МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

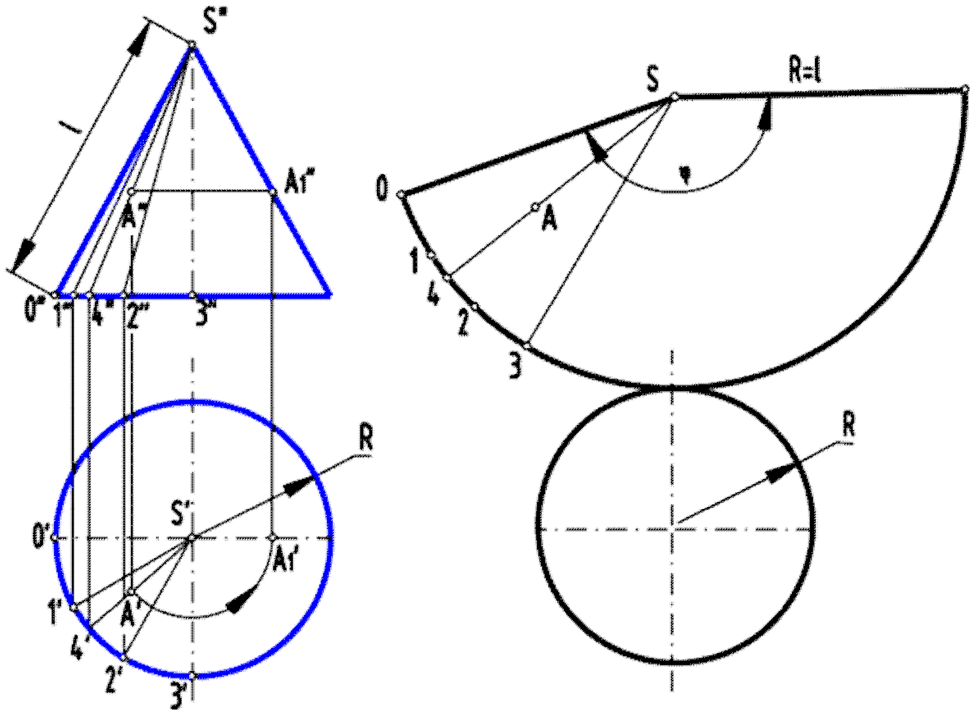
ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ ТЕКСТИЛЬНОЙ И ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

КАФЕДРА НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКИ

КУРС ЛЕКЦИЙ для СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ «АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ПРОИЗВОДСТВА»

ИНЖЕНЕРНАЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

СОСТАВИТЕЛЬ: Ф.А.АБДУРАХИМОВА



ТАШКЕНТ-2017

УДК 514.18.

Ташкентский институт текстильной легкой промышленности. Кафедра: «Начертательной геометрии и инженерной графики».

Составитель: Ф.А.Абдурахимова

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
И.Мамуров , канд. тех.наук., доцент каф. «Информатики и компьютерной графики.» ТИИЖД.
Ж.А.Усмонов, канд.тех.наук. доц.каф. «Начертательной геометрии и инженерной графики»

Утвержден на научно - методическим совете ТИТЛП __
Протокол № _____

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс лекций предназначен для студентов специальностей автоматизация и управление технологических процессов текстильной и легкой промышленности и соответствует программе курса «Инженерная и компьютерная графика», рассчитанного на один семестр.

«Инженерная и компьютерная графика», Данный раздел изучается в первом семестре первого курса. Материал курса разбит на 18 лекций согласно количеству недель в семестре в соответствии с учебными календарными планами. Лекций содержат теоретический материал по разделу «Начертательная геометрия».

Весь материал курса начертательной геометрии изложен в краткой доступной форме и сопровождается большим количеством рисунков и чертежей.

В курсе лекций на каждую лекцию составлен план и в конце лекции заданы вопросы по пройденной теме. В каждой лекции приводятся примеры с описанием решения типовых задач и их выполнения.

По каждой теме составлены задачи для самостоятельного решения.

Начертательная геометрия - это наука о методах построения изображений пространственных форм на плоскости.

Начертательная геометрия и ее методы находят применение в различных областях науки и техники: в машиностроении, архитектуре, строительстве, изобразительном искусстве.

Основным методом проецирования является ортогональное проецирование. Этот метод основан на проецировании пространственного объекта на две взаимно перпендикулярные плоскости лучами, перпендикулярными (ортогональными) к этим плоскостям.

Эти проекции дают возможность получить наглядные изображения инженерных сооружений, которые наиболее точно передают реальное зрительное восприятие человека.

ЛЕКЦИЯ № 1

Тема: Введение. Цель изучения предмета начертательной геометрии. Методы проецирования. Центральные, параллельные и ортогональные проецирование и их основные свойства.

План.

1. Цель изучения предмета начертательной геометрии.
2. Методы проецирования.
3. Центральные, параллельные и ортогональные проецирование и их основные свойства.

1.1.Введение. Цель и предмета начертательной геометрии.

В курсе начертательной геометрии изучаются графические законы и правила точного изображения объёмных предметов, имеющих три измерения на плоскости чертежа, имеющей только два измерения.

Ключом для развития технического черчения и неограниченного конструирования явилась, конечно, начертательная геометрия, её метод прямоугольного проецирования на взаимно-перпендикулярные плоскости проекций.

Слово «проецирование» и «проекция» происходят от французских слов «projekter» и «projection», что дословном переводе означает: отображать, изображать, отражать, бросать вперёд.

Поэтому, слово «проекция», в его основном смысле следует рассматривать как слово «изображение».

Курс начертательной геометрии начинается с изучения проецирования геометрической точки, этого простейшего, но важнейшего геометрического элемента, который определяет формы и размеры машины отдельных деталей.

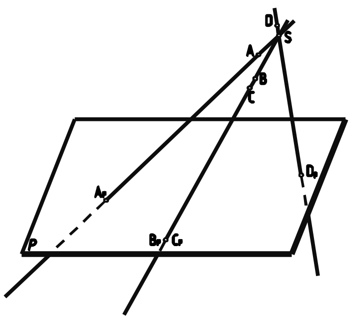
Как убедимся в дальнейшем, форма и размеры любого геометрического тела действительно определяется взаимным расположением в пространстве его характерных точек.

Справедливо утверждение, высказанное более 200 лет тому назад основателем этой науки Гаспаром Монжа, известным французским геометром, инженером и ученым, который развил и разработал методы начертательной геометрии и привел их в стройную научную систему, кто хорошо усвоит проецирование точки, тот не встретит затруднений в изучении всего курса начертательной геометрии.

1.2. Методы проецирования.

В основе правил построения изображений, рассматриваемых в начертательной геометрии и применяемых в техническом черчении, лежит метод проекций (от латинского *projectio* – бросание вперед, вдаль). Изучение его начинают с построении изображения любой пространственной формы объекта рассматривается ряд точек, принадлежащих этой форме.

