ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ
НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ХАКИМОВ РУСТАМЖОН МАХМУДОВИЧ

СПИН ҚИЙМАТЛАРИ ТЎПЛАМИ ЧЕКЛИ БЎЛГАН МОДЕЛЛАР УЧУН ЛИМИТ ГИББС ЎЛЧОВЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2017

УДК: 517.98

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ХАКИМОВ РУСТАМЖОН МАХМУДОВИЧ

СПИН ҚИЙМАТЛАРИ ТЎПЛАМИ ЧЕКЛИ БЎЛГАН МОДЕЛЛАР УЧУН ЛИМИТ ГИББС ЎЛЧОВЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2017

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.1.PhD/FM1 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Математика институти ва Наманган давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Лакаев Саидахмат Норжигитович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Рахимов Абдуғофур Абдумажидович физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Қарши давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети, Математика институти ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2017 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2017 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2017 йил «____» ____________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А. Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор,
академик

Ғ.И. Ботиров
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

В.И. Чилин
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш қошидаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида физик ва биологик системаларнинг термодинамик хоссаларини ўрганиш учун олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар натижасида вужудга келадиган муаммоларнинг ечимлари аксарият ҳолларда Гиббс ўлчовлари назарияси масалаларига келтирилади. Классик статистиканинг доимий ҳарорат сақланадиган ва атроф-муҳит билан иссиқлик мувозанатида бўлган системалари учун америкалик олим Дж.У.Гиббс томонидан каноник Гиббс тақсимоти яратилган. Гиббс тақсимотларини ўрганиш фаннинг физика, биология, хизмат кўрсатиш ва маълумотлар назарияси каби йўналишлари ҳамда статистик механиканинг турли моделлари учун фаза алмашишлар назариясининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди, хусусан, статистик физика ва механика масалаларини ўрганишнинг асосий объекти бўлган Гиббс ўлчовлари назариясини ривожлантиришга алоҳида эътибор қаратилди. Ҳар бир Гиббс ўлчовига физик системанинг битта фазаси мос қўйилади ва агар Гиббс ўлчови ягона бўлмаса, у ҳолда фаза алмашиши мавжуд, яъни физик система бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтади. Конфигурациясига қаттиқ чеклашлар қўйилган панжарали системалар ҳамда чекли ва саноқли сондаги спин қийматларга эга бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовларини қуриш ва бундай ўлчовлар тўпламининг структурасини таҳлил қилишда сезиларли натижаларга эришилди.

Ҳозирги кунда жаҳонда физика, статистик механика моделлари учун трансляцион-инвариант, даврий, кучсиз даврий ва бошқа Гиббс ўлчовларини қуриш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни, жумладан, қуйидаги йўналишлардаги илмий изланишларни амалга ошириш муҳим вазифалардан бири ҳисобланади: берилган гамильтониан учун Гиббс ўлчови мавжудлигини аниқлаш; барча бундай ўлчовлар тўпламининг стуктурасини таҳлил қилиш; ҳароратнинг фаза алмашишини таъминловчи критик қийматларини аниқлаш. Юқорида келтирилган илмий-тадқиқотлар йўналишида бажарилаётган илмий изланишлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигини изоҳлайди.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги ва 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Лимит Гиббс ўлчовининг умумий таърифи Р.Л.Добрушин, O.E.Lanford ва D.Ruelle ишларида берилган. Бу тушунчанинг хусусий ҳоли, бундан анча аввал, Н.Н.Боголюбов ва Б.И.Хацет ишларида намоён бўлган. Гиббс ўлчовлари назарияси кўплаб олимларнинг, жумладан, Р.Бэкстер, Х.О.Георги, В.А. Малишов, R.A.Minlos, К.Престон, Д.Рюэль, Я.Г.Синай, M.Baus, C.F.Nejero, G.Gallavotti, F.Bonetto, G.Gentile, Jean Zinn-Justin, Ф.Мухаммедов, Н.Н.Ганиходжаев ва У.А.Розиковларнинг ишларида ёритилган. Лимит Гиббс ўлчовининг мавжудлиги ҳақидаги теорема Р.Л.Добрушин томонидан исботланган. К.Х.Хинин бу теоремани квант майдонлар назариясининг панжарали моделлари учун қўллаган. Фаза алмашишларнинг асосий назарияси С.А.Пирогов, Я.Г.Синай, R.A.Minlos, N.Datta, R.Fernandez, J.Fröhlich, A.C.D.Enter ва M.Zahradnik ишларида ўз аксини топган. Конфигурациясида спин чекланмаган сондаги қийматлар қабул қиладиган моделлар учун Гиббс ўлчовининг мавжудлиги ҳақида теорема J.Lebowith ва E.Presutti томонидан исботланган. HC моделларига бағишланган илмий изланишларни G.R.Brightwell, A.E.Mazel, F.Spitzer, P.Winkler, D.Galvin, J.Kahn, F.Kelly, G.Louth, P.Mitra, K.Ramanan, A.Sengupta, I.Ziedins, Yu.M.Suhov, J.Martin, У.А.Розиков ва бошқа олимларнинг ишларида кўриш мумкин. Панжарали моделларнинг турли синфлари учун Пайерлснинг контур усулига асосланиб лимит Гиббс ўлчовларини анализ қилиш Ф.А.Березин, С.А.Пирогов, Я.Г.Синай, J.Ginibre, A.Grossman, Д.Рюэль, Р.Л.Добрушин, В.Герцик, O.J.Heilmann, E.M.Lieb, M.Cassandro, M.Da Fano, G.Olivereri, Г.Ботиров ва бошқа олимларнинг ишларида намоён бўлган.

Н.Н.Ганиходжаев, У.А.Розиков, F.Wagner, D.Grensing, J.Heide, F.Y.Wu ишларида Поттс модели учун лимит Гиббс ўлчовлари ўрганилган. Илк бор У.А.Розиков ва М.М.Рахматуллаев ишларида кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари тушунчаси киритилган ва Кэли дарахтида Изинг модели учун бундай ўлчовлар мавжудлиги исботланган. Изинг моделининг умумлашган ҳоли бўлган SOS модели учун трансляцион-инвариант ва даврий Гиббс ўлчовларини таҳлил қилиш бўйича Yu.M.Suhov, У.А.Розиков, Ш.А.Шоюсупов ва бошқалар илмий-тадқиқотлар олиб боришган.

Юқоридаги каби кўплаб илмий ишлар бажарилганига қарамасдан, ҳозиргача ҳали бирорта ҳам модель учун лимит Гиббс ўлчовларининг тўла таснифи берилмаганини таъкидлаш жоиз.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институтининг Ф4-ФА-Ф013 «Ноассоциатив ва операторлар алгебралари, динамик системалар, ҳамда уларнинг статистик физика ва популяцион биологияга тадбиқлари» (2012-2016 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Кэли дарахтида спин қийматлари сони чекли бўлган Поттс, Hard-Core (HC) ва SOS моделлари учун лимит Гиббс ўлчовларининг мавжудлигини аниқлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

икки ҳолатли HC модели учун даври икки бўлган кучсиз даврий Гиббс ўлчовларининг мавжудлигини текшириш;

$k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг локализациясини топиш;

Кэли дарахти устида Поттс модели учун даврий (трансляцион-инвариант бўлмаган) Гиббс ўлчовларининг мавжудлигини аниқлаш;

SOS модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлариниинг локализациясини топиш.

Тадқиқотнинг объекти Кэли дарахти устида q-ҳолатли Поттс модели, m-ҳолатли SOS модели, икки ҳолатли HC модели.

