

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
AL-XORAZMIY NOMLI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Ilm sarchashmalari

Jurnal OAK Rayosatining 2013-yil 30-dekabrdagi 201/3-son qarori bilan fan doktori ilmiy darajasiga talabgorlarning dissertatsiya ishlari ilmiy natijalari yuzasidan 10.00.00. – filologiya fanlari bo'yicha ilmiy maqolalar e'lon qilinishi lozim bo'lgan respublika ilmiy jurnallari ro'yxatiga kiritilgan.

6.2016

научно-методический журнал
Издаётся с 2001 года

Urganch – 2016

"ILM SARCHASHMALARI"

ilmiy-metodik jurnal

Bosh muharrir dotsent Ro'zimboy YO'LDOSHEV

	TAHRIR HAY'ATI:
JURNAL 2001-YILDAN CHIQA BOSHLAGAN	ABDULLAYEV Bahrom, fizika-matematika fanlari doktori, ABDULLAYEV Hamdam, filologiya fanlari doktori, professor, ABDULLAYEV Ikrom, biologiya fanlari nomzodi, dotsent, ANNAMURATOVA Svetlana, pedagogika fanlari doktori, professor, ALEUOV O'serboy, pedagogika fanlari doktori, professor, BERDIMUROTOVA Alima, falsafa fanlari doktori, professor, DADABOYEV Hamidulla, filologiya fanlari doktori, professor, DAVLETOV Sanjarbek, tarix fanlari nomzodi, dotsent (bosh muharrir o'rinbosari), DO'SCHONOV Tangribergan, iqtisod fanlari doktori, professor, ERMATOVA Jamila, filologiya fanlari nomzodi, dotsent, HASANOV Oqnazar, fizika-matematika fanlari doktori, professor, HAJIYEVA Maqsuda, falsafa fanlari doktori,
JURNAL OYDA BIR MARTA NASHR QILINADI	IMOMQULOV Sevdiyor, fizika-matematika fanlari doktori, ISMAILOVA Shamsiya, pedagogika fanlari nomzodi, dotsent, JO'RAYEV Mamatqul, filologiya fanlari doktori, professor, JUMANIYAZOV Maqsud, texnika fanlari doktori, professor, JUMANIYOZOV Otaboy, filologiya fanlari nomzodi, professor, MAHMUDOV Madrahim, tarix fanlari doktori, professor, NAVRUZOV Qurolboy, fizika-matematika fanlari doktori, professor, OLLAMOV Yarash, yuridik fanlari nomzodi, dotsent, OTAMURODOV Sa'dulla, falsafa fanlari doktori, professor, QIDIRNIYOZOV Muhammadsharif, tarix fanlari doktori, professor, QUTLIYEV Uchqun, fizika-matematika fanlari doktori, professor, QURAMBOYEV Karimboy, filologiya fanlari doktori, professor, RO'ZIMBOYEV Safarboy, filologiya fanlari doktori, professor, RO'ZIYEV Erkinboy, pedagogika fanlari doktori, professor, RO'ZMETOV Baxtiyor, iqtisod fanlari doktori, professor, SADULLAYEV Azimboy, fizika-matematika fanlari doktori, akademik, SAGDULLAYEV Anatoliy, tarix fanlari doktori, professor, SALAYEV San'atbek, iqtisod fanlari doktori, professor, SATIPOV G'oipnazar, qishloq xo'jalik fanlari doktori, professor, XODJANIYOZOV Sardor, pedagogika fanlari nomzodi, dotsent (mas'ul kotib), YOQUBOV Jamoliddin, filologiya fanlari doktori, professor, SHUKURLAYEV Qodir, tibbiyot fanlari doktori, professor.

206
6 (109)

MUASSIS: al-Xorazmiy nomli Urganch davlat universiteti. Jurnal O'zbekiston Matbuot va axborot agentligi Xorazm viloyat boshqarmasida 2011-yil 23-dekabrda ro'yxatdan o'tgan. Guvohnoma №13-020.

Moxira Vaisova, Islombek Obidjonov, Alimardon Atamuratov (UrDU)
 α – SUBGARMONIK FUNKSIYALARNING BA'ZI MUHIM XOSSALARI

Annotatsiya. Ushbu maqola kompleks fazolarda garmonik va subgarmonik funksiyalar nazariyasini rivojlantiradigan α – garmonik va α – subgarmonik funksiyalar sinfini o'rganishga bag'irlangan.