<ins>1.2.1.Центральные проекции.</ins>

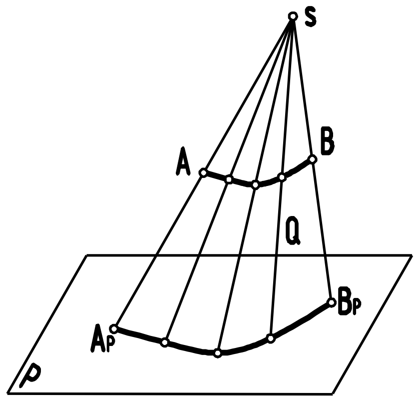


Чертеж 1.1

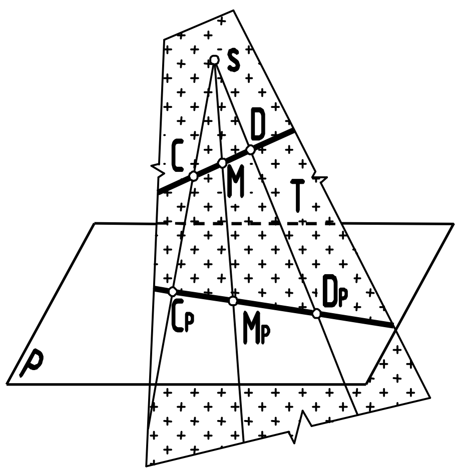
При центральном проецировании (построении центральных проекций) задают плоскость проекций и центр проекций – точку, не лежащую в плоскости проекций. На чертеже

На чертеже 1 центральной проекцией точки **A** является точка $\mathbf{A_p}$ пересечения прямой **SA** с плоскостью **P**. Так же построены центральные проекции $\mathbf{B_P}$, $\mathbf{C_P}$, $\mathbf{D_P}$ точек **B**, **C**, **D** на плоскости **P**.

Прямые, проходящие через центр проекций и проецируемые точки, называют *проецирующими прямыми*. Центральные проекции B_P и C_P двух различных точек B и C в пространстве, которые располагаются на одной проецирующей прямой, совпадают. Все множество точек пространства, принадлежащих одной проецирующей прямой, совпадают. Все множество точек пространства, принадлежащих одной проецирующей прямой, имеет при одном центре проецирования одну центральную проекцию на заданной плоскости проекций.



Чертеж 1.2



Чертеж 1.3

Проекция кривой линии представляет собой линию пересечения проецирующей конической поверхности с плоскостью проекций. На чертеже 2 проецирующая коническая поверхность **Q** пересекается с плоскостью проекций **P** по кривой $\mathbf{A_P B_P}$, являющейся проекцией линии **AB**.

При проецировании прямой линии, не проходящей через центр проекций, проецирующей поверхностью служит плоскость. Так, на чертеже 3 проецирующая плоскость 1 плоскость проекций, точка **S** – центр проекций.

Для проецирования произвольной точки через нее и центр проекций проводят прямую. Точка пересечения этой прямой с плоскостью проекций и является центральной проекцией заданной точки на выбранной плоскости проекций.

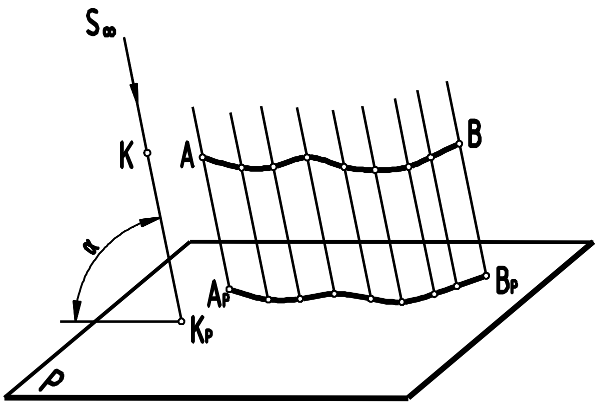
T, образуемая проецирующими прямыми **SC** и **SD**, проходящими через точки **C** и **D** прямой, пересекает плоскость проекций **P** по прямой $\mathbf{C_P D_P}$, которая и является проекцией прямой **CD**. Соответственно проекция $\mathbf{M_P}$ точки **M** прямой **CD** принадлежит и проекции $\mathbf{C_P D_P}$.

Для построения проекций линий, поверхностей или тел часто достаточно построить проекции лишь некоторых характерных точек. Например, при построении на плоскости проекций **P** проекции треугольника **ABC** (чертеж 3) достаточно построить проекции $\mathbf{A_P}$, $\mathbf{B_P}$, $\mathbf{C_P}$ трех его точек – вершин **A**, **B**, **C**.

1.2.2.Параллельные проекции.

Параллельное проецирование (Чертеж 1.4) можно рассматривать как частный случай центрального проецирования, при котором центр проекций удален в бесконечность (**S**∞). *При параллельном проецировании применяют параллельные проецирующие прямые, проведенные в заданном направлении относительно плоскости проекций. Если направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций, то проекции называют прямоугольными или ортогональными, в остальных случаях – косоугольными* (на черт. 1.4 направление проецирования указано стрелкой под углом $\boldsymbol{\alpha \neq 90°}$ к плоскости проекций ***P***).

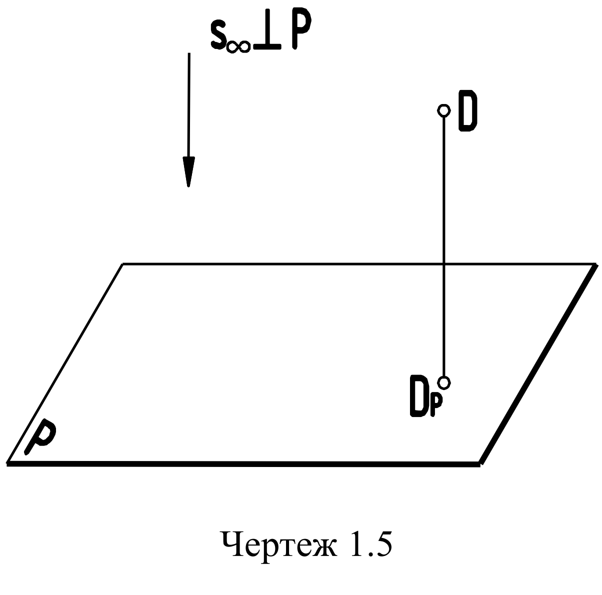
Параллельные проекции, как и центральные при одном центре проекций, также не обеспечивают обратимости чертежа. Параллельные проекции применяют для построения наглядных изображений различных технических устройств и их деталей, например аксонометрических проекций.



Чертеж 1.4

1.2.3. Прямоугольное (ортогональное) проецирование.