Тадқиқотнинг предмети чекли ҳолатли Поттс ва SOS моделлари учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари, Поттс модели учун даврий Гиббс ўлчовлари ҳамда икки ҳолатли HC модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовларидан иборатдир.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида марков тасодифий миқдорлар назариясига ҳамда шу назариянинг реккурент тенгламаларига асосланган усуллардан фойдаланилган. Шунингдек, ўлчовлар назарияси, ночизиқли анализ, чизиқли алгебра, қисқартириб акслантириш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

икки ҳолатли қаттиқ дисклар модели учун даври икки бўлган кучсиз даврий Гиббс ўлчовларининг ягоналик шартлари аниқланган;

$k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида Поттс ва SOS моделлари учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлариниинг локализацияси аниқланган;

агар Поттс модели учун $H - G_k$ группадаги чекли индексли нормал бўлувчи бўлса, у ҳолда барча H-даврий Гиббс ўлчовлари $G_k^{(2)}$-даврий ёки трансляционғинвариант бўлиши исботланган;

иккинчи тартибли Кэли дарахти устида уч ҳолатли антиферромагнит ($J < 0$) Поттс модели учун $\alpha = 0$ да баъзи инвариантларда барча даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант эканлигини исботланган;

$k \geq 2$ тартибли Кэли дарахти устида уч ҳолатли ферромагнит ($J > 0$) Поттс модели учун барча $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант эканлигини кўрсатилган;

иккинчи тартибли Кэли дарахти устида уч ҳолатли Поттс модели учун $\alpha \neq 0$ да инвариантларнинг бирида $G_k^{(2)}$-даврий (трансляцион-инвариант бўлмаган) Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги исботланган;

$k \geq 3$ тартибли Кэли дарахти устида q-ҳолатли ($3 \leq q < k+1$) Поттс модели учун $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари сонининг қуйи чегараси берилган;

$k \geq 3$ тартибли Кэли дарахти устида уч ҳолатли Поттс модели учун инвариантларнинг бирида $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовларининг аниқ сони топилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари Гиббс ўлчовлари ягона бўлмаган моделлар учун параметрларнинг фаза алмашишларни таъминлайдиган аниқ ёки тақрибий қийматларини аниқланганлигидан иборатдир.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Функционал анализ, чизиқли алгебра, марков тасодифий миқдорлар назарияси усулларидан ва Maple дастуридан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти физика ва статистик механиканинг турли моделлари учун фаза алмашишлар мавжудлигини аниқланганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти лимит Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги физик система ҳолатининг ўзгаришини тадқиқ қилиш учун хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида Кэли дарахтида НС модели учун Гиббс ўлчовлари бўйича олинган натижалардан «Centre de Physique Théorique Universités Aix-Marseille et Sud Toulon-Var» маркази олимлари томонидан тўрт ҳолатли НС моделлари учун тоза фазаларни аниқлашда фойдаланилган (Марсель университети Назарий физика марказининг (Франция) 2016 йил 18 октябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланиши комбинаторика ва телекоммуникация масаларини ечиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари, жумладан 3 та халқаро ва 8 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 19 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 8 та мақола, жумладан, 4 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг ҳажми 97 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«HC ва SOS моделлари учун Гиббс ўлчовлари»** деб номланувчи биринчи боби биринчи боби SOS модели учун трансляцион-инвариант ва HC модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовларининг мавжудлик шартларини топтшга бағишланган.

1.1 параграфда зарур таърифлар ва Кэли дарахтининг группавий тасвирининг баъзи маълум натижалари келтирилган. Гиббс ўлчови тушунчаси ва ўлчовни давом эттириш ҳақида Колмогоров теоремаси берилган.

$k \geq 1$ тартибли τ^k Кэли дарахти бу чексиз дарахтдир, яъни ҳар бир учидан $k+1$ та қирра чиқувчи циклсиз графдир.

$\tau^k = (V, L, i)$ ни қарайлик, бунда V тўплам τ^k дарахтнинг учлари тўплами, $L-$унинг қирралари тўплами ва $i-$ҳар бир $l \in L$ қиррага унинг $x, y \in V$ четки нуқталарини мос қўювчи инцидентлик функциясидир. Агар $i(l) = \{x, y\}$ бўлса, у ҳолда x ва y учлар энг яқин қўшнилар дейилади ва $l = \langle x, y \rangle$ каби белгиланади. Кэли дарахтида $x, y \in V$ учлар орасидаги $d(x, y)$ масофа ушбу формула орқали аниқланади

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V \ , \ \langle x_0, x_1 \rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Фиксирланган $x^0 \in V$ учун қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \ V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$
$$L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

$x \in W_n$ учун $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$ тўплам x нинг тўғри авлодлари тўплами дейилади.

$G_k -$ташкил этувчилари мос равишда $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ бўлган $k+1$ та иккинчи тартибли циклик группаларнинг эркин кўпайтмаси бўлсин.

Қуйидаги тасдиқ Н.Н.Ганиходжаевнинг ишида келтирилган.

Тасдиқ 1. $k-$тартибли Кэли дарахтининг V учлар тўплами билан G_k группа ўртасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд.

$A \subseteq V$ тўпламда аниқланган $\sigma_A : x \in A \to \sigma_A(x) \in \Phi = \{0, 1, ..., q\}$ функция конфигурация дейилади. A тўпламда аниқланган барча конфигурациялар тўплами $\Omega_A = \Phi^A$ каби белгиланади. Хусусан, $\Omega = \Omega_V$ ва $\sigma = \sigma_V$.

G_k группанинг G_k^* қисм группасини қарайлик. Агар ихтиёрий $x \in G_k$ ва $y \in G_k^*$ учун $\sigma(yx) = \sigma(x)$ бўлса, у ҳолда $\sigma \in \Omega$ конфигурация G_k^*-даврий дейилади.

Барча силжишларга нисбатан инвариант бўлган конфигурация трансляцион-инвариант дейилади.

$\sigma \in \Omega$ конфигурациянинг энергияси ушбу

$$H(\sigma) = \sum_{\substack{A\subset V: \\ diam(A)\leq r}} I(\sigma_A), \quad (1)$$

гамильтониан орқали берилади, бунда $r \in N$, $diam(A) = \max_{x,y\in A} d(x,y)$ ва $I(\sigma_A): \Omega_A \to R$ – берилган потенциал.

$D^c = V \setminus D$ да φ_{D^c} чегаравий шарт берилган чекли $D \subset V$ соҳа учун шартли гамильтониан қуйидаги

$$H(\sigma_D \mid \varphi_{D^c}) = \sum_{\substack{A\subset V: A\cap D\neq\varnothing \\ diam(A)\leq r}} I(\sigma_A)$$

кўринишга эга, бунда

$$\sigma_A(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ агар } x \in A \bigcap D \\ \varphi(x), \text{ агар } x \in A \bigcap D^c. \end{cases}$$

B – Ω тўпламнинг цилиндрик қисм тўпламларидан ташкил топган σ-алгебра бўлсин.

Ушбу

$$\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V\setminus A}(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ агар } x \in A, \\ \tilde{\sigma}(x), \text{ агар } x \in V \setminus A. \end{cases}$$

конфигурацияни қарайлик.

Таъриф 1. Агар ихтиёрий чекли $A \subset V$ учун ушбу

$$\mu(\sigma_A \mid \tilde{\sigma}_{V\setminus A}) = \frac{e^{-\beta H(\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V\setminus A})}}{Z_{A,\tilde{\sigma}}},$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда μ эҳтимоллик ўлчови **B** σ – алгебрада лимит Гиббс ўлчови дейилади, бунда $H(\sigma)$ (1) формула орқали аниқланган, $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$ – ҳарорат ва

$$Z_{A,\tilde{\sigma}} = \sum_{\varphi\in\Omega_A} e^{-\beta H(\varphi_A \vee \tilde{\sigma}_{V|A})}.$$

Асосий масалалар. Бизни қуйидаги иккита асосий масала қизиқтиради:

1) Берилган гамильтониан учун ҳеч бўлмаганда битта Гиббс ўлчови мавжудлигини аниқлаш.

2) Берилган гамильтонианга мос $\mathcal{G}(H)$ барча Гиббс ўлчовлари тўпламининг структурасини таҳлил қилиш.

