ФИЗИКА-ТЕХНИКА ИНСТИТУТИ, ИОН-ПЛАЗМА ВА ЛАЗЕР ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ ИНСТИТУТИ, САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM/T.34.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ДЖУМАБАЕВ ДАВЛАТБАЙ ХАЛИЛЛАЕВИЧ

ФУНКЦИЯЛАРНИ АНАЛИТИК ДАВОМ ЭТТИРИШ ВА СИНГУЛЯР ЧЕГАРАЛИ СОҲАЛАРДА МАХСУС ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ТАДҚИҚИ

01.01.01 – математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ДОКТОРЛИК (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2017

УДК: 517.55

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации
Contents of the Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ИНСТИТУТИ, ИОН-ПЛАЗМА ВА ЛАЗЕР ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ ИНСТИТУТИ, САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM/T.34.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ДЖУМАБАЕВ ДАВЛАТБАЙ ХАЛИЛЛАЕВИЧ

ФУНКЦИЯЛАРНИ АНАЛИТИК ДАВОМ ЭТТИРИШ ВА СИНГУЛЯР ЧЕГАРАЛИ СОҲАЛАРДА МАХСУС ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ТАДҚИҚИ

01.01.01 – математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ДОКТОРЛИК (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2017

Докторлик (DSc) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.1.DSc./FM1 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://fti-kengash.uz/) ҳамда «Ziyonet» Ахборот-таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Худайберганов Гулмирза** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Кытманов Александр Мечиславович** физика-математика фанлари доктори, профессор Сибирь федерал университети (Россия)
	Шаимкулов Баходир Аллабердиевич физика-математика фанлари доктори
	Имомкулов Севдиёр Акромович физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Урганч Давлат университети**

Диссертация ҳимояси Физика-техника институти, Ион-плазма ва лазер технологиялари институти, Самарқанд давлат университети ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM/T.34.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2017 йил «___»___________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100084, Тошкент ш., Бодомзор йўлиkўчаси, 2б-уй. Тел./факс: (99871) 235-42-91, e-mail: lutp@uzsci.net, Физика-техника институти мажлислар зали.)

Диссертация билан Физика-техника институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (______ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100084, Тошкент ш., Бодомзор йўли кўчаси, 2б-уй. Тел./факс: (99871) 235-30-41.

Диссертация автореферати 2017 йил «____» _______________ куни тарқатилди.

(2017 йил «____» _______________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

С.Л.Лутпуллаев
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

А.В.Каримов
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д., профессор

А.С.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш
қошидаги илмий семинар раиси
ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар кўп ўлчамли комплекс фазода функцияни аналитик давом эттириш ва сингуляр интеграл операторларни тадқиқ қилиниши долзарб эканлигини кўрсатмоқда. Дастлаб Германия ва Италия олимлари кўп комплекс ўзгарувчили голоморф функциялар учун Бохнер-Мартинелли интеграл ифодасини топишган. Франциялик олимлар томонидан топилган етарли даражада умумий бўлган Коши-Фонтаппье интеграл ифодаси эса Бохнер-Мартинеллининг ифодасидан осонгина келиб чиқади. Кўп ўлчамли комплекс анализда интеграл ифодалаш худди бир комплекс ўзгарувчили функциялар назариясидаги Кошининг ҳар хил ва муҳим татбиқларига эга булган интеграл ифодаси каби кучли конструктив қурол ҳисобланади. Шунинг учун ҳам кўп ўлчамли комплекс анализда интеграл ифодалаш ва уларнинг татбиқига оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди, хусусан, кўп ўлчамли комплекс фазода функцияларни аналитик давом эттиришда махсус интеграллардан фойдаланиш мақсадида уларнинг чегаравий хоссаларини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Силлиқ чегарали соҳалар учун Бохнер-Мартинелли типидаги интегралнинг чегаравий хусусиятига оид сезиларли натижаларга эришилди.

Ҳозирги кунда жаҳонда сингуляр чегарали соҳаларда функцияни аналитик давом эттириш масалаларида Бохнер-Мартинелли, Хенкин-Рамирез, Коши-Сеге каби махсус интегралларнинг чегаравий хусусиятларини ўрганиш ва уларни татбиқ этиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни, жумладан, қуйидаги йўналишлардаги илмий изланишларни амалга ошириш муҳим вазифалардан бири ҳисобланади: кўп ўлчамли комплекс фазода берилган сингуляр чегарали соҳалар учун функцияни аналитик давом эттириш; соҳа чегарасида берилган функциянинг аналитик давом этиши шартига эга бўлиши; сингуляр интеграл операторларнинг чегаравий хоссаларини тадқиқ этиш; қатъий псевдоқавариқ соҳаларда ўрин алмаштириш ва композиция формулаларини ҳосил қилиш. Юқорида келтирилган илмий-тадқиқотлар йўналишида бажарилаётган илмий изланишлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигини изоҳлайди.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида» ҳамда 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари ва мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи[1].

Кўп ўлчамли комплекс фазода функцияни аналитик давом эттириш ва сингуляр интеграл операторларни тадқиқ қилишга оид тадқиқотлар ва илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Princeton University, The University of North Carolina, University of Massachusetts Boston, Ohio State University, Stony Brook University, Baldwin Wallace University (АҚШ), Sapienza University of Rome (Италия), Bergische Universitat Wuppertal, Potsdam University (Германия), Сибирь Федерал университети, Россия Фанлар академияси Математика институти, Москва давлат университети, Новосибирск Давлат университети, Россия ФА Сибирь бўлими Ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институти (Россия), Bar-Ilan University (Исроил), Université Stendhal-Grenoble, Universite Pierre et Marie Curie de Paris VI (Франция) да олиб борилмоқда.

Кўп ўлчамли комплекс фазода чегараси силлиқ бўлган соҳалар учун функцияни аналитик давом эттириш ва махсус интегралларнинг чегаравий хоссаларини ўрганишга оид дунёда олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: Бохнер (Princeton University (АҚШ)) ва Мартинелли (Sapienza University of Rome (Италия)), ўзаро боғлиқсиз ҳолда бир биридан хабарсиз голоморф функцияларнинг компакт махсус хусусиятларини бартараф этиш ҳақидаги Гартогс теоремасини исботлашди; Бохнер эса, аслини олганда, чегараси силлиқ бўлган соҳалар ва соҳа чегарасида узлуксиз бўлган функциялар учун Гартогс теоремасини исботлаган; Вайнсток (Baldwin Wallace University (АҚШ)) уни чегараси чексиз марта силлиқ бўлган соҳаларда узлуксиз бўлган функциялар учун исботлади; Л.А.Айзенберг (Bar-Ilan University (Исроил)) ва А.М.Кытмановнинг (Сибирь Федерал университети (Россия)) ишларида C^n да берилган силлиқ чегарали чегараланган D соҳа чегарасида ва чегара бўйича интеграллашда Бохнер-Мартинелли ядросига ортогонал бўлган функцияни голоморф давом эттириш исботланган.

Дунёда бугунги кунда кўп ўлчамли комплекс анализда интеграл ифодаларни тадқиқ этиш ва уларнинг қўлланилиши бўйича бир қатор, жумладан: Бохнер-Мартинелли интегралининг чегаравий хоссалари ва унинг функцияни голоморф давом эттириш масалаларига татбиқлари; Бохнер-Мартинелли интегралининг сакраши ҳақидаги теоремалар; Лере (Коши-

---

[1]Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи: www.math.prinston.edu, www.northcorolina.edu, www.umb.edu, www.osu.edu, www.stonybrook.edu, www.bw.edu, www.unirome1.it, www.uni-wuppertal.de, www.uni-postdam.de, www.sfu-kras.ru, www.mi.ras.ru, www.msu.ru, www.nsu.ru, www1.bin.ac.il, www.ac-grenoble.fr/stendhal/, www.upmc.fr, http://mi.mathnet.ru/rus/msb/v136/i4/p567 ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

Фонтаппье), Хенкин-Рамерез, Коши-Сеге (Хуа Локен) интеграл формулалари татбиқлари; махсусликка эга бўлган гиперсиртларда CR-функцияларнинг аналитик ифодаси; Морера теоремасининг кўп ўлчамли чегаравий аналоглари; шар ва ярим текисликда Бохнер-Мартинелли оператори; чегараланган соҳанинг чегарасида берилган функциянинг шу соҳа ичкарисига голоморф давом этиши; турли соҳаларда Хенкин-Рамирез махсус интеграли учун ўрин алмаштириш ва композиция формулаларини ҳосил қилиш каби устивор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Сакраш ҳақидаги масала Бохнер-Мартинелли интеграли учун қўрилган масалаларнинг биринчиларидан ҳисобланади. Унинг учун функция силлиқлиги хоссаси ва соҳанинг чегаралари худди Коши интеграли кабидир. Сохоцкий-Племел формуласи ва бундан ташкари, $F^{+}(z^{+})-F^{-}(z^{-})$ айирма соҳа чегарасида $z^{0}\in\partial D$ нуқтада лимитга эга бўлиши мумкин, $F^{+}(z^{+})$ ва $F^{-}(z^{-})$ функциялар эса алоҳида лимитга эга эмаслигини исботлашдан кўра, одатда сакраш ҳақидаги теоремани исботлаш осонроқ. Шунинг учун сакраш ҳақидаги теорема Сохоцкий-Племел формуласидан кўра кенгроқ функциялар синфи учун ўринлидир. Дастлаб бир ўзгарувчили ҳол учун Коши типидаги интеграл чегаравий қийматлари формулалари Ю.Сохоцкий, И.Племел, И.Приваловлар илмий изланишлари бағишланган. Бохнер-Мартинелли (типидаги) интеграл сакраши ҳақидаги турли теоремалар бўйича Лу Цикен, Чжун Тунде, В.Какичев, Е.Чирка, Г.Хенкин, Л.Айзенберг, А.Кытманов, Ш.Даутов, А.Аронов, Р.Харви, Х.Лаусон, Ш.Ярмухамедов, Б.Шоимкулов, Н.Тарханов, Б.Преновлар илмий изланишлар олиб боришган.

Бохнер-Мартинелли типидаги сингуляр интеграл операторлар ва потенциалларни тадқиқ этиш давомида А.Кытманов, С.Мысливец, Н.Тархановлар коник махсус нуқтали чегараланган D соҳалар ҳолатини кўриб чиқишган. Бохнер-Мартинелли типидаги махсус интегралларни алмаштириш ҳақидаги масалани ўрганишда А.М.Кытманов, Б.Б.Пренов ва Н.Н.Тархановлар Коши типидаги интеграл учун Пуанкаре-Бертраннинг классик формуласидан фарқ қилувчи формулани ҳосил қилишган. Кейинчалик А.М.Кытманов ва А.С.Кацунова комплекс текисликдаги Пункаре-Бертран формуласи билан яхши мосланадиган Коши-Сеге формуласини ҳосил қилишган. А.Кытманов, С.Мысливец ва Н.Тарханов ҳамда, А.Кытманов ва С.Мысливецларнинг ишларида бўлакли-силлиқ эмас, балки сингуляр чегарали соҳаларнинг янада умумийроқ синфлари кўриб чиқилган. Конормал символни ўрганишда сингуляр қиррали соҳада Сохоцкий-Племел теоремасининг аналоги бўлган Бохнер-Мартинелли интегралининг сакраши ҳақидаги теоремани умумлаштириш зарур бўлган. А.Кытманов, С.Мысливец ва Н.Тархановлар ишида коник махсус нуқтали соҳаларда Бохнер-Мартинелли операторининг конормал символи эффектив ҳисобланиши мумкинлиги кўрсатилган.

C^n кўп ўлчамли комплекс фазода, яқинда Бохнер-Мартинеллининг махсус интеграли учун ўрин алмаштириш формулаларининг аналоглари олинган ҳамда унда Коши (А.Кытманов, Н.Тарханов ва Б.Пренов) бўйича махсус интегралнинг бош қиймати, қатъий псевдоқаварик соҳаларда эса Керзман-Стейн (А.Кацунова) бўйича бош қиймат учун Бохнер-Мартинелли интеграли кўриб чиқилган. А.Кацунова ва А.Кытмановнинг ишида шар ҳоли кўрилган ва Коши-Сегенинг махсус интеграли учун ўрин алмаштириш ҳамда композиция формулалари келтирилган. Улар кўриниши бўйича Пуанкаре-Бертраннинг классик формуласига ва Коши типидаги интеграл учун композиция формуласига ўхшайди. Кўп ўлчамли комплекс фазода интеграл формулалар назарияси ва уларнинг татбиқлари Л.Айзенберг, А.Южаков, F.Hervey, J.Lowson, N.Kerzman, E.Stein, G.Lupacciolu, E.Stout, B.Weinstock, Е.Чирка, Ф.Кытманов, Ш.Ярмухамедов, Н.Тарханов, А.Аронов, Ш.Даутов, Г.Хенкин, М.Аграновский, А.Шляпунов, Б.Шаимкулов, Б.Пренов, А.Кацунова, Д.Джумабаевлар изланишларида ривожлантирилди.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг ОТ-Ф1-116 “Аналитик давом эттириш ва геометрик функциялар назарияси масалалари” (2007-2011) ва Ф-4-31 “Плюрипотенциал назарияси ва кўп ўлчамли анализда интеграл ифодалар” (2012-2016) мавзусидаги илмий тадқиқотлар лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади бўлакли-силлиқ чегарали соҳаларда ва сингуляр чегарали соҳаларда Бохнер-Мартинелли интегралининг чегарадаги ҳолатини тадқиқ этиш ҳамда олинган натижаларни фукцияларни голоморф давом эттириш масалаларига қўллашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

C^n да чегараланган бўлакли-силлиқ чегарали соҳаларда ва сингуляр чегарали соҳаларда Бохнер-Мартинелли интегралининг сакраши ҳақидаги теоремаларни исботлаш;

Хенкин-Рамирез такрорий интегралининг ўрин алмашиши ҳақидаги теоремаларни исботлаш;

функцияларни голоморф давом эттириш (юқорида келтирилган соҳаларда) ҳақидаги теоремаларни олиш ва натижа сифатида Гартогс-Бохнер, Айзенберг-Кытманов теоремалари аналогларини топиш;

чегараланган ва чегараси бўлакли-силлиқ бўлган соҳа чегарасида берилган функциянинг шу соҳа ичкарисига голоморф давом этиши билан боғлиқ натижалар олиш;

қатъий псевдоқаварик соҳаларда Хенкин-Рамирез махсус интеграл оператори учун ўрин алмаштириш формуласи ва композиция формуласини ҳосил қилиш;

коник қирраларни ўз ичига олувчи чегарали соҳаларда Привалов теоремаси аналогини исботлаш ва Соходский-Племел формуласини ҳосил қилиш;

коник қиррали ёпиқ гиперсиртлардан функцияларнинг голоморф давом этиши масалаларини тадқиқ қилиш;

Бохнер-Мартинелли махсус интеграл операторидан ҳосил бўлган операторлар алгебрасини ўрганиш. Бу операторнинг конормал символини ва унинг асимптотик ёйилмасини топиш.

Тадқиқотнинг объекти кўп ўлчамли комплекс фазодаги сингуляр чегарали чегараланган соҳаларда турли хил сингуляр интеграл операторлар (Бохнер-Мартинелли, Коши-Сеге, Хенкин-Рамирез).

Тадқиқотнинг предмети сингуляр нуқтали ва сингуляр қиррали соҳа чегарасида берилган функцияларнинг аналитик давом этиши ҳақидаги теоремага мос келувчи интеграл операторлардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида кўп ўлчамли комплекс анализдаги голоморф функцияларнинг интеграл ифодалари ва кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

бўлакли-силлиқ чегарали ва чегараси коник қирраларни ўз ичига олувчи чегараланган соҳаларда Бохнер-Мартинелли типидаги интеграл чегаравий хусусияти билан боғлиқ масалалар ечилган;

шундай соҳаларда Бохнер-Мартинелли типидаги интеграл сакраши ҳақидаги теоремалар исботланган;

Хенкин-Рамирез такрорий интегралининг ўрин алмашиши ҳақидаги теоремалари исботланган;

чегараси коник қирраларни ўз ичига олувчи чегараланган соҳаларда функцияларни голоморф давом эттириш ҳақидаги теоремалар ҳамда Гартогс-Бохнернинг голоморф давом эттириш ҳақидаги теоремасининг аналоглари исботланган;

Айзенберг-Кытмановнинг теоремаларини кучайтирувчи коник қирраларни ўз ичига олувчи чегарали соҳаларда Бохнер-Мартинелли интеграли орқали ифодаланувчи функциялар голоморфлиги ҳақидаги теоремалар исботланган;

қатъий псевдоқавариқ соҳаларда Хенкин-Рамирез махсус интеграл оператори учун ўрин алмаштириш формуласи ва композиция формуласи ҳосил қилинган;

чегараланган ва коник қирраларни ўз ичига олувчи чегарали соҳаларда Привалов теоремаси аналоги ва Соходский-Племел формуласи топилган;

сингуляр чегарали соҳаларда Бохнер-Мартинелли махсус интеграл операторидан ҳосил бўлган операторлар алгебраси тадқиқ қилинган ҳамда унинг конормал символи топилган;

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат**:**

Бохнер-Мартинелли типидаги интегралнинг сакраши ҳақидаги исботланган теоремалар кўп ўлчовли комплекс анализда интеграл ифодалар назарияси масалаларини тадқиқ қилишда ҳамда математик физиканинг чегаравий масалаларни ечиш усулларида қўлланилиши мумкинлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик анализ, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти сингуляр чегарали соҳаларда функцияларни голоморф давом эттириш ва интеграл ифодаларнинг чегаравий хоссалари билан боғлиқ масалаларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти ишда олинган илмий натижалар сингуляр чегарали чегараланган соҳаларда турли хил сингуляр интеграл тенгламаларни ечишга хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

Гартогс-Бохнернинг классик теоремасини умумлаштирувчи, яъни узлуксиз функция учун соҳа чегарасидан функцияни голоморф давом эттириш шартлари “Голоморф ва гармоник функцияларни аналитик давом эттириш” мавзусидаги 08-01-90250 рақамли хорижий грантда соҳа чегараси бўлакли-силлиқ бўлган ҳолларда функцияларни голоморф давом эттириш учун қўлланилган (Сибирь федерал университетининг 2016 йил 8 ноябрдаги 33/11-6981-сонли маълумотномаси, Россия). Илмий натижанинг қўлланилиши Бохнер-Мартинелли интеграли билан ифодаланувчи функцияларни голоморф давом эттириш ҳақидаги теоремаларни умумлаштириш имконини берган;

соҳа чегарасининг қисмидан функцияларни голоморф давом эттириш “Мураккаб реологияли икки тезликли муҳитнинг математик модели: тўғри ва тескари масалалар” мавзусидаги 13-01-00689 рақамли хорижий грантда соҳа чегарасидаги мураккаброқ махсус ҳолатлар ҳақидаги масалаларни ечишда қўлланилган (Россия ФА Сибирь бўлими Ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институтининг 2016 йил 7 ноябрдаги 12-2711-сонли маълумотномаси, Россия). Илмий натижанинг қўлланилиши суюқлик билан тўлдирилган ғовак ярим фазода дилатансия соҳаларини қуриш имконини берган;

коник қиррали гиперсиртларда Бохнер-Мартинелли сингуляр интеграл оператори “Комплекс анализда кўп ўлчамли чегирмалар, уларнинг статистик физика ҳамда айирмалар ва дифференциал тенгламалар назарияларида қўлланилиши” мавзусидаги 11-01-00852-а рақамли хорижий грантда чегараси коник қиррани ичига олган соҳалардаги сингуляр интеграл операторларга қўлланилган (Сибирь федерал университетининг 2016 йил 8 ноябрдаги 33/11-6980-сонли маълумотномаси, Россия). Илмий натижанинг қўлланилиши коник қиррали гиперсиртларда сингуляр интеграл операторлар алгебраларини таснифлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари, жумладан 4 та халқаро ва 6 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 27 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестатция комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 12 та мақола, жумладан, 6 таси хорижий ва 6 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш кисми, бешта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 161 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий моҳияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Бошланғич маълумотлар»** деб номланувчи биринчи бобида асосий натижаларни олишда зарур бўлган муҳим тушунчалар, Бохнер-Мартинелли ва Хенкин-Рамирез интеграллари хоссалари ва улар билан ифодаланувчи функцияларнинг чегараси силлиқ бўлган соҳаларда голоморф давом эттирилишига оид теоремалар келтирилган.