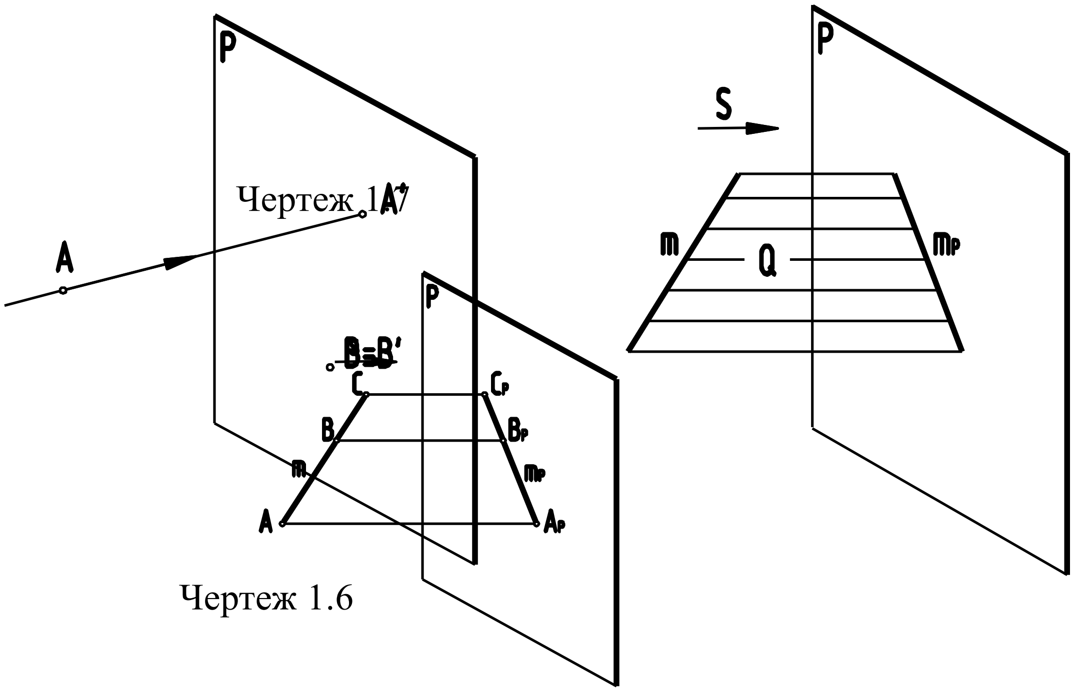
Частный случай параллельного проецирования, при котором направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций, называют прямоугольным или ортогональным проецированием. *Прямоугольной (ортогональной) проекцией точки называют основание перпендикуляра, проведенного из точки на плоскость проекций.* Прямоугольная проекция $\mathbf{D_P}$ точки **D** показана на чертеже 1.5.



Чертеж 1.5

1.3. Свойства проекций.

Проекция точки есть точка. При заданном центре **S** (или направлении **s**) проецирования любой точке **D** пространства соответствует на плоскости проекций **P** единственная точка $\mathbf{D_P}$. При этом проекция точки **B**, лежащей в плоскости проекций, совпадает с самой точкой (чертеж 1.6.).



Чертеж 1.7

Чертеж 1.6

Проекция прямой есть прямая. На чертеже 1.7. лучи , проецирующие прямую *m*, создают плоскость **Q**, которая пересекает плоскость проекций **P** по линии m_P, являющейся проекцией линии m на плоскость **P; m∈Q; Q∩P = $\mathbf{m_P}$**.

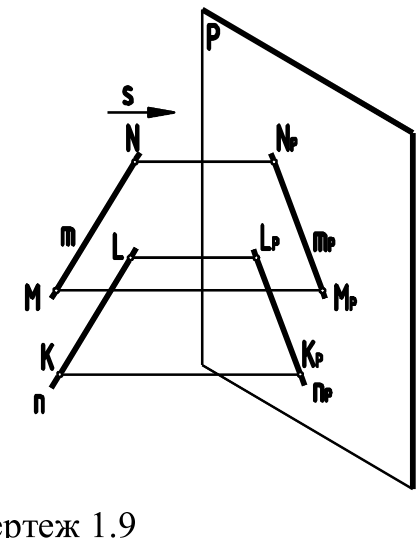
Если в пространстве прямая параллельна плоскости проекций **P**, то ее проекция параллельна самой прямой. При этом при центральном проецировании проекции отрезков пропорциональны самим отрезкам, а при параллельном – равны им.

Чертеж 1.8

При параллельном проецировании сохраняется отношение величин отрезков прямой и их проекций (чертеж 1.9).

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

При параллельном проецировании проекции параллельных прямых есть прямые параллельные (чертеж 1.9).



Чертеж 1.9

Вопросы к лекции №1

1. Какая основная цель изучения предмета начертательной геометрии?
2. Какие существуют методы проецирования?
3. Какая разница между параллельном и центральном проецировании?
4.Перечислите свойства проецирования?

ЛЕКЦИЯ № 2

Тема: Ортогональные проекции точки на чертеже Монжа. Проецирование точек расположенных на разных четвертях пространства. Принадлежность точки плоскостям проекции и осям координат.

План.

1. **Ортогональные проекции точки на чертеже Монжа.**
2. **Проецирование точек расположенных на разных четвертях пространства.**
3. **Принадлежность точки плоскостям проекций и осям координат.**

Пусть три плоскости проекции находятся во взаимно–перпендикулярном положении и образуют прямой трехгранный угол **H**, **V** и **W**.

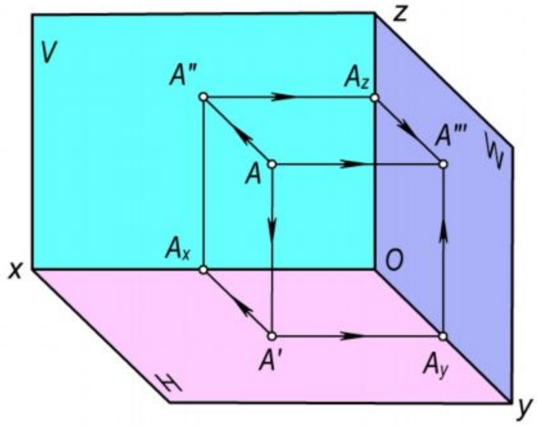
Три плоскости пересекаются по взаимно-перпендикулярным осям *OX*, *OY* и *OZ*, которые называются осями проекции (оси координат), тогда:

H – горизонтальная плоскость проекций определяется горизонтальными осями -продольной *OX* и поперечной *OY*.

V – вертикально-продольная (фронтальная) плоскость проекций осями *OZ* и *OX*.

W - вертикально-поперечная (профильная) – осями *OY* и *OZ*.

O – точка пересечения осей проекций является началом координат пространства, ограниченного трехгранным углом.



Чертеж 2.1.

А – точка, являющаяся одной из характерных точек проецируемого предмета, находящаяся в пространстве.

На чертеже 2 показано проецирование точки А на три плоскости проекций и соответственно ее проекции и координаты, называемые:

АА′, АА″, АА″′ - проецирующие лучи;

А′ - горизонтальная проекция или вид сверху;

А″ - фронтальная проекция или вид спереди;

А″′ - профильная проекция или вид слева;

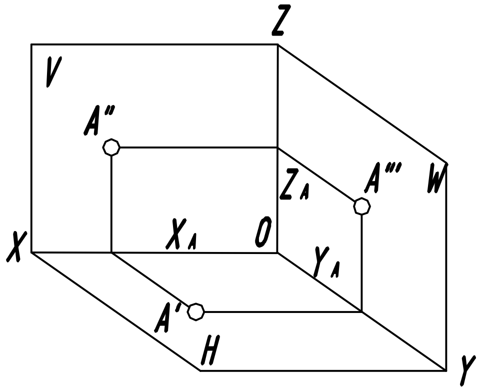
$Z_A = OA_Z$ – аппликата – удаление точки *А* от **Н**;

$Y_A = OA_Y$ – ордината – удаление точки А от V;

$X_A = OA_X$ – абсцисса – удаление точки А от W.

2.2. ОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЧЕРТЕЖА ТОЧКИ

Если на чертеже – 2 уберем пространственное положение точки и лучи ее проецирования, то мы получим пространственный чертеж этой точки в трех проекциях.