$\Phi = \{0,1\}$ ва $\sigma \in \Phi^V$ – конфигурация бўлсин, бунда $\sigma(x) = 1$ эканлиги Кэли дарахтида x учнинг «банд» эканлигини, $\sigma(x) = 0$ эса унинг «вакант» эканлигини билдиради.

Таъриф 2. Агар V (V_n ёки W_n) даги ихтиёрий $\langle x, y\rangle$ учун $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ бажарилса, у ҳолда σ конфигурация жоиз конфигурация дейилади.

Бундай конфигурациялар тўпламини Ω (Ω_{V_n} ва Ω_{W_n}) орқали белгилаймиз. Равшанки, $\Omega \subset \Phi^V$.

НС-моделнинг гамильтониани ушбу

$$H(\sigma)=\begin{cases} J\sum\limits_{x\in V}\sigma(x), & \text{агар } \sigma\in\Omega, \\ +\infty, & \text{агар } \sigma\notin\Omega, \end{cases}$$

формула орқали аниқланади, бунда $J\in R$.

Ҳар қандай жоиз $\sigma_n\in\Omega_{V_n}$ конфигурация учун $\#\sigma_n$ орқали V_n даги бирлар (банд учлар) сонини белгилаймиз:

$$\#\sigma_n=\sum_{x\in V_n}\sigma_n(x),$$

$z:x\mapsto z_x=(z_{0,x},z_{1,x})\in R_+^2$ функция V да берилган вектор функция бўлсин.

$\widehat{G}_k-G_k$ нинг қисм группаси бўлсин.

Таъриф 3. Агар $\forall x\in G_k,\ y\in\widehat{G}_k$ учун $z_{yx}=z_x$ бўлса, у ҳолда $z=\{z_x,x\in G_k\}$ қийматлар мажмуи $\widehat{G}_k$-даврий дейилади.

G_k-даврий қийматлар трансляцион-инвариант дейилади.

Ихтиёрий $x\in G_k$ учун $\{y\in G_k:\langle x,y\rangle\}\setminus S(x)$ тўплам ягона элементга эга, бу элементни $x_\downarrow$ орқали белгилаймиз.

$G_k/\widehat{G}_k=\{H_1,...,H_r\}-$фактор группа бўлсин, бунда $\widehat{G}_k-r\geq 1$ индексли нормал бўлувчи.

Таъриф 4. Агар $x\in H_i,\ x_\downarrow\in H_j$ да $z_x=z_{ij}$ бўлса, у ҳолда $z=\{z_x,x\in G_k\}$ қийматлар мажмуи $\widehat{G}_k$-кучсиз даврий дейилади.

Эслатма 1. Агар z_x нинг қиймати $x_\downarrow$ га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда z кучсиз даврий қийматлар оддий даврий билан устма-уст тушади.

Таъриф 5. $\widehat{G}_k$-(кучсиз) даврий z қийматлар мажмуига мос μ ўлчовни $\widehat{G}_k$-(кучсиз) даврий ўлчов дейилади.

Ю.Сухов ва У.Розиковларнинг ишларидан қуйидаги теорема маълум.

Теорема 1. $\mu^{(n)}(\sigma_n)$ $(n=1,2,\dots)$ эҳтимоллик тақсимотлари кетма-кетлиги мувофиқлашган бўлиши учун $x\in V$ да ушбу

$$z'_x=\prod_{y\in S(x)}\frac{1}{1+\lambda z'_y}, \tag{2}$$

тенглама ўринли бўлиши зарур ва етарли, бунда $z'_x=\dfrac{z_{1,x}}{z_{0,x}}$, $\lambda=e^{J\beta}>0-$ параметр.

Белгилаш киритамиз: $f(z)\equiv f(z,\lambda)=\dfrac{1}{(1+\lambda z)^k}$, $\lambda_{cr}=\dfrac{k^k}{(k-1)^{k+1}}$.

Тасдиқ 2. 1) Агар $\lambda\leq\lambda_{cr}$ бўлса, у ҳолда (2) функционал тенглама ягона $z_x=z^*$ ечимга эга, бунда $z^*>0-$ $z=f(z)$ тенгламанинг ягона ечими.

2) Агар $\lambda > \lambda_{cr}$ бўлса, у ҳолда (2) тенгламанинг ихтиёрий z_x ечими $z_- \le z_x \le z_+$, $\forall x \in V$, тенгсизликни қаноатлантиради, бунда $z_-, z_+ > 0$ қийматлар $z_- = f(f(z_-))$, $z_+ = f(z_-)$ каби аниқланади ёки

$$z_- = \lim_{n\to\infty} f^{(2n-1)}(1), \quad z_+ = \lim_{n\to\infty} f^{(2n)}(1),$$

бунда $f^{(n+1)}(z) = f(f^{(n)}(z)), \quad n = 0,1,2,\ldots$

Хусусан, $(1+\lambda)^{-k} < z_x < 1$, $x \in V$.

1.2 параграф HC модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовларини ўрганишга бағишланган. $\varnothing \ne A \subset N_k = \{1,2,...,k+1\}$ ва $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i\in A} w_x(a_i) -$ жуфт сон$\}-$индекси икки бўлган нормал бўлувчи бўлсин, бунда $w_x(a_i)-$сон $x \in G_k$ сўздаги a_i ҳарф сони. Ю.Сухов ва У.Розиковларнинг ишидан маълум бўлган $(1+\lambda)^{-k} < z_x < 1$, $x \in V$ тенгсизликдан фойдаланиб, қуйидаги теоремалар исботланган.

Теорема 2. Қуйидаги шартлардан бири бажарилсин:

1) $i=1$; 2) $i = \dfrac{k+1}{2}$; 3) $i = k$; 4) $i = k-1$, бунда $i = |A|$.

У ҳолда HC модели учун барча H_A-кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант бўлади.

Теорема 3. HC модели учун $\lambda \in (0, \lambda_{cr}] \cup \left[\dfrac{i-1}{z_- \cdot (k-i+1)}, +\infty\right)$ бўлганда барча H_A-кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант бўлади, бунда z_- ва λ_{cr} лар Тасдиқ 2 да аниқланган.

1.3 параграфда SOS модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари (ТИГЎ) ўрганилган ва уларнинг локализацияси топилган.

Диссертациянинг **«Поттс модели учун Гиббс ўлчовлари»** деб номланувчи иккинчи боби Поттс модели учун Гиббс ўлчовларини ўрганишга бағишланган. Бу модель учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларининг локализацияси берилган.

Спин қийматлари тўплами $\Phi = \{1,2,\ldots,q\}$, $(q \ge 2)$ бўлган моделни қарайлик. У ҳолда V да аниқланган σ конфигурация $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$ функция сифатида аниқланади; барча конфигурациялар тўплами $\Omega = \Phi^V$.

Поттс моделининг гамильтониани ушбу

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x\in V} \delta_{1\sigma(x)},$$

формула ёрдамида аниқланади, бунда $J \in R$, $\alpha \in R-$ташқи магнит майдон, $\langle x,y\rangle-$яқин қўшнилар ва δ_{ij} $-$Кронекер символи:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ агар } i \ne j, \\ 1, \text{ агар } i = j. \end{cases}$$

V_n да μ_n эҳтимоллик ўлчовининг тақсимотини қуйидаги кўринишда аниқлаймиз:

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} \tilde{h}_{\sigma(x),x}\right\}, \qquad (3)$$

бунда $\beta = \dfrac{1}{T}$, $T > 0-$ҳарорат, Z_n^{-1} $-$нормалловчи кўпайтма,

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x,y\rangle\in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x\in V_n} \delta_{1\sigma(x)}$$

ва $\{\tilde{h}_x = (\tilde{h}_{1,x},\ldots,\tilde{h}_{q,x}) \in R^q,\ x\in V\}$ $-$векторлар мажмуи.

Н.Н.Ганиходжаев ва У.А.Розиковларнинг ишидан қуйидаги теорема маълум.