Аннотация. Эта статья посвящена изучению класса α – гармонических и α – субгармонических функций в комплексном пространстве которой является расширение класса гармонических и субгармонических функций.

Annotation. This paper is devoted to study class of α – harmonic and α – subharmonic functions which is the extension of class of harmonic and subharmonic functions.

Kalit so'zlar: dd^c – Monj-Amper operatori, α – garmonik funksiyalar, α – subgarmonik funksiyalar.

Ключевые слова: оператор dd^c – Монжа-Ампера, α – гармонические функции, α – субгармонические функции.

Key words: operator dd^c – Monge-Ampere, α – harmonic functions, α – subharmonic functions.

Ma'lumki, garmonik va subgarmonik funksiyalar sinfi funksiyalar nazariyasida muhim o'rin tutib, matematik fizika, geometriya masalalarida ko'p qo'llaniladi. Klassik Dirixle masalasi biror $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada $\Delta u = 0$, $u|_{\partial D} = \varphi$ tenglamaning yechimlari xususida bo'lib, bunday yechimning mavjudligi, yagonaligi, ularning xossalari garmonik analizning asosini tashkil qiladi.

Ma'lumki, $\mathbb{C}^n$ fazoda Laplas operatori $dd^c u$ differensial forma bilan

$$dd^c u \wedge \beta^{n-1} = (n-1)! \Delta u dV \text{ kabi bog'lanishga ega bo'lib, bu yerda}$$

$$\beta = dd^c |z|^2, \quad d = \partial + \bar{\partial}, \quad d^c = \frac{\partial - \bar{\partial}}{4i}. \text{ U holda } \mathbb{C}^n \text{ fazoda subgarmonik}$$

funksiya umumlashgan ma'noda $dd^c u \wedge \beta^{n-1} \geq 0$ tengsizlik bilan ifodalanadi: ya'ni u yuqoridan yarim uzluksiz, $\lim_{w \rightarrow z} u(w) \leq u(z)$ va $\forall \omega \geq 0, \omega \in F^{(0,0)}$ uchun

$$dd^c u \wedge \beta^{n-1}(\omega) = \int u dd^c \omega \wedge \beta^{n-1} \geq 0 \text{ tengsizlik bajarilsa, } u \text{ funksiya}$$

$D \subset \mathbb{C}^n$ sohada subgarmonik bo'ladi, bu yerda

$$F^{(p,p)} = \left\{ \omega \in \mathcal{F}^{(p,p)}(D) \cap C^\infty(D) : \sup p\omega \subset\subset D \right\} - \text{silliqlik va finit differensial formalar fazosi. Keyingi paytlarda standart Keli formasi } \beta = dd^c |z|^2 \text{ o'rniga ixtiyoriy}$$

musbat (1,1) bidarajali α formani olish zaruriyati yuzaga keldi. Bunday holat, jumladan, m – sh funksiyalar sinfini o'rganishda, p – plyurisubgarmonik funksiyalar va kalibrlangan

¹ Абдуллаев Б., Садуллаев А. Теория потенциалов в классе m – субгармонических функций. Труды Математического Института имени В.А.Стеклова, Москва, 2012, №279, с. 166 – 192.

geometriya masalalarida,¹ T – subgarmonik funksiyalarda ko'zga tashlanadi.

Faraz qilaylik, $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada C^2 sinfga tegishli, yopiq $(1,1)$ bidarajali differensial forma berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada berilgan $u(z)$ funksiya:

1) yuqoridan yarim uzluksiz bo'lsa,

2) umumlashgan ma'noda

$$\int dd^c u \wedge \alpha^{n-1} \wedge \omega = \int u \wedge \alpha^{n-1} \wedge dd^c \omega \geq 0, \quad \forall \omega \geq 0, \quad \omega \in F^{(0,0)}$$

bajarilsa, u ga α – subgarmonik funksiya deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, agar $\alpha = dd^c |z|^2$ bo'lsa, biz subgarmonik funksiya ta'rifini olamiz. Biz ushbu maqolada quyidagi hususiy hol uchun α – subgarmonik funksiyalar sinfini o'rganamiz. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ vektor uchun,

$$\varphi(z) = \alpha_1 z_1 \bar{z}_1 + \alpha_2 z_2 \bar{z}_2 + \dots + \alpha_n z_n \bar{z}_n$$

funksiyani olamiz va ushbu formani qaraymiz:

$$\begin{aligned} dd^c \varphi &= \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \varphi = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k = \\ &= \frac{i}{2} (\alpha_1 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \alpha_2 dz_2 \wedge d\bar{z}_2 + \dots + \alpha_n dz_n \wedge d\bar{z}_n). \end{aligned}$$

$\alpha = dd^c \varphi$ deb olsak, u $(1,1)$ bidarajali musbat differensial formani beradi.

