgan shunday ketma-ketlik tuzish kerakki, bu ketma-ketlikning birinchi hadi $\langle 8, 0, 0 \rangle$, oxirgi hadi esa $\langle 4, 4, 0 \rangle$ bo'lsin. Bunday ketma-ketliklardan biri quyida keltirilgan:

$$\langle 8, 0, 0 \rangle, \langle 5, 0, 3 \rangle, \langle 5, 3, 0 \rangle, \langle 2, 3, 3 \rangle, \langle 2, 5, 1 \rangle, \\ \langle 7, 0, 1 \rangle, \langle 7, 1, 0 \rangle, \langle 4, 1, 3 \rangle, \langle 4, 4, 0 \rangle.$$

Graflarning berilish usullari

1- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafni $G=(V, U)$ deb belgilaymiz. Berilgan



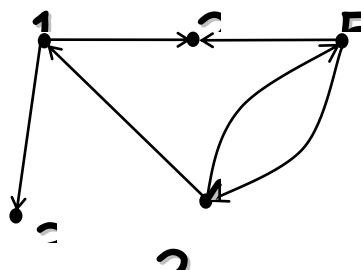
G graf belgilangan graf bo'lib, 4ta uch va 6ta qirraga ega. Demak, $u(4,6)$ -grafdir. Bu graf uchun: $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \rangle$, $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = u_3 = (1, 3)$, $u_4 = (2, 3)$, $u_5 = (3, 4)$, $u_6 = (2, 2)$. G grafning barcha u_i ($i = \overline{1, 6}$)

qirralari oriyentirlanmagan (chunki uchlarni tutashtiruvchi chiziklarda yo'nalish ko'rsatilmagan) bo'lgani uchun G oriyentirlanmagan grafdir. Grafning qirralaridan biri, aniqrog'i, u_6 sirtmoqdir, u_2 va u_3 esa

karrali qirralardir. Bu grafda, masalan, 1 va 2 uchlar qo'shni, 1 va 4 uchlar esa qo'shni emas. Undagi 2 va 3 uchlar u_4 qirraga insident va, aksincha, u_4 qirra 2 va 3 uchlariga insidentdir. Bu yerda u_4 va u_5 qirralar qo'shni qirralardir, chunki ular umumiy uchga (3 uch) ega, u_1 va u_5 qirralar esa qo'shni emas.

2- misol. Geometrik ifodalanishi 2- shakldagi ko'rinishda bo'lgan oriyentirlangan grafni qaraymiz. Bu grafda o'n bitta element bor: 5ta uch va 6ta yoy, ya'ni shaklda $(5,6)$ -orgraf berilgan. Bu grafni $G=(V, U)$ bilan belgilaymiz, bu yerda $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$U = \langle (1, 2), (1, 3), (5, 2), (4, 1), (4, 5), (5, 4) \rangle$ yoki $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \rangle$. Berilgan G orgrafda sirtmoq ham, karrali yoylar ham yo'q. Bu grafning $(1, 3)$ yoyi uchun 1 boshlang'ich, 3 uch esa oxirgi uchdir.



9-mavzu. Qo'shnilik matritsalar.

Endi grafning boshqa bir berilish usuli negizida yotuvchi graf uchlari qo'shniligi matritsasi tushunchasini qarab chiqamiz.

$G=(V,U)$ - uchlari soni m ga teng bo'lgan belgilangan, sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz graf bo'lsin.

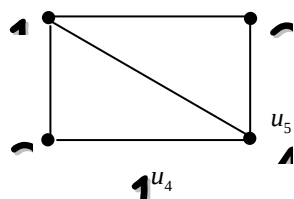
Elementlari

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } i \text{ va } j \text{ uchlari qo'shni bo'lsa,} \\ 0, & \text{aks holda.} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlangan $A=(a_{ij})$ ($i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,m$) matritsani grafning uchlari qo'shnili matritsasi deb ataymiz.

Bu ta'rifdan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan graf uchlari qo'shnili matritsasining bosh diagonalida faqat nollar bo'lishi, satrlaridagi birlar soni esa mos uchlarning darajalariga tengligi kelib chiqadi.

1- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafning uchlari qo'shnili matritsasi



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

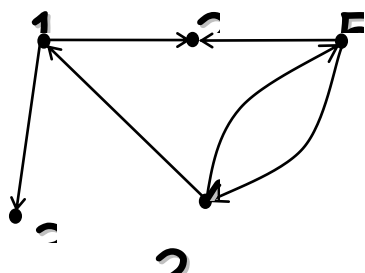
ko'rinishda bo'ladi.