Теорема 4. (3) формула билан берилган $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1,2,\ldots$ эҳтимоллик тақсимотларининг кетма-кетлиги мувофиқлашган бўлиши учун ихтиёрий $x\in V$ да қуйидаги тенглама ўринли бўлиши зарур ва етарли:

$$h_x = \sum_{y\in S(x)} F(h_y,\theta,\alpha), \qquad (4)$$

бунда $F: h = (h_1,\ldots,h_{q-1}) \in R^{q-1} \to F(h,\theta,\alpha) = (F_1,\ldots,F_{q-1}) \in R^{q-1}$ функция ушбу

$$F_i = \alpha\beta\delta_{1i} + \ln \frac{(\theta-1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}$$

кўринишда аниқланади ва $\theta = \exp(J\beta)$, $S(x)$ тўплам x нинг тўғри авлодлари ва $h_x = \left(h_{1,x},\ldots,h_{q-1,x}\right)$:

$$h_{i,x} = \tilde{h}_{i,x} - \tilde{h}_{q,x},\ i = 1,\ldots,q-1.$$

$\alpha = 0$ бўлсин. Поттс модели учун ТИГЎларини қарайлик, яъни ихтиёрий $x\in V$ учун $h_x = h = (h_1,\ldots,h_{q-1}) \in R^{q-1}$. (4) тенгламадан $h = kF(h,\theta)$ га эгамиз, яъни

$$h_i = k\ln\left(\frac{(\theta-1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}\right),\ i = 1,\ldots,q-1. \qquad (5)$$

$z_i = \exp(h_i)$, $i = 1,\ldots,q-1$ белгилаш киритиб, (5) дан ушбу

$$z_i = \left(\frac{(\theta-1)z_i + \sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} z_j}\right)^k,\ i = 1,\ldots,q-1 \qquad (6)$$

тенгламани оламиз.

Маълумки, $J<0$ $(\theta<1)$, $k\geq 1$, $q\geq 2$ бўлганда Поттс модели ягона ТИГЎга эга. $J>0$ бўлган ҳолни кўрамиз.

$I\subset\{1,2,...,q-1\}$ бўлсин. Белгилаш киритамиз:

$$M_I=\{z=(z_1,...,z_{q-1})\in R^{q-1}: i\in I \text{ учун } z_i=1,\ j,k\,\bar{\in}\, I \text{ учун } z_j=z_k\}.$$

Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 5. q ва k нинг ихтиёрий қийматларида (6) тенгламалар системасининг барча ечимлари фақат M_I тўпламларда ётади, бунда $I\subset\{1,2,...,q-1\}$.

2.2 параграфда $\alpha\in R$ ташқи магнит майдонга эга Поттс модели фақат даври иккига тенг даврий Гиббс ўлчовларига эга бўлиши мумкинлиги исботланган. Бундан ташқари, $k\geq 1$ тартибли Кэли дарахтида уч ҳолатли ферромагнит ($J>0$) Поттс модели учун барча $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант бўлиши кўрсатилган.

2.3 параграфда иккинчи тартибли Кэли дарахтида нолга тенг ташқи магнит майдонга эга антиферромагнит ($J<0$) Поттс модели учун баъзи инвариант тўпламларда барча даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант бўлиши исботланган.

Диссертациянинг **«Антиферромагнит Поттс модели учун Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги»** деб номланувчи учинчи боби Поттс модели учун даврий Гиббс ўлчовларининг мавжудлиги масаласига бағишланган.

3.1 параграфда $k=2$ тартибли Кэли дарахтида нолдан фарқли магнит майдонга эга бўлган Поттс модели учун даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд бўладиган шартлар топилган.

Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 6. Поттс модели учун $k=2, q=3, \alpha\neq 0$ бўлганда $I_1=\{z\in R^4: z_2=z_4=1\}$ тўпламда қуйидагилар ўринли ($\lambda=e^{\alpha\beta}$):

1. $\lambda\in(\lambda_1(\theta),\ \lambda_2(\theta))$ ва $\theta\in(0,\ \theta^*)$ бўлганда, бунда $\theta^*=\dfrac{\sqrt{17}-3}{6}$, иккита трансляцион-инвариант бўлмаган $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд.

2. $\lambda=\lambda^*$ ва $\theta=\theta^*$ да битта трансляцион-инвариант бўлмаган $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчови мавжуд.

3. $\lambda>0$ ва $\theta^*<\theta<1$, $\theta>1$ бўлганда барча $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант бўлади. Бу ерда

$$\lambda_1(\theta)=\frac{-3[3\theta^2(\theta+1)^2+12\theta(\theta+1)-4]-(\theta-1)(\theta+2)\sqrt{D_2}}{48\theta^3},$$

$$\lambda_2(\theta)=\frac{-3[3\theta^2(\theta+1)^2+12\theta(\theta+1)-4]+(\theta-1)(\theta+2)\sqrt{D_2}}{48\theta^3},$$

$$\lambda=-\frac{3(\theta^*)^2(\theta^*+1)^2+12\theta^*(\theta^*+1)-4}{16(\theta^*)^3}=\lambda^*,$$

ва $D_2 = (\theta - 1)(\theta + 2)(9\theta^2 + 9\theta - 2)$.

Қуйидаги теорема 3.2 параграфнинг асосий натижасидир.

Теорема 7. $\theta_{cr} = \frac{1}{4}$ $\left(\theta_{cr} = \frac{2}{5}\right)$ бўлсин. У ҳолда Поттс модели учун $k = 3$ $(k = 4)$, $q = 3$, $J < 0$ ва $0 < \theta < \theta_{cr}$ бўлганда I_2 тўпламда камида иккита трансляцион-инвариант бўлмаган $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд.

3.3 параграфда қуйидаги теоремалар исботланган.

Теорема 8. $\theta_{cr} = \frac{k - q + 1}{k + 1} < 1$ бўлсин. У ҳолда Поттс модели учун $k \ge 3$, $3 \le q < k + 1$ ва $0 < \theta < \theta_{cr}$ бўлганда камида

$$2 \cdot \left(2^q - 1 + \sum_{m=1}^{[q/2]} C_q^m C_{q-m}^m\right)$$

та трансляцион-инвариант бўлмаган $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд.

$\theta_{cr} \equiv \theta_{cr} = \frac{k-2}{k+1}$ бўлсин. Қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 9. $k \ge 3$, $q = 3$ ва $J < 0$ бўлсин. У ҳолда I_2 тўпламда Поттс модели учун $0 < \theta < \theta_{cr}$ бўлганда учта $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд. Бунда улардан бири трансляцион-инвариант, қолган иккитаси эса трансляцион-инвариант бўлмаган $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовларидир.

ХУЛОСА

Диссертация иши Кэли дарахтида Поттс, НС, SOS моделлари учун лимит Гиббс ўлчовларининг мавжудлигини аниқлашга бағишланган.

1. Кэли дарахти устида икки ҳолатли НС модели учун даври икки бўлган кучсиз даврий Гиббс ўлчовининг ягоналик шартлари аниқланган.
2. q-ҳолатли Поттс модели ва $m = 2,3,4,5,6$ ҳолатли SOS модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлариниинг локализацияси топилган.
3. $k = 2$ тартибли Кэли дарахти устида уч ҳолатли антиферромагнит ($J < 0$) Поттс модели учун $\alpha = 0$ да баъзи инвариант тўпламларда барча даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант эканлигини исботланган.
4. $k \ge 1$ тартибли Кэли дарахти устида ферромагнит ($J > 0$) Поттс модели учун барча $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант эканлигини кўрсатилган.
5. $k = 2$ тартибли Кэли дарахти устида ташқи магнит майдонга эга бўлган уч ҳолатли антиферромагнит Поттс модели учун инвариант тўпламларнинг бирида трансляцион-инвариант бўлмаган $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд эканлигини исботланган.

6. q-ҳолатли $(3 \le q < k+1)$ Поттс модели учун $k \ge 3$ тартибли Кэли дарахти устида $G_k^{(2)}$-даврий Гиббс ўлчовлари сонининг қуйи чегараси аниқланган.

