НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

КУТЛИМУРОД ДИЛЬМУРОД СОБИРОВИЧ

(ассистент-преподаватель кафедры «Естественных и общепрофессиональных наук» Ургенчского филиала ТУИТ)

БАХТИЁРОВА ГУЛАСАЛ БАХТИЁР ҚИЗИ

(студентка 1-курса ТУИТ УФ, факультета «компьютерная инженерия»)

На современном этапе развития образования на занятиях по математике в математических классах общеобразовательных школ, профессиональных колледжей, а также академических лицеях всё большее внимание уделяется изучению инновационных, нестандартных методов решения уравнений и неравенств из различных разделов математики (алгебра, тригонометрия и геометрия).

Известно, что это актуально по причине устойчивой тенденции усложнения заданий, предлагаемых на вступительных экзаменах по математике в высших учебных заведениях Республики Узбекистан.

Главной целью нашего исследования является рассмотрение нестандартных методов решения задач по математике, которые имеют достаточно широкое распространение в нынешнее время. Многие из приведенных здесь задач предлагались и предлагаются по сей день на вступительных экзаменах в ВУЗы Республики Узбекистан.

По мнению Пирютко О.Н., функциональной метод подстановки является, пожалуй, самым распространенным методом решения сложных задач школьной математики. Суть метода состоит в введении новой переменной *y=f(x)*, применение которой приводит к более простому выражению. Частным случаем функциональной подстановки является тригонометрическая подстановка.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-x+7}=\sqrt{2x^2-2x+21}$$

Решение. Введем новую переменную $y=x^2-x+2$, тогда получаем уравнение

$$\sqrt{y}+\sqrt{y+5}=\sqrt{2y+17}.$$

Поскольку обе части полученного уравнения неотрицательны, то после возведения в квадрат получаем равносильное уравнение

$$y+2\sqrt{y^2+5y}+y+5=2y+17.$$

Отсюда вытекает $\sqrt{y^2+5y}=6$, $y^2+5y-36=0$ и $y_1=-9$, $y_2=4$.

Рассмотрим два уравнения $x^2-x+2=-9$ и $x^2-x+2=4$.

Первое уравнение действительных корней не имеет, а из второго получаем $x_1=-1$, $x_2=2$.

Подстановкой убеждаемся в том, что найденные значения переменной x являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Метод тригонометрической подстановки. Пирютко О.Н. к числу нестандартных методов решения алгебраических уравнений относит метод, основанный на применении тригонометрической подстановки, в том случае когда искомые уравнения напоминают известные тригонометрические формулы. Это относится преимущественно к уравнениям (системам уравнений), решение которых обычными приемами весьма затруднительно и которые после введения тригонометрических подстановок сводятся к несложным тригонометрическим уравнениям. Суть тригонометрической подстановки состоит в замене неизвестной переменной x тригонометрической функцией, например $x = \cos a$ или $x=\sin a$, а также в замене x некоторой функцией от $\sin a$, $\cos a$ или a.

Полученные корни тригонометрических уравнений позволяют находить корни исходных уравнений как в тригонометрической, так и в алгебраической форме. Следует особо отметить, что тригонометрические уравнения имеют, как правило, бесконечное число корней, а исходные уравнения – конечное их число.

Пример 2. Решить уравнение

$8x^3 - 6x - 1 = 0.$

Решение. Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения, то разделим обе его части на $2x$. Тогда

$4x^2 = \frac{1}{2x} + 3 = 0$

Если $x < -1$ или $x > 1$, то левая часть уравнения будет больше 4 , а правая его часть – меньше 4 . Следовательно, корни уравнения находятся на отрезке $-1 \le x \le 1$.

Пусть $x = \cos a$, где $0 \le x \le \pi$. Тогда уравнение принимает вид тригонометрического уравнения

$8\cos^3 a - 6\cos a - 1 = 0,$

$4\cos^3 a - 3\cos a = \frac{1}{2},$

$\cos 3a = \frac{1}{2}.$

Решением уравнения $\cos 3a = \frac{1}{2}$ являются $a = \frac{\pi}{9}(6n\pm1)$, где n – целое число. Однако $0 \le x \le \pi$, поэтому $a_1 = \frac{\pi}{9}$, $a_2 = \frac{5\pi}{9}$, $a_3 = \frac{7\pi}{9}$. Так как $x = \cos a$, то $x_1 = \cos a_1$, $x_2 = \cos a_2$ и $x_3 = \cos a_3$

Ответ: $x_1 = \cos\frac{\pi}{9}$, $x_2 = \cos\frac{5\pi}{9}$ и $x_3 = \cos\frac{7\pi}{9}$.

С.А.Барвенов рассматривает методы, основанные на монотонности функций. При решении уравнений типа $f(x)=g(x)$ в ряде случаев весьма эффективным является метод, который использует монотонность функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Если функция $y=f(x)$ непрерывна и возрастает (убывает) на отрезке $a \le x \le b$, а функция $y=g(x)$ непрерывна и убывает (возрастает) на этом же отрезке, то уравнение $f(x)=g(x)$ на отрезке $a \le x \le b$ может иметь не более одного корня.