Диссертациянинг **«Чегараси бўлакли-силлиқ бўлган соҳаларда Бохнер-Мартинелли интегралининг сакраши ҳақидаги теоремалар»** деб номланувчи иккинчи боби бўлакли-силлиқ чегарали соҳаларда Бохнер-Мартинелли интегралининг сакраши ҳақидаги теоремаларга бағишланган. Шунингдек, Хенкин-Рамирез такрорий махсус интегралининг ўрин алмаштириш ҳақидаги теоремалари бўш махсусликка эга бўлган ҳол учун исботланган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида бўлакли-силлиқ чегарали соҳада узлуксиз функциянинг Бохнер-Мартинелли интеграли сакраши ҳақида қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 1. *Айтайлик, D - бўлакли-силлиқ чегарали $\mathbb{C}^n$ да чегараланган соҳа бўлсин. Агар $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ бўлса, унда ушбу*

$$\lim_{z^{\pm}\to z^0}(F^+(z^+) - F^-(z^-)) = f(z^0)$$

лимит ихтиёрий $z^0 \in \partial D$ нуқтада мавжуд ҳамда $z^{\pm}$ нуқталар учи z^0 нуқтада бўлган ўзгармас ўлчамли тайин конусда ётса, $z^+ \in D$, $z^- \notin \overline{D}$, лимит қийматига текис эришади.

Бу ерда F^+ ва F^- лар f функциянинг Бохнер-Мартинелли (типидаги) интеграли бўлиб, F интеграл D соҳанинг ичкарисида ёки $\bar{D}$ нинг ташқарисида олинишига қараб $\pm$ ишораларида қаралади. $z^+ \in D$ ва $z^- \in \mathbb{C}^n \setminus \bar{D}$ нуқталар учи $z^0 \in \partial D$ нуқтада бўлган доиравий, икки паллали конус ичида ётиб, конуснинг ўқи билан ясовчиси орасидаги β бурчак етарлича кичик ва $a|z^+ - z^0| \le |z^- - z^0| \le b|z^+ - z^0|,\ 0 < a \le b < +\infty$. Бу теорема Ш.А.Даутов ва А.М.Кытмановларнинг силлиқ чегарали соҳа бўйича Бохнер-Мартинелли интегралининг сакраши ҳақидаги натижасини умумлаштиради. Шундай қилиб, узлуксиз функцияларнинг Бохнера-Мартинелли инреграли чегаравий нуқталарда силлиқлик бузилган ҳолда ҳам силлиқлик бўлган ҳолдаги каби бўлиши исботланади.

Теорема 1 дан қуйидаги натижа келиб чиқади:

Натижа 1. *Агар теорема 1 шартларида F^+ функция $\bar{D}$ га узлуксиз давом эттирилса, у ҳолда F^- ҳам $\mathbb{C}^n \setminus D$ га узлуксиз давом эттирилади ва аксинча*.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида қуйидаги теорема исботланган:

Теорема 2. *Айтайлик, $f \in \mathcal{L}^p(\partial D),\ 1 \le p < \infty$. Агар $F(z)$ функция f функциянинг Бохнер-Мартинелли интеграли бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{j=1}^{s_0} \int_{\tilde{\Gamma}_j} |F(z - \varepsilon \nu_j(z)) - F(z + \varepsilon \nu_j(z)) - f(z)|^p \, d\sigma = 0,$$

шунингдек

$$\sum_{j=1}^{s_0} \int_{\tilde{\Gamma}_j} |F(z - \varepsilon \nu_j(z)) - F(z + \varepsilon \nu_j(z))|^p \, d\sigma \le C \int_{\partial D} |f|^p \, d\sigma,$$

бунда C ўзгармас ҳамда у f ва ε га боғлиқ эмас (ε етарли даражада кичик бўлганда $z - \varepsilon \nu_j(z) \in D,\ z + \varepsilon \nu_j(z) \in (\mathbb{C}^n \setminus \bar{D})$).

Бу ерда

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho_1(z) < 0, \ldots, \rho_{s_0}(z) < 0\},$$

$$\tilde{\Gamma}_j = \{z \in \partial D : \rho_j(z) = 0\},\ \partial D = \bigcup_{j=1}^{s_0} \tilde{\Gamma}_j.$$

$\tilde{\Gamma}_j$ - чегараси бўлакли-силлиқ бўлган силлиқ сиртлар, $\nu_j(\zeta)$ - $\tilde{\Gamma}_j$ сиртнинг ζ нуқтасига ўтказилган ташқи нормалнинг бирлик вектори, $d\sigma$ - ∂D даги Лебег ўлчови.

Теорема 2 А.М.Кытмановнинг мос натижаларини умумлаштиради.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида бўлакли икки марта силлиқ чегарали соҳа бўйича Бохнер-Мартинелли интеграли $\bar{\partial}$-нормал ҳосиласининг сакраши ҳақидаги қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 3. *Агар $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ бўлса, у ҳолда F Бохнер-Мартинелли интеграли учун*

$$\lim_{z^\pm \to z^0} (\bar{\partial}_n F^+(z^+) - \bar{\partial}_n F^-(z^-)) = 0.$$

бўлади. Бу лимитга, агар β бурчак тайинланган бўлса, $z^0 \in \partial D$ нуқтага нисбатан текис эришилади. Агар $\overline{\partial}_n F^+(z^+)$ $\overline{D}$ да узлуксиз давом эттирилса, унда $\overline{\partial}_n F^-(z^-)$ ҳам $\mathbb{C}^n \setminus D$ да узлуксиз давом эттирилади ва аксинча.

Бу ерда $z^+ \in D$ ва $z^- \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ нуқталар учи $z^0 \in \partial D$ нуқтада бўлган тўғри доиравий конус ичида ётиб, конуснинг ўқи билан ясовчиси орасидаги β бурчак етарлича кичик. z^+ ва z^- нуқталар z^0 дан ўтувчи бир тўғри чизиқда ётиб, қуйидаги шарт бажарилади:

$$|z^+ - z^0| = |z^- - z^0|.$$

$\overline{\partial}$-нормал ҳосила $\overline{\partial}_n F^\pm$ соҳанинг чегарасида ушбу

$$*\overline{\partial} F^\pm = 2^{1-n} i^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial F^\pm}{\partial \overline{z}_k} dz[k] \wedge d\overline{z}$$

(бунда * - Ходжа оператори) форманинг қисқаришини ифодалайди, яъни

$$\overline{\partial}_n F^\pm = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F^\pm}{\partial \overline{z}_k} (\rho_j)_k,$$

бунда $(\rho_j)_k = \dfrac{\partial \rho_j}{\partial z_k} / |\, grad \rho_j \,|$.

Теорема 3 А.М.Кытманов ва Л.А.Айзенбергларнинг икки марта силлиқ чегарали соҳалар учун исботланган теоремасини умумлаштиради. Шунингдек, теорема 3 Ляпуновнинг иккиланган потенциалда нормал ҳосиласининг сакраши ҳақидаги теоремасининг аналоги бўлади.

Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфида Хенкин-Рамирез такрорий махсус интегралининг ўрин алмаштириш ҳақидаги теоремалари бўш махсусликка эга бўлган ҳол учун исботланган.

Диссертациянинг **«Бохнер-Мартинелли интеграли билан ифодаланувчи функцияларнинг голоморфлиги ҳақидаги теоремалар»** деб номланувчи учинчи боби чегараси бўлакли-силлиқ бўлган соҳаларда функцияларнинг голоморф давом эттирилиши ҳақидаги турли теоремаларга, шунингдек, қатъий псевдоқавариқ соҳаларда Хенкин-Рамирез махсус интеграл операторларига бағишланган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида Гартогс-Бохнернинг давом эттириш ҳақидаги теоремаларни аналоглари келтирилган.

Теорема 4. *Айтайлик, D - $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ да чегараланган соҳа ва $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ - боғламли, ∂D - бўлакли силлиқ. Агар $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ функция коэффициентлари $\mathcal{C}^\infty$ синфда бўлган $\mathbb{C}^n$ даги барча $(n, n-2)$ типдаги дифференциал форма ω учун ушбу*

$$\int_{\partial D} f \overline{\partial} \omega = 0$$

шартни бажарса, у ҳолда f функция D га голоморф давом эттирилади.

Ушбу параграфда Вайнсток теоремасининг аналоги исботланган бўлиб, у Вайнстокнинг мос натижасини кучайтиради.

Теорема 5. *Айтайлик, D - соҳа $\mathbb{C}^n$ да бўлакли силлиқ $\mathcal{C}^1$ классдаги чегарага эга, f функция эса $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ ва ∂D да ушбу шартни қаноатлантиради*

$$\int_{\partial D} f\alpha = 0$$

бунда коэффициентлари $\mathcal{C}^\infty(\bar{D})$ бўлган ҳар қандай $(n,n-1)$ типдаги α форма учун ва $\bar{D}$ да $\bar{\partial}\alpha = 0$. У ҳолда f функция D га голоморф давом эттирилади. f нинг голоморф давом эттирилиши Бохнер-Мартинелли интеграли орқали ифодаланади.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида Бохнер-Мартинелли интеграли орқали ифодаланадиган функцияларнинг голоморфлиги ҳақида қуйидаги теоремалар исботланган.

Теорема 6. *Айтайлик, f функция бўлакли-силлиқ чегарали D соҳада гармоник функция бўлиб, $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$ ва $\bar{\partial}_n f \in \mathcal{C}(\bar{D})$ бўлсин. У ҳолда қуйидаги шартлар эквивалент:*

1. $\bar{\partial}_n f = 0, \partial D$ да;

2. $F^+ = f, D$ да;

3. $F^- = 0, \bar{D}$ дан ташқарида.

Теорема 7. *Айтайлик, D чегараланган соҳа $\mathbb{C}^n$ даги бўлакли икки марта силлиқ чегарали соҳа бўлсин. $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$ функциянинг D да голоморф бўлиши учун D да $F^+ = f$ бўлиши зарур ва етарли.*

Теорема 7 чегараси икки марта силлиқ бўлган соҳалар учун А.Кытманов ва Л.Айзенберглар томонидан исботланган.

Натижа 2. *Агар $f \in \mathcal{C}(\partial D), \partial D$ - бўлакли икки марта силлиқ, у ҳолда қуйидаги шартлар эквивалент бўлади:*

1. f функция D да $\mathcal{C}(\bar{D})$ синфдаги функциягача давом эттирилади;

2. $F^- = 0$, $\bar{D}$ дан ташқарида;

3. F^+ f нинг D га гармоник давом эттирилишини беради;

4. $\bar{\partial}_n F^+$ $\bar{D}$ га узлуксиз давом эттирилади ва $\bar{\partial}_n F^+|_{\partial D} = 0$.

Теорема 8. *Айтайлик, $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ даги D соҳанинг чегараси $\mathcal{C}^2$ синфда бўлакли-силлиқ ва $\mathbb{C}^n \setminus \bar{D}$ боғламли бўлсин. Агар $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ ва F^+ эса D голоморф бўлса, у ҳолда F^+ нинг чегаравий қиймати f билан устма-уст тушади.*

Теорема 8 ни чегараси $\mathcal{C}^2$ синфда силлиқ соҳалар учун А.Кытманов исботлаган.

Натижа 3. *Айтайлик, ∂D - $\mathcal{C}^2$ синфда бўлакли-силлиқ ва боғламли, f функция эса $f \in \mathcal{C}(\partial D)$. f функция D га $f \in \mathcal{O}(D) \bigcap \mathcal{C}(\bar{D})$ функциягача давом этиши учун барча s,t,k ларда ушбу*

$$\int_{\partial D} f(*\partial P_{s,t,k}) = \int_{\partial D} f\partial_n P_{s,t,k} d\sigma = 0$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Бунда $\{P_{s,t,k}\}$ - $\mathcal{L}^2(S(0,1))$ даги ортонормалланган базис бўлиб, у бир жинсли гармоник полиномлардан иборат, бунда z полином s даражали, $\overline{z}$ полином t даражали: $s,t = 0,1,...,k \geq 1$, $S(0,1)$ - маркази 0 нуқтада радиуси 1 бўлган сфера.

Маълумки, Пуанкаре-Бертран ўрин алмаштириш формуласи ва Коши типидаги интеграллар учун композиция формулалари комплекс текислигида катта рол ўйнайди. Улар сингуляр интеграл тенгламаларни ечишда фойдаланилади. Кўп ўзгарувчили функцияда ҳам бу масалаларнинг қўйилиши (масалан, Риманнинг аддитив масаласи) анча мураккаб ҳисобланади. Бунда қийинчилик чегараланган соҳанинг ташқарисидан ичкарисига мажбурий голоморф давом эттириш ҳақидаги (Гартогс теоремаси) теореманинг мавжудлиги ва мос келувчи ўрин алмаштириш формуласи ҳамда композиция формуласининг йўқлиги билан боғлиқдир.

Бинобарин, табиий равишда голоморф ядро интегралларни қараш зарурияти юзага келади. Шунинг учун ҳам голоморф ядроли интеграл ифодаларни кўриб чиқиш табиий. Қатъий псевдоқаварик соҳалар учун Хенкин-Рамирез интеграл ифодаси шундай стандарт ифода ҳисобланади. Кацунова ва Кытманов ишида Хенкин-Рамирез ядросининг хусусий ҳоли учун яъни шарда Коши-Сеге интеграли учун ўрин алмаштириш ва композиция формулалари олинган, Коши интеграли учун олинган аналогик формулаларга ўхшаш.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида қатъий псевдоқаварик соҳаларда Коши бўйича ва Керзман-Стейн бўйича иккита стандарт бош қийматлар учун Хенкин-Рамирез махсус интеграли учун ўрин алмаштириш ва композиция формулалари исботланган. Бу формулалар ҳар хил бош қийматлар учун турлича бўлиб, аммо Коши интеграли учун формулаларга ўхшаш. Шунинг учун ҳам олинган формулалардан соҳа чегарасида сингуляр интеграл тенгламаларни ечишда фойдаланилади. Хенкин-Рамирез махсус интеграли учун, Коши бўйича бош қиймат ҳоли учун, Пуанкаре-Бертран ўрин алмаштириш формуласи аналоги келтирилган.

Айтайлик, D - қатъий псевдоқаварик соҳа, S эса Dнинг чегараси бўлсин.

Теорема 9. $n > 1$*бўлганда барча* $\zeta^0, z^0, w \in S$, $\zeta^0 \neq z^0$ *нуқталар учун ушбу*

$$\int_{S_w} H(w, z^0) H(\zeta^0, w) d\sigma(w) = H(\zeta^0, z^0),$$

тенглик ўринли, бунда $H(\zeta, z)$ - *чегарага қисқарадиган ва сирт элементига бўлинган Хенкин-Рамирез ядроси.*

Теорема 10. *Айтайлик,* $n > 1$ *бўлсин. Агар* $f \in C^\alpha(S \times S)$ *бўлса, у ҳолда*

$$\int_{S_w} H(w,z)d\sigma(w)\int_{S_\zeta} f(\zeta,w)H(\zeta,w)d\sigma(\zeta) =$$
$$= \int_{S_\zeta} d\sigma(\zeta)\int_{S_w} f(\zeta,w)H(w,z)H(\zeta,w)d\sigma(w), z\in S$$

бўлади.

Хенкин-Рамирез интегралида Керзман-Стейн маъносидаги бош қийматлар бўйича формулалар қаралган.

Теорема 11. *Ушбу* $z^0,\zeta^0,w\in S$ *нуқталар учун*

$$\int_{S_w} H(w,z^0)H(\zeta^0,w)d\sigma(w) = 0, \quad z^0 \neq \zeta^0$$

тенглик ўринли.

Теорема 12. $f\in \mathcal{C}^\alpha_{KS}(S\times S)$ *бўлсин, у ҳолда*

$$\int_{S_w} H(w,z)d\sigma(w)\int_{S_\zeta} f(\zeta,w)H(\zeta,w)d\sigma(\zeta) =$$
$$= \int_{S_\zeta} d\sigma(\zeta)\int_{S_w} f(\zeta,w)H(w,z)H(\zeta,w)d\sigma(w) + \frac{1}{4}f(z,z),\ z\in S$$

бўлади.

Формаси бўйича бу формула Коши типидаги интеграл учун Пуанкаре-Бертраннинг классик формуласи кўринишига эга.

Шунингдек, Хенкин-Рамирезнинг махсус интеграли учун композиция формуласи келтирилган қуйидаги натижа олинган:

Натижа 4. $n\geq 1$*бўлсин. Агар* $f(\zeta,w)=f(\zeta)\in \mathcal{C}^\alpha_{KS}(S)$ *бўлса, унда*

$$H^2_{sh}[f] = \frac{1}{4}f(z), \quad z\in S$$

бўлади.

Бу ерда $H_{sh}[f]$ - f функцияга Керзман-Стейн бўйича бош қиймат учун Хенкин-Рамирез махсус интегралининг қиймати.

Диссертациянинг **«Коник қиррали соҳаларда Бохнер-Мартинелли интеграл оператори»** деб номланувчи тўртинчи бобида чегараси коник қиррага эга бўлган чегараланган соҳаларда Бохнер-Мартинелли интегралининг характери (хусусияти) тадқиқ қилинган.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$\mathbb{C}^n$ билан $\mathbb{R}^{2n}$ ни қуйидагича тенглаштирамиз $z_j = x_j + \imath x_{n+j}$ бунда $j=1,\ldots,n$. Яьни $(z_1,...,z_n)=(x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{2n})\in\mathbb{R}^{2n}$. Шунингдек, $x=(x_1,...,x_{2n}),\ x'=(x_1,...,x_{p+1}),\ x''=(x_{p+3},...,x_{2n}),\ x=(x',x_{p+2},x'')$.

Силлиқ сирт Σ ни $\mathbb{R}^{p+2}\setminus\{0\}$ да қараймиз, сингуляр нуқта координата бошида бўлиб, сирт қуйидагича бўлсин

$$\Sigma = \{(rx',r)\in\mathbb{R}^{p+2} : x'\in X', r\in[0,R)\}.$$

Бунда $x'=(x_1,\ldots,x_{p+1})$ нуқталар $\mathbb{R}^{p+1}$ даги компакт силлиқ гиперсирт X' да ўзгаради, X' - ўз ичига координата бошини олмайди.

Масалан, X' ρ-ўлчовли, маркази нолда бўлган сфера.

Кейинчалик $X' = \{x' \in \mathbb{R}^{p+1} : \rho(x') = 1\}$ деб қараймиз, бунда ρ - C^1 классга тегишли $\mathbb{R}^{p+1} \setminus \{0\}$ даги ҳақиқий қийматли функция, барча $\lambda > 0$ ва бирор ўзгармас $h > 0$ учун қуйида шартларни, яъни X' да $\nabla\rho \neq 0$ ва $\rho(\lambda x') = \lambda^h \rho(x')$ бажаради.

Координата боши Σ нинг махсус коник нуқтаси ҳисобланади. Σ нинг силлиқ қисмида аниқловчи функцияни топиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, $(x', x_{p+2}) \in \Sigma \setminus \{0\}$ учун

$$\rho\left(\frac{x'}{x_{p+2}}\right) = 1,$$

бўлиб, ρ функциянинг бир жинслилигини

$$\Sigma = \{(x', x_{p+2}) \in \mathbb{R}^{p+2} : \psi(x', x_{p+2}) = 0, x_{p+2} \in [0, R)\},$$

тенглик ифодалайди, бунда

$$\psi(x', x_{p+2}) = \rho(x') - (x_{p+2})^h.$$

Айтайлик,

$$S = \Sigma \times X'',$$

бунда X'' - $\mathbb{R}^q$ да очиқ чегараланган тўплам, $p + 1 + q = 2n - 1$. Шундай қилиб, S $\mathbb{C}^n$ да $F = O' \times X''$ ($O' = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{p+2}$) коник қиррали гиперсирт бўлади.