Тадқиқот жараёнида олинган натижаларни физик системаларнинг термодинамик хоссаларини аниқлашда, комбинаторика ва телекоммуника-ция масалаларини ечишга қўллаш тавсия қилинади.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА,
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАМАНГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ХАКИМОВ РУСТАМЖОН МАХМУДОВИЧ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ С КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ЗНАЧЕНИЙ СПИНА

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2017

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.1.PhD/FM1

Диссертация выполнена в Институте математики и Наманганском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat@nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Лакаев Саидахмат Норжигитович** доктор физико-математических наук, профессор
	Рахимов Абдугофур Абдумажидович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Каршинский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2017 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, института Математики. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2017 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2017 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор, академик

Г.И. Ботиров
Ученый секретарь Научного совета по присуждению
ученых степеней, к.ф.-м.н.

В.И.Чилин
Председатель научного семинара при Научном совете
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Решения проблем, возникающих в результате научно-прикладных исследований при изучении термодинамических свойств физических и биологических систем, проводимых на мировом уровне, в основном приводятся к задачам теории мер Гиббса. Американским ученым Дж.У.Гиббсом для систем, находящихся в тепловом равновесии с окружающей средой, в которой поддерживается постоянная температура, установлено каноническое гиббсовское распределение. Изучение гиббсовских распределений играет важную роль в таких направлениях как физика, биология, теория обслуживания, теория информаций, а также теория фазовых переходов для различных моделей статистической механики.

В нашей стране в годы независимости большое внимание уделяется направлениям, имеющим прикладное значение. В частности, особое внимание было уделено развитию теории мер Гиббса, являющейся основным объектом изучения задач статистической физики и механики. Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы, и если мера Гиббса неединственна, то существует фазовый переход, т.е. физическая система меняет свое состояние. Значительные результаты были достигнуты по построению мер Гиббса и анализу структуры множества таких мер для решетчатых систем с жесткими ограничениями на их конфигурации, а также для моделей с конечным или счетным числом спиновых значений.

В настоящее время в мире важную роль играет построение трансляционно-инвариантных, периодических, слабо периодических и других мер Гиббса для моделей физики и статистической механики. В связи с этим, реализация целевых научных исследований, в следующих направлениях является одной из важных задач: существование меры Гиббса для данного гамильтониана; анализ структуры множества всех таких мер; определение критических значений параметров, обеспечивающих фазовый переход. Научные исследования, проводимые в вышеупомянутых направлениях, подтверждают актуальность темы диссертации.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-916 от 15 июля 2008 года «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий производства» и № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Общее определение предельной меры Гиббса дано в работах Р.Л.Добрушина, O.E.Lanford и Д.Рюэля. Частный случай этого понятия появился гораздо раньше в работе Н.Н.Боголюбова и Б.И.Хацета. Современная теория гиббсовских мер изложена в работах Р.Бэкстера, Х.О.Георги, В.А. Малышова, R.A.Minlos, К.Престона, Д.Рюэля, Я.Г.Синая, M.Baus, C.F.Nejero, G.Gallavotti, F.Bonetto, G.Gentile, Jean Zinn-Justin, Ф.Мухаммедова, Н.Н.Ганиходжаева и У.А.Розикова. Теорема о существования предельной меры Гиббса доказана Р.Л.Добрушином. Пример использования этой теоремы, относящийся к решетчатым моделям квантовой теории поля, был рассмотрен К.Х.Хининым. Основная теория фазовых переходов содержится в работах С.А.Пирогова, Я.Г.Синая, R.A.Minlos, N.Datta, R.Fernandez, J.Fröhlich, A.C.D.Enter и M.Zahradnik. Теоремы существования предельной меры Гиббса для моделей, где конфигурация принимает неограниченные значения, рассматривались также в работе J.Lebowitz и E.Presutti. Научные исследования, посвященные HC моделей можно увидеть в работах G.R.Brightwell, Мазеля, Ф.Спитцера, P.Winkler, D.Galvin, J.Kahn, F.Kelly, G.Louth, P.Mitra, K.Ramanan, A.Sengupta, I.Ziedins , Yu.M.Suhov, J.Martin и У.А.Розикова и других.

Анализ предельных мер Гиббса для различных классов решетчатых моделей, основанный на контурный метод Пайерлса, приведен в работах Ф.А.Березина, С.А.Пирогова, Я.Г.Синая, J.Ginibre, A.Grossman, Д.Рюэля, Р.Л.Добрушина, В.Герцика, O.J.Heilmann и E.M.Lieb, С.А.Пирогова, M.Cassandro, M.Da Fano, G.Olivereri, Г.Ботирова и других.

В работах Н.Н.Ганиходжаева, У.А.Розикова, F.Wagner, D.Grensing, J.Heide, F.Y.Wu изучены предельные меры Гиббса для модели Поттса. Впервые в работах У.А.Розикова и М.М.Рахматуллаева было введено понятие слабо периодической меры Гиббса и доказано существование таких мер для модели Изинга на дереве Кэли. По изучению трансляционно-инвариантных и периодических мер Гиббса для модели SOS, являющейся обобщением модели Изинга, ввели научные исследования Yu.M.Suhov, У.А.Розиков, Ш.А.Шоюсупов и другие.

Отметим, что не смотря на многочисленные работы, ни для одной модели не получено полное описание всех предельных мер Гиббса.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии», Институт математики (2012-2016 гг.).

Целью исследования является определение существования предельных мер Гиббса для моделей Поттса, Hard-Core (HC) и SOS с конечным числом состояний на дереве Кэли.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

проверка существования слабо периодических мер Гиббса с периодом два для HC модели с двумя состояниями;

локализация трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли порядка $k \geq 2$;

определение существования периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли;

локализация трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели SOS.

Объект исследования – модель Поттса с q-состояниями, модель SOS с m-состояниями, НС модель с двумя состояниями на дереве Кэли.

Предмет исследования – трансляционно-инвариантные меры Гиббса для моделей Поттса и SOS с конечным числом состояний, периодические меры Гиббса для модели Поттса, а также слабо периодические меры Гиббса для НС-модели с двумя состояниями.

Методы исследования. В работе используются методы, основанные на теории марковских случайных полей и реккурентных уравнениях этой теории. Также используются методы теории мер, нелинейного анализа, линейной алгебры, сжимающих отображений.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

для модели жесткой сердцевины с двумя состояниями определены условия единственности слабо периодической меры Гиббса с периодом два;

определена локализация трансляционно-инвариантных мер Гиббса для моделей Поттса и SOS на дереве Кэли порядка $k \geq 2$;

доказано, что если $H-$нормальный делитель конечного индекса в группе G_k, то для модели Поттса все H-периодические меры Гиббса являются либо $G_k^{(2)}$-периодическими, либо трансляционно-инвариантными;

на дереве Кэли порядка два для антиферромагнитной модели Поттса ($J<0$) в случае нулевого внешнего поля на некоторых инвариантах доказано, что все периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными;

для ферромагнитной модели Поттса ($J>0$) с тремя состояниями показано трансляционно-инвариантность всех $G_k^{(2)}$-периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка $k \geq 2$;

показано существование $G_k^{(2)}$-периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса для модели Поттса с тремя состояниями и с ненулевым внешним полем на одном из инвариантов на дереве Кэли порядка $k=2$;

дана нижняя граница количества $G_k^{(2)}$-периодических мер Гиббса для модели Поттса с q-состояниями ($3 \leq q < k+1$) на дереве Кэли порядка $k \geq 3$;

дано точное количество $G_k^{(2)}$-периодических мер Гиббса для модели Поттса с тремя состояниями на одном из инвариантов на дереве Кэли порядка $k \geq 3$.