Uchlari soni m ga teng bo'lgan belgilangan **oriyentirlangan** $G=(V,U)$ **grafning uchlari qo'shnili** $m \times m$ -**matritsasi** deb elementlari

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } (i, j) \in U \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{aks holda,} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlangan $A=(a_{ij})$ ($i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,m$) matritsaga aytiladi.

2- misol. 2- shaklda tasvirlangan orgrafning uchlari qo'shnili matritsasi quyidagicha bo'ladi:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endi G uchlari $1,2,\dots,m$ bo'lgan belgilangan oriyehtirlanmagan multigraf bo'lsin. a_{ij} elementlari G grafning i va j uchlari tutashtiruvchi qirralar soniga teng bo'lgan $A=(a_{ij})$ ($i, j=1,2,\dots,m$) matritsa **oriyehtirlanmagan multigrafning uchlari qo'shnili matritsasi** deb ataladi.

3- misol. 1- shaklda tasvirlangan oriyehtirlanmagan multigraf uchlari qo'shnili matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Karrali yoylari bo'lgan **sirtmoqsiz orgraf uchlari qo'shniligi matritsasi** tushunchasini ham yuqoridagiga o'xshash ta'riflash mumkin.

Shunday qilib, manfiymas butun sonlardan tashkil topgan va graf uchun uchlari qo'shniligi matritsasi bo'lgan kvadrat matritsa bilan graf orasida bir qiymatli moslik (izomorflik aniqligida) bor degan xulosa va, bundan, graflar nazariyasi bo'yicha izlanishlar maxsus shartlarni qanoatlantiruvchi mat-ritsalarini tadqiq qilishga keltirilishi mumkinligi kelib chiqadi.

$u_1, u_2, \dots, u_n$ ($n \geq 1$) qirralarga ega yakkalangan uchlari, sirtmoq va karrali qirralari bo'lmagan graf uchun elementlari

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } u_i \text{ va } u_j \text{ qirralar umumiy uchga ega bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } u_i = u_j \text{ bo'lsa yoki ularning umumiy uchi bo'lmasa,} \end{cases}$$

quyidagicha aniqlangan $C = (c_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$) $n \times n$ -matritsa **grafning qirralari qo'shniligi matritsasi** deb ataladi.

4- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafda 5ta qirra bo'lib, uning qirralari qo'shniligi matritsasi

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga egadir.

Ravshanki, sirtmoqsiz va karrali qirralarsiz graf qirralari qo'shniligi matritsasi bosh diagonalga nisbatan simmetrik kvadrat matritsadir va uning bosh diagonal nollardan iborat.

Insidentlik matritsalar. Uchlari $1, 2, \dots, m$ va qirralari $u_1, u_2, \dots, u_n$ ($n \geq 1$) bo'lgan belgilangan graf berilgan bo'lsin. Bu grafning uchlariga satrlari, qirralariga esa ustunlari mos keluvchi va elementlari

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } i \text{ uch } u_j \text{ qirraga insident bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } i \text{ uch } u_j \text{ qirraga intsident bo'lmasa,} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlangan $B = (b_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$) matritsa grafning **insidentlik matritsasi** deb ataladi.

5- misol. 1- shaklda tasvirlangan grafning insidentlik matritsasi quyidagicha bo'ladi:

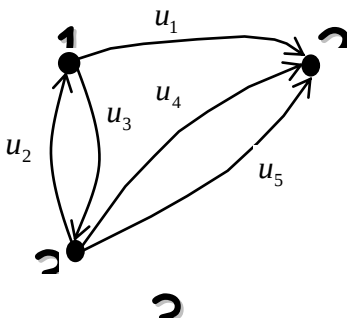
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endi uchlari $1, 2, \dots, m$ va qirralari $u_1, u_2, \dots, u_n$ ($n \geq 1$) bo'lgan belgilangan sirtmoqsiz orgrafni qaraymiz. Elementlari

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } i \text{ uch } u_j \text{ yoyning boshlang'ich uchi bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } i \text{ uch } u_j \text{ yoyning oxirgi uchi bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } i \text{ uch va } u_j \text{ yoy intsident bo'lmasa.} \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlangan $B = (b_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$) matritsaga grafning **insidentlik matritsasi** deb ataladi.

6- misol. 3- shaklda tasvirlangan grafning insidentlik matritsasi quyidagicha bo'ladi:



$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Marshrutlar va zanjirlar haqida umumiy ma'lumotlar. Uchlari to'plami $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ va qirralar korteji $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ bo'lgan oriyentirlanmagan $G = (V, U)$ graf berilgan bo'lsin. Bu G grafdagi uchlar va qirralarning har ikki qo'shni qirralari umumiy chetki uchga ega

$$(\dots, v_{i_1}, u_{j_1}, v_{i_2}, u_{j_2}, v_{i_3}, \dots)$$

ko'rinishdagi chekli yoki cheksiz ketma-ketligi **marshrut** deb ataladi. Marshrutni uning uchlari ketma-ketligi $(\dots, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots)$ yoki qirralari ketma-ketligi $(\dots, u_{j_1}, u_{j_2}, \dots)$ ko'rinishda ham belgilash mumkin.