Чертеж 2.2.

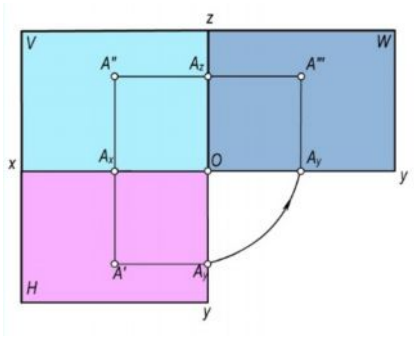
Теперь попробуем мысленно восстановить точку в пространстве по этим проекциям:

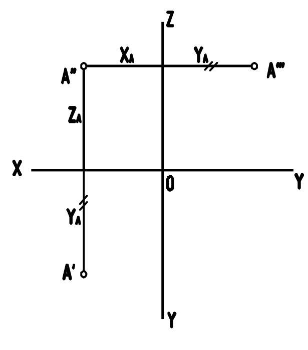
1. Здесь (чертеж 3) изображена пространственная точка А;
2. Она находится в пространстве на расстоянии X_A, Y_A и Z_A от плоскостей проекции, т.е.:
   на Z_A над плоскостью Н;
   на Y_A перед плоскостью V;
   на X_A левее плоскости W.

Этот прием и есть правило чтения чертежа заданной точки.

2.3. ОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОГО ЧЕРТЕЖА (ЭПЮРА) ТОЧКИ

Если чертеж 3 разрежем по оси *OY*, и повернем горизонтальную плоскость проекций **Н**, вокруг оси *OX*, на 90° вниз и профильную плоскость проекций **W**, вокруг оси *OZ*, на 90° вправо, то все три плоскости проекций расположатся в одной плоскости, и если уберем условные границы плоскостей проекций, то получим плоский чертеж, т.е. эпюр точки, тогда чертеж 3 выглядит следующим образом:





Чертеж 2.3

Из чертежа 2.3. видно, что горизонтальная (A') и фронтальная (A") проекции точки A расположены на одной линии связи A', A" перпендикулярно к оси OX, и расстояние между ними равно сумме ординаты и аппликаты, т.е.

$$A'A''\perp OX \text{ и } A'A'' = Y_A+Z_A \qquad (1)$$

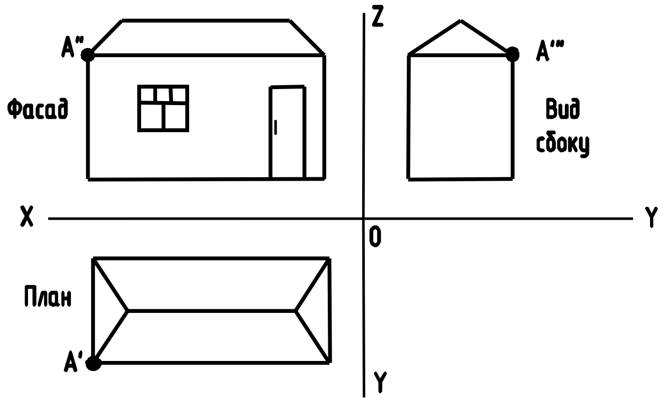
фронтальная (A") и профильная (A"') проекции точки A расположены на одной линии связи A"A"' и перпендикулярной к оси OZ, и расстояние между ними равно сумме абсциссы и ординаты:

$$A''A'''\perp OZ \text{ и } A''A''' = X_A+Y_A \qquad (2)$$

т.е. проекции точки A имеют следующие координаты:

$$A'(X_A,\ Y_A);\ \ A''(X_A,\ Z_A);\ \ A'''(Y_A,\ Z_A); \qquad (3)$$

Формулы (1), (2) и (3) можно назвать основным законом прямоугольного проецирования точки на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций.



Чертеж 2.4.

Это можно увидеть в изображении какой-либо характерной точки A данного здания, (чертеж 2.4.).

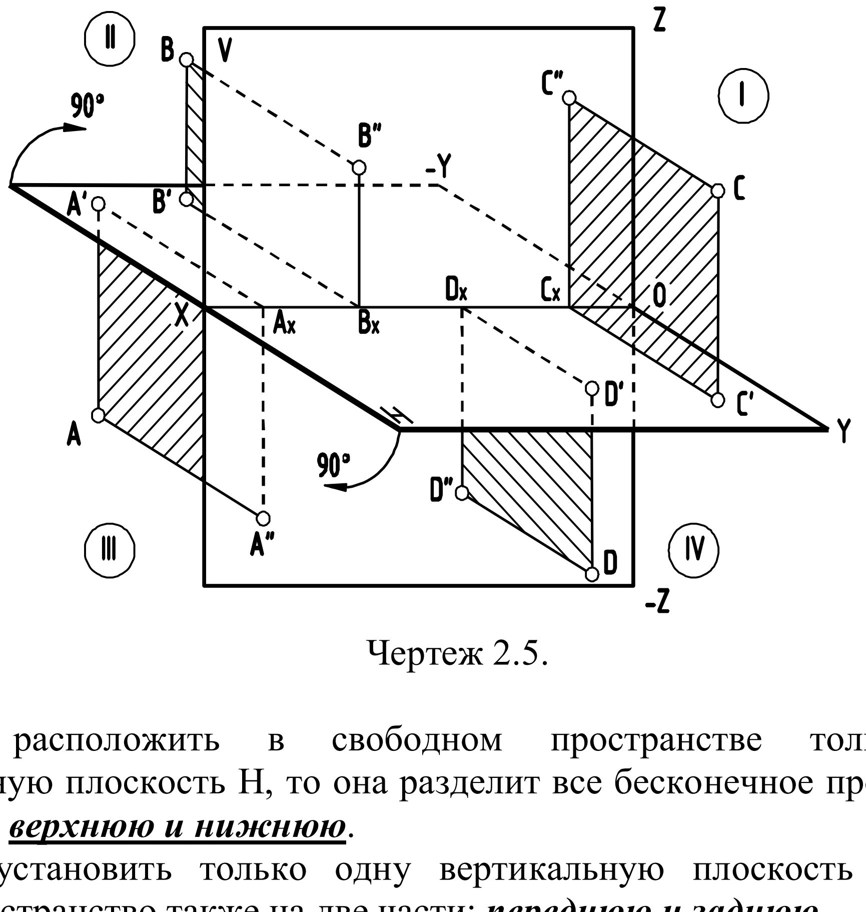
2.4. Проецирование точек расположенных на разных четвертях пространства

Начертательная геометрия является не только теорией изображения объемных тел, с помощью графических методов в прямоугольных проекциях она дает также возможность решать любые пространственные задачи на построения и измерения. При решении многих таких задач появляется отдельные вспомогательные точки, расположенные сзади плоскости V, правее W и под плоскостью H. По существу это означает, что такие точки не уместились в пространства трехгранного угла H, V, W и оказались за его пределами. Тогда практически необходимо было бы начать построение заново, на новом листе бумаги, отодвинув заданные геометрические элементы дальше от плоскостей H, V, W т.е. расположить их на большем удалении от осей проекций X, Y, Z. Но такой выход нельзя признать удовлетворительным, т.к. заранее неизвестно, какие еще дополнительные вспомогательные точки и где они окажутся расположенными.