Практические результаты исследования – определение точного или приближенного значения параметра, обеспечивающего существование фазового перехода.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов функционального анализа, теории марковских случайных полей и компьютерной программы Maple, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что определено существование фазовых переходов для различных моделей физики и статистической механики.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что существование предельных мер Гиббса позволяют получить информации об изменении состояния физической системы.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты по мерам Гиббса для HC модели на дереве Кэли были использованы учеными центра «Centre de Physique Théorique Universités Aix-Marseille et Sud Toulon-Var» для определения чистых фаз для HC модели с четырьмя состояниями (Марсельский университет, справка центра Теоретической физики (Франция) от 18 октября 2016 года). Применение этих научных результатов дает возможность решения задач комбинаторики и телекоммуникации.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 3 международных и 8 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 19 научных работ, из них 8 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе из них 4 опубликованы в зарубежных журналах и 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 97 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **«Меры Гиббса для моделей Hard-Core и SOS»** посвящена изучению трансляционно-инвариантных и слабо периодических мер Гиббса для моделей SOS и HC, соответственно.

В параграфе 1.1 приведены основные определения и известные результаты группового представления дерева Кэли. Дано понятие меры Гиббса и теорема Колмогорова о продолжении меры.

Дерево Кэли τ^k порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, то есть граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребро.

Пусть $\tau^k = (V, L, i)$, где V есть множество вершин τ^k, $L-$ множество его ребер и $i-$функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются ближайшими соседями вершины и обозначается $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y),\ x,\ y \in V$ на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такие, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\},\ V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\},$$
$$L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Для $x \in W_n$ обозначим $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$. $S(x)$ называется множеством прямых потомков вершины x.

Пусть $G_k -$свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$, соответственно.

Из работы Н.Н.Ганиходжаева известно следующее

Утверждение 1. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и элементами группы G_k.

Для $A \subseteq V$ конфигурация σ_A на A определяется как функция

$$x \in A \to \sigma_A(x) \in \Phi = \{0, 1, ..., q\}$$

Множество всех конфигураций совпадает с $\Omega_A = \Phi^A$. Обозначим $\Omega = \Omega_V$ и $\sigma = \sigma_V$.

Пусть $G_k^* -$подгруппа группы G_k. Конфигурация $\sigma \in \Omega$ называется G_k^*-периодической, если $\sigma(yx) = \sigma(x)$ для любого $x \in G_k$ и $y \in G_k^*$.

Конфигурация, инвариантная относительно всех сдвигов, называется трансляционно-инвариантной.

Энергия конфигурации $\sigma \in \Omega$ задается с помощью гамильтониана

$$H(\sigma) = \sum_{\substack{A \subset V: \\ diam(A) \leq r}} I(\sigma_A), \qquad (1)$$

где $r \in N$, $diam(A) = \max\limits_{x, y \in A} d(x, y)$ и $I(\sigma_A) : \Omega_A \to R -$данный потенциал.

Для конечной области $D \subset V$ с граничным условием φ_{D^c} данным на его дополнении $D^c = V \setminus D$ условный гамильтониан есть

$$H(\sigma_D \mid \varphi_{D^c}) = \sum_{\substack{A\subset V:A\cap D\neq\varnothing \\ diam(A)\leq r}} I(\sigma_A) \quad ,$$

где

$$\sigma_A(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ если } x\in A\bigcap D \\ \varphi(x), \text{ если } x\in A\bigcap D^c. \end{cases}$$

Пусть **B** $-\sigma$-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω. Обозначим

$$\sigma_A \vee \tilde{\sigma}_{V\setminus A}(x) = \begin{cases} \sigma(x), \text{ если } x\in A, \\ \tilde{\sigma}(x), \text{ если } x\in V\setminus A. \end{cases}$$

Определение 1. Вероятностная мера μ на σ-алгебре **B** называется предельной мерой Гиббса, если для любого конечного $A\subset V$ имеет место

$$\mu(\sigma_A \mid \tilde{\sigma}_{V\setminus A}) = \frac{e^{-\beta H(\sigma_A\vee\tilde{\sigma}_{V\setminus A})}}{Z_{A,\tilde{\sigma}}},$$

где $H(\sigma)$ определена в (1), $\beta=\frac{1}{T}$, $T>0-$температура и

$$Z_{A,\tilde{\sigma}} = \sum_{\varphi\in\Omega_A} e^{-\beta H(\varphi_A\vee\tilde{\sigma}_{V|A})}.$$

Основные задачи. Нас интересуют следующие две основные проблемы:

1. Исследование существования по крайней мере одной меры Гиббса для данного Гамильтониана.

2. Изучение структуры множества всех мер Гиббса, соответствующих данному Гамильтониану.

Пусть $\Phi=\{0,1\}$ и $\sigma\in\Phi^V$ – конфигурация, где $\sigma(x)=1$ означает, что вершина x на дереве Кэли занята, а $\sigma(x)=0$ означает, что она свободна.

Определение 2. Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y)=0$ для любых соседних $\langle x,y\rangle$ из $V(V_n$ или W_n, соответственно).

Множество таких конфигураций обозначим через Ω (Ω_{V_n} и Ω_{W_n}). Ясно, что $\Omega\subset\Phi^V$.

Гамильтониан HC-модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = \begin{cases} J\sum\limits_{x\in V}\sigma(x), \text{ если } \sigma\in\Omega, \\ +\infty, \quad \text{ если } \sigma\notin\Omega, \end{cases}$$

где $J\in R$.

Пусть $z: x\mapsto z_x=(z_{0,x},z_{1,x})\in R_+^2$ есть векторнозначная функция на V.

Пусть $\widehat{G}_k$ – подгруппа группы G_k.

Определение 3. Совокупность величин $z=\{z_x, x\in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$-периодической, если $z_{yx}=z_x$ для $\forall x\in G_k, y\in\widehat{G}_k$.

G_k-периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Для любого $x \in G_k$ множество $\{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$ имеет единственный элемент, который обозначим через $x_{\downarrow}$.

Пусть $G_k / \widehat{G}_k = \{H_1, ..., H_r\}$ – фактор группа, где $\widehat{G}_k$ – нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение 4. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$-слабо периодической, если $z_x = z_{ij}$ при $x \in H_i$, $x_{\downarrow} \in H_j$.

Замечание 1. Заметим, что слабо периодическая совокупность z совпадает с обычной периодической, если значение z_x не зависит от $x_{\downarrow}$.

Определение 5. Мера μ называется $\widehat{G}_k$-(слабо) периодической, если она соответствует $\widehat{G}_k$-(слабо) периодической совокупности величин z.

Из работы Ю.Сухова и У.Розикова известны следующая теорема и утверждение.

Теорема 1. Последовательность вероятностных распределений $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ является согласованной тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее уравнение:

$$z'_x = \prod_{y \in S(x)} \frac{1}{1 + \lambda z'_y}, \tag{2}$$

где $z'_x = \dfrac{z_{1,x}}{z_{0,x}}$, $\lambda = e^{J\beta} > 0$ – параметр.

Обозначим $f(z) \equiv f(z, \lambda) = \dfrac{1}{(1 + \lambda z)^k}$, $\lambda_{cr} = \dfrac{k^k}{(k-1)^{k+1}}$.

Утверждение 2. 1) Если $\lambda \leq \lambda_{cr}$, то функциональное уравнение (2) имеет единственное решение $z_x = z^*$, где $z^* > 0$ единственное решение для $z = f(z)$.

2) Если $\lambda > \lambda_{cr}$, то любое решение z_x функционального уравнения (2) удовлетворяет неравенству $z_- \leq z_x \leq z_+$, $\forall x \in V$, где $z_-, z_+ > 0$ однозначно определены как $z_- = f(f(z_-))$, $z_+ = f(z_-)$ или это эквивалентно тому, что

$$z_- = \lim_{n \to \infty} f^{(2n-1)}(1), \quad z_+ = \lim_{n \to \infty} f^{(2n)}(1),$$

здесь $f^{(n+1)}(z) = f(f^{(n)}(z))$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

В частности, $(1 + \lambda)^{-k} < z_x < 1$, $x \in V$.