Agar marshrutda qandaydir uchdan oldin uchlar bo'lmasa, bu uchni marshrutning **boshlang'ich uchi** deb, shu uchdan keyin marshrutga tegishli uchlar bo'lmaganda esa, uni marshrutning **oxirgi uchi** deb ataydilar.

Agar marshrutning boshlang'ich uchi v_p va oxirgi uchi v_q bo'lsa, u holda uni v_p **uchdan** v_q **uchga yo'nalgan marshrut** yoki **chetlari** v_p **va** v_q **bo'lgan marshrut** deb ataladi.

Marshrutdagi ikkita qoshni qirralarga tegishli uch **ichki uch** yoki **oraliq uch** deb ataladi.

Marshrutda qirralar va uchlar takrorlanishi mumkin bo'lgani uchun marshrutning ichki uchi, bir vaqtning o'zida, uning boshlang'ich va (yoki) oxirgi uchi bo'lishi ham mumkin va teskarisi, marshrutning boshlang'ich va (yoki) oxirgi uchi uning ichki uchi bo'lishi ham mumkin.

Tabiiyki, marshrut:

- boshlang'ich uchga ham oxirgi uchga ham ega bo'lmasligi mumkin (bunday marshrut **ikki tomonlama cheksiz marshrut** deb ataladi);

- boshlang'ich uchga ega bo'lib, oxirgi uchga ega bo'lmasligi mumkin yoki, aksincha, oxirgi uchga ega bo'lib, boshlang'ich uchga ega bo'lmasligi mumkin (**bir tomonlama cheksiz marshrut**);

- yagona qirradan iborat bo'lishi mumkin (**notrivial marshrut**);

- birorta ham qirraga ega bo'lmasligi mumkin (**nol marshrut** yoki **trivial marshrut**).

Marshrutning uzunligi deb undagi qirralar soniga aytiladi.

Turli qirralardan tashkil topgan marshrutga **zanjir** deb ataladi. Agar zanjirning chetlaridan tashqari barcha uchlari turlicha bo'lsa, u holda uni **oddiy zanjir** deb ataydilar.

Berilgan $(v_1, v_2, \dots, v_s)$ zanjir yoki oddiy zanjir uchun $v_1 = v_s$ bo'lsa, u **yopiq zanjir** deb ataladi. Hech bo'lmaganda bitta qirraga ega yopiq oddiy zanjir **sikl** deb ataladi.

Sirtmoq yoki bir juft karrali qirralar sikl tashkil etishi ravshandir.

Tushunarliki, grafdagi zanjir grafning qism grafi deb qaralishi mumkin.

6- misol. Yuqoridagi 1- shaklda tasvirlangan graf uchun

$$(3, u_4, 2, u_1, 1, u_1, 2, u_6, 2, u_4, 3, u_5, 4)$$

ketma-ketlik 3 belgili uchdan 4 belgili uchga yo'nalgan marshrutdir, bunda 3 - boshlang'ich uch, 4 - oxirgi uchdir. Bu marshrutda 1, 2 va 3 belgili uchlar oraliq uchlar hisoblanadi. Qaralayotgan marshrutning uzunligi 6a teng bo'lib, u zanjir bo'la olmaydi, chunki unda 1 belgili uch 2 marta (bir marta oraliq uch sifatida, ikkinchi marta esa oxirgi uch sifatida) qatnashmoqda.

Yana o'sha graf uchun $(3, 2, 1, 3)$ zanjirning oxirgi bo'g'ini sifatida u_2 yoki u_3 qirralardan qaysisi olinishiga bog'liqsiz ravishda, u yopiq zanjir va sikldir.

Oriyentirlangan graflar uchun ham undagi yoylarning yo'nalishini (oriyentatsiyasini) inobatga olmasdan oriyentirlanmagan marshrut, zanjir va oddiy zanjir tushunchalarini kiritish mumkin. Lekin, oriyentirlangan graflar uchun oriyentirlangan marshrut tushunchasini kiritish tabiiydir.

Yoylarning oriyentatsiyalari hisobga olingan yoylar va uchlar ketma-ketligi **oriyentirlangan marshrut** deb ataladi.

Oriyentirlangan marshrut uchun zanjir tushunchasiga o'xshash **yo'l** (yoki **oriyentirlangan zanjir**) tushunchasini ham kiritish mumkin. Boshlang'ich va oxirgi uchlari ustma-ust tushadigan oriyentirlangan zanjir **kontur** deb ataladi.