Напомним, что функция $y=f(x)$ называется возрастающей (или убывающей) на отрезке $a \le x \le b$, если для любых x_1, x_2, удовлетворяющих неравенствам $a \le x_1 < x_2 \le b$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$). Если функция $y = f(x)$ является на отрезке $a \le x \le b$ возрастающей или убывающей, то она называется монотонной на этом отрезке.

В этой связи при решении уравнения $f(x)=g(x)$ необходимо исследовать функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ на монотонность, и если одна из этих функций на отрезке $a \le x \le b$ убывает, а другая функция возрастает, то необходимо или попытаться подбором найти единственный корень уравнения, или показать, что такого корня не существует. Если, например, функция y

$= f(x)$ возрастает, а $y = g(x)$ убывает для $a \le x \le b$ и при этом $f(a) > g(a)$, то корней уравнения $f(x) = g(x)$ среди $a \le x \le b$ нет. Особенно такой метод эффективен в том случае, когда обе части уравнения $f(x) = g(x)$ представляют собой весьма «неудобные» для совместного исследования функции. Кроме того, если функция $y = f(x)$ является монотонной на отрезке $a \le x \le b$ и уравнение $f(x) = c$ (где c - некоторая константа) имеет на этом отрезке корень, то этот корень единственный.

Пример 3. Решить уравнение

$\log_2(7-x) = x - 1$.

Решение. Областью допустимых значений уравнения являются $x < 7$ Рассмотрим функции $f(x) = \log_2(7-x)$ и $g(x) = x - 1$. Известно, что функция

$y = f(x)$ для $x < 7$ является убывающей, а функция $y = g(x)$ - возрастающей. В этой связи уравнение может иметь только один корень, т.е. $x = 3$, который легко находится подбором.

Ответ: $x = 3$.

Барвенов С.А. приводит также комбинированные методы. При решении сложных задач по математике используются самые разнообразные нестандартные методы, большинство из которых трудно поддаются классификации. Как правило, такие методы ориентированы на решение относительно узкого круга задач, однако их знание и умение ими пользоваться необходимы для успешного решения математических задач повышенной сложности. В настоящем разделе приведены задачи, решение которых базируется на применении оригинальных (эффективных, но сравнительно редко встречающихся) комбинированных методов.

Пример 4. Решить уравнение

$x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + 2 = 0$.

Решение. Рассмотрим уравнение с параметром a вида

$x^3 - (a+1)x^2 + a^2 = 0$,

которое совпадает с уравнением при $\sqrt{a} = 2$. Перепишем уравнение в виде квадратного уравнения относительно неизвестной переменной a, т.е.

$a^2 - ax^2 + x^3 - x^2 = 0$.

Решением уравнения относительно a являются

$a_{1,2} = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2}}{2} = \frac{x^2 \pm x(x-2)}{2}$,

т.е. $a_1 = x^2 - x$ и $a_2 = x$. Поскольку $a = \sqrt{2}$, то получаем два уравнения относительно переменной x вида $x^2 - x - \sqrt{2}$ и $x = \sqrt{2}$ Отсюда получаем три корня исходного уравнения, т.е. $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$ и $x_3 = \sqrt{2}$.

Ответ: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$.

Подводя итоги о нестандартных методах решения задач по математике, можно отметить лишь то, что рассмотренные нами методы – это всего лишь небольшая часть существующих на данном этапе развития математики методов, таких как: методы, основанные на применении численных неравенств, методы решения функциональных уравнений, методы решения симметрических систем уравнений и др.

Применение нестандартных методов решения задач по математике требует от старшеклассников и абитуриентов нестандартного мышления, необычных рассуждений. Незнание и непонимание таких методов существенно уменьшает область успешно решаемых задач по математике, тем более, что имеющая место тенденция к усложнению конкурсных заданий по математике стимулирует появление новых оригинальных (нестандартных) подходов к решению математических задач. Следует отметить, что знание нестандартных методов и приемов решения задач по математике способствует развитию у обучаемых нового, нешаблонного мышления, которое можно успешно применять также и в других сферах человеческой деятельности (кибернетика, вычислительная техника, экономика, радиофизика, химия и др.).

Литература:

1. **Д.Тожибаева, А.Йулдошев** - Методика обучения специальных предметов. Изд.. «Aloqachi» 2009г.
2. **Б.Зиёмухаммедов, М.Тожиев** – Технология педагогики – современная национальная узбекская модель. Ташкент 2009г.
3. **Ш.А.Алимов, А.Р.Халмухамедов, М.А.Мирзаахмедов** – Алгебра 8 класс, 2014г., третье издание.
4. **Назаров А.И.** Задачи-ловушки. Мн.: Аверсэв, 2006
5. **Н.Х.Авлиякулов** - Новые педагогические технологии. 2003г.