Айтайлик, D $\mathbb{C}^n$ даги чегараланган соҳа бўлсин. D соҳанинг чегарасини қуйидаги

$$\partial D = Y \cup (S_1 \cup \ldots \cup S_N),$$

кўринишга эга бўлсин деб қараймиз. Бунда Y силлиқ гиперсирт бўлиб, S_ν лардан ҳар бири бирор коник гиперсирт S да диффеоморф (турли p ва q). Шундай қилиб, ∂D - чекли сондаги коник қиррали силлиқ гиперсирт. Шуни таъкидлаш керакки, бундай соҳаларда Стокс формуласи ўринли бўлади.

Махсус нуқта яқинидаги қилинган анализ локал хусусиятга эга бўлиб, умумийликка зиён етказмасдан, $N = 1$, яъни $\partial D = Y \cup S$, дейиш мумкин, бунда

$$S = \{z \in \mathbb{C}^n : z = (rx', r, x''), x' \in X', x'' \in X'', r \in [0, R)\}.$$

Тўртинчи бобнинг биринчи параграфида Привалов теоремасининг аналоги келтирилган бўлиб, у S коник қирра яқинида Бохнер-Мартинелли интегралининг хусусияти билан боғланган. Бу тасдиқ А.М.Кытманов томонидан силлиқ гиперсиртлар ∂D бўлган ҳол учун исботланган. Шунингдек, чегарасида коник махсус нуқталари бўлган соҳалар учун юқоридаги масалалар А.Кытманов ва С.Мысливецларнинг ишларида қаралган.

$z^0 \in \partial D$ нуқта $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ функциянинг Лебег нуқтаси дейилади, агар

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{2n-1}} \int\limits_{\partial D \cap B(z^0,\varepsilon)} |f(\zeta) - f(z^0)|\, dS = 0,$$

бўлса. Бунда $B(z^0,\varepsilon)$ - маркази z^0 ва радиуси ε бўлган шар, $dS - \partial D$ нинг силлиқ қисмидаги Лебегнинг сирт ўлчови. Агар z^0 нуқта ∂D учун силлиқлик нуқтаси бўлса, бу одатдаги Лебег нуқтасининг таърифи бўлади. Агар нуқта коник қиррада ётган бўлса, бу янги таьриф ҳисобланади. Агар f функция z^0 нуқтада узлуксиз бўлса, у f функциянинг Лебег нуқтаси бўлади.

Теорема 13. *Агар z^0 нуқта $f \in L^1(\partial D)$ функциянинг Лебег нуқтаси бўлса, у ҳолда конуснинг ўқида ётувчи $z \in D$ қуйидаги тенглик ўринли бўлади:*

$$\lim_{z \to z^0} \Big(\int\limits_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0)) U(\zeta, z) - \int\limits_{\partial D \setminus B(z^0, |z - z^0|)} (f(\zeta) - f(z^0)) U(\zeta, z^0) \Big) = 0.$$

Берилган $z \in \partial D$ нуқта учун $\mathcal{C}_z$ ни D соҳанинг z нуқтасидаги уринма конус деймиз. Чегаранинг сингуляр кўринишидан, унинг қиймати $\mathcal{C}_z$ учун $\tau(z) \in [0,1]$ жисмли бурчакка тенг бўлади. Агар ∂D z нуқтада силлиқ бўлса, унда $\tau(z) = \dfrac{1}{2}$ бўлади. Коник қиррада ётувчи z нуқта учун $0 < \tau(z) < 1$ бўлади. $z \in \partial D$ нуқта учун f нинг Бохнер-Мартинелли махсус интеграли

$$F_s(z) = \mathrm{pv} \int\limits_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial D \setminus B(z,\varepsilon)} f(\zeta) U(\zeta, z)$$

бўлади.

$m_z(f)(\delta)$ орқали f функциянинг $z \in \partial D$ нуқтасидаги узлуксизлик модулини белгилаймиз, яъни,

$$m_z(f)(\delta) = \sup_{\zeta \in \partial D \cap B(z,\delta)} |f(\zeta) - f(z)|.$$

Агар

$$pv \int_0^1 m_z(f)(\delta) \frac{d\delta}{\delta} < \infty$$

бўлса, f функция ∂D сиртнинг $z \in \partial D$ нуқтасида Дини шартини бажаради дейилади.

Теорема 14. *Агар $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ функция $z \in \partial D$ нуқтада Дини шартини бажарса, у ҳолда Бохнер-Мартинелли махсус интеграли $F_s(z)$ мавжуд ва қуйидаги Сохоцкий-Племел формуласи ўринли*

$$F^+(z) = (1 - \tau(z)) f(z) + F_s(z),$$

$$F^-(z) = -\tau(z) f(z) + F_s(z),$$

бўлади. Бунда $F^+(z)$ - Бохнер-Мартинелли интеграли F нинг D соҳанинг ичидаги чегаравий қиймати, $F^-(z)$ эса F нинг D соҳа ташқарисидаги чегаравий қиймати.

Қуйидаги теорема Бохнер-Мартинеллининг сакраш ҳақидаги теоремасини умумлаштиради.

Теорема 15. *Айтайлик,* $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ *ва* z^0 *-* f *функциянинг Лебег нуқтаси бўлсин. У ҳолда қуйидаги формула ўринли*

$$\lim_{z^\pm \to z^0} \left(F^+(z^+) - F^-(z^-) \right) = f(z^0)$$

z^+ *ва* z^-, *мос равишда* D *ва* $\mathbb{C}^n \setminus \bar{D}$ *даги конуснинг ўқларида ётувчи нуқталар бўлиб,* $|z^+| = |z^-|$ *бўлади.*

Тўртинчи бобнинг иккинчи параграфида коник қиррали соҳаларда функцияларни голоморф давом эттириш ҳақидаги теоремалар исботланган.

Айтайлик, Ω - $\mathbb{C}^n$ даги очиқ чегараланган тўплам бўлиб, S бу тўпламни иккита очиқ тўпламлар $\Omega \setminus S = \Omega^+ \cup \Omega^-$ га ажратсин, бунда Ω^+ тўпламда x_{p+2} координатаси $x_{p+2} > 0$ бўлсин.

Бундан ташқари $f \in \mathcal{L}^1(S)$ деб қараймиз. Бу эса f M тўпламда интегралланувчи функция эканини билдиради. M_ε тўпламни қуйидагича белгилаймиз

$$M_\varepsilon = \Sigma_\varepsilon \times X'',$$

бунда

$$\Sigma_\varepsilon = \{(x', x_{p+2}) \in \mathbb{R}^{p+2} : \backslash x_1 = \varphi(t) y_1, \ldots, x_{p+1} = \varphi(t) y_{p+1}, x_{p+2} = t,$$
$$y = (y_1, \ldots, y_{p+1}) \in X', 0 < \varepsilon \le t \le \varepsilon_0\}.$$

У ҳолда $\partial M_\varepsilon = \partial \Sigma_\varepsilon \times X''$ бўлиб,

$$\partial \Sigma_\varepsilon = \{(x', x_{p+2}) \in \mathbb{R}^{p+2} : x_1 = \varphi(\varepsilon) y_1, \ldots, x_{p+1} = \varphi(\varepsilon) y_{p+1}, x_{p+2} = \varepsilon, y \in X',\}$$

бўлади.

Унда А.Кытманов ва С.Мысливецларнинг ишларида ∂M_ε да dM нинг Лебег ўлчови

$$c_1 \varphi^p(\varepsilon) d\sigma(y) dx'' \le dM \le c_2 \varphi^p(\varepsilon) d\sigma(y) dx'',$$

бунда $d\sigma(y)$ - X' даги Лебег ўлчови, $dx'' = dx_{p+3} \cdot \ldots \cdot dx_{2n}$ эса X'' даги Лебег ўлчови (А.Кытманов ва С.Мысливец ишида сингуляр нуқтали сиртлар учун исботланган, аммо у бизнинг сингуляр қиррали ҳол учун осон ўтказилади).

Айтайлик, $f \in \mathcal{L}^1(S)$ бўлсин. Қуйидаги ифодани қараймиз

$$s_f(\varepsilon) = \int_{X' \times X''} |f| \, d\sigma(y) dx'', \quad x_{p+2} = \varepsilon$$

тайинланган, бунда $f = f(\varphi(\varepsilon) y, \varepsilon, x'')$. Берилган интеграл деярли барча $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ учун Фубини теоремаси бўйича аниқланган.

Қуйидаги белгилашни бажарамиз:

$$P_m(x) = \int_S f(\zeta) \frac{dS(\zeta)}{|\zeta - x|^m}, \quad x \in \Omega \setminus S,$$

бунда

$$\zeta = (\zeta', \zeta_{p+2}, \zeta'') = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{2n}), m > 0.$$

Теорема 16. *$f \in \mathcal{L}^1(S)$ ва бирор $N\,(N \geq -p)$ учун $\varepsilon \to +0$ да $s_f(\varepsilon) = O(\varphi^N(\varepsilon))$ бўлсин, у ҳолда*

1. *Агар $N \leq m-2-p$ бўлса, у ҳолда $|x| \to 0$, $x \in \Omega^{\pm}$ да*

$$P_m(x) = O\left((\varphi(|x|))^{N+p+1-m}\right)$$

бўлади;

2. *Агар $m-p-2 < N \leq m-p-1$ бўлса, у ҳолда $|x| \to 0, x \in \Omega^{\pm}$ да*

$$P_m(x) = O\left(\frac{\left|\ln\varphi(|x|)\right|}{\left(\varphi(|x|)\right)^{m-N-p-1}}\right)$$

бўлади;

3. *Агар $N > m-p-1$, бўлса, у ҳолда $|x| \to 0$, $x \in \Omega^{\pm}$ да*

$$P_m(x) = O(1).$$

бўлади. Теоремада келтирилган баҳолар текис равишда эришилади.

Бохнер-Мартинелли ядросини кўринишини эслатамиз

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\overline{\zeta_k} - \overline{z_k}}{|\zeta - z|^{2n}}d\overline{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

бунда $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$, $d\overline{\zeta}[k] = d\overline{\zeta_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{\zeta}_{k-1} \wedge d\overline{\zeta}_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\overline{\zeta}_n$.

Агар f функциянинг Бохнер-Мартинелли интеграли:

$$F(z) = \int_S f(\zeta)U(\zeta, x)x \notin S$$

бўлса, унда қуйидаги тасдиқлар ўринли бўлади.

Натижа 5. *Юқоридаги теорема шартлари бажарилганда:*

1. *Агар $N \leq 2n-p-3, |x| \to 0, x \in \Omega^{\pm}$ да*

$$F(x) = O\left((\varphi(|x|))^{N+p+2-2n}\right)$$

бўлади.

2. *Агар $2n-p-3 < N \leq 2n-p-2$, бўлса, у ҳолда $|x| \to 0$, $x \in \Omega^{\pm}$ да*

$$F(x) = O\left(\frac{\left|\ln\varphi(|x|)\right|}{\left(\varphi(|x|)\right)^{N+p+2-2n}}\right)$$

бўлади.

3. *Агар $N > 2n-p-2$, бўлса, у ҳолда $|x| \to 0, x \in \Omega^{\pm}$ да*

$$F(x) = O(1)$$

бўлади. Натижада келтирилган баҳолар текис эришади.

Кейин, Гартогс-Бохнер теоремасининг $\mathbb{C}^n$ даги чегараланган коник қиррали D соҳадаги умумлашмаси келтирилган.

Айтайлик, D - $\mathbb{C}^n$ даги чегараланган соҳа бўлиб, $n>1$ бўлсин. D соҳанинг чегараси

$$\partial D = Y \cup S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m,$$

кўринишида бўлсин деб фараз қилайлик, бунда Y $\mathcal{C}^1$ синфга тегишли силлиқ гиперсирт, ҳар бир S_ν да S - диффеоморф сингуляр гиперсирт (юқорида кўрилган) (турли p_ν ва турли X'_ν, X''_ν кўпёқликлар).

Ҳар бир сингуляр сирт S_ν қуйидаги кўринишда $S_\nu = M_\nu \cup F_\nu$ ифодаланиб, бунда M_ν ; X'_ν, X''_ν лар билан аниқланадиган кўпёқликларнинг силлиқ қисми, φ_ν (юқорида қаралган функция), F_ν сингуляр қирра.

Теорема 17. *Айтайлик,* $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ *- тўплам боғламли бўлсин. Агар* $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ *функция* $\partial D \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_m)$ *да узлуксиз ва ушбу*

$$\int_{\partial D} f \overline{\partial} \omega = 0$$

шартни қаноатлантирса, бунда ω *-* $\mathbb{C}^n$ *да* $(n, n-2)$ *типдаги коэффициентлари* $\mathcal{C}^\infty$ *синфли ихтиёрий дифференциал форма, бундан ташқари ҳар бир сингуляр қирра атрофида* $s(f) = O(\varphi_\nu^N(\varepsilon))$, $\varepsilon \to 0$ *шарт бажарилади,* $N > 2n-2-p_\nu$ *барча* $\nu = 1, \ldots, m$ *учун, у ҳолда* $\mathcal{H}^\infty(D)$ *синфга мансуб бўлган* F *функция мавжуд бўлиб, бу* F *функция ҳар бир* $z \in \partial D \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_m)$ *да узлуксиз ва у бу тўпламда* f *функция билан устма-уст тушади.*

Шуни таъкидлаш керакки, барча ν лар учун $2n-2-p_\nu \geq 0$. Яна шуни эслатамизки, $\mathcal{H}^\infty(D)$ фазо голоморф ҳамда D да чегараланган функциялардан ташкил топган.

Қуйидаги теоремада ∂D чегара худди олдинги пунктдагидай, фақат $\mathcal{C}^1$ силлиқлик ўрнига чегаранинг силлиқ қисмлари $\mathcal{C}^2$ силлиқликка эга деб фараз қиламиз.

Теорема 18. *Айтайлик,* $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ *функция* $\partial D \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_m)$ *да узлуксиз ва ҳар бир сингуляр қирра атрофида* $\varepsilon \to 0$ *(ҳар бир* $N > 2n-1-p_\nu$ *да) ушбу*

$$s(f) = O(\varphi_\nu^N(\varepsilon))$$

шарт бажарилсин. Агар Бохнер-Мартинелли интеграли $F^- = 0$ *(*$\overline{D}$ *дан ташқарида), унда Бохнер-Мартинелли интеграли* F^+ D *соҳада* $\mathcal{H}^\infty(D)$ *синфнинг функцияси бўлади. У ҳар бир* $z \in \partial D \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_m)$ *гача узлуксиз ва бу тўпламда* f *функция билан устма-уст тушади.*

Диссертациянинг «Сингуляр қиррали соҳаларда Бохнер-Мартинелли махсус интегралидан ҳосил бўлган операторлар алгебраси» деб номланувчи бешинчи бобида чегараси коник ҳамда каспидал (острия) қиррага эга бўлган чегараланган соҳаларда Бохнер-Мартинелли махсус интегралидан ҳосил бўлган операторлар алгебрасига бағишланган.

Қуйидаги гиперситрлар синфини қараймиз. $\mathbb{C}^n$ билан $\mathbb{R}^{2n}$ ни қуйидагича тенглаштирамиз $z_j = x_j + \imath x_{n+j}$, $j = 1,\ldots,n$. Яьни

$(z_1,...,z_n) = (x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\quad x = (x_1,...,x_{2n})$, $x' = (x_1,...,x_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $x'' = (x_{p+3},...,x_{2n})$, $\quad x = (x', x_{p+2}, x'')$. $\mathbb{R}^{p+1}$ да скаляр кўпайтмани қуйидагича аниқлаймиз:

$$\langle x', y' \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_{p+1} y_{p+1}.$$

Энди $\mathbb{R}^{p+2} \setminus \{0\}$ да координата бошида сингуляр бўлган силлик $\sum$ сиртни

$$\sum = \{(\varphi(r)x', r) \in \mathbb{R}^{p+2} : x' \in X', \;\; r \in [0, R)\},$$

қараймиз. Бунда $\varphi \in C^1[0, R)$ қуйидаги шартларни қаноатлантиради: $\varphi(0) = 0$ ва $\varphi(r) > 0$, $\varphi'(r) > 0$, $r \in (0, R)$. $x' = (x_1,\ldots,x_{p+1})$ нуқталар $\mathbb{R}^{p+1}$ даги компакт, силлиқ гиперсирт X' га ўзгаради (бунда координата боши 0 кирмайди).

Кейинчалик X' ни $X' = \{x' \in \mathbb{R}^{p+1} : \rho(x') = 1\}$ деб қараймиз, бунда ρ C^1 синфдаги $\mathbb{R}^{p+1} \setminus \{0\}$ тўпламда берилган ҳақиқий қийматли функция бўлиб, у $\nabla\rho \neq 0$ (X' да) ва $\rho(\lambda x') = \lambda^h \rho(x')$ (барча $\lambda > 0$, $h > 0$ ўгармас) шартларни қаноатлантиради.

Координата боши $\sum$ нинг махсус нуқтаси бўлсин. Агар $\varphi'(0) \neq 0$ бўлса, унда 0 $\sum$ нинг коник нуқтаси бўлади. $\varphi'(0) = 0$ бўлган ҳолда 0 каспидал (острия) бўлади.

Сирт таърифидан фойдаланиб $\sum$ нинг силлиқ қисмини аниқлаб берувчи фунцияни топиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $(x', x_{p+2}) \in \Sigma \setminus \{0\}$ учун

$$\frac{x'}{\varphi(x_{p+2})} \in X',$$

яъни,

$$\rho\Big(\frac{x'}{\varphi(x_{p+2})}\Big) = 1,$$

бўлади, ρ нинг бир жинсли функция бўлишидан

$$\sum = \{(x', x_{p+2}) \in \mathbb{R}^{p+2} : \psi(x', x_{p+2}) = 0, x_{p+2} \in [0, R)\},$$

келиб чиқади, бунда

$$\psi(x', x_{p+2}) = \rho(x') - (\varphi(x_{p+2}))^h.$$

Айтайлик, $S = \sum \times X''$, бунда X'' $\mathbb{R}^q$ даги очиқ чегараланган тўплам, $p + q = 2n - 2$. Унда $\{0\} \times X''$ сингуляр қирра бўлиб, унинг ташқарисида S - силлиқ сирт.

Бешинчи бобнинг биринчи параграфида ушбу теорема исботланган.

Теорема 19. $\mathbb{R}^{p+2}$ *даги Лебег ўлчовидан индуцирланган* $\sum$ *даги* $d\sum$ *сирт ўлчови*

$$d\sum=\varphi^{p}(s)\sqrt{1+h^{2}\Big(\frac{\varphi'(s)}{|\nabla_{y'}\rho|}\Big)^{2}}dsd\sigma(y'),$$

кўринишга эга, бунда - X' *даги Лебег ўлчови,* $y'=(y_1,...,y_{p+1})$.

S сиртда натижа сифатида қуйидаги тасдиқ ўринли.

Теорема 20. $\mathbb{C}^n$ *даги Лебег ўлчовидан индуцирланган* S *даги* dS *сирт ўлчови*

$$dS=d\Sigma\cdot dy''=\varphi^{p}(s)\sqrt{1+h^{2}\Big(\frac{\varphi'(s)}{|\nabla_{y'}\rho|}\Big)^{2}}dsd\sigma(y')dy'',$$

кўринишга эга, бунда $dy''=dy_{p+3}\cdots dy_{2n}$.

Бешинчи бобнинг иккинчи параграфида Бохнер-Мартинелли ядросининг S сингуляр сиртда қисқариши кўрсатилган.