Действительно, неоднократно начинать построение заново, уничтожая каждый раз проделанную работу, практически невозможно. Отсюда вытекает необходимость научиться изображать на чертеже, в прямоугольных проекциях точки, расположенные в любой части пространства, а не только в области трехгранного угла H, V, W, которая является лишь одной частью пространства.

Восемь трехгранных прямых углов пространства называются октантами (греч. – восемь), чертеж 10. Один из них-перед V , левее W , над H – называется первым октантом и считается основным, т.к. проектируемое изделие располагается всегда в его области. Остальные семь октантов являются вспомогательными. Проецирование точек в октантах является эффективным средством развития пространственного представления, знание октантов облегчает практическое построение наглядных изображений деталей, узлов и сооружений в аксонометрии.

Сначала разберем проецирование точек, расположенных в <u>четырех четвертях</u> пространства, без участия плоскости W, а затем в октантах.



Чертеж 2.5.

Если расположить в свободном пространстве только одну горизонтальную плоскость H, то она разделит все бесконечное пространство на две части: <u>***верхнюю и нижнюю***</u>.

Если установить только одну вертикальную плоскость V, - она разделит пространство также на две части: <u>***переднюю и заднюю***</u>.

Если установить в пространстве эти две плоскости одновременно, во взаимно перпендикулярном положении, то все пространство разделится на <u>***четыре четверти***</u> (чертеж 2.5).

Первая четверть I – перед V, над H
Вторая четверть II – сзади V, над H'
Третья четверть III – под H', сзади V'
Четвертая четверть IV – под H, перед V'

Линия пересечения плоскостей VV_1 и HH_1 есть ось X, на которой показа произвольная точка O, являющаяся началом ограниченного пространства. Задняя ветвь оси Y условно обозначается со знаком минус, также как и нижняя оси Z.

Если точка C находится в I – ой четверти, на любых расстояниях перед V и над H, ее горизонтальная проекция C' будет всегда расположена на полуплоскости H (чертеж 2.5), на соответствующем расстоянии перед осью X, а вертикальная проекция C" – на полуплоскости V, на соответствующем расстоянии над осью X.

Для точки в I – ой четверти аппликата Z и ордината Y всегда со знаком плюс. Также можно сформулировать для точки – B, расположенной во второй четверти, A - в III – четверти и D – в IV – четверти.

Чтобы от пространственного чертежа (чертеж 8) перейти к плоскому необходимо как и прежде, повернуть плоскость H на 90˚ вниз вокруг оси X, до совмещения с плоскостью VV_1, тогда H_1 совместится с V_1, а H_1 с V. На полученном эпюре (чертеж 9) по каждую сторону от оси проекции будут расположены и горизонтальные и фронтальные проекции точек, в зависимости от того, в какой четверти они находятся.

При повороте плоскости H, на 90˚ вниз вокруг оси X (чертеж 8) для образования эпюра (чертеж 9) мы усматриваем, и должны твердо усвоить, следующие геометрические явления:

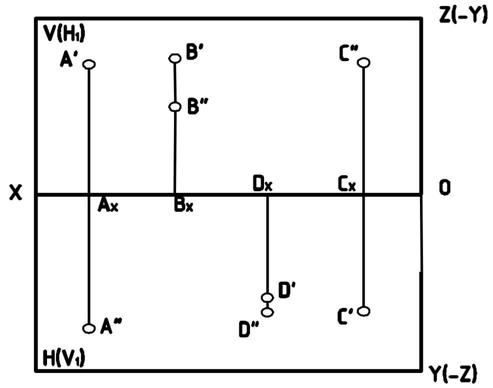
1) H поворачивается на 90˚ вниз, а H_1 90˚ вверх; полуплоскость H совместится с V_1, а H_1 с V.
2) Ось OY совместится с (–OZ), а (–OY) с Z;
3) Проекции точки C, расположенной в I- четверти, окажутся на одном перпендикуляре, по обе стороны оси OX: горизонтальная C', под осью OX на полуплоскости H_1, фронтальная C" над осью OX на полуплоскости V.
4) Проекции точки B, расположенной во II – четверти, также окажутся на одном перпендикуляре к оси OX, но обе над осью: B' на H_1, B" на V .
5) Проекции точки A, расположенной в III – четверти, также окажутся на одном перпендикуляре к оси OX, но по разные от нее стороны. A' над осью OX, на H_1, A" под осью OX, на V_1. проекции точек для III – четверти располагаются напротив I – четверти.
6) Проекции точки D, расположенной в IV – четверти, также окажутся на одном перпендикуляре к оси OX, но обе под осью OX, D' на полуплоскости H, D" на полуплоскости V_1.

Проекции точки для IV – четверти располагается на эпюре напротив II – четверти .

Изложенное выше в пунктах 3, 4, 5, 6 может считаться продолжением основного закона прямоугольного проецирования точки на взаимно-перпендикулярные плоскости проекции, применительно к четвертям пространства.

По эпюру точек (чертеж 2.6), также как по пространственному чертежу (чертеж 2.5), вполне определяется положение самой точки в пространстве.

Необходимо усвоить, что передние четверти, т.е. I и IV имеют положительные ординаты, а задние, т.е. II и III – четверти, имеют отрицательные ординаты; верхние четверти (I и II) имеют положительные аппликаты, а нижние (III и IV) – отрицательные аппликаты.



Чертеж 2.6

1.7. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ТОЧЕК, РАСПОЛОЖЕННЫХ В РАЗНЫХ ОКТАНТАХ

Как уже отмечалось, при решении теоретических задач и построении чертежей машинных деталей и узлов, во многих случаях оказываются необходимыми профильные проекции, т.е. виды сбоку. Поэтому дополним плоскости проекции HH_1 и VV_1 (чертеж 10) профильной плоскостью проекции W, которую продолжим назад и вниз, тогда каждая четверть пространства разделится на две части, левую и правую, и будет содержать по два прямых трехгранных угла. Всего образуется восемь прямых углов (чертеж 2.7), называемых октантами; четыре октанта слева (I, II, II, IV) и четыре справа (V, VI, VII, VIII).

Рассмотрим знаки координат X, Y, Z в каждом из восьми октантов и выпишем их в таблицу. Здесь удобно рассуждать следующим образом: Для левых октантов все абсциссы X положительные, а для правых – отрицательные.

Для передних октантов все ординаты Y положительные, а для задних – отрицательные.