7- misol. Yuqoridagi 2- shaklda tasvirlangan grafni qaraymiz. Uning uch va qirralaridan tuzilgan

$$(3, u_3, 1, u_4, 4, u_5, 5, u_2, 2, u_1, 1)$$

ketma-ketlik oriyentirlanmagan marshrut va zanjirdir, lekin u oddiy zanjir bo'la olmaydi. Bu ketma-ketlik oriyentirlangan marshrut ham bo'la olmaydi, chunki unda marshrut yo'nalishiga teskari yo'nalishga ega yoylar bor (u_3, u_4, u_1) .

Qaralayotgan graf uchun (u_6, u_5, u_2) ketma-ketlik oriyentirlangan marshrutni tashkil etadi. Bu marshrut yo'ldir, lekin u kontur emas. Berilgan grafda faqat bitta kontur bo'lib, bu konturni $(4, u_5, 5, u_6, 4)$ yoki $(5, u_6, 4, u_5, 5)$ ko'rinishda ifodalash mumkin. ■

1- teorema. Agar grafdagi har bir uchning lokal darajasi ikkidan kichik bo'lmasa, u holda bu graf siklga ega.

Isboti. Agar grafda sirtmoqlar yoki karrali qirralar bo'lsa, teoremaning tasdig'i to'g'riligi ravshandir. Shuning uchun teorema tasdig'ini graf sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan holda isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, $v \in V$ berilgan sirtmoqsiz va karrali qirralari bo'lmagan $G = (V, U)$ grafning ixtiyoriy uchi bo'lsin. Qaralayotgan v uchga qo'shni v_1 uchni va bu uchga v dan farqli boshqa qo'shni v_2 uchni, v_2 uchga esa v_1 dan farqli boshqa qo'shni v_3 uchni, va hakoza, v_i uchga v_{i-1} dan farqli boshqa qo'shni v_{i+1} uchni, va hakoza, tanlab, $((v, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{i-1}, v_i), (v_i, v_{i+1}), \dots)$

qirralar ketma-ketligini tuzamiz. Teoremaning shartlariga ko'ra yuqoridagi jarayonni amalga oshirish va talab etilgan xossaga ega v_{i+1} uchni topish mumkinligini ta'kidlaymiz.

Grafning uchlari to'plami V chekli to'plam bo'lganligidan, yuqorida bayon etilgan uchlar ketma-ketligini qurish jarayonida chekli qadamdan so'ng albatta oldin uchragan uchlardan birini tanlashga majbur bo'lamiz. Agar v_k uch ketma-ketlikda ikki marta uchragan dastlabki uch bo'lsa, ketma-ketlikka qirralar qo'shish jarayonini to'xtatamiz, chunki tuzilgan qirralar ketma-ketligining v_k uch ikki marta qatnashgan qismi biz izlayotgan sikldir. ■

Grafning bog'lamliligi tushunchasi. Agar oriyentirlanmagan grafda chetlari a va b uchlardan iborat marshrut topilsa, bu a va b uchlar **bog'langan** deb, marshrutning o'zi esa a va b **uchlarni bog'lovchi marshrut** debataladi.

Tabiiyki, agar qandaydir uchlarni bog'lovchi marshrut biror a_i uchdan bir necha marta o'tsa, u holda marshrutning siklik qismini olib tashlab (bunda siklik qismning o'rniga marshrutda faqat a_i uch qoldiriladi) yana o'sha uchlarni bog'lovchi oddiy zanjir ko'rinishdagi marshrutni hosil qilish mumkin. Shuning uchun, marshrut bilan bog'langan uchlar doimo oddiy zanjir bilan ham bo'g'langan bo'ladi degan xulosaga kelamiz.

Bir-biri bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy ikkita uchlari bog'langan graf **bog'lamli graf** deb ataladi.

Agar grafdagi ikkita uchni biror oddiy zanjir bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, u holda bu ikkita uch **ekvivalent (bog'langan)** deyiladi. Bunday uchlar to'plami grafda **ekvivalentlik munosabati** bilan aniqlangan deb hisoblanadi. Uchlar to'plami bo'yicha ekvivalentlik munosabatini inobatga olgan holda berilgan grafni **bog'lamlilik komponentalari** (qisqacha, **komponentalari**) deb ataluvchi bog'lamli qismlarning birlashmasi deb qarash mumkin. Bu yerda berilgan graf bog'lamlilik komponentalariga bo'laklandi (ajratildi) deb aytish mumkin. Isbotlash mumkinki, har qanday graf o'zining bog'lamlilik komponentalarining diz'yunktiv birlashmasi sifatida ifodalanishi

mumkin, bunda grafning bog'lamlilik komponentalariga bo'laklanishi bir qiymatli aniqlanadi.