Параграф 1.2 посвящен изучению слабо периодических мер Гиббса для НС модели. Пусть $\varnothing \neq A \subset N_k = \{1, 2, ..., k+1\}$ и $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i)$ – четное число$\}$ – соответствующий ему нормальный делитель индекса два, где $w_x(a_i)$ – число букв a_i в слове $x \in G_k$. Используя известную из работы

Ю.Сухова и У.Розикова оценку $(1+\lambda)^{-k} < z_x < 1$, $x \in V$, были доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть выполняется одно из следующих условий:

1) $i=1$; 2) $i=\dfrac{k+1}{2}$; 3) $i=k$; 4) $i=k-1$, где $i=|A|$.

Тогда для НС-модели все H_A-слабо периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

Теорема 3. При $\lambda \in (0,\lambda_{cr}] \cup \left[\dfrac{i-1}{z_- \cdot (k-i+1)}, +\infty\right)$ для НС-модели все H_A-слабо периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными, где z_- и λ_{cr} определены в утверждении 2.

В параграфе 1.3 изучены трансляционно-инвариантные гиббсовские меры (ТИГМ) для модели SOS и получена их локализация.

Вторая глава диссертации, названная **«Меры Гиббса для модели Поттса»** посвящена изучению мер Гиббса для модели Поттса. Дана локализация ТИГМ для модели Поттса.

В параграфе 2.1 приведены необходимые определения и понятия. Кроме того, даны функциональные уравнения, обеспечивающие условие согласованности мер Гиббса в случаях моделей Поттса.

Рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi=\{1,2,\dots,q\}$, $q\geq 2$ и расположены на вершинах дерева. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x\in V \to \sigma(x)\in\Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega=\Phi^V$.

Гамильтониан модели Поттса определяется

$$H(\sigma)=-J\sum_{\langle x,y\rangle\in L}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}-\alpha\sum_{x\in V}\delta_{1\sigma(x)},$$

где $J\in R$, $\alpha\in R$ – внешнее поле и δ_{ij} – символ Кронекера.

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ_n в обьеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n)=Z_n^{-1}\exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n)+\sum_{x\in W_n}\tilde{h}_{\sigma(x),x}\right\}, \qquad (3)$$

где $\beta=\dfrac{1}{T}$, $T>0$ – температура, Z_n^{-1} – нормирующий множитель,

$$H_n(\sigma_n)=-J\sum_{\langle x,y\rangle\in L_n}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}-\alpha\sum_{x\in V_n}\delta_{1\sigma(x)}$$

и $\{\tilde{h}_x=(\tilde{h}_{1,x},\dots,\tilde{h}_{q,x})\in R^q,\ x\in V\}$ – совокупность векторов.

Из работы Н.Н.Ганиходжаева и У.А.Розикова известна следующая

Теорема 4. Последовательность вероятностных распределений $\mu_n(\sigma_n)$, $n=1,2,\dots$ в (3) является согласованной тогда и только тогда, когда для любого $x\in V$ имеет место следующее уравнение:

$$h_x = \sum_{y\in S(x)} F(h_y,\theta,\alpha), \tag{4}$$

где $F: h=(h_1,\ldots,h_{q-1})\in R^{q-1} \to F(h,\theta,\alpha)=(F_1,\ldots,F_{q-1})\in R^{q-1}$ определяется как:

$$F_i = \alpha\beta\delta_{1i} + \ln\frac{(\theta-1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}$$

и $\theta = \exp(J\beta)$, $S(x)$ – множество прямых потомков точки x и $h_x = \left(h_{1,x},\ldots,h_{q-1,x}\right)$ с $h_{i,x} = \tilde{h}_{i,x} - \tilde{h}_{q,x}$, $i=1,\ldots,q-1$.

Пусть $\alpha=0$. В этом параграфе рассмотрим ТИГМ для модели Поттса, т.е. предположим $h_x = h = (h_1,\ldots,h_{q-1})\in R^{q-1}$ для всех $x\in V$. Из уравнения (4) имеем $h = kF(h,\theta)$, т.е.,

$$h_i = k\ln\left(\frac{(\theta-1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}\right),\ i=1,\ldots,q-1. \tag{5}$$

Обозначив $z_i = \exp(h_i)$, $i=1,\ldots,q-1$, из (5) получим

$$z_i = \left(\frac{(\theta-1)z_i + \sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} z_j}\right)^k,\ i=1,\ldots,q-1. \tag{6}$$

Известно, что при $J<0$ $(\theta<1)$, $k\geq 1$, $q\geq 2$ модель Поттса имеет единственную ТИГМ. Мы рассмотрим случай $J>0$.

Пусть $I\subset\{1,2,...,q-1\}$. Введем обозначение:

$$M_I = \{z=(z_1,...,z_{q-1})\in R^{q-1}:\ z_i=1 \ \text{ для } \ i\in I,\ \ z_j = z_k \ \text{ для } \ j,k\in\bar{I}\}.$$

Справелива следующая теорема.

Теорема 5. При любых q и k все решения системы уравнений (6) находятся только на множествах M_I, где $I\subset\{1,2,...,q-1\}$.

В параграфе 2.2 показано, что модель Поттса с внешним полем $\alpha\in R$ имеет только периодические меры Гиббса с периодом два. Кроме того, для ферромагнитной модели Поттса ($J>0$) с тремя состояниями показано, что все $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными на дереве Кэли порядка $k\geq 1$.

В параграфе 2.3 на дереве Кэли порядка два для антиферромагнитной модели Поттса ($J<0$) в случае нулевого внешнего поля на некоторых инвариантах доказано, что все периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

В третьей главе диссертации, названной **«Существование периодических мер Гиббса для антиферромагнитной модели Поттса»**, рассмотрены задачи существования периодических мер Гиббса для модели Поттса.

В параграфе 3.1 найдены условия, при которых модель Поттса с ненулевым внешним полем имеет периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса на дереве Кэли порядка $k=2$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Для модели Поттса в случае $k=2, q=3, \alpha \neq 0$ на множестве $I_1=\{z \in R^4 : z_2=z_4=1\}$ верны следующие утверждения:

1. При $\lambda \in (\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta))$ и $\theta \in (0,\ \theta^*)$, где $\theta^*=\dfrac{\sqrt{17}-3}{6}$, существуют две $G_k^{(2)}$-периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса.

2. При $\lambda=\lambda^*$ и $\theta=\theta^*$ существует одна $G_k^{(2)}$-периодическая (не трансляционно-инвариантная) мера Гиббса.

3. При $\lambda>0$ и $\theta^*<\theta<1,\ \theta>1$ все $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными, где $\lambda=e^{\alpha\beta}$ и

$$\lambda_1(\theta)=\frac{-3[3\theta^2(\theta+1)^2+12\theta(\theta+1)-4]-(\theta-1)(\theta+2)\sqrt{D_2}}{48\theta^3},$$

$$\lambda_2(\theta)=\frac{-3[3\theta^2(\theta+1)^2+12\theta(\theta+1)-4]+(\theta-1)(\theta+2)\sqrt{D_2}}{48\theta^3},$$

$$\lambda=-\frac{3(\theta^*)^2(\theta^*+1)^2+12\theta^*(\theta^*+1)-4}{16(\theta^*)^3}=\lambda^*.$$

Здесь $D_2=(\theta-1)(\theta+2)(9\theta^2+9\theta-2)$.

Основным результатом параграфа 3.2 является следующая теорема.

Теорема 7. Пусть $\theta_{cr}=\dfrac{1}{4}$ $\left(\theta_{cr}=\dfrac{2}{5}\right)$. Тогда для модели Поттса при $k=3$ $(k=4)$, $q=3$, $J<0$ и $0<\theta<\theta_{cr}$ на множестве I_2 существуют не менее двух $G_k^{(2)}$-периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса.

В параграфе 3.3 доказаны следующие теоремы.

Теорема 8. Пусть $\theta_{cr}=\dfrac{k-q+1}{k+1}<1$. Тогда для модели Поттса при $k\geq 3$, $3\leq q<k+1$ и $0<\theta<\theta_{cr}$ существуют не менее

$$2\cdot\left(2^q-1+\sum_{m=1}^{[q/2]}C_q^m C_{q-m}^m\right)$$

$G_k^{(2)}$-периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса.