Агар $p+1<n$ бўлса $\mu_{\varphi}(x,y,r,s)=-(y_{n+1}-x_{n+1},\dots,y_{p+2}-x_{p+2})$; агар $p+1=n$ бўлса, $\mu_{\varphi}(x,y,r,s)=-(s-r,y_{n+1}-x_{n+1},\dots,y_{n+p+1}-x_{n+p+1},\varphi(r)x_1-\varphi(s)y_1)$, агар $p+1>n$ бўлса,

$$\mu_{\varphi}(x,y,r,s)=-(\varphi(s)y_{n+1}-\varphi(r)x_{n+1},\dots,\ \varphi(s)y_{p+1}-\varphi(r)x_{p+1},\ s-r,$$
$$y_{p+3}-x_{p+3},\dots,\ y_{2n}-x_{2n},\ \varphi(r)x_1-\varphi(s)y_1,\dots,\ \varphi(r)x_{p+2-n}-\varphi(s)y_{p+2-n}).$$

Теорема 21. S *гиперсиртда Бохнер-Мартинелли ядросининг қисқариши ушбу кўринишга эга*

$$U(\zeta,z)\big|_S=\frac{1}{\sigma_{2n}}\frac{\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y',s)),(\varphi(s)y'-\varphi(r)x',s-r)\rangle}{\left(|\varphi(s)y'-\varphi(r)x'|^2+(s-r)^2+|y''-x''|^2\right)^n}(\varphi(s))^p dsd\sigma(y')dy''+$$
$$+\imath\frac{1}{\sigma_{2n}}\frac{\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y',s)),\mu_{\varphi}(x,y,r,s)\rangle}{\left(|\varphi(s)y'-\varphi(r)x'|^2+(s-r)^2+|y''-x''|^2\right)^n}(\varphi(s))^p dsd\sigma(y')dy''.$$

Коник нуқталар учун бу теорема А.Кытманов ва С.Мысливец ишларида исботланган. Хусусан, теорема 21 ни $\varphi(r)=r$ ва $\varphi'(r)=1$ бўлган коник қиррали $S\subset\mathbb{C}^n$ гиперсиртга татбиқ этиш мумкин. Яъни ушбу тасдиқ ўринли.

Натижа 6. *Бохнер-Мартинелли ядросининг* S *гиперсиртдаги қисқариши қуйидаги кўринишга эга*

$$U(\zeta,z)\big|_S=\frac{1}{\sigma_{2n}}\frac{\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y',s)),(sy'-rx',s-r)\rangle}{\left(|sy'-rx'|^2+(s-r)^2+|y''-x''|^2\right)^n}s^p\cdot dsd\sigma(y')dy''+$$
$$+\imath\frac{1}{\sigma_{2n}}\frac{\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y',s)),\mu(x,y,r,s)\rangle}{\left(|sy'-rx'|^2+(s-r)^2+|y''-x''|^2\right)^n}s^p\cdot dsd\sigma(y')dy'',$$

бу ерда:

агар $p+1<n$ *бўлса,* $\mu(x,y,r,s)=-(y_{n+1}-x_{n+1},\dots,y_{p+2}-x_{p+2})$;

агар $p+1=n$ *бўлса,* $\mu(x,y,r,s)=-(s-r,y_{n+1}-x_{n+1},\dots,y_{n+p+1}-x_{n+p+1},rx_1-sy_1)$;

агар $p+1>n$ *бўлса,*

$$\mu(x,y,r,s) = -(sy_{n+1} - rx_{n+1}, \ldots, sy_{p+1} - rx_{p+1}, s-r, y_{p+3} - x_{p+3}, \ldots, y_{2n} -$$

$$-x_{2n}, rx_1 - sy_1, \ldots, rx_{p+2-n} - sy_{p+2-n}).$$

Бешинчи бобнинг учинчи параграфида $S \subset \mathbb{R}^{2n}$ гиперсирт коник қиррага эга бўлган ҳол қаралган.

Айтайлик, D - $\mathbb{C}^n$ даги чегараланган соҳа бўлсин, $n>1$. D нинг чегараси ушбу

$$\partial D = Y \cup (S_1 \cup \ldots \cup S_N),$$

кўринишга эга, бунда Y - силлиқ гиперсирт, ҳар бир S_ν коник гиперсирт S да диффеоморф.

Шундай қилиб, ∂D - чекли сондаги коник қиррали силлиқ гиперсирт бўлади.

Махсус нуқта атрофидаги таҳлил локал характерга эга эканлигидан, умумийликни истисно этмаган ҳолда $N=1$, яъни $\partial D = Y \cup S$, деб қараш мумкин, бунда

$$S = \{z \in \mathbb{C}^n : z = (rx', r, x''), x' \in X', x'' \in X'', r \in [0,R)\}.$$

$f \in C_{\mathrm{comp}}(\partial D \setminus \{0\} \times X'')$ функция учун нормани қуйидагича аниқлаймиз

$$\| f \|_{L^{2,\gamma}(\partial D)} := \Big(\int_{\partial D} |(rx', r)|^{-2\gamma} |f|^2 \, dS \Big)^{\frac{1}{2}},$$

бунда $\gamma \in \mathbb{R}$.

Бу норма бўйича $C_{\mathrm{comp}}(\partial D \setminus \{0\} \times X'')$ нинг тўлдирувчиси $L^{2,\gamma}(\partial D)$ каби белгилаймиз.

Маълумки $|(rx', r)|^{-2\gamma}$ вазн кўпайтувчи $L^{2,\gamma}(\partial D)$ даги функциянинг хусусиятини коник қирра $\{0\} \times X''$ атрофида характерлайди.

Модомики, $\partial D = Y \cup S$ экан, бу нормани иккита ярим нормага ажратиш мумкин бўлади. Улардан бири $\partial D \setminus S$ бўйича интеграллашга мос келиб, у чегаранинг силлиқ қисмида функциянинг ҳолатини назорат қилади. Иккинчи ярим норма S бўйича интеграллашга мос келиб, у махсус қирра яқинида функциянинг ҳолатига жавоб беради. S гиперсиртни параметрлаштириш учун $X' \times [0,R] \times X''$ цилиндр билан тенглаштириш мумкин.

Шунинг учун иккинчи яримнорма ҳақиқатдан ҳам ушбу

$$\| f \|^2_{L^{2?amma-(p+1)/2}(X' \times [0,R] \times X'')} =$$

$$= \int_0^R r^{-2(?amma-(p+1)/2)} \| f \|^2_{L^2(X' \times X'')} \frac{dr}{r}$$

нормадан келиб чиқади $f \in C_{\mathrm{comp}}(X' \times (0,R) \times X'')$, (теорема 20 дан яққол кўринади.)

Ушбу $k(x', y', x'', y'', r, s)$, киритамиз. У $(x', x''), (y', y'') \in X' \times X''$ ва $r, s > 0$ лар учун аниқланган бўлиб, қуйидаги кўринишга эга

$$k(x',y',x'',y'',r,s)=\frac{1}{\sigma_{2n}}\frac{\langle(\nu(y'),\nu_{2n}(y')),(sy'-rx',s-r)\rangle}{\left(|sy'-rx'|^2+(s-r)^2+|y''-x''|^2\right)^n}+$$
$$+\frac{\iota}{\sigma_{2n}}\frac{\langle\nu(y')\nu_{2n}(y',s),\mu(x,y,r,s)\rangle}{\left(|sy'-rx'|^2+(s-r)^2+|y''-x''|^2\right)^n}.$$

Бу ядродан фойдаланиб, Бохнер-Мартинеллининг махсус интегралини қуйидагича ифодалаш мумкин

$$M_S f(x',x'',r)=\int_0^\infty s^{p+1}\frac{ds}{s}\int_{X'\times X''}k\left(x',y',x'',y'',r,s\right)f(y',y'',s)d\sigma(y')dy'',$$

бунда (x',x'',r) ва (y',y'',s) лар мос равишда $z=(rx',r,x'')$ ва $\zeta=(sy',s,y'')$ ларга тенглаштирилади.

Шуни таъкидлаш керакки, $X'\times X''$ бўйича интеграл махсус интеграл бўлади, чунки $k(x',y',x'',y'',r,s)$ $y'=x'$, $x''=y''$ ва $s=r$ да махсусликка эга.

Теорема 22. *Агар $-p-1<\gamma<0$ бўлса, Бохнер-Мартинеллининг махсус интеграли $L^{2,\gamma}(X'\times[0,R)\times X'')$ даги чегараланган чизиқли операторни аниқлайди.*

Бешинчи бобнинг тўртинчи параграфида Бохнер-Мартинелли махсус интеграл оператори M_S дан юзага келган операторлар алгебраси қаралади.

Теорема 23. *Агар D - чегараси боғламли соҳа бўлса, у ҳолда $\mathcal{A}$ C^*-алгебра келтирилмайдиган бўлади.*

Энди $\mathcal{A}$ алгебра учун Калкиннинг $\mathcal{A}=\mathcal{A}/\mathcal{K}$ алгебрасини қараймиз, бунда $\mathcal{K}$ - $\mathcal{L}^2(\partial D)$ Гильберт фазосидаги компакт операторларнинг идеали.

Теорема 24. *Калкин алгебраси $\mathcal{A}=\mathcal{A}/\mathcal{K}$ коррект аниқланган, яъни $\mathcal{K}\subset\mathcal{A}$.*

Кейинги параграф M_S операторнинг конормал символини топишга бағишланган. Кейинчалик, қулайлик учун S гиперсиртнинг кўринишини қуйидагича ўзгартириб

$$S=\{z\in\mathbb{C}^n : z=(rx',r,rx''),\ x'\in X',x''\in X_{r''},\ r\in(0,R)\},$$

қараймиз, бунда $X_{r''}=\frac{1}{r}X''$.

$$(x',x'')\in X'\times X_{r''},\quad (y',y'')\in X'\times X_{s''}$$

ва $t>0$ лар учун аниқланган $k(x',y',x'',y'',t)$ функцияни қуйидагича киритамиз

$$k(x',y',x'',y'',t)=\frac{1}{\sigma_{2n}}\frac{\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y')),(y'-tx',1-t)\rangle}{\left(|y'-tx'|^2+(1-t)^2+|y''-tx''|^2\right)^n}+$$
$$+\frac{\iota}{\sigma_{2n}}\frac{\langle\nu(y'),\nu_{p+2}(y'),\mu'(x',x'',y',y'',t)\rangle}{\left(|y'-tx'|^2+(1-t)^2+|y''-tx''|^2\right)^n},$$

бунда агар $p+1<n$ бўлса; $\tilde{\mu}(x',x'',y',y'',t)=-(y_{n+1}-tx_{n+1},\dots,y_{p+2}-tx_{p+2})$, агар $p+1=n$ бўлса; $\tilde{\mu}(x',x'',y',y'',t)=-(1-t,y_{n+1}-tx_{n+1},\dots,y_{n+p+1}-tx_{n+p+1},tx_1-y_1)$, агар $p+1>n$ бўлса

$$\tilde{\mu}(x',x'',y',y'',t)=$$
$$=-(y_{n+1}-tx_{n+1},\dots,y_{p+1}-tx_{p+1},1-t,y_{p+3}-tx_{p+3},\dots,y_{2n}-tx_{2n},tx_1-y_1,\dots,tx_{p+2-n}-y_{p+2-n}).$$

Бу ядродан фойдаланиб Бохнер-Мартинеллининг махсус интегралини қуйидагича ёзиш мумкин

$$M_S f(x',x'',r)=\int_0^\infty s\frac{ds}{s}\int_{X'\times X_{s''}} k\Big(x',y',x'',y'',\frac{r}{s}\Big)f(y',y'',s)d\sigma(y')dy'',$$

бунда (x',x'',r) ва (y',y'',s) лар мос равишда $z=(rx',r,rx'')$ ва $\zeta=(sy',s,sy'')$.

$X'\times X_{s''}$ бўйича интеграл махсус бўлади, чунки $k(x',y',x'',y'',\frac{r}{s})$ функция $y'=x'$, $x''=y''$ ва $s=r$ да махсусликка эга.

$\mathcal{M}_{r\mapsto\lambda}$ орқали ярим ўқда аниқланган $f(r)$ функциянинг Меллин алмаштиришини қуйидагича белгилаймиз

$$\mathcal{M}_{r\mapsto\lambda} f=\int_0^\infty r^{-\imath\lambda}f(r)\frac{dr}{r},$$

бунда $\lambda\in\mathbb{C}$.

Бохнер-Мартинеллининг махсус оператори ва Меллин алмаштиришининг композицияси қуйидагича бўлади:

$$\mathcal{M}_{r\mapsto\lambda}M_S f(x',x'',r)=\int_0^\infty r^{-\imath\lambda}\frac{dr}{r}\int_0^\infty\frac{ds}{s}\int_{X'\times X_{s''}} k\Big(x',x'',y',y'',\frac{r}{s}\Big)f(y',y'',s)d\sigma(y')dy''=$$
$$=\int_0^\infty\frac{ds}{s}\int_{X'\times X''_s}\Big(\int_0^\infty r^{-\imath\lambda}k\Big(x',x'',y',y'',\frac{r}{s}\Big)\frac{dr}{r}\Big)f(y',y'',s)d\sigma(y')dy''.$$

$r\in(0,\infty)$ бўйича интегралда $r=st$, алмаштиришни бажарамиз, бунда t $(0,\infty)$ да ўзгаради. Натижада

$$\mathcal{M}_{r\mapsto\lambda}M_S f(x',x'',r)=$$
$$=\int_0^\infty s^{-\imath\lambda}\frac{ds}{s}\int_{X'\times X_{s''}}\Big(\int_0^\infty t^{-\imath\lambda}k(x',x'',y',y'';t)\frac{dt}{t}\Big)f(y',y'',s)d\sigma(y')dy''=$$
$$=\int_{X'\times X_{s''}}\mathcal{M}_{t\mapsto\lambda}k(x',x'',y',y'';t)\mathcal{M}_{s\mapsto\lambda}f(y',y'',s)d\sigma(y')dy''$$

бўлади, бунда $x'\in X'$, $x''\in X''_s$ ва $\lambda\in\mathbb{C}$.

Бунда $a(\lambda)$ ушбу интеграл билан аниқланади:

$$a(\lambda)f(x',x'',t)=\int_{X'\times X''_t}\mathcal{M}_{t\mapsto\lambda}k(x',x'',y',y'';t)f(y',y'',t)d\sigma(y')dy''.$$

$a(\lambda)$ - Меллин алмаштиришига асосан псевдодифференциал оператор конормал символи дейилади. Уни аниқ ҳисоблаш учун

$$\langle y'-tx', y'-tx'\rangle + \langle y''-tx'', y''-tx''\rangle + (1-t)^2 = 0,$$

тенгламанинг юқори ярим текисликда ягона ечимини Z деймиз, яъни

$$Z = \frac{1+\langle x', y'\rangle + \langle x'', y''\rangle}{1+|x'|^2+|x''|^2} +$$

$$+\frac{\imath\sqrt{|y'-x'|^2+|x''-y''|^2+(|x'|^2+|x''|^2)(|y'|^2+|y''|^2)-(\langle x', y'\rangle + \langle x'', y''\rangle)^2}}{1+|x'|^2+|x''|^2}.$$

Теорема 25. $|\gamma| < n-\frac{1}{2}$ *учун Бохнер-Мартинеллининг махсус интеграли қуйидагича ифодаланади*

$$M_S f(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\{\mathrm{Im}\,\lambda=(n-1/2)-\gamma\}} r^{\imath\lambda} a(\lambda)\mathcal{M}_{r'\mapsto\lambda} f(r')d\lambda.$$

Коник махсус нуқталарга эга бўлган соҳа учун юқоридаги тасдиқ А.Кытманов ва С.Мысливец ишларида исботлаган.

Бешинчи бобнинг олтинчи параграфида конормал символнинг асимптотик ёйилмалари келтирилган. Айтайлик,

$$A = \frac{1}{\sigma_{2n}}\langle(\nu(y'), \nu_{p+2}(y')), (y', 1)\rangle + \frac{\imath}{\sigma_{2n}}\langle(\nu(y'), \nu_{p+2}(y')), (\tilde{\mu}(x', x'', y', y'', 0)\rangle,$$

$$B = -\frac{1}{\sigma_{2n}}\langle(\nu(y'), \nu_{p+2}(y')), (x', 1)\rangle + \frac{\imath}{\sigma_{2n}}\langle(\nu(y'), \nu_{p+2}(y')), \tilde{\mu}_t'(x', x'', y', y'', 0)\rangle$$

бўлсин.

Теорема 26. $\mathcal{M}_{t\mapsto\lambda} k(x', x'', y', y''; t)$ *функция* $\mathrm{Im}\,Z \to 0$ *да қуйидаги асимптотик ёйилмага эга.*

$$\mathcal{M}_{t\mapsto\lambda} k(x', x'', y', y''; t) =$$

$$\pi\frac{(i\lambda+1)\ldots(i\lambda+2n-2)}{(2n-1)!}\frac{\exp\pi\lambda}{\sinh\pi\lambda}\frac{((i\lambda+2n-1)\Im A - i\lambda\Re Z\Im B)Z^{-i\lambda-2n}}{(1+|x|^2)^n} +$$

$$+O(\mathrm{Im}\,Z).$$

Бундан ташқари,

$$\mathcal{M}_{t\mapsto\lambda} k(x', x'', y', y''; t) = \frac{i\pi}{2(2n-1)!}\frac{\exp\pi\lambda}{(1+|x|^2)^n\sinh\pi\lambda}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(i\lambda+1)\cdots(i\lambda+2n+s-2)(Z-\bar{Z})^s}{s!(s+n)\cdots(s+2n-1)}\times$$

$$\times\left((-1)^{s+1}\bar{Z}^{-i\lambda-2n-s}(i\lambda B\bar{Z} + A(i\lambda+2n+s-1)) - \bar{Z}^{-i\lambda-2n-s}(i\lambda BZ + A(i\lambda+2n+s-1))\right).$$

ХУЛОСА

Диссертация иши кўп ўлчамли комплекс фазода функцияларни аналитик давом эттириш ва махсус интегралларни тадқиқ этишга бағишланган.

1. Чегараси бўлакли-силлиқ чегараланган соҳаларда Бохнер-Мартинелли типидаги интеграл тадқиқ қилинган.

2. Бохнер-Мартинелли типидаги интегралнинг сакраши ҳақидаги теоремалар исботланган, бундай интеграл орқали ифодаланувчи функцияларнинг голоморфлиги кўрсатилган.

3. Хенкин-Рамирез такрорий интегралининг ўрин алмашиши ҳақидаги теоремалар исботланган.

4. Бохнер-Мартинелли типидаги интегралнинг сакраши ҳақидаги теоремалар функцияларнинг голоморф давом этиши ҳақидаги масалаларга татбиқ этилган.

5. Қатъий псевдоқаварик соҳаларда Хенкин-Рамирез махсус такрорий интегралининг Коши ва Керзман-Стейн бош қийматлари учун ўрин алмаштириш формулалари топилган.

6. Чегараси коник қирраларга эга бўлган чегараланган соҳада Бохнер-Мартинелли типидаги интегралларнинг чегаравий ҳолатлари тўла тадқиқ этилган.

7. Чегараси коник қирраларга эга бўлган чегараланган соҳаларда функцияларни голоморф давом эттириш ҳақидаги теоремалар ҳамда Гартогс-Бохнернинг голоморф давом эттириш ҳақидаги теоремасининг аналоглари исботланган.

8. Чегараланган ва коник қирраларни ўз ичига олувчи чегарали соҳаларда Привалов теоремаси аналоги ва Сохоцский-Племел формуласи топилган.

9. Гартогс-Бохнер ва Айзенберг-Кытмановнинг бўлакли-силлиқ чегарали ва коник қирраларни ўз ичига олувчи чегарали соҳаларда Бохнер-Мартинелли типидаги интеграл орқали ифодаланувчи функциялар голоморфлиги кўрсатилган.

10. Сингуляр қиррали соҳаларда Бохнер-Мартинелли махсус интегралидан ҳосил бўлган операторлар алгебрасида Бохнер-Мартинелли операторининг конормал символи ҳисобланганлигини ва унинг асимптотик ёйилмаси қурилган.