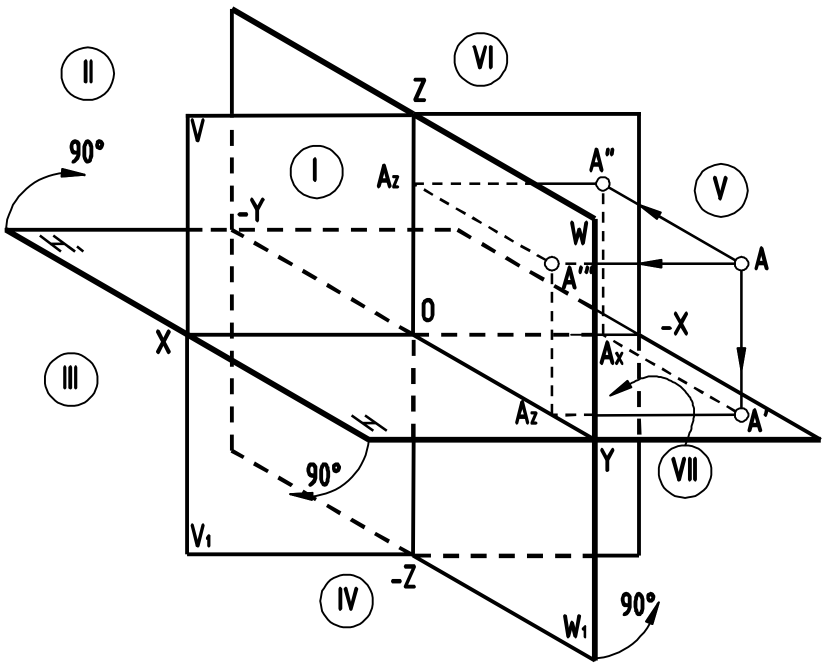
Окт. / Коор.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
X	+	+	+	+	-	-	-	-
Y	+	-	-	+	+	-	-	+
Z	+	+	-	-	+	+	-	-

Для верхних октантов все аппликаты Z положительные, а для нижних –

Таблица 1

Проекции точки, расположенной в любом из 8-ми октантов, строятся обычным образом, по схеме проектирования точки, т.е. методом прямоугольного проецирования.

Пусть, например, точка A находится в V октанте (чертеж 10), её горизонтальная проекция A' неизбежно должна расположится справа на полуплоскости H, фронтальная A'' – справа на полуплоскости V, профильная A''' – спереди на полуплоскости W.



Чертеж 2.7

Чтобы в пространстве V – октанта попасть в эту точку, следует двигаться из начала O, по той же трехзвенной цепи X, Y, Z следующим образом: вправо по оси X, на величину абсциссы (-X), до точки A_X. Затем вперед по плоскости H, на величину ординаты Y ($A_X A'$). Наконец, вверх, по перпендикуляру, на величину аппликаты Z ($A_X A''$). на конце аппликаты Z будет искомая точка A.

На эпюре для октантов, где все три плоскости H,V, W проекций будут совмещены в одну плоскость чертежа, проекции любой точки будем находить с помощью трехзвенной цепи X, Y, Z по которой будем мысленно перемещаться от начала O, соблюдая знаки координат.

Чтобы совместить три плоскости проекций (HH_1,VV_1, WW_1) в одну плоскость чертежа, необходимо полуплоскость H повернуть вокруг оси X вниз на 90˚, а переднюю часть плоскости WW_1 повернуть вокруг оси Z вправо также на 90˚ (чертеж 3). Тогда H_1 совместится с V, а задняя полуплоскость WW_1 с левой частью VV_1, и все три плоскости проекций окажутся совмещенными в одну плоскость. Здесь имеется в виду, что плоскость V задана совмещенной с плоскостью чертежа а разрез модели производится по оси Y, которая смещается в два новых положения: вращаясь с плоскостью WW_1, она совпадает с осью X; вращаясь же с плоскостью HH_1, совпадает с осью Z.

Вопросы к лекции №2

1. **Что обозначает слово ортогональное проецирование?**
2. **Как образуются четверти и октанты?**
3. **аким образом получают пространственный чертёж (эпюру) чертежа.**
4. **Где может распологаться точка кроме пространства и плоскостей проекций.**

ЛЕКЦИЯ № 3

Тема: Ортогональные проекции прямой. Прямые общего и частного положения. Анализ прямой общего положения.

План.

1. **Ортогональные проекции прямой.**
2. **Прямые общего и частного положения.**
3. **Анализ прямой общего положения.**

3.1. Ортогональные проекции прямой.

В зависимости от положения прямой в пространстве относительно плоскостей проекций имеются следующие виды прямых:

Если прямая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, то она называется ***прямой общего положения***.

Если прямая параллельна или перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то считается, что она занимает частное или особое положение в пространстве и ее будем называть ***прямой частного положения***. Всего имеются шесть прямых частного положения.

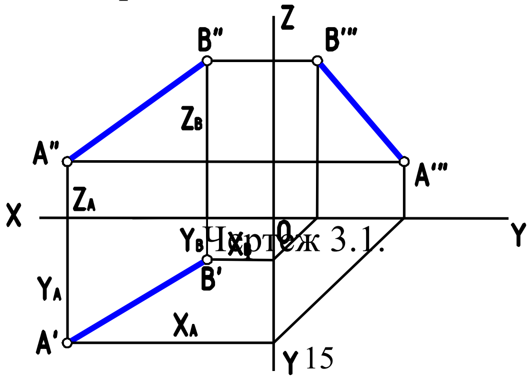
3.2. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Чтобы спроецировать отрезок произвольной прямой общего положения необходимо:

1. Выбрать и спроецировать его конечные точки так, чтобы они имели разные по длине одноименные координаты, т.е.

$$X_A \neq X_B; \quad Y_A \neq Y_B; \quad Z_A \neq Z_B;$$

2. Одноименные проекции этих точек соединить прямой (чертеж 3.1).



Чертеж 3.1.

Проекция отрезка прямой всегда меньше истинной длины, отсюда возникает вопрос, можно ли определить истинную длину отрезка прямой общего положения и углы α, β, γ наклона его к плоскостям проекций H, V и W имея проекций. Оказывается, что с помощью несложных графических построений в проекциях легко определяется истинная длина и углы наклона отрезка.

Для этого рассмотрим на чертеже модели (чертеж 3.2.) проецирования прямой общего положения на плоскости H, V и W и установим зависимости между истинной длиной отрезка, его проекциями и углами наклона.

Чтобы определить величину горизонтальной проекции относительно самого отрезка AB, проводим в его проецирующей плоскости AB, B'A' прямую B1, равную и параллельную A'B'. Из прямоугольного треугольника AB1 имеем:

B1 = A'B' = AB·cosα – т.е. длина проекции отрезка равна самому отрезку, умноженному на cos угла наклона его к плоскости проекции. Проекция отрезка не может быть больше самого отрезка.

Аналогичные зависимости получим для фронтальной и профильной проекций прямой, проведя в проецирующих плоскостях ABB"A" и ABB'"A'", прямые AII AIII, равные и параллельные проекциям A"B" и A'"B'". Действительно, из прямоугольных треугольников ABI, ABII и ABIII имеем:

$A'B' = AB \cdot \cos\alpha$,

при $\alpha = 0$ $A'B' = AB$,

при $\alpha = 90^\circ$ $A'B' = 0$,

при $0 < \alpha < 90^\circ$ $A'B' = AB \cdot \cos\alpha$

$A''B'' = AB \cdot \cos\beta$,

при $\beta = 0$ $A''B'' = AB$,

при $\beta = 90^\circ$ $A''B'' = 0$,

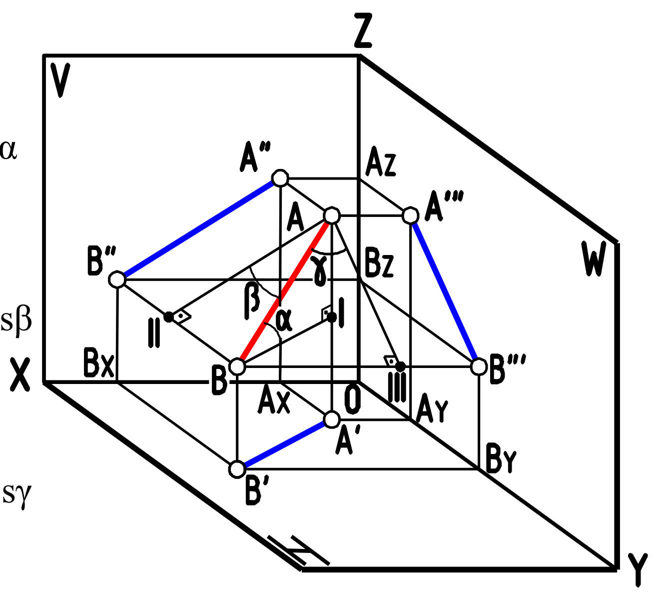
при $0 < \beta < 90^\circ$ $A''B'' = AB \cdot \cos\beta$