Пусть $\theta_{cr}\equiv\theta_{cr}=\dfrac{k-2}{k+1}$. Доказана следующая теорема.

Теорема 9. Пусть $k \geq 3$, $q = 3$ и $J < 0$. Тогда для модели Поттса на множестве I_2 при $0 < \theta < \theta_{cr}$ существуют ровно три $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса. При этом одна из них является трансляционно-инвариантной, а две другие $G_k^{(2)}$-периодическими (не трансляционно-инвариантными).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению задачи существования предельных мер Гиббса для моделей Поттса, HC и SOS на дереве Кэли.

1. Определены условия единственности слабо периодических мер Гиббса с периодом два для HC-модели с двумя состояниями.

2. Найдена локализация трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса с q-состояниями и модели SOS с $m = 2,3,4,5,6$ состояниями.

3. Для антиферромагнитной модели Поттса ($J < 0$) доказана трансляционно-инвариантность всех периодических мер Гиббса в случае нулевого внешнего поля на некоторых инвариантах на дереве Кэли порядка два.

4. Показана трансляционно-инвариантность всех $G_k^{(2)}$-периодических мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса ($J > 0$) с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 1$.

5. Доказано существование $G_k^{(2)}$-периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса для модели Поттса с тремя состояниями и с ненулевым внешним полем на одном из инвариантов на дереве Кэли порядка $k = 2$.

6. Определена нижняя граница количества $G_k^{(2)}$-периодических мер Гиббса для модели Поттса с q-состояниями ($3 \leq q < k+1$) на дереве Кэли порядка $k \geq 3$.

Результаты, полученные в процессе исследования, рекомендуется применять в определении термодинамических свойств физических систем, в решении задач комбинаторики и телекоммуникации.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS
NAMANGAN STATE UNIVERSITY

KHAKIMOV RUSTAMJON MAKHMUDOVICH

LIMITING GIBBS MEASURES FOR THE MODELS WITH A FINITE SET OF VALUES OF THE SPIN

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2017

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.1.PhD/FM1 .

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics and Namangan State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Rozikov Utkir Abdulloyevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Lakaev Saidakhmat Norzhigitovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Rakhimov Abdugafur Abdumadjidovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Qarshi State University**

Defense will take place «____» _____________2017 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.01 at National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2017 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2017 year)

A. Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

G.I. Botirov
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

V.I.Chilin
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is the study of translation-invariant limiting Gibbs measures for Potts and SOS models; the study of periodic limiting Gibbs measures for Potts model; the study of weakly periodic limiting Gibbs measures for HC model.

The object of the research work is q-state Potts model, m-state SOS model, two state HC model on Cayley trees.

Scientific novelty of the research work is as follows:

for two state HC model conditions of the uniqueness of weakly two-periodic Gibbs measure are found.

The localization of translation-invariant Gibbs measures for Potts and SOS models is obtained.

For the antiferromagnetic Potts model ($J < 0$) with zero external field on a Cayley tree of order two it is proved that on some invariant sets all periodic Gibbs measures are translation-invariant.

It is shown that all $G_k^{(2)}$-periodic Gibbs measures are translation-invariant for the ferromagnetic Potts model ($J > 0$) on a Cayley tree of order $k \geq 1$.

For three state Potts model with non-zero external field on a Cayley tree of order $k = 2$ the existence of $G_k^{(2)}$-periodic (non translation-invariant) Gibbs measures is proved.

For q-state ($3 \leq q < k+1$) Potts model on a Cayley tree of order $k \geq 3$ a lower bound for number of $G_k^{(2)}$-periodic Gibbs measures is found.

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research are practiced in the following areas:

The results for HC model on a Cayley tree are used by scientists of «Centre de Physique Théorique University of Aix-Marseille et Sud Toulon-Var» for the determination of pure phases for four state HC model (Centre de Physique Théorique, Universités Aix-Marseille et Sud Toulon-Var, French, certificate dated October 18, 2016). The application of these research results makes it possible to solve combinatorial problems and problems in telecommunications.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 97 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙҲАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Хакимов Р.М. О слабо периодических гиббсовских мерах HC-модели на дереве Кэли. // Узб. мат. журнал. –Ташкент, 2012. -№2. -С. 140-146.
2. Розиков У.А., Хакимов Р.М. Условие единственности слабо периодической меры Гиббса для модели жесткой сердцевины. // Теор. и мат. физика, 2012. Том 173, -№ 1. -С. 60-70. (11. Springer. IF=0.831)
3. Розиков У.А., Хакимов Р.М. Периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. // Теор. и мат. физика, 2013. Том 175, -№ 2. -С. 300-312. (11. Springer. IF=0.831)
4. Хакимов Р.М. О существовании периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. // Узб. мат. журнал. –Ташкент, 2014. -№ 3. -С. 134-142. (01.00.00; №6).
5. Хакимов Р.М. Локализация трансляционно-инвариантных мер Гиббса для моделей Поттса и SOS на дереве Кэли. // Теор. и мат. физика, 2014. Том 179, -№ 1. -С. 24-35. (11. Springer. IF=0.831)
6. Khakimov R.M. New periodic Gibbs measures for q-state Potts model on a Cayley tree. // Jour. Sib. Fed. Univ., 2014, 7(3), -p.297-304. (40. ResearchGate. IF=0.23)
7. Хакимов Р.М. Периодические меры Гиббса для модели Поттса с $q-$состояниями на дереве Кэли. // ДАНРУз, – 2014. - № 4. С. 12-16. (01.00.00; №7).
8. Хакимов Р.М., Хайдаров Ф.Х. Модель Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли: периодические меры Гиббса. // Вестник НУУз, 2015. -№ 1. -С. 92-96. (01.00.00; №8).

II бўлим (2 часть; part 2)

9. Хакимов Р.М. Слабо периодические гиббсовские меры для HC-модели. // «Операторные алгебры и смежные проблемы». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2012. – С. 233-235.
10. Хакимов Р.М. Периодические меры Гиббса для модели Поттса с нулевым внешним полем. // «Статистика и ее применения». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2012. – С. 142-147.
11. Хакимов Р.М. Изучение слабопериодических мер Гиббса для HC-модели. // «Актуальные проблемы математического анализа». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ургенч, 2012, Часть 2, – С. 94-96.
12. Хакимов Р.М. Периодические меры Гиббса для модели Поттса с ненулевым внешним полем. // «Актуальные проблемы прикладной

математики и информационных технологий-Аль-Хорезмий 2012». Тез. докл. междунар. конф. – Ташкент, 2012. – С. 126-129.

13. Хакимов Р.М. Периодические меры Гиббса для модели Поттса. Материалы республиканской научной конференции. // «Ёш математикларнинг янги теоремалари-2013». – Наманган, 2013. – С. 180-183.

14. Розиков У.А., Хакимов Р.М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. Материалы республиканской научной конференции. // «Ёш математикларнинг янги теоремалари-2013». – Наманган, 2013. – С. 166-169.

15. Хакимов Р.М. Некоторые периодические меры Гиббса для модели Поттса. // «Проблемы современной топологии и её приложения». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2013. – С. 239-240.

16. Хакимов Р.М. О существовании периодических гиббсовских мер для одной модели. // «Всероссийская конференция по математике и механике». Россия, –Томск, 2013. – С. 242.

17. Хакимов Р.М. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели SOS. // «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2013. – С. 331-333.

18. Хакимов Р.М., Шарипова М.О. О существования новых периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. // «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». Тез. докл. Рес. науч. конф. – Ташкент, 2014. – С. 250-252.

19. Хакимов Р.М. Периодические гиббсовские меры для одной модели. // «Информатика, математика, автоматика». –Сумы, Украина, 2016, – С. 233.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: 06.07.2017 йил
Бичими 60х45 $^{1}/_{8}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 5. Адади: 100. Буюртма: № _____.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.