Тадқиқод жараёнида олинган натижаларни кўп ўлчовли комплекс анализда интеграл ифодалар назарияси масалаларини тадқиқ қилишда, хусусан, Бохнер-Мартинелли интеграли билан ифодаланувчи функцияларни голоморф давом эттириш ҳақидаги теоремаларни умумлаштиришда, суюқлик билан тўлдирилган ғовак ярим фазода дилатансия соҳаларини қуришда, коник қиррали гиперсиртларда сингуляр интеграл операторлар алгебраларини таснифлашда, математик физиканинг чегаравий масалаларини ечишда қўллаш тавсия этилади.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM/T.34.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ, ИНСТИТУТЕ ИОННО-ПЛАЗМЕННЫХ И ЛАЗЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ДЖУМАБАЕВ ДАВЛАТБАЙ ХАЛИЛЛАЕВИЧ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ОБЛАСТЯХ С СИНГУЛЯРНЫМИ ГРАНИЦАМИ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТАШКЕНТ – 2017

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.1.DSc./FM1

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещён на веб-странице Научного совета (http://fti-kengash.uz/) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Худайберганов Гулмирза** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Кытманов Александр Мечиславович** доктор физико-математических наук, профессор Сибирский федеральный университет (Россия)
	Шаимкулов Баходир Аллабердиевич доктор физико-математических наук
	Имомкулов Севдиёр Акромович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «___» _________ 2017 г. в _______ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM/T.34.01 при Физико-техническом институте, Иинституте ионно-плазменных и лазерных технологий, Самаркандском государственном университете. (Адрес: 100084, г.Ташкент, ул. Бодомзор йули 2б. Тел./факс: (99871) 235-42-91, e-mail: lutp@uzsci.net, зал заседаний физико-технического института).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Физико-технического института (регистрационный номер ______). Адрес: 100084, г.Ташкент, ул. Бодомзор йули 2б.

Автореферат диссертации разослан «___» _________ 2017 г.

(протокол реестра № ___ от «___» _________ 2017 г.).

С.Л.Лутпуллаев
Председатель научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

А.В.Каримов
Ученый секретарь научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

А.С.Садуллаев
Председатель научного семинара при научном
совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор, академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Множество научно-практических исследований, проводимые в мировом масштабе, показывают актуальность исследования аналитического продолжения функций в многомерном комплексном пространстве и сингулярных интегральных операторов. Сначала ученые Германии и Италии нашли интегральное представление Бохнера-Мартинелли для голоморфных функций многих комплексных переменных. А интегральное представление Коши-Фантапье, найденное французскими учеными и являющееся достаточно общим легко получается из представления Бохнера-Мартинелли. Интегральное представление в многомерном комплексном анализе является мощным конструктивным инструментом, как и интегральное представление Коши в теории функций одного комплексного переменного, имеющее различные и важные приложения. Поэтому развитие исследований по интегральным представлениям в многомерном комплексном анализе и их приложений является одной из важных задач.

В годы независимости в нашей стране усилено внимание актуальным направлениям, имеющим прикладное значение, в частности, с целью использования особых интегралов для аналитического продолжения функций в многомерном комплексном анализе, отдельное внимание уделено изучению их граничных свойств. Достигнуты серьезные результаты в изучении граничных свойств интеграла типа Бохнера-Мартинелли для областей с гладкой границей.

В настоящее время изучение и исследование граничных свойств особых интегралов таких, как Бохнера-Мартинелли, Хенкина-Рамиреза, Коши-Сеге в задачах аналитического продолжения функций в областях с сингулярными границами играют важную роль. В связи с этим, осуществление целевых научных исследований является одной из важных задач, в том числе, научные исследования по следующим направлениям: аналитическое продолжение функций для данных областей с сингулярными границами в многомерном комплексном анализе, получение условий аналитического продолжения функции, заданной на границе; исследование граничных свойств сингулярных интегральных операторов; получение формул перестановки и композиции в строго псевдовыпуклых областях. Проводимые научные исследования по вышеуказанному направлению научных исследований, обосновывает актуальность темы данной диссертации.

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года и №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года, а также других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2].

Научные исследования, направленные на изучение аналитического продолжения функций в многомерном комплексном анализе и сингулярных интегральных операторов осуществляются в ведущих научных центрах и высших образовательных учреждениях мира, в том числе, в Princeton University, The University of North Carolina, University of Massachusetts Boston, Ohio State University, Stony Brook University, Baldwin Wallace University (США), Sapienza University of Rome (Италия), Bergische Universitat Wuppertal, Potsdam University (Германия), Сибирском Федеральном университете, Институте математики Российской Академии наук, Московском государственном университете, Новосибирском государственном университете, Институте вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской АН (Россия), Bar-Ilan University (Израиль), Université Stendhal-Grenoble, Universite Pierre et Marie Curie de Paris VI (Франция).

В результате исследований в мире по изучению аналитического продолжения функций для областей с гладкой границей и граничных свойств особых интегралов в многомерном комплексного анализе решены ряд актуальных задач, в том числе, получены следующие научные результаты: Бохнер (Princeton University (США)) и Мартинелли (Sapienza University of Rome (Италия)), не связанно друг с другом, не имея вестей друг о друге, нашли строгое доказательство теоремы Гартогса о стирании компактных особенностей голоморфных функций; а Бохнер, на самом деле, доказал теорему Гартогса для областей с гладкой границей и функций, непрерывных на границе; Вайнсток (Baldwin Wallace University (США)) доказал ее для непрерывных функций в областях с бесконечно гладкой границей; в работах Л. А. Айзенберга (Bar-Ilan University (Израиль)) и А. М. Кытманова (Сибирский федеральный университет (Россия)) доказано голоморфное продолжение функции, по границе области D из $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей и ортогональной ядру Бохнера-Мартинелли при интегрировании на границе.

В мире, в настоящее время, осуществляется ряд научных исследований по приоритетным направлениям, как исследование интегральных представлений в многомерном комплексном анализе, в том числе: граничные свойства интеграла Бохнера-Мартинелли и их приложение к задачам аналитического продолжения функций, теоремы о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли, приложения интегральных формул Лере (Каши-Фантапье),

---

[2]Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации разработан на основе: www.math.prinston.edu, www.northcorolina.edu, www.umb.edu, www.osu.edu, www.stonybrook.edu, www.bw.edu, www.unirome1.it, www.uni-wuppertal.de, www.uni-postdam.de, www.sfu-kras.ru, www.mi.ras.ru, www.msu.ru, www.nsu.ru, www1.bin.ac.il, www.ac-grenoble.fr/stendhal/, www.upmc.fr, Матем. Сборник http://mi.mathnet.ru/rus/msb/v136/i4/p567 и других источников.

Хенкина-Рамиреза, Коши-Сеге (Хуа Локена), аналитическое выражение CR-функций на гиперповерхностях с особенностями, многомерные граничные аналоги теоремы Морера, оператор Бохнера-Мартинелли в шаре и на полуплоскости, голоморфное продолжение функции, заданной на границе ограниченной области, во внутрь этой области, получение формул перестановки и композиции для особого интеграла Хенкина-Рамиреза.

Степень изученности проблемы. Задача о скачке является одной из первых задач, рассмотренных для интеграла Бохнера-Мартинелли. Для этого, оказывается, свойства гладкости функции и границы области будут такими же как для интеграла Коши. Формула Сохоцкого-Племеля и, кроме того, разность $F^{+}(z^{+})-F^{-}(z^{-})$ может иметь предел на границе $z^{0}\in\partial D$, а вместо доказательства того, что функции $F^{+}(z^{+})$ и $F^{-}(z^{-})$ не имеют предела, легче доказать теорему о скачке. Поэтому теорема о скачке справедлива для более широкого класса функций, чем формула Сохоцкого-Племеля. Сначала, формулам граничных значений интеграла типа Коши для случая одной переменной посвящены научные исследования Ю.Сохоцкого, И.Племеля, И.Привалова. По различным теоремам о скачке интеграла (типа) Бохнера-Мартинелли вели научные исследования Лу Цикен, Чжун Тунде, В.Какичев, Е.Чирка, Г.Хенкин, Л.Айзенберг, А.Кытманов, Ш.Даутов, А.Аронов, Р.Харви, Х.Лаусон, Ш.Ярмухамедов, Б.Шоимкулов, Н.Тарханов, Б.Пренов.

В процессе исследования сингулярных интегральных операторов типа Бохнера-Мартинелли и потенциалов, А.Кытманов, С.Мысливец, Н.Тарханов рассмотрели случай ограниченных областей D с конической особой точкой. При изучении задачи перестановки особого интеграла типа Бохнера-Мартинелли, А.М.Кытманов, Б.Б.Пренов и Н.Н.Тарханов получили формулу для интеграла типа Коши, отличающуюся от классической формулы Пуанкаре-Бертрана. Позднее А.М.Кытманов и А.С.Кацунова получили формулу Коши-Сеге, хорошо согласующуюся с формулой Пуанкаре-Бертрана на комплексной плоскости. В работе А.Кытманова, С.Мысливец и Н.Тарханова, а также и в других работах А.Кытманова и С.Мыслевиц рассмотрены не кусочно-гладкие, а более общие классы областей с сингулярными границами. При изучении конормального символа необходимо было обобщение теоремы о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли в области с сингулярным ребром, являющимся аналогом теоремы Сохоцкого-Племеля. В работе А.Кытманова, С.Мысливец и Н.Тарханова показана возможность эффективного вычисления конормального символа оператора Бохнера-Мартинелли в областях с коническими особыми точками.

В многомерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n}$ недавно получены аналоги формул перестановки для особого интеграла Бохнера-Мартинелли, в них рассмотрено главное значение по Коши особого интеграла (А.Кытманов, Н.Тарханов и Б.Пренов), а в строго псевдовыпуклых областях рассмотрен интеграл Бохнера-Мартинелли для главного значения по Керзману-Стену (А.Кацунова). В работе А.Кацунова и А.Кытманова рассмотрен случай шара и приведены формулы перестановки и композиции для особого интеграла Коши-Сеге. Они по форме похожи на классические формулы Пуанкаре-Бертрана и композиции для интеграла типа Коши. Теория интегральных формул в многомерном комплексном пространстве и их приложения развиты в исследованиях Л.Айзенберга, А.Южакова, F.Hervey, J.Lowson, N.Kerzman, E.Stein, G.Lupacciolu, E.Stout, B.Weinstock, Е.Чирки, А.Кытманова, Ш.Ярмухамедова, Н.Тарханова, А.Аронова, Ш.Даутова, Г.Хенкина, М.Аграновского, А.Шляпунова, Б.Шаимкулова, Б.Пренова, А.Кацуновой, Д.Джумабаева.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполняется диссертация. Исследование диссертации выполнены в рамках проектов научных исследований Национального университета Узбекистана по темам ОТ-Ф1-116 «Задачи аналитического продолжения и вопросы геометрической теории функции» (2007-2011) и Ф-4-31 «Теория плюрипотенциала и интегральные представления в многомерном анализе» (2012-2016).

Целью исследования является исследование состояния на границе интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей и в областях с сингулярной границей, а также применение полученных результатов к задачам голоморфного продолжения функций.

Задачи исследования:

доказательство теорем о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей и в областях с сингулярной границей в $\mathbb{C}^n$;

доказательство теорем о перестановке повторного интеграла Хенкина-Рамиреза;

получение теоремы о голоморфном продолжение функций (в таких областях), ортогональных ядрам Бохнера-Мартинелли, и как следствие нахождение аналога теорем Гартогса-Бохнера, Айзенберга-Кытманова;

получение результатов, связанных с голоморфным продолжением функции с границы ограниченной области с кусочно-гладкой границей во внутрь этой области;

получение формул перестановки и формул композиции для особого интегрального оператора Хенкина-Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях;

доказательство аналога теоремы Привалова и получение формулы Сохоцкого-Племеля в областях с границей, содержащей конические ребра;

исследование задачи голоморфного продолжения функций с замкнутых гиперповерхностей с коническими ребрами;

изучение алгебры операторов, порожденной особым интегральным оператором Бохнера-Мартинелли. Нахождение конормального символа этого оператора и его асимптотического разложения.

Объект исследования: различные сингулярные интегральные операторы (Бохнера-Мартинелли, Коши-Сеге, Хенкина-Рамиреза) в многомерном комплексном пространстве в ограниченных областях с сингулярными границами.

Предмет исследования состоит из интегральных операторов, соответствующих теореме об аналитическом продолжении функций, заданных на границе области с сингулярной точкой и сингулярным ребром.

Методы исследования. В исследовательской работе использованы методы интегральных представлений голоморфных функций в многомерном комплексном анализе и теории функций многих комплексных переменных.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

решены задачи, связанные с граничными свойствами интеграла типа Бохнера-Мартинелли в ограниченных областях с кусочно-гладкими границами и границами с коническими ребрами;

доказаны теоремы о скачке интеграла типа Бохнера-Мартинелли в таких областях;

получены теоремы о перестановке повторного интеграла Хенкина-Рамиреза;

доказаны теоремы о голоморфном продолжении, а также аналоги теорем Гартогса-Бохнера о голоморфном продолжении функций ограниченных областях с границей, содержащей конические ребра;

получены теоремы о голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли в ограниченных областях с границей, содержащей конические ребра, усиливающие ранее известные теоремы Айзенберга-Кытманова;

получены формулы перестановки и формулы композиции для особого интегрального оператора Хенкина-Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях;

получены аналог теоремы Привалова в ограниченных областях с границей, содержащей конические ребра и формула Сохоцкого-Племеля;

изучена алгебра операторов, порожденная особым интегральным оператором Бохнера-Мартинелли в областях с сингулярными границами. Найден его конормальный символ.

Практические результаты исследования заключаются в возможности применения доказанных теорем о скачке интеграла типа Бохнера-Мартинелли к исследованию задач теории интегральных представлений в многомерном комплексном анализе, а также в методах решения граничных задач математической физики.

Достоверность результатов исследования обоснована применением методов математического анализа, функционального анализа и теории функций комплексного переменного, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научную значимость результатов исследования можно объяснить использованием при голоморфном продолжении функций в областях с сингулярной границей и при решении задач, связанных с граничными свойствами интегральных представлений.

Практическая значимость результатов исследования определяется тем, что полученные научные результаты служат основанием изучению различных сингулярных интегральных операторов в ограниченных областях с сингулярной границей.

Внедрение результатов исследования. Результаты, полученные в процессе исследования диссертации внедрены на практике по следующим направлениям:

условия голоморфного продолжения функций с границы области для непрерывных функций с особенностями, обобщающие классические теоремы Гартогса-Бохнера, были использованы в зарубежном гранте под номером 08-01-90250 по теме «Аналитическое продолжение голоморфных и гармонических функций» (справка Сибирского федерального университета от 8 ноября 2016 года под номером 33/11-6981). Применение научного результата дало возможность обобщения теорем о голоморфном продолжении функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли;

голоморфное продолжение функций с части границы области, использовались в зарубежном гранте под номером 13-01-00689 по теме «Математическое моделирование динамики двухскоростных сред со сложной реологий: прямые и обратные задачи» (справка Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской Академии наук от 7 ноября 2016 года под номером 12-2711). Применение научного результата дало возможность построения области дилатансии в насыщенной жидкостью пористом полупространстве;

сингулярный интегральный оператор Бохнера-Мартинелли на гиперповерхностях с коническими ребрами были использованы в зарубежном гранте под номером 11-01-00852 по теме «Многомерные вычеты в комплексном анализе, их применения в статистической физике и теориях разностных и дифференциальных уравнений» (справка Сибирского федерального университета от 8 ноября 2016 года под номером 33/11-6980). Применение научного результата дало возможность описания алгебры сингулярных интегральных операторов на гиперповерхностях с коническими ребрами.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены, в том числе, на 4 международных и 6 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано всего 26 научных работ, из них 12 научных статей, в том числе опубликованы 6 в зарубежных и 6 в республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций.

Объем и структура диссертации. Структура диссертации состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы, приложений. Объем диссертации составляет 161 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновываются актуальность и востребованность темы диссертации, в соответствии с исследованиями в приоритетных направлениях развития науки и технологий Республики Узбекистан, дается обзор международных научных исследований по теме диссертации, раскрываются степень изученности проблемы, формулируются цели и задачи, а также объект и предмет исследования, излагаются научная новизна и практические результаты исследования, обосновывается достоверность полученных результатов, раскрывается ее теоретическая и практическая значимость, приведен список внедрений в практику результатов исследования и опубликованных работ, даются сведения об апробации полученных результатов и структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Предварительные сведения»** приводятся важные понятия, свойства Бохнера-Мартинелли и Хенкина-Рамиреза и теоремы о голоморфном продолжении функций, выражаемых такими интегралами в областях с гладкими границами, необходимые для получения основных результатов.

Вторая глава диссертации, названная **«Теоремы о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей»** посвящена теоремам о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей. Также, получены теоремы о перестановочности повторного особого интеграла Хенкина-Рамиреза для случая, имеющего слабые особенности.

В первом параграфе второй главы доказывается следующая теорема о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли от непрерывных функций в областях с кусочно-гладкой границей.

Теорема 1. *Пусть* D *— ограниченная область в* $\mathbb{C}^n$ *с кусочно-гладкой границей. Если* $f \in C(\partial D)$, *то предел*

$$\lim_{z^{\pm}\to z^0}(F^+(z^+)-F^-(z^-))=f(z^0)$$

существует для любой точки $z^0 \in \partial D$ *и достигается равномерно, если точки* $z^{\pm}$ *лежат в фиксированном конусе с вершиной в* z^0, *постоянного размера,* $z^+ \in D$, $z^- \notin \bar{D}$.

Здесь F^+ и F^- есть интеграл (типа) Бохнера-Мартинелли от функции f, рассматриваемый со знаками $\pm$ в зависимости от того, берем ли мы этот интеграл F внутри области D или вне $\bar{D}$. Точки $z^+ \in D$ и $z^- \in \mathbb{C}^n \setminus \bar{D}$ лежат внутри прямого кругового двуполостного конуса с вершиной в точке $z^0 \in \partial D$ с достаточно малым углом β между осью и образующей, причем $a|z^+ - z^0| \leqslant |z^- - z^0| \leqslant b|z^+ - z^0|$, $0 < a \leqslant b < +\infty$. Эта теорема обобщает результат Ш. А. Даутова и А. М. Кытманова о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с гладкой границей. Таким образом, доказывается, что интеграл Бохнера-Мартинелли от непрерывных функций ведет себя в граничных точках, где нарушается гладкость, также как в гладком случае.

Из теоремы 1 вытекает следующий результат:

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1 функция F^+ непрерывно продолжается на $\bar{D}$, то и F^- непрерывно продолжается на $\mathbb{C}^n \setminus D$, и обратно.*

Во втором параграфе второй главы доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathcal{L}^p(\partial D)$, $1 \leqslant p < \infty$. Если $F(z)$ — интеграл Бохнера—Мартинелли от f, то*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{j=1}^{s_0} \int_{\tilde{\Gamma}_j} |F(z - \varepsilon \nu_j(z)) - F(z + \varepsilon \nu_j(z)) - f(z)|^p \, d\sigma = 0,$$

кроме того

$$\sum_{j=1}^{s_0} \int_{\tilde{\Gamma}_j} |F(z - \varepsilon \nu_j(z)) - F(z + \varepsilon \nu_j(z))|^p \, d\sigma \leqslant C \int_{\partial D} |f|^p \, d\sigma,$$

где константа C не зависит от f и ε (при достаточно малых ε точка $z - \varepsilon \nu_j(z) \in D$, а точка $z + \varepsilon \nu_j(z) \in (\mathbb{C}^n \setminus \bar{D})$).