D ($D \subset \mathbb{C}^n$) sohada berilgan $u \in C^2$ funksiya uchun quyidagi operatorni qaraymiz:

$$dd^c u \wedge \alpha^{n-1} = dd^c u \wedge (dd^c \varphi)^{n-1} \quad (1)$$

$$(dd^c \varphi)^{n-1} = \left(\frac{i}{2} \right)^{n-1} (n-1)! \sum_{j=1}^n \overset{j}{\underset{\vee}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge \overset{j}{\underset{\vee}{dz_n \wedge d\bar{z}_n}}$$

Bu yerda $\dots$ belgi shu ko'paytmada j -had qatnashmasligini bildiradi.

$$dd^c u = \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k^2 \text{ tengliklardan}$$

¹ Harvey F.R. and Lawson H.B.Jr., An introduction to potential theory in calibrated geometry. Amer. J. Math. 131, 4, 2009, pp. 893–944.

² Садуллаев А. Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium Academic Publishing, Германия, 2012.

$dd^c u \wedge \alpha^{n-1} = (n-1)! \sum_j \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} dV$ ifodaga ega bo'lamiz, bu yerda

$$dV = \left(\frac{i}{2}\right)^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n - \mathbb{R}^{2n}$$

dagi hajm formasi.

Oxirgi tenglikdan ko'rinadiki u funksiya uchun $dd^c u \wedge \alpha^{n-1} = 0$ tenglikni bajarilishi

$$\sum_j \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = 0 \quad (2)$$

tenglikni bajarilishi bilan ekvivalent ekan.

2-ta'rif. (2) tenglikni qanoatlantiruvchi $u \in C^2(D)$ funksiyaga α — garmonik funksiya deyiladi.

α — garmonik funksiyalar sinfi $\alpha - h(D)$ kabi belgilaymiz. $\alpha = dd^c |z|^2$ bo'lgan holda bu o'zimizga ma'lum garmonik funksiyalar sinfiga ega bo'lamiz. α — garmonik funksiyalarning ko'pchilik xossalari garmonik funksiyalarning xossalari kabi bo'lib, biz ularni keltirib o'tirmaymiz.

Ushbu teorema α — garmonik funksiyalarning geometrik xususiyatini ifodalaydi:

1-teorema. Agar $u(z)$ funksiya D sohada α — garmonik bo'lsa, u holda $\forall z^0 \in D$ nuqta va

$$E(z^0, r) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \alpha_1 |z_1 - z_1^0|^2 + \dots + \alpha_n |z_n - z_n^0|^2 = r^2 \right\} \subset \subset D \text{ ellipsoid uchun}$$

$$u(z^0) = \frac{1}{\tilde{V}(r)} \int_{E(z^0, r)} u(\tau) dV(\tau)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\tilde{V}(r)$ — ellipsoid bilan chegaralangan jism hajmi va $dV(\tau)$ — hajm elementi.

Isbot. Umumiylikni buzmadan holda, $z^0 = (0, 0, \dots, 0) \in D$ bo'lsin deb olishimiz mumkin. Teoremaning isboti quyidagi sodda tasdiqdan kelib chiqadi: agar $u \in \alpha - h(D)$ bo'lsa, u holda

$$v(z_1, \dots, z_n) = u \left(\sqrt{\alpha_2 \dots \alpha_n} z_1, \dots, \sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_n} z_j, \dots, \sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}} z_n \right)$$

funksiyaning D sohaning yuqoridagi chiziqli akslantirish natijasida hosil bo'lgan aksi D' da garmonik bo'ladi.