$A'''B''' = AB \cdot \cos\gamma$,

при $\gamma = 0$ $A'''B''' = AB$,

при $\gamma = 90^\circ$ $A'''B''' = 0$,

при $0 < \gamma < 90^\circ$ $A'''B''' = AB \cdot \cos\gamma$



Чертеж 3.2.

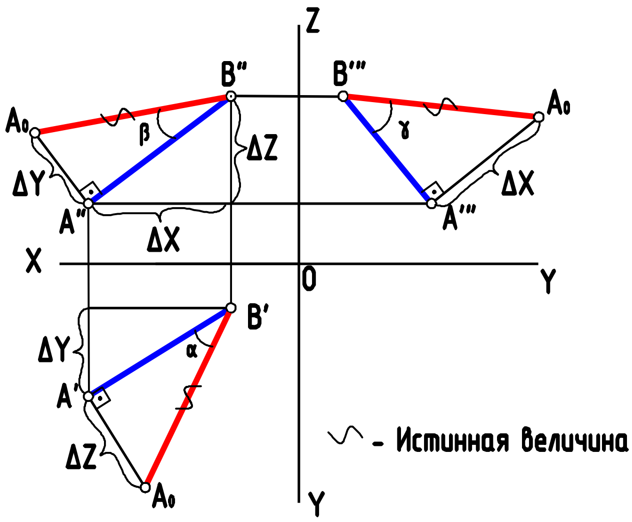
Таким образом:

Истинная длина отрезка прямой общего положения равна гипотенузе прямоуголного треугольника, у которого:

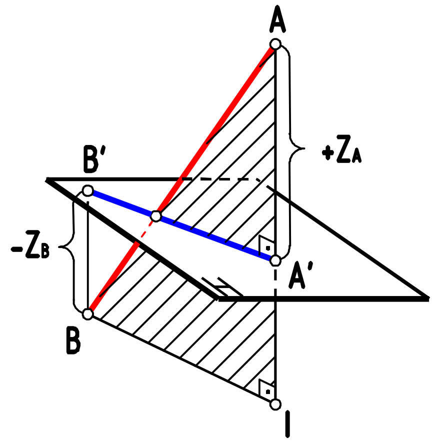
Один катет равен горизонтальной проекции отрезка, а другой-разности аппликат (ΔZ) (чертеж 3.3) или;

Один катет равен фронтальной проекции, а другой-разности ординат (ΔY) или;

Один катет равен профильной проекции, а другой-разности абсцисс (ΔX).



Чертеж 3.3.



$$Z_A - (-Z_B) = Z_A + Z_B$$

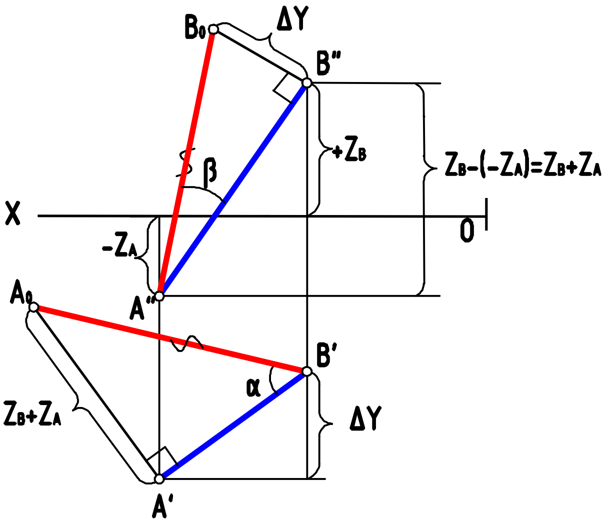
Чертеж 3.4

Примечание: Во всех случаях разность алгебраическая, с учетом знаков одноименных координат (чертеж 3.3).

Пример: Определить истинную длину отрезка АВ, расположенного в I и IV четвертях (чертеж 3.4).

Построение.

Для определения истинной величины отрезка прямой через фронтальную проекцию строим прямоугольный треугольник, одним катетом которого будет сама фронтальная проекция, а другая-разность ординат (ΔY).



Чертеж 3.5

Гипотенуза А"B_0 будет равна истинной длине отрезка прямой.Если будем определить через горизонтальную проекцию, то для построения прямоугольного треугольника для одного катета берется геометрическая сумма высот вершин отрезка, т.е. Z_B-(-Z_A)=Z_B+Z_B, а другим катетом будет сама горизонтальная проекция. Гипотенуза этого прямоугольного треугольника будет истинной длиной отрезка прямой.

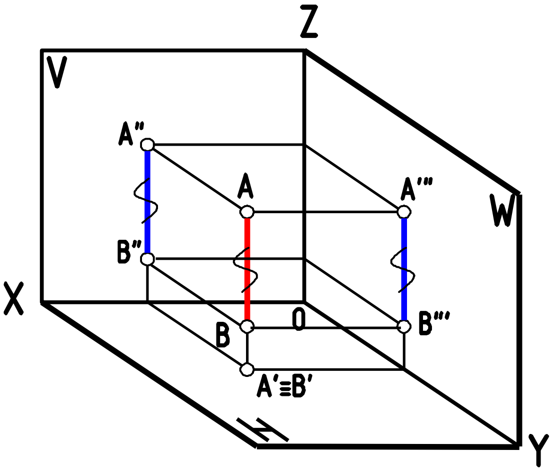
3.3. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ОТРЕЗКОВ ПРЯМЫХ, ЗАНИМАЮЩИХ ЧАСТНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

А. Прямые, перпендикулярные плоскости проекций.

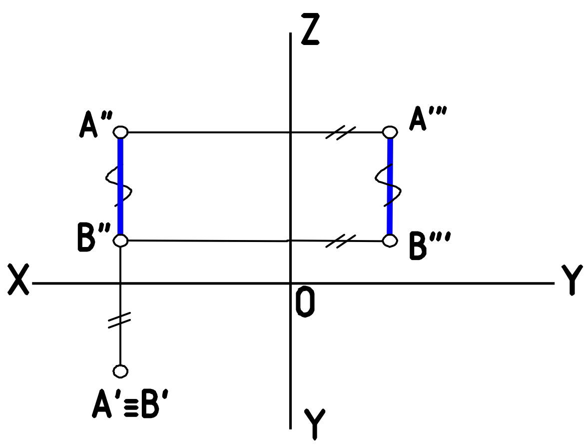
1. Горизонтально-проецирующая прямая (AB⊥H).