Здесь

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho_1(z) < 0, \ldots, \rho_{s_0}(z) < 0\},$$

$$\tilde{\Gamma}_j = \{z \in \partial D : \rho_j(z) = 0\}, \partial D = \bigcup_{j=1}^{s_0} \tilde{\Gamma}_j.$$

$\tilde{\Gamma}_j$ — гладкие поверхности с кусочно-гладкой границей, $\nu_j(\zeta)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $\tilde{\Gamma}_j$ в точки ζ., $d\sigma$ — мера Лебега на ∂D.

Теорема 2 обобщает соответствующий результат А. М. Кытманова.

В третьем параграфе второй главы доказана следующая теорема о скачке $\bar{\partial}$-нормальной производной интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно дважды гладкой границей:

Теорема 3. *Если $f \in \mathcal{C}(\partial D)$, то для интеграла Бохнера-Мартинелли F выполняется*

$$\lim_{z^{\pm} \to z^0} (\bar{\partial}_n F^+(z^+) - \bar{\partial}_n F^-(z^-)) = 0.$$

Этот предел достигается равномерно относительно точки $z^0 \in \partial D$, если угол β фиксирован. Если $\bar{\partial}_n F^+(z^+)$ непрерывно продолжается на $\bar{D}$, то и $\bar{\partial}_n F^-(z^-)$ непрерывно продолжается на $\mathbb{C}^n \setminus D$, и обратно.

Здесь точки $z^+ \in D$ и $z^- \in \mathbb{C}^n \setminus \bar{D}$ лежат внутри прямого кругового конуса с вершиной в точке $z^0 \in \partial D$ с достаточно малым углом β между осью и образующей. Точки z^+ и z^- находятся на одной прямой проходящей через z^0 и удовлетворяют условию

$$|z^+ - z^0| = |z^- - z^0|.$$

$\bar\partial$-нормальная производная $\bar\partial_n F^\pm$ является сужением формы

$$*\bar\partial F^\pm = 2^{1-n} i^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial F^\pm}{\partial \bar z_k} dz[k] \wedge d\bar z,$$

(где * — оператор Ходжа) на границу области, т.е.

$$\bar\partial_n F^\pm = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F^\pm}{\partial \bar z_k} (\rho_j)_k,$$

где $(\rho_j)_k = \dfrac{\partial \rho_j}{\partial z_k} / |\operatorname{grad} \rho_j|$.

Теорема 3 обобщает теорему А. М. Кытманова и Л. А. Айзенберга, которая доказана для областей с дважды гладкой границей. Так же теорема 3 является аналогом теоремы Ляпунова о скачке нормальной производной потенциала двойного слоя.

В четвертом параграфе второй главы получены теоремы о перестановочности повторного особого интеграла Хенкина-Рамиреза для случая слабых особенностей.

Третья глава диссертации, названная **«Теоремы о голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли»** посвящена различным теоремам о голоморфном продолжении функций в областях с кусочно-гладкими границами, а также особому интегрального оператору Хенкина-Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях.

В первом параграфе третьей главы приведены аналоги теорем Гартогса-Бохнера о продолжении:

Теорема 4. *Пусть* D *— ограниченная область в* $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ *и* $\mathbb{C}^n \setminus \bar D$ *— связно,* ∂D *— кусочно-гладкая. Если функция* $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ *и удовлетворяет условию*

$$\int_{\partial D} f \bar\partial \omega = 0$$

для всех дифференциальных форм ω *типа* $(n, n-2)$ *с коэффициентами класса* $\mathcal{C}^\infty$ *в* $\mathbb{C}^n$*, тогда* f *голоморфно продолжается в* D.

В этом же параграфе доказан аналог теоремы Вайнстока, который усиливает соответствующий результат Вайнстока.

Теорема 5. *Пусть* D *— ограниченная область в* $\mathbb{C}^n$ *с кусочно-гладкой границей класса* $\mathcal{C}^1$*, а функция* $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ *и на* ∂D *удовлетворяет условию*

$$\int_{\partial D} f \alpha = 0$$

для всякой формы α *типа* $(n, n-1)$ *с коэффициентами класса* $\mathcal{C}^\infty(\bar D)$ *и такой, что* $\bar\partial \alpha = 0$ *на* $\bar D$*. Тогда* f *голоморфно продолжается в* D*. Голоморфное продолжение* f *дается интегралом Бохнера-Мартинелли.*

Во втором параграфе третьей главы доказаны следующие теоремы о голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли.

Теорема 6. *Пусть* f *— гармоническая функция в области* D*, с кусочно-гладкой границей,* $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$ *и* $\bar{\partial}_n f \in \mathcal{C}(\bar{D})$*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $\bar{\partial}_n f = 0$ *на* ∂D*;*

2. $F^+ = f$ *в* D*;*

3. $F^- = 0$ *вне* $\bar{D}$*.*

Теорема 7. *Пусть* D *— ограниченная область в* $\mathbb{C}^n$ *с кусочно-гладкой границей класса* $\mathcal{C}^2$*. Для того чтобы функция* $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$ *была голоморфна в* D *необходимо и достаточно, чтобы* $F^+ = f$ *в* D*.*

Теорема 7 для областей с гладкой границей класса $\mathcal{C}^2$ доказана А. Кытмановым и Л. Айзенбергом.

Следствие 2. *Если* $f \in \mathcal{C}(\partial D), \partial D$ *— кусочно-гладкая класса* $\mathcal{C}^2$*, тогда следующие условия эквивалентны:*

1. Функция f *— голоморфно продолжается в* D *до функции из класса* $\mathcal{C}(\bar{D})$ *;*

2. $F^- = 0$ *вне* $\bar{D}$*;*

3. F^+ *дает гармоническое продолжение* f *в* D*;*

4. $\bar{\partial}_n F^+$ *непрерывно продолжается на* $\bar{D}$ *и* $\bar{\partial}_n F^+ |_{\partial D} = 0$*.*

Теорема 8. *Пусть область* D *с кусочно-гладкой границей класса* $\mathcal{C}^2$ *в* $\mathbb{C}^n \, (n > 1)$ *и* $\mathbb{C}^n \setminus \bar{D}$ *связно. Если* $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ *и* F^+ *голоморфна в* D*, то граничное значение* F^+ *совпадает с* f*.*

Теорему 8 для областей с гладкой границей класса $\mathcal{C}^2$ доказал А. Кытманов.

Следствие 3. Пусть ∂D — кусочно-гладкая класса $\mathcal{C}^2$ и связна, а $f \in \mathcal{C}(\partial D)$. Для того чтобы f продолжалась в D до функции $f \in \mathcal{O}(D) \bigcap \mathcal{C}(\bar{D})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\partial D} f(*\partial P_{s,t,k}) = \int_{\partial D} f \partial_n P_{s,t,k} d\sigma = 0$$

для всех s,t,k.

Здесь $\{P_{s,t,k}\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{L}^2(S(0,1))$, состоящий из однородных гармонических полиномов степени s по z и степени t по $\bar{z}$, $s,t = 0,1,...,k \geqslant 1$, где $S(0,1)$ — это сфера с центром в точке 0 и радиусом 1.

Известно какую большую роль играет формула перестановки Пуанкаре-Бертрана и формула композиции для интеграла (типа) Коши на комплексной плоскости. Они используются при решении сингулярных интегральных уравнений и различных краевых задач. Для функций многих комплексных переменных даже постановка этих задач (например, аддитивной задачи

Римана) затруднительна. Это связано с теоремой о принудительном голоморфном продолжении извне ограниченной области в эту область (теорема Гартогса) и с отсутствием подходящей формулы перестановки и формулы композиции.

Следовательно, представляется естественным рассматривать интегральные представления с голоморфными ядрами. Стандартным таким представлением является интегральное представление Хенкина-Рамиреза для строго псевдовыпуклых областей. В работе А. Кацуновой и А. Кытманова для частного вида ядра Хенкина-Рамиреза, а именно, для интеграла Коши-Сеге в шаре, получены формулы перестановки и композиции, похожие на аналогичные формулы для интеграла Коши.

В третьем параграфе третьей главы доказываются формулы перестановки и композиции для особого интеграла Хенкина-Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях для двух стандартных главных значений по Коши и по Керзману-Стейну. Эти формулы оказались различными для разных главных значений, но похожими на формулы для интеграла Коши. Поэтому полученные формулы можно использовать при решении сингулярных интегральных уравнений на границе области. Приведен аналог формулы перестановки Пуанкаре-Бертрана для особого интеграла Хенкина-Рамиреза в случае главного значения по Коши.

Пусть D — строго псевдовыпуклая область, а S — граница D.

Теорема 9. *При $n>1$ для точек $\zeta^0, z^0, w\in S$, $\zeta^0\neq z^0$, справедливо равенство*

$$\int_{S_w} H(w,z^0)H(\zeta^0,w)d\sigma(w)=H(\zeta^0,z^0),$$

где $H(\zeta,z)$ — ядро Хенкина-Рамиреза, суженное на границу и деленное на элемент поверхности.

Теорема 10. *Пусть $n>1$. Если $f\in C^{\alpha}(S\times S)$, то*

$$\int_{S_w} H(w,z)d\sigma(w)\int_{S_\zeta} f(\zeta,w)H(\zeta,w)d\sigma(\zeta)=$$

$$=\int_{S_\zeta} d\sigma(\zeta)\int_{S_w} f(\zeta,w)H(w,z)H(\zeta,w)d\sigma(w), z\in S.$$

Рассмотрены формулы по главному значению в смысле Керзмана-Стейна в интегралах Хенкина-Рамиреза.

Теорема 11. *Для точек $z^0,\zeta^0,w\in S$ справедливо равенство*

$$\int_{S_w} H(w,z^0)H(\zeta^0,w)d\sigma(w)=0, \quad z^0\neq\zeta^0.$$

Теорема 12. *Пусть $f\in C^{\alpha}_{KS}(S\times S)$, тогда*

$$\int_{S_w} H(w,z)d\sigma(w)\int_{S_\zeta} f(\zeta,w)H(\zeta,w)d\sigma(\zeta)=$$

$$= \int\limits_{S_\zeta} d\sigma(\zeta) \int\limits_{S_w} f(\zeta, w) H(w, z) H(\zeta, w) d\sigma(w) + \frac{1}{4} f(z, z), z \in S.$$

По форме эта формула имеет такой же вид, как классическая формула Пуанкаре-Бертрана для интеграла типа Коши.

Также, приведен следующий результат из формулы композиции для особого интеграла Хенкина-Рамиреза:

Следствие 4. *Пусть* $n \geqslant 1$. *Если* $f(\zeta, w) = f(\zeta) \in \mathcal{C}^{\alpha}_{KS}(S)$, *то*

$$H^2_{sh}[f] = \frac{1}{4} f(z), \quad z \in S.$$

Здесь $H_{sh}[f]$ — значение особого интеграла Хенкина-Рамиреза на функции f для главного значения по Керзману-Стейну.

В четвертой главе, названной **«Интегральный оператор Бохнера-Мартинелли в областях с коническими ребрами»** изучается характер (особенность) интеграла Бохнера-Мартинелли в областях, граница которых содержит конические ребра.

Введем следующие обозначения.

Будем отождествлять $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ следующим образом $z_j = x_j + \imath x_{n+j}$ для $j = 1, \dots, n$. То есть $(z_1, ..., z_n) = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. А $x = (x_1, ..., x_{2n})$, $x' = (x_1, ..., x_{p+1})$, $x'' = (x_{p+3}, ..., x_{2n})$, $x = (x', x_{p+2}, x'')$.

Рассмотрим гладкую поверхность Σ в $\mathbb{R}^{p+2} \setminus \{0\}$ с сингулярной точкой в начале координат, заданную

$$\Sigma = \{(rx', r) \in \mathbb{R}^{p+2} : x' \in X', r \in [0, R)\}.$$

Точки $x' = (x_1, \dots, x_{p+1})$ изменяются на компактной гладкой гиперповерхности X' в $\mathbb{R}^{p+1}$, которая не содержит начала координат.

Например, X' может быть p-мерной сферой с центром в нуле.

Будем далее предполагать, что $X' = \{x' \in \mathbb{R}^{p+1} : \rho(x') = 1\}$, где ρ есть вещественнозначная функция на $\mathbb{R}^{p+1} \setminus \{0\}$ класса C^1, удовлетворяющая условиям $\nabla \rho \neq 0$ на X' и $\rho(\lambda x') = \lambda^h \rho(x')$ для всех $\lambda > 0$ с некоторой константой $h > 0$.

Начало координат является особой конической точкой для Σ. Легко найти определяющую функцию гладкой части Σ. Действительно, для $(x', x_{p+2}) \in \Sigma \setminus \{0\}$ получим, что

$$\rho\left(\frac{x'}{x_{p+2}}\right) = 1,$$

а однородность функции ρ дает

$$\Sigma = \{(x', x_{p+2}) \in \mathbb{R}^{p+2} : \psi(x', x_{p+2}) = 0, x_{p+2} \in [0, R)\},$$

где

$$\psi(x', x_{p+2}) = \rho(x') - (x_{p+2})^h.$$

Пусть

$$S = \Sigma \times X'',$$

где X'' — открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^q$, $p+1+q=2n-1$. Таким образом, S является гиперповерхностью в $\mathbb{C}^n$ с коническим ребром $F = O' \times X''$ $(O' = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{p+2})$.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$. Будем считать, что граница D задается в виде

$$\partial D = Y \cup (S_1 \cup \ldots \cup S_N),$$

где Y является гладкой гиперповерхностью, а каждая из S_ν диффеоморфна некоторой конической гиперповерхности S (с разными p и q), рассмотренной выше. Таким образом, ∂D — гладкая гиперповерхность с конечным числом конических ребер. Отметим, что в таких областях справедлива формула Стокса.

Так как анализ вблизи особых точек является локальным, можно считать без ограничения общности, что $N=1$, т. е. $\partial D = Y \cup S$, где

$$S = \{z \in \mathbb{C}^n : z = (rx', r, x''), x' \in X', x'' \in X'', r \in [0,R)\}.$$

В первом параграфе четвертой главы приводится аналог теоремы Привалова, связанный с поведением интеграла Бохнера-Мартинелли вблизи конического ребра S. Для гладких гиперповерхностей ∂D это утверждение доказано А. М. Кытмановым. Для областей с коническими особыми точками на границе оно рассмотрено в работе А. Кытманова и С. Мысливец.

Точку $z^0 \in \partial D$ назовем точкой Лебега для функции $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{2n-1}} \int\limits_{\partial D \cap B(z^0,\varepsilon)} |f(\zeta) - f(z^0)| dS = 0,$$

где $B(z^0,\varepsilon)$ — шар с центром в точке z^0 и радиуса ε, а dS — поверхностная мера Лебега на гладкой части ∂D. Если z^0 точка гладкости для ∂D, то данное определение есть обычное определение точки Лебега. Для точек, лежащих на коническом ребре, данное определение является новым. Если функция f — непрерывна в точке z^0, то эта точка является точкой Лебега для f.

Теорема 13. *Если z^0 — точка Лебега функции $f \in L^1(\partial D)$, то для точек $z \in D$, лежащих на оси конуса, справедливо равенство*

$$\lim_{z \to z^0} \left(\int\limits_{\partial D} (f(\zeta) - f(z^0)) U(\zeta, z) - \int\limits_{\partial D \setminus B(z^0, |z - z^0|)} (f(\zeta) - f(z^0)) U(\zeta, z^0) \right) = 0.$$

Для данной точки $z \in \partial D$ обозначим $\mathcal{C}_z$ — касательный конус к области D в точке z. Из вида сингулярности границы находим, что его величина равна телесному углу $\tau(z) \in [0,1]$ для $\mathcal{C}_z$. Если ∂D является гладкой в точке

z, то $\tau(z)=\dfrac{1}{2}$. Для точек z, лежащих на коническом ребре $0<\tau(z)<1$. Для точек $z\in\partial D$ особый интеграл Бохнера-Мартинелли от f равен

$$F_s(z)=\mathrm{pv}\int_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta,z)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial D\setminus B(z,\varepsilon)} f(\zeta)U(\zeta,z).$$

Обозначим $m_z(f)(\delta)$ — модуль непрерывности функции f на ∂D в точке $z\in\partial D$, т.е.

$$m_z(f)(\delta)=\sup_{\zeta\in\partial D\cap B(z,\delta)}|f(\zeta)-f(z)|.$$

Функция f на поверхности ∂D удовлетворяет условию Дини в точке $z\in\partial D$, если

$$\int_0^1 m_z(f)(\delta)\frac{d\delta}{\delta}<\infty.$$

Теорема 14. *Если функция $f\in\mathcal{L}^1(\partial D)$ удовлетворяет условию Дини в точке $z\in\partial D$, то особый интеграл Бохнера-Мартинелли $F_s(z)$ существует и справедливы формулы Сохоцкого-Племеля*

$$F^+(z)=(1-\tau(z))f(z)+F_s(z),$$

$$F^-(z)=-\tau(z)f(z)+F_s(z),$$

где $F^+(z)$ — граничное значение интеграла Бохнера-Мартинелли F изнутри области D, а $F^-(z)$ — граничное значение данного интеграла извне области.

Следующая теорема обобщает теорему о скачке для интеграла Бохнера-Мартинелли.

Теорема 15. *Пусть $f\in\mathcal{L}^1(\partial D)$ и z^0 — точка Лебега для функции f. Тогда справедлива формула*

$$\lim_{z^\pm\to z^0}\left(F^+(z^+)-F^-(z^-)\right)=f(z^0)$$

для точек z^+ и z^-, лежащих на оси конуса в D и $\mathbb{C}^n\setminus\bar{D}$, соответственно, таких что $|z^+|=|z^-|$.

Во втором параграфе четвертой главы доказаны теоремы о голоморфном продолжении функций в областях с коническими ребрами.

Пусть Ω — открытое ограниченное множество в $\mathbb{C}^n$ и S разбивает Ω на два открытых множества $\Omega\setminus S=\Omega^+\cup\Omega^-$, причем на множестве Ω^+ координата $x_{p+2}>0$.

Кроме того, будем считать, что $f\in\mathcal{L}^1(S)$. Это означает, что f является интегрируемой функцией на множестве M. Обозначим через M_ε множество

$$M_\varepsilon=\Sigma_\varepsilon\times X'',$$

где

$$\Sigma_\varepsilon=\{(x',x_{p+2})\in\mathbb{R}^{p+2}:x_1=\varphi(t)y_1,\ldots,x_{p+1}=\varphi(t)y_{p+1},x_{p+2}=t,$$

$$y=(y_1,\dots,y_{p+1})\in X',\,0<\varepsilon\leqslant t\leqslant\varepsilon_0\}.$$

Тогда $\partial M_\varepsilon=\partial\Sigma_\varepsilon\times X''$, где

$$\partial\Sigma_\varepsilon=\{(x',x_{p+2})\in\mathbb{R}^{p+2}:x_1=\varphi(\varepsilon)y_1,\dots,x_{p+1}=\varphi(\varepsilon)y_{p+1},x_{p+2}=\varepsilon,y\in X'\}.$$

В работах А.Кытманова и С.Мысливец меры Лебега dM на ∂M_ε

$$c_1\varphi^p(\varepsilon)d\sigma(y)dx''\leqslant dM\leqslant c_2\varphi^p(\varepsilon)d\sigma(y)dx'',$$

где $d\sigma(y)$ — мера Лебега на X', а $dx''=dx_{p+3}\cdot\ldots\cdot dx_{2n}$ есть мера Лебега на X'' (в работе А.Кытманова и С.Мысливец доказано для случая поверхностей с сингулярными точками, но она легко переносится на наш случай сингулярных ребер).

Пусть $f\in\mathcal{L}^1(S)$. Рассмотрим выражение

$$s_f(\varepsilon)=\int\limits_{X'\times X''}|f|d\sigma(y)dx'' \text{ при фиксированном } x_{p+2}=\varepsilon,$$

где $f=f(\varphi(\varepsilon)y,\varepsilon,x'')$. Данный интеграл определен для почти всех $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ по теореме Фубини.