Demak, v garmonik funksiya uchun o'rta qiymat haqidagi teorema¹ asosan, ixtiyoriy $B(0, \rho) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq \rho^2\} \subset \subset D'$ shar uchun

$$v(0) = \frac{1}{V(\rho)} \int_{B(0, \rho)} v(\xi) dV(\xi)$$

Ushbu integralda o'zgaruvchini quyidagicha almashtiramiz:

$$\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_n} \xi_j = \tau_j \Rightarrow d\xi_j = (\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_n})^{-1} d\tau_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

va $\alpha_1 |\tau_1|^2 + \dots + \alpha_n |\tau_n|^2 = \rho^2 \alpha_1 \dots \alpha_n$ tenglikda $r^2 = \rho^2 \alpha_1 \dots \alpha_n$ deb belgilab olamiz

va bundan $\rho = \frac{r}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_n}}$ kelib chiqadi. Ellipsoidning hajmi uchun

$$\tilde{V}(r) = \int_{E(0, r)} dV(\tau) = \int_{B(0, \rho)} (\alpha_1 \dots \alpha_n)^{n-1} dV(\xi) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)^{n-1} V(\rho)$$

munosabat o'rinli bo'lishidan, quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{1}{V(\rho)(\alpha_1 \dots \alpha_n)^{n-1}} \int_{\alpha_1 |\tau_1|^2 + \dots + \alpha_n |\tau_n|^2 \leq r^2} u(\tau_1, \dots, \tau_n) dV(\tau) = \\ &= \frac{1}{\tilde{V}(r)} \int_{\alpha_1 |\tau_1|^2 + \dots + \alpha_n |\tau_n|^2 \leq r^2} u(\tau_1, \dots, \tau_n) dV(\tau). \end{aligned} \quad (3)$$

Shunday qilib, (3) integral ellipsoid bilan chegaralangan soha bo'yicha o'rta qiymatni bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

Shuningdek quyidagi teoremani o'rinli ekanligini ko'rish mumkin.

2-teorema. Agar $u(z)$ funksiya D sohada α -garmonik bo'lsa, u holda $\forall z^0 \in D$ nuqta va

$$E(z^0, r) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \alpha_1 |z_1 - z_1^0|^2 + \dots + \alpha_n |z_n - z_n^0|^2 \leq r^2 \right\} \subset \subset D \text{ ellipsoid uchun}$$

$$u(z^0) = \frac{1}{\sigma_n r^{2n-1}} \int_{\partial E(z^0, r)} u(\xi) d\sigma(\xi)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $d\sigma(\xi)$ — sirt elementi va σ_n — birlik ellipsoidning sirt yuzasi.

Endi α — subgarmonik funksiya ta'rifini beramiz.

3-ta'rif. $D \subset \mathbb{C}^n$ soha berilgan bo'lsin. Ushbu

¹ Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. Москва, "Мир", 1980.

$$\sum_{j=1,n} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \geq 0$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $u \in C^2(D)$ funksiyaga α - subgarmonik funksiya deyiladi.

D sohada α - subgarmonik funksiyalar sinfini $\alpha - sh(D)$ kabi belgilaymiz.

Endi α - subgarmonik funksiya xossalarini ko'rib chiqamiz:

a) α - subgarmonik funksiyaning musbat koeffitsentli chiziqli kombinatsiyasi yana α - subgarmonik funksiya bo'ladi, ya'ni

$$u_k(z) \in \alpha - sh(D), b_k \in R_+ \Rightarrow b_1 u_1(z) + b_2 u_2(z) + \dots + b_m u_m(z) \in \alpha - sh(D)$$

$$k = \overline{1, m}$$

Bu yerda ham subgarmonik funksiyaning xossasi kabi xossa o'rinli.

3-teorema. Agar $u(z)$ funksiya D sohada α - subgarmonik bo'lsa, u holda $\forall z^0 \in D$ nuqta va

$$E(z^0, r) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \alpha_1 |z_1 - z_1^0|^2 + \dots + \alpha_n |z_n - z_n^0|^2 = r^2 \right\} \subset \subset D \text{ ellipsoid uchun}$$

$$u(z^0) \leq \frac{1}{\tilde{V}(r)} \int_{E(z^0, r)} u(\tau) dV(\tau)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\tilde{V}(r)$ - ellipsoid bilan chegaralangan jism hajmi va $dV(\tau)$ - hajm elementi.