Выполним следующие обозначения

$$P_m(x)=\int\limits_S f(\zeta)\frac{dS(\zeta)}{|\zeta-x|^m},\quad x\in\Omega\setminus S,$$

где

$$\zeta=(\zeta',\zeta_{p+2},\zeta'')=(\zeta_1,\dots,\zeta_{2n}),$$

а $m>0$.

Теорема 16. *Пусть* $f\in\mathcal{L}^1(S)$ *и* $s_f(\varepsilon)=O(\varphi^N(\varepsilon))$ *при* $\varepsilon\to+0$ *для некоторого* N *(* $N\geqslant-p$*), тогда*

1. Если $N\leqslant m-2-p$*, то*

$$P_m(x)=O\Big((\varphi(|x|))^{N+p+1-m}\Big)$$

при $|x|\to0$, $x\in\Omega^\pm$*;*

2. Если $m-p-2<N\leqslant m-p-1$*, то*

$$P_m(x)=O\left(\frac{\big|\ln\varphi(|x|)\big|}{\big(\varphi(|x|)\big)^{m-N-p-1}}\right)$$

при $|x|\to0$, $x\in\Omega^\pm$*;*

3. Если $N>m-p-1$*, то*

$$P_m(x)=O(1)$$

при $|x|\to0$, $x\in\Omega^\pm$.

Оценки, приведенные в теореме, достигаются равномерно.

Напомним вид ядра Бохнера-Мартинелли:

$$U(\zeta,z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\frac{\overline{\zeta_k}-\overline{z_k}}{|\zeta-z|^{2n}}d\bar\zeta[k]\wedge d\zeta,$$

где $d\zeta=d\zeta_1\wedge\dots\wedge d\zeta_n$, а $d\bar\zeta[k]=d\bar\zeta_1\wedge\dots\wedge d\bar\zeta_{k-1}\wedge d\bar\zeta_{k+1}\wedge\dots\wedge d\bar\zeta_n$.

Если интеграл Бохнера-Мартинелли от функции f:

$$F(z)=\int\limits_S f(\zeta)U(\zeta,x)$$

для $x\notin S$, то справедливо утверждение.

Следствие 5. *В предположениях предыдущей теоремы имеем:*

1. Если $N\leqslant 2n-p-3$*, то*

$$F(x)=O\left((\varphi(|x|))^{N+p+2-2n}\right)$$

при $|x|\to 0$, $x\in\Omega^{\pm}$*;*

2. Если $2n-p-3<N\leqslant 2n-p-2$*, то*

$$F(x)=O\left(\frac{\left|\ln\varphi(|x|)\right|}{\left(\varphi(|x|)\right)^{N+p+2-2n}}\right)$$

при $|x|\to 0$, $x\in\Omega^{\pm}$*;*

3. Если $N>2n-p-2$*, то*

$$F(x)=O(1)$$

при $|x|\to 0$, $x\in\Omega^{\pm}$.

Оценки, приведенные в следствии, достигаются равномерно.

Далее приведено обобщение теоремы Гартогса-Бохнера на ограниченные области D в $\mathbb{C}^n$ с коническими ребрами.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, $n>1$. Будем предполагать, что граница D имеет вид

$$\partial D=Y\cup S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_m,$$

где Y гладкая класса $\mathcal{C}^1$ гиперповерхность, а каждая из S_ν диффеоморфна сингулярной гиперповерхности S, рассмотренной выше (с разными p_ν и разными многообразиями X'_ν, X''_ν).

Каждую сингулярную поверхность S_ν представим в виде $S_\nu=M_\nu\cup F_\nu$, где M_ν — гладкая часть, определяемая многообразиями X'_ν, X''_ν и функцией φ_ν (рассмотренными выше), а F_ν сингулярное ребро.

Теорема 17. *Пусть множество* $\mathbb{C}^n\setminus\bar{D}$ *— связно. Если функция* $f\in\mathcal{L}^1(\partial D)$*, непрерывна на* $\partial D\setminus(F_1\cup\ldots\cup F_m)$ *и удовлетворяет условиям*

$$\int\limits_{\partial D} f\bar{\partial}\omega==0$$

для всех дифференциальных форм ω *типа* $(n,n-2)$ *с коэффициентами класса* $\mathcal{C}^\infty$ *в* $\mathbb{C}^n$*, и кроме того, в окрестности каждого сингулярного ребра выполняется условие* $s(f)=O(\varphi_\nu^N(\varepsilon))$ *при* $\varepsilon\to 0$ *для* $N>2n-2-p_\nu$ *и всех* $\nu=1,\ldots,m$*, то существует функция* F *класса* $\mathcal{H}^\infty(D)$ *такая, что* F *непрерывна вплоть до каждой точки* $z\in\partial D\setminus(F_1\cup\ldots\cup F_m)$ *и совпадает на этом множестве с функцией* f.

Отметим, что $2n-2-p_\nu \geqslant 0$ для всех ν. Напомним, что пространство $\mathcal{H}^\infty(D)$ состоит из функций F, голоморфных и ограниченных в D.

В следующей теореме предполагается, что граница ∂D имеет тот же вид, что и в предыдущем пункте только вместо гладкости $\mathcal{C}^1$ ее гладкие части имеют гладкость $\mathcal{C}^2$.

Теорема 18. *Пусть функция* $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$, *непрерывна на* $\partial D \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_m)$ *и в окрестности каждого сингулярного ребра* F_ν *выполняется условие*

$$s(f) = O(\varphi_\nu^N(\varepsilon))$$

при $\varepsilon \to 0$ *для* $N > 2n-1-p_\nu$. *Если интеграл Бохнера-Мартинелли* $F^- = 0$ *вне* $\bar{D}$, *то интеграл Бохнера-Мартинелли* F^+ *в области* D *является функцией класса* $\mathcal{H}^\infty(D)$, *непрерывен вплоть до каждой точки* $z \in \partial D \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_m)$ *и совпадает на этом множестве с функцией* f.

Пятая глава диссертации, названная **«Алгебра операторов, порожденная интегральным оператором Бохнера-Мартинелли в областях с сингулярными ребрами»** посвящена алгебрам операторов, порожденных особым интегралом Бохнера-Мартинелли в ограниченных областях с границами, имеющими конические, а также каспидальные ребра (острия).

Рассмотрим следующий класс гиперповерхностей. Как обычно, отождествляем $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ следующим образом $z_j = x_j + \imath x_{n+j}$ для $j = 1, \ldots, n$. То есть $(z_1, ..., z_n) = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. А $x = (x_1, ..., x_{2n})$, $x' = (x_1, ..., x_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $x'' = (x_{p+3}, ..., x_{2n})$, $x = (x', x_{p+2}, x'')$. Определим скалярное произведение в $\mathbb{R}^{p+1}$ следующим образом $\langle x', y' \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_{p+1} y_{p+1}$.

Рассмотрим гладкую поверхность Σ в $\mathbb{R}^{p+2} \setminus \{0\}$ с сингулярной точкой в начале координат, заданную

$$\Sigma = \{(\varphi(r)x', r) \in \mathbb{R}^{p+2} : x' \in X', r \in [0, R)\},$$

где $\varphi \in C^1[0, R)$ удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(r) > 0$, $\varphi'(r) > 0$ для $r \in (0, R)$. Точки $x' = (x_1, \ldots, x_{p+1})$ изменяются на компактной гладкой гиперповерхности X' в $\mathbb{R}^{p+1}$, которая не содержит начала координат 0.

Будем далее предполагать, что $X' = \{x' \in \mathbb{R}^{p+1} : \rho(x') = 1\}$, где ρ есть вещественнозначная функция на $\mathbb{R}^{p+1} \setminus \{0\}$ класса $\mathcal{C}^1$, удовлетворяющая условиям $\nabla \rho \neq 0$ на X' и $\rho(\lambda x') = \lambda^h \rho(x')$ для всех $\lambda > 0$ с некоторой константой $h > 0$.

Начало координат является особой точкой для Σ. Если $\varphi'(0) \neq 0$, то 0 есть коническая точка Σ. В случае $\varphi'(0) = 0$ точка 0 является каспидальной (острием).

Используя определение поверхности, легко найти определяющую функцию гладкой части Σ. Действительно, для $(x', x_{p+2}) \in \Sigma \setminus \{0\}$ получим, что

$$\frac{x'}{\varphi(x_{p+2})} \in X',$$

т.е.

$$\rho\left(\frac{x'}{\varphi(x_{p+2})}\right) = 1,$$

а однородность функции ρ дает, что

$$\Sigma = \{(x', x_{p+2}) \in \mathbb{R}^{p+2} : \psi(x', x_{p+2}) = 0, x_{p+2} \in [0, R)\},$$

где

$$\psi(x', x_{p+2}) = \rho(x') - (\varphi(x_{p+2}))^h.$$

Пусть $S = \Sigma \times X''$, где X'' — открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^q$, $p + q = 2n - 2$. Тогда множество $\{0\} \times X''$ является сингулярным ребром, вне которого S — гладкая поверхность.

В первом параграфе пятой главы приведено доказательство следующей теоремы.

Теорема 19. *Поверхностная мера $d\Sigma$ на Σ, индуцированная мерой Лебега в $\mathbb{R}^{p+2}$, имеет вид*

$$d\Sigma = \varphi^p(s)\sqrt{1 + h^2\Big(\frac{\varphi'(s)}{|\nabla_{y'}\rho|}\Big)^2}\, ds\, d\sigma(y'),$$

где $d\sigma(y')$ — мера Лебега на $X', y' = (y_1, ..., y_{p+1})$.

Как следствие на поверхности S справедливо утверждение.

Теорема 20. *Поверхностная мера dS на S индуцированная мерой Лебега в $\mathbb{C}^n$ имеет вид*

$$dS = d\Sigma \cdot dy'' = \varphi^p(s)\sqrt{1 + h^2\left(\frac{\varphi'(s)}{|\nabla_{y'}\rho|}\right)^2}\, ds\, d\sigma(y')dy''',$$

где $dy'' = dy_{p+3} \cdots dy_{2n}$.

Во втором параграфе пятой главы показаны сужение ядра Бохнера-Мартинелли на сингулярную поверхность S.

Пусть

$$\mu_\varphi(x, y, r, s) = -(y_{n+1} - x_{n+1}, \ldots, y_{p+2} - x_{p+2}), \text{ если } p + 1 < n;$$

$$\mu_\varphi(x, y, r, s) = -(s - r, y_{n+1} - x_{n+1}, \ldots, y_{n+p+1} - x_{n+p+1}, \varphi(r)x_1 - \varphi(s)y_1), \text{ если } p + 1 = n;$$

$$\mu_\varphi(x, y, r, s) = -(\varphi(s)y_{n+1} - \varphi(r)x_{n+1}, \ldots, \varphi(s)y_{p+1} - \varphi(r)x_{p+1}, s - r,$$

$$y_{p+3} - x_{p+3}, \ldots, y_{2n} - x_{2n}, \varphi(r)x_1 - \varphi(s)y_1, \ldots, \varphi(r)x_{p+2-n} - \varphi(s)y_{p+2-n}), \text{ если } p + 1 > n$$

.

Теорема 21. *Сужение ядра Бохнера-Мартинелли на гиперповерхность* S *имеет вид*

$$U(\zeta,z)\big|_S = \frac{1}{\sigma_{2n}} \frac{\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y',s)),(\varphi(s)y'-\varphi(r)x',s-r)\rangle}{(|\varphi(s)y'-\varphi(r)x'|^2+(s-r)^2+|y''-x''|^2)^n}(\varphi(s))^p\,ds d\sigma(y')dy''+$$

$$+\iota\frac{1}{\sigma_{2n}} \frac{\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y',s)),\mu_\varphi(x,y,r,s)\rangle}{(|\varphi(s)y'-\varphi(r)x'|^2+(s-r)^2+|y''-''|^2)^n}(\varphi(s))^p\,ds d\sigma(y')dy''.$$

Для случая конических точек эта теорема была доказана в работе А.Кытманова и С.Мысливец. В частности, теорема 21 применима к гиперповерхностям $S\subset\mathbb{C}^n$ с коническими ребрами, для которых $\varphi(r)=r$ и $\varphi'(r)=1$. То есть справедливо следующие утверждение.

Следствие 6. *Сужение ядра Бохнера-Мартинелли на гиперповерхность* S *имеет вид*

$$U(\zeta,z)\big|_S = \frac{1}{\sigma_{2n}} \frac{\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y',s)),(sy'-rx',s-r)\rangle}{(|sy'-rx'|^2+(s-r)^2+|y''-x''|^2)^n}s^p\cdot ds d\sigma(y')dy''+$$

$$+\iota\frac{1}{\sigma_{2n}} \frac{\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y',s)),\mu(x,y,r,s)\rangle}{(|sy'-rx'|^2+(s-r)^2+|y''-x''|^2)^n}s^p\cdot ds d\sigma(y')dy'',$$

где

$\mu(x,y,r,s)=-(y_{n+1}-x_{n+1},\ldots,y_{p+2}-x_{p+2})$, *если* $p+1<n$;

$\mu(x,y,r,s)=-(s-r,y_{n+1}-x_{n+1},\ldots,y_{n+p+1}-x_{n+p+1},rx_1-sy_1)$, *если* $p+1=n$;

$\mu(x,y,r,s)=-(sy_{n+1}-rx_{n+1},\ldots,sy_{p+1}-rx_{p+1},s-r,y_{p+3}-x_{p+3},\ldots,$

$y_{2n}-x_{2n},rx_1-sy_1,\ldots,rx_{p+2-n}-sy_{p+2-n})$, *если* $p+1>n$.

В третьем параграфе пятой главы рассмотрен случай, когда гиперповерхность $S\subset\mathbb{R}^{2n}$ имеет конические ребра.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, $n>1$. Граница D задается в виде

$$\partial D = Y\cup(S_1\cup\ldots\cup S_N),$$

где Y является гладкой гиперповерхностью, а каждая из S_ν диффеоморфна конической гиперповерхности S, рассмотренной выше.

Таким образом, ∂D — гладкая гиперповерхность с конечным числом конических ребер.

Так как анализ вблизи особых точек является локальным, можно считать без ограничения общности, что $N=1$, т. е. $\partial D = Y\cup S$, где

$$S=\{z\in\mathbb{C}^n : z=(rx',r,x''),x'\in X',x''\in X'',r\in[0,R)\}.$$

Для функции $f\in C_{\mathrm{comp}}(\partial D\setminus\{0\}\times X'')$ определим норму

$$\| f\|_{L^{2,\gamma}(\partial D)} := \Big(\int_{\partial D}|(rx',r)|^{-2\gamma}|f|^2 dS\Big)^{\frac{1}{2}},$$

где $\gamma\in\mathbb{R}$.

Обозначим $L^{2,\gamma}(\partial D)$ — пополнение $C_{\text{comp}}(\partial D\setminus\{0\}\times X'')$ в соответствии с этой нормой.

Понятно, что весовой множитель $|(rx',r)|^{-2\gamma}$ характеризует поведение функций из $L^{2,\gamma}(\partial D)$ в окрестности конического ребра $\{0\}\times X''$.

Так как $\partial D = Y\cup S$, то эта норма может быть разложена на две полунормы. Первая из них соответствует интегрированию по $\partial D\setminus S$ и контролирует поведение функций на гладкой части границы. Вторая полунорма соответствует интегрированию по S и отвечает за поведение функций вблизи особого ребра. Для параметризации S гиперповерхность S можно отождествить с цилиндром $X'\times[0,R]\times X''$.

Поэтому вторая полунорма в действительности происходит от нормы

$$\| f \|^2_{L^{2\gamma-(p+1)/2}(X'\times[0,R]\times X'')} =$$

$$= \int_0^R r^{-2(\gamma-(p+1)/2)} \| f \|^2_{L^2(X'\times X'')} \frac{dr}{r}$$

на функциях $f\in C_{\text{comp}}(X'\times(0,R)\times X'')$, что ясно из теоремы 20.

Введем функцию $k(x',y',x'',y'',r,s)$, определенную для $(x',x''),(y',y'')\in X'\times X''$ и $r,s>0$ равенством

$$k(x',y',x'',y'',r,s) = \frac{1}{\sigma_{2n}} \frac{\langle (\nu(y'),\nu_{2n}(y')),(sy'-rx',s-r)\rangle}{(|sy'-rx'|^2+(s-r)^2+|y''-x''|^2)^n} +$$

$$+\frac{\imath}{\sigma_{2n}} \frac{\langle \nu(y')\nu_{2n}(y',s),\mu(x,y,r,s)\rangle}{(|sy'-rx'|^2+(s-r)^2+|y''-x''|^2)^n}.$$

Используя это ядро, можно переписать особый интеграл Бохнера-Мартинелли в виде

$$M_S f(x',x'',r) = \int_0^\infty s^{p+1}\frac{ds}{s} \int_{X'\times X''} k(x',y',x'',y'',r,s) f(y',y'',s)\, d\sigma(y')dy'',$$

где (x',x'',r) и (y',y'',s) отождествляются с $z=(rx',r,x'')$ и с $\zeta=(sy',s,y'')$, соответственно.

Нужно отметить, что интеграл по $X'\times X''$ является особым, так как $k(x',y',x'',y'',r,s)$ имеет особенность при $y'=x'$, $x''=y''$ и $s=r$.

Теорема 22. *Особый интеграл Бохнера-Мартинелли определяет ограниченный линейный оператор в* $L^{2,\gamma}(X'\times[0,R)\times X'')$, *если* $-p-1<\gamma<0$.

В четвертом параграфе пятой главы рассмотрена алгебра операторов, порожденная особым интегральным оператором Бохнера-Мартинелли M_S.

Теорема 23. *Если* D *— область со связной границей, то* C^**-алгебра* $\mathcal{A}$ *неприводима.*

Рассмотрим алгебру Калкина $\mathcal{A} = \mathcal{A}/\mathcal{K}$ для алгебры $\mathcal{A}$, где $\mathcal{K}$ — идеал компактных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(\partial D)$.

Теорема 24. *Алгебра Калкина* $\mathcal{A}=\mathcal{A}/\mathcal{K}$ *корректно определена, т. е.* $\mathcal{K}\subset\mathcal{A}$.

Следующий параграф посвящен нахождению конормального символа оператора M_S.

Для удобства дальнейшего рассмотрения видоизменим гиперповерхность S следующим образом

$$S=\{z\in\mathbb{C}^n : z=(rx',r,rx''),x'\in X',x''\in X_{r''},r\in(0,R)\},$$

где $X_{r''}=\frac{1}{r}X''$.

Введем функцию $k(x',y',x'',y'',t)$, определенную для $(x',x'')\in X'\times X_{r''}$, $(y',y'')\in X'\times X_{s''}$ и $t>0$, равенством

$$k(x',y',x'',y'',t)=\frac{1}{\sigma_{2n}}\frac{\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y')),(y'-tx',1-t)\rangle}{(|y'-tx'|^2+(1-t)^2+|y''-tx''|^2)^n}+$$

$$+\frac{\iota}{\sigma_{2n}}\frac{\langle\nu(y'),\nu_{p+2}(y'),\mu'(x',x'',y',y'',t)\rangle}{(|y'-tx'|^2+(1-t)^2+|y''-tx''|^2)^n},$$

где $\tilde{\mu}(x',x'',y',y'',t)=-(y_{n+1}-tx_{n+1},\ldots,y_{p+2}-tx_{p+2})$, если $p+1<n$; $\tilde{\mu}(x',x'',y',y'',t)=-(1-t,y_{n+1}-tx_{n+1},\ldots,y_{n+p+1}-tx_{n+p+1},tx_1-y_1)$, если $p+1=n$;

$$\tilde{\mu}(x',x'',y',y'',t)=-(y_{n+1}-tx_{n+1},\ldots,y_{p+1}-tx_{p+1},1-t,y_{p+3}-tx_{p+3},\ldots,$$
$$y_{2n}-tx_{2n},tx_1-y_1,\ldots,tx_{p+2-n}-y_{p+2-n}),\text{ если } p+1>n.$$

Используя это ядро, можно переписать особый интеграл Бохнера-Мартинелли в виде

$$M_S f(x',x'',r)=\int_0^\infty s\frac{ds}{s}\int_{X'\times X_{s''}}k\left(x',y',x'',y'',\frac{r}{s}\right)f(y',y'',s)d\sigma(y')dy'',$$

где (x',x'',r) и (y',y'',s) отождествляются с $z=(rx',r,rx'')$ и с $\zeta=(sy',s,sy'')$, соответственно.

Заметим, что интеграл по $X'\times X_{s''}$ является особым, так как $k(x',y',x'',y'',\frac{r}{s})$ имеет особенность при $y'=x'$, $x''=y''$ и $s=r$.

Обозначим $\mathcal{M}_{r\mapsto\lambda}$ преобразование Меллина, определенное для функций $f(r)$ на полуоси и задаваемое формулой

$$\mathcal{M}_{r\mapsto\lambda}f=\int_0^\infty r^{-\iota\lambda}f(r)\frac{dr}{r}$$

для $\lambda\in\mathbb{C}$.

Композиция особого оператора Бохнера-Мартинелли с преобразованием Меллина дает

$$\mathcal{M}_{r\mapsto\lambda}M_S f(x',x'',r)=\int_0^\infty r^{-\iota\lambda}\frac{dr}{r}\int_0^\infty\frac{ds}{s}\int_{X'\times X_{s''}}k\left(x',x'',y',y'';\frac{r}{s}\right)f(y',y'',s)d\sigma(y')dy''=$$

$$= \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_{X' \times X''_s} \left(\int_0^\infty r^{-\imath\lambda} k\left(x', x'', y', y''; \frac{r}{s} \right) \frac{dr}{r} \right) f(y', y'', s) d\sigma(y') dy''.$$

В интеграле по $r \in (0, \infty)$ сделаем замену переменной $r = st$, где t меняется на $(0, \infty)$. Это дает

$$\mathcal{M}_{r \mapsto \lambda} M_S f(x', x'', r) =$$

$$= \int_0^\infty s^{-\imath\lambda} \frac{ds}{s} \int_{X' \times X_{s''}} \left(\int_0^\infty t^{-\imath\lambda} k(x', x'', y', y''; t) \frac{dt}{t} \right) f(y', y'', s) d\sigma(y') dy'' =$$

$$= \int_{X' \times X_{s''}} \mathcal{M}_{t \mapsto \lambda} k(x', x'', y', y''; t) \mathcal{M}_{s \mapsto \lambda} f(y', y'', s) d\sigma(y') dy''$$

для $x' \in X'$, $x'' \in X''_s$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Отсюда получаем, что

$$M_S f(r) = \mathcal{M}^{-1}_{\lambda \mapsto r} a(\lambda) \mathcal{M}_{r' \mapsto \lambda} f(r'),$$

$f(r) := f(x', x'', r)$ понимается как функция от $r \in (0, \infty)$ со значениями в функциях от $(x', x'') \in X' \times X''_s$, а $a(\lambda)$ есть семейство особых интегральных операторов на $X' \times X''_s$, параметризованное по λ, изменяющимся на горизонтальной прямой в комплексной плоскости. Действие $a(\lambda)$ определяется интегралом

$$a(\lambda) f(x', x'', t) = \int_{X' \times X''_t} \mathcal{M}_{t \mapsto \lambda} k(x', x'', y', y''; t) f(y', y'', t) d\sigma(y') dy''.$$

Семейство $a(\lambda)$ называется обычно конормальным символом псевдодифференциального оператора, основанном на преобразовании Меллина. Для точного его вычисления обозначим через Z единственный корень уравнения

$$\langle y' - tx', y' - tx' \rangle + \langle y'' - tx'', y'' - tx'' \rangle + (1-t)^2 = 0,$$

лежащий в верхней полуплоскости, т. е.

$$Z = \frac{1 + \langle x', y' \rangle + \langle x'', y'' \rangle\rangle}{1 + |x'|^2 + |x''|^2} +$$

$$+ \frac{\imath\sqrt{|y' - x'|^2 + |x'' - y''|^2 + (|x'|^2 + |x''|^2)(|y'|^2 + |y''|^2) - (\langle x', y' \rangle + \langle x'', y'' \rangle)^2}}{1 + |x'|^2 + |x''|^2}.$$

Теорема 25. *Для* $|\gamma| < n - \dfrac{1}{2}$ *особый интеграл Бохнера-Мартинелли допускает представление*

$$M_S f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\{\operatorname{Im}\lambda = (n-1/2) - \gamma\}} r^{\imath\lambda} a(\lambda) \mathcal{M}_{r' \mapsto \lambda} f(r') d\lambda.$$

Для областей с коническими особыми точками данное утверждение доказано в работе А.Кытманова и С.Мысливец.

В шестом параграфе пятой главы дано асимптотическое разложение конормального символа.

Пусть

$$A=\frac{1}{\sigma_{2n}}\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y')),(y',1)\rangle+\frac{\imath}{\sigma_{2n}}\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y')),(\tilde{\mu}(x',x'',y',y'',0)\rangle,$$
$$B=-\frac{1}{\sigma_{2n}}\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y')),(x',1)\rangle+\frac{\imath}{\sigma_{2n}}\langle(\nu(y'),\nu_{p+2}(y')),\tilde{\mu}_t'(x',x'',y',y'',0)\rangle.$$

Теорема 26. *Функция* $\mathcal{M}_{t\mapsto\lambda}k(x',x'',y',y'';t)$ *допускает асимптотическое разложение*

$$\mathcal{M}_{t\mapsto\lambda}k(x',x'',y',y'';t)=\pi\cdot\frac{(i\lambda+1)\dots(i\lambda+2n-2)}{(2n-1)!}\cdot\frac{\exp\pi\lambda}{\sinh\pi\lambda}\times$$
$$\times\frac{((i\lambda+2n-1)\operatorname{Im}A-i\lambda\operatorname{Re}Z\operatorname{Im}B)Z^{-i\lambda-2n}}{(1+|x|^2)^n}+$$
$$+O(\operatorname{Im}Z)$$

при $\operatorname{Im}Z\to 0$.

Кроме того,

$$\mathcal{M}_{t\mapsto\lambda}k(x',x'',y',y'';t)=\frac{i\pi}{2(2n-1)!}\frac{\exp\pi\lambda}{(1+|x|^2)^n\sinh\pi\lambda}\times$$
$$\times\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(i\lambda+1)\cdots(i\lambda+2n+s-2)(Z-\overline{Z})^s}{s!(s+n)\cdots(s+2n-1)}\times$$
$$\times\Big((-1)^{s+1}\overline{Z}^{-i\lambda-2n-s}(i\lambda B\overline{Z}+A(i\lambda+2n+s-1))-\overline{Z}^{-i\lambda-2n-s}(i\lambda BZ+A(i\lambda+2n+s-1))\Big).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена аналитическому продолжению функций в многомерном комплексном пространстве и исследованию особых интегралов.

1. Исследован интеграл типа Бохнера-Мартинелли в ограниченных областях с кусочно-гладкой границей.

2. Доказаны теоремы о скачке интеграла типа Бохнера-Мартинелли, показана голоморфность функций, выражаемых таким интегралом.

3. Доказаны теоремы о перестановке повторного интеграла Хенкина-Рамиреза.

4. Теоремы о скачке интеграла типа Бохнера-Мартинелли применены к задачам голоморфного продолжения функций.

5. Получены формулы перестановки особого повторного интеграла Хенкина-Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях для главных значений по Коши и по Керзману-Стейну.

6. Полностью исследован интеграл Бохнера-Мартинелли в областях, граница которых содержит конические ребра.

7. Доказаны аналоги теорем о голоморфном продолжении функции в областях, граница которых содержит конические ребра, а также аналоги теорем Гартогса-Бохнера о голоморфном продолжении.

8. Найдены аналоги теоремы Привалова в ограниченных областях с границей, содержащей конические ребра и формулы Сохоцкого-Племеля.

9. Показана голоморфность функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей и границей, содержащей конические ребра Гартогса-Бохнера и Айзенберга-Кытманова.

10. Вычислен конормальный символ оператора Бохнера-Мартинелли в алгебре операторов и рассмотрен его асимптотическое разложение, порожденной интегралом Бохнера-Мартинелли в областях с сингулярными ребрами.

Результаты, полученные в процессе исследования, рекомендуются к применению к задачам теории интегральных представлений в многомерном комплексном анализе, в частности, в обобщении теорем о голоморфном продолжении функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли, в построении областей дилатансии в насыщенных жидкостью пористого полупространства, в описании алгебры сингулярных интегральных операторов на гиперповерхностях с коническими ребрами, в решении граничных задач математической физики.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM/T.34.01 AT PHYSICOTECHNICAL INSTITUTE, INSTITUTE OF ION-PLASMA AND LASER TECHNOLOGIES, SAMARKAND STATE UNIVERSITY

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

DJUMABAEV DAVLATBAY KHALILLAEVICH

ANALYTIC CONTINUATION OF FUNCTIONS AND STUDY OF SPECIAL INTEGRALS IN DOMAINS WITH SINGULAR BOUNDARIES

01.01.01 – mathematical analysis

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2017

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.1.DSc./FM1

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific council (http://fti-kengash.uz/) and on Information and educational portal "ZiyoNet" (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific consultant:	**Khudoyberganov Gulmirza** doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Kytmanov Aleksandr Mechislavovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor Siberian Federal University (Russia)
	Shaimkulov Bakhodir Allaberdievich doctor of physical and mathematical sciences
	Imomkulov Sevdiyor Akramovich doctor of physical and mathematical sciences
Leading organization:	**Urgench State University**

Defense will take place «____» _____________2017 at _____ at the meeting of Scientific council number DSc.27.06.2017.FM/T.34.01 at Physicotechnical Institute, Institute of Ion-Plasma and Laser Technologies, Samarkand State University (Address: 100084, Uzbekistan, Tashkent city, 2b, Bodomzor yoli str., Phone: (99871) 235-42-91, e-mail: lutp@uzsci.net, Meeting Room of Physicotechnical Institute).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at Physicotechnical Institute (is registered №______) (Address: 100084, Uzbekistan, Tashkent city, 2b, Bodomzor yoli str., Phone: (99871) 235-42-91.

Abstract of dissertation sent out on «___» _________ 2017.

(mailing report № ______ on «___» _________ 2017).

S.L.Lutpullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

A.V.Karimov
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

A.S.Sadullaev
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic. An integral representation is a powerful constructive tool in the multidimensional complex analysis that has different and important applications. Therefore development of researches on integral representations in multidimensional complex analysis and their application is one of the important problems.

The aim of research work is investigation of the state of the Bochner-Martinelli integral on the boundary in domains with the piecewise smooth boundary and in domains with the singular boundary, and application of the obtained results to the problems of the holomorphic continuation of functions.

Tasks of research work is obtaining results connected with the holomorphic continuation of a function from the boundary of a bounded domain with the piecewise smooth boundary into the domain and studying the problem of the holomorphic continuation of functions from closed hypersurfaces with conical edges.

The object of the research work is various singular integral operators in a multidimensional complex space in bounded domains with singular boundaries.

Scientific novelty of the research work is as follows:

Theorems on the holomorphic continuation are proved, as well as analogs of the Hartogs-Bochner theorems on the holomorphic continuation of functions in bounded domains with piecewise smooth boundaries and with the boundary containing conical edges;

theorems on holomorphy are obtained for functions represented by the Bochner-Martinelli integral in domains with piecewise smooth boundary that reinforce previously known Aizenberg-Kytmanov theorems;

formulas of rearrangement and composition are obtained for the singular Henkin-Ramirez integral operator in strictly pseudoconvex domains;

The outline of the thesis. On basis of the research conducted on the theme of the doctoral dissertation “Analytic continuation of functions and study of special integrals in domains with singular boundaries” provided the following conclusions:

– The Bochner-Martinelli integral is investigated in bounded domains with the piecewise smooth boundary.
– The jump theorems are obtained for the Bochner-Martinelli-type integral, it is proved holomorphy of functions expressed by this integral.
– The rearrangement theorems are obtained for the iterated Henkin-Ramirez integral.
– The jump theorems of the Bochner-Martinelli-type integral are applied to the problems of the holomorphic continuation of functions, as a result a number of theorems are obtained.
– The rearrangement formulas of the singular iterated Henkin-Ramirez integral are obtained in strictly pseudoconvex domains for the Cauchy and Kerzman-Stein principal values. As a corollary, the composition formulas are proved. They are different for different principal values.
– The Bochner-Martinelli integral is investigated in domains, the boundary of which contains conical edges.

- The boundary behavior of this integral is investigated. Analogs of theorems are proved on the holomorphic continuation in these domains as well as analogs of the Hartogs-Bochner theorems on the holomorphic continuation.
- The analog of the Privalov theorem and the Sohotsky-Plemelj formula are obtained in bounded domains with the boundary containing conical edges.
- Theorems on holomorphy of functions represented by the Bochner-Martinelli integral are obtained in domains with the piecewise smooth boundary, reinforcing previously known theorems of Hartogs-Bochner and Aizenberg-Kytmanov.
- It is considered the algebra of operators generated by the Bochner-Martinelli integral in domains with singular edges. The conormal symbol of the Bochner-Martinelli operator is calculated, and its asymptotical decomposition is given.

The results obtained during the research are recommended for application to the problems of theory of representations of multidimensional complex analysis, in particular, to generalize theorems on the holomorphic continuation of functions that can be represented by the Bochner-Martinelli integral, to build the dilatancy domain in the saturated by a liquid porous half-space, to describe the algebra of singular integral operators on hypersurfaces with conical edges, as well as in methods of solving boundary value problems of mathematical physics.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I, Part I)

1. Джумабаев Д.Х. О голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей // Вестник Национального университета Узбекистана. Ташкент,"Университет", 2002. №4, С. 33-40. (01.00.00; №8).

2. Худайберганов Г., Джумабаев Д.Х. Интеграл Бохнера-Мартинелли на сингулярных гиперповерхностях // Узбекский математический журнал, 2011, № 2, 162-173. (01.00.00; №6).

3. Джумабаев Д.Х. Формулы Сохоцского-Племеля для интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с коническими ребрами // Журнал Сибирского Федерального университета. Серия математика и физика. Красноярск 2011. №4(1). С. 77-84. (01.00.00; №59).

4. Джумабаев Д.Х. Аналог теоремы Лупаччиолу в областях с кусочно-гладкой границей // Вестник Национального университета Узбекистана. Ташкент 2011.№1. С. 209-215. (01.00.00; №8).

5. Джумабаев Д.Х. Голоморфное продолжение функций с замкнутых гиперповерхностей с сингулярными ребрами // Известия вузов. Математика. Казань, 2012. №1. С. 12-21. (01.00.00; №22).

6. Джумабаев Д.Х. О конормальном символе сингулярного интегрального оператора Бохнера-Мартинелли в областях с коническими ребрами // Узбекский математический журнал, 2012, № 1, 29-37. (01.00.00; №6).

7. Джумабаев Д.Х. Об алгебре операторов, порожденной сингулярным оператором Бохнера-Мартинелли в облатях с коническими ребрами // Журнал Сибирского Федерального университета. Серия математика и физика. Красноярск 2012. №5(1). С.75-81. (01.00.00; №59).

8. Джумабаев Д.Х. Граничное поведение интеграла Бохнера-Мартинелли для ограниченных областей с сингулярными ребрами // ДАН РУз. 2012. №3, С. 12-15. (01.00.00; №7).

9. D.Kh.Djumabaev. On Asymptotic Expansion of the Conormal Symbol of the Singular Bochner-Martinelli Operator on the Surfaces with Conical Wedges // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and physics Krasnoyarsk 2013. №6(1).С.18-27. (01.00.00; №59).

10. Джумабаев Д.Х. Об аналогах формулы Пуанкаре-Бертрана для особого интеграла Хенкина-Рамиреза // ДАН РУз. 2013. № 1. С. 14-16. (01.00.00; №7).

11. Джумабаев Д.Х. Формулы перестановки особого интеграла Хенкина-Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях // Известия вузов. Математика. Казань, 2014. №6. С.20-32. (01.00.00; №22).535).

12. D.Kh.Djumabaev. Holomorphic continuation of functions in the domains with singular boundaries // American Mathematical Society. Contemporary Mathematics Volume 662, 2016, http://dx.doi.org/10.1090/conm/662/13320, P. 107-115. (40. ResearchGate IF=4.54).

II бўлим (Часть II, Part II)

13. Джумабаев Д.Х. Скачок интеграла Бохнера-Мартинеллив областях с кусочно-гладкой границей // Вопросы математического анализа. Красноярск. КрасГТУ, 2002. Т. 5. С. 7-11.

14. Джумабаев Д.Х. О голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли в областях с кусочно-гладкой границей // Вопросы математического анализа. Сборник научных трудов. Выпуск 6. Красноярск, 2003. С. 85-93.

15. Джумабаев Д.Х. О голоморфном продолжении CR-функций с кусочно-гладкой гиперповерхности // Вопросы математического анализа. Сборник научных трудов. Выпуск 8. Красноярск, 2004. С. 34-50.

16. Джумабаев Д.Х. Теорема о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли от интегрируемых функций в областях с кусочно-гладкой границей // Материалы Республиканской научной конференции "Современные проблемы математики, механики и информационных технологий". Ташкент 2008. С. 81-84

17. Джумабаев Д.Х. Конормальный символ интеграла Бохнера-Мартинелли в областях с коническими ребрами // Материалы международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - Аль-Хорезми 2012".Ташкент-2012, С. 49-52

18. Джумабаев Д.Х. Аналог теоремы Гартогса-Бохнера // Материалы научной конференции "Актуальные вопросы геометрии и её приложения". Ташкент-2014, С. 89-90.

19. Khudaiberganov G., Djumabaev D.Kh. On the of $\bar{\partial}$-normal derivative of Bochner-Martinelli integral // International conference on complex analysis and potential theory. Abstracts. Ukraine, Kiev. 7-12 August 2001. P. 25-26.

20. Джумабаев Д.Х. Теорема о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли // International conference on complex analysis and potential theory. Abstracts. Ukraine, Kiev. 7-12 August 2001. P. 68-69.

21. Джумабаев Д.Х. Граничная теорема Морера в областяхс кусочно-гладкой границей// Многомерный комплексный анализ. Тезисы международной конференции. Красноярск. КрасГУ, 5-10 августа 2002. С. 12-13.

22. Djumabaev D.Kh. About holomorphness of functions, represented in integral of Bochner-Martinelli in domains with piecewise-smooth boundary// II International conference "Science and Technology in XXI century. Abstracts. Tashkent, 2003. P.

23. Djumabaev D.Kh. The analogue Hartogs-Bochner theorem in domain with the singular wedges // Abstracts of the IV Congress of the "Turkic world mathematical society". Baku 2011.P. 80

24. Джумабаев Д.Х. Аналог теоремы Айзенберга-Кытманова// Неклассические уравнения математической физики и их приложения. Тезисы республиканской конференции. Ташкент. 23-25 октября 2014. С. 229-231.

25. Джумабаев Д.Х. Формулы перестановки и композиции для особого интеграла Хенкина-Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях // Современные методы математической физики и их приложения. Тезисы республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. Ташкент. 15-17 октября 2015. С. 28-29.

26. Джумабаев Д.Х. Перестановочность повторного особого интеграла Хенкина-Рамиреза// Актуальные проблемы анализа. Тезисы республиканской научной конференции. Карши. 22-23 апреля 2016. С. 12.

27. Джумабаев Д.Х. Сингулярные гиперповерхности и их поверхностная мера// Modern problems of dynamical systems and their applications. Abstracts of the republican scientific conference with participiation of foreign scientists. May, 1-3, 2017. С. 27-29.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз (резюме) тилларидаги нусхалари “ЎзМУ хабарлари. Вестник НУУз. Acta NUUz” журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилди (04.07.2017 йил).

Босишга рухсат этилди: 05.07.2017 йил
Бичими 60x45 $^{1}/_{8}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 5. Адади: 100. Буюртма: № _____.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.