Bu o'rta qiymat haqidagi teoremlar yordamida α - subgarmonik funksiyalarning quyidagi xossalarini isboti kelib chiqadi:

b) Chekli sondagi α - subgarmonik funksiyaning maksimumi ham α - subgarmonik funksiya bo'ladi, ya'ni

$$u_1(z), u_2(z), \dots, u_m(z) \in \alpha - sh(D) \Rightarrow \max\{u_1(z), u_2(z), \dots, u_m(z)\} \in \alpha - sh(D);$$

c) monoton kamayuvchi α - subgarmonik funksiyalar ketma-ketligining limiti α - subgarmonik funksiya bo'ladi, ya'ni

$$u_j(z) \in \alpha - sh(D), u_j(z) \geq u_{j+1}(z) \Rightarrow \lim_{j \rightarrow +\infty} u_j(z) \in \alpha - sh(D), j = 1, 2, \dots, n$$

d) tekis yaqinlashuvchi α - subgarmonik funksiyalar ketma-ketligi yana α - subgarmonik funksiya yaqinlashadi, ya'ni

$$u_j(z) \in \alpha - sh(D), u_j(z) \searrow u(z) \Rightarrow u(z) \in \alpha - sh(D), (k = 1, 2, 3, \dots);$$

e) maksimum prinsipi. Agar $u(z) \in \alpha - sh(D)$ funksiya biror $z^0 \in D$ nuqtada o'zining maksimumiga erishsa, ya'ni

$$u(z^0) = \sup_{x \in D} u(x)$$

bo'lsa, u holda $u(z) = \text{const}$ bo'ladi;

k) α - subgarmonik funksiyalar fazosida metrika quyidagi ko'rinishga ega:

$$\rho(z, w) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i |z_i - w_i|^2}$$

$D \subset \mathbb{C}^n$ sohada aniqlangan

$$u : D \rightarrow [-\infty, \infty)$$

funksiya berilgan bo'lsin.

4-ta'rif. Quyidagi ikkita shart o'rinli bo'lsa:

1) $u(z)$ yuqoridan yarim uzluksiz, ya'ni

$$\forall z^0 \in D \text{ uchun } \overline{\lim_{z \rightarrow z^0}} u(z) \leq u(z^0);$$

2) har bir $z^0 \in D$ nuqta uchun shunday $\rho(z^0) > 0$ topiladiki, $\rho \leq \rho(z^0)$ uchun

$$u(z^0) \leq \frac{1}{V(\rho)} \int u(\tau) dV(\tau)$$

$$\alpha_1 |z_1 - z_1^0|^2 + \dots + \alpha_n |z_n - z_n^0|^2 \leq \rho^2$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $u(z)$ funksiya D sohada α - subgarmónik funksiya deyiladi.

α - subgarmonik funksiya va subgarmonik funksiyalarni farqli jihatlarini ko'rsatuvchi misollarni ko'rib o'tamiz.

Misol. $\mathbb{C}^3$ fazoda bizga $\alpha = (2, 1, 2) \in \mathbb{R}_+^3$ vektor berilgan bo'lsin.

$u = -|z_1|^2 + 1,5|z_2|^2 - |z_3|^2$ bu funksiya subgarmonik funksiya emas, lekin α - subgarmonik funksiya bo'ladi.

Haqiqatan ham,

$$\Delta u = 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_3 \partial \bar{z}_3} \right) = 4(-1 + 1,5 - 1) = -2 \leq 0$$

bundan ko'rinib turibdiki, u funksiya subgarmonik funksiya emas ekan, lekin quyidagiga asosan,

$$\sum_{j=1, n} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z_3 \partial \bar{z}_3} = -2 + 6 - 2 = 2 \geq 0$$

ya'ni u α - subgarmonik funksiya ekan.

Анвар Рейимбергенов (ТАТУ УФ)

НОЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ УЧУН ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ЯҚИНЛАШУВЧИ ИТЕРАЦИОН УСУЛЛАР

Аннотация. Ушбу ишда ночизикли тенгламаларни ечиш учун юқори тартибли яқинлашувчи итерацион усуллар ўрганилган. Ньютон усулининг яқинлашувчи тезлаштирувчи усуллар қаралган. Бунинг асосида янги итерацион усуллар таклиф қилинади.

Аннотация. В данной работе изучены итерационные методы высокого порядка сходимости для решения нелинейных уравнений. Рассмотрены приёмы ускорения сходимости метода Ньютона. На этой основе предложены новые итерационные методы.

Annotation. In this paper we study iterative methods of high order convergence for solving nonlinear equations. Considered methods of accelerating the convergence of Newton's me-