Отрезок прямой AB перпендикулярен горизонтальной плоскости проекций, следовательно: AB||V и W и OZ.

Модель горизонтально - проецирующего отрезка (чертеж 3.6).



Чертеж 3.6



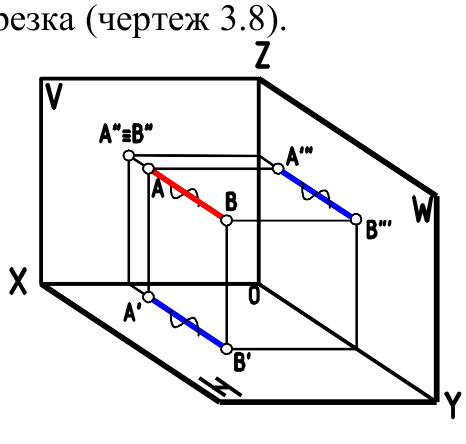
Чертеж 3.7

Здесь α = 90˚, значит A' ≡ B' = 0 т.е. горизонтальная проекция будет точкой, и β = γ = 0, значит A"B" = A'''B''' = AB, т.е. фронтальная и профильная проекции равны истинной длине отрезка.

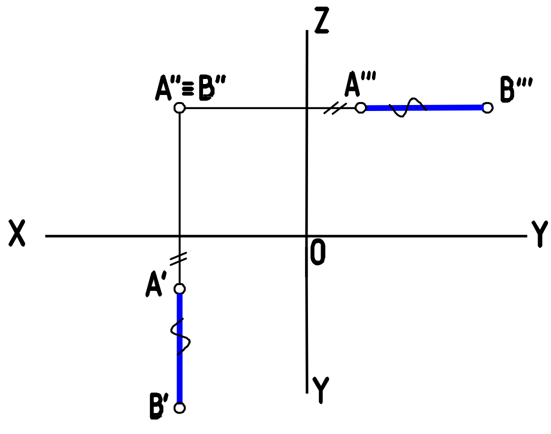
Эпюр горизонтально - проецирующего отрезка показан на чертеже 3.7.

2. Фронтально –проецирующая прямая (AB⊥V).

Отрезок прямой перпендикулярен фронтальной плоскости проекций, следовательно : AB||H и W и Y . Модель фронтально - проецирующего отрезка (чертеж 3.8).



Чертеж 3.8



Чертеж 3.9

Здесь $\beta=90^\circ$, значит $A''B''=0$, т.е. фронтальная проекция будет точкой, и $\alpha = \gamma = 0$ значит $A'B' = A'''B''' = AB$, т.е. горизонтальная и профильная проекции равны истинной длине отрезка.

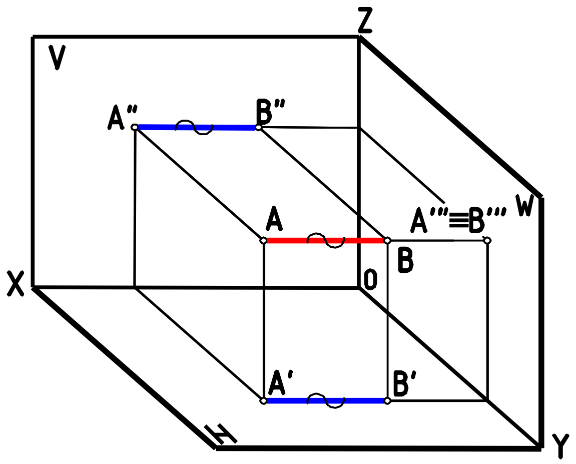
Эпюр фронтально - проецирующего отрезка показан на чертеже 3.9.

<u>3. Профильно - проецирующая прямая ($AB\perp W$).</u>

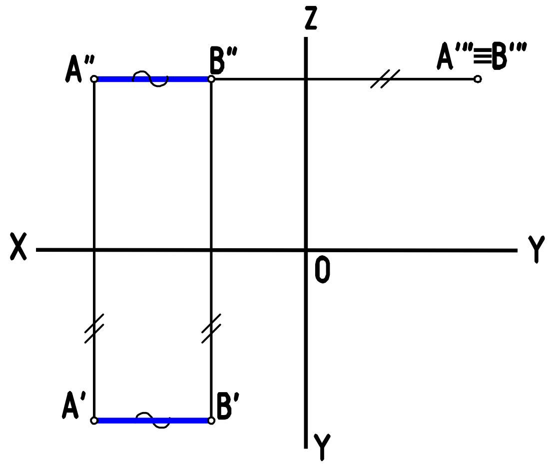
Отрезок прямой AB перпендикулярен профильной плоскости проекций, следовательно: $AB||V$ и H и OX. Модель профильно - проецирующего отрезка (чертеж 3.10).

Здесь $\gamma=90^\circ$, значит $A'''B'''=0$, т.е. профильная проекция будет точкой, и $\alpha = \beta = 0$ значит $A'B' = A''B'' = AB$, т.е. горизонтальная и фронтальная проекции равны истинной длине отрезка.

Эпюр профильно - проецирующего отрезка показан на чертеже 3.11.



Чертеж 3.10



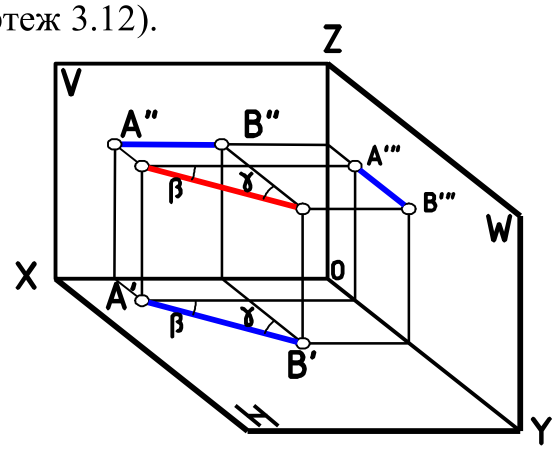
Чертеж 3.11

B. Прямые параллельные плоскости проекций.

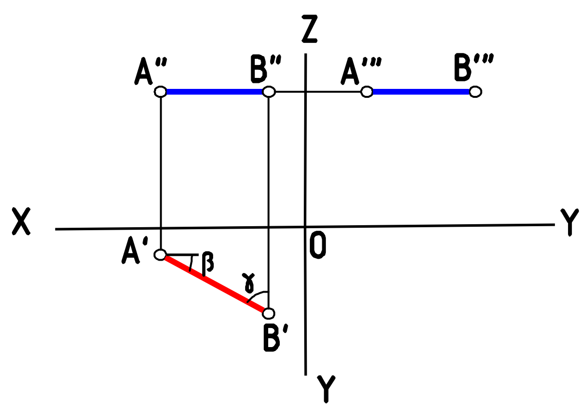
<u>4. ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ ПРЯМАЯ ($AB||H$).</u>

Горизонтальной прямой называется прямая, параллельная только горизонтальной плоскости проекций, а с остальными плоскостями проекций составляют определенные углы, т.е. $\alpha = 0$ и $0<\beta<90^\circ$ и $0<\gamma<90^\circ$.

Аппликаты его конечных, как и всех точек, равны между собой (чертеж 3.12).



Чертеж 3.12



Чертеж 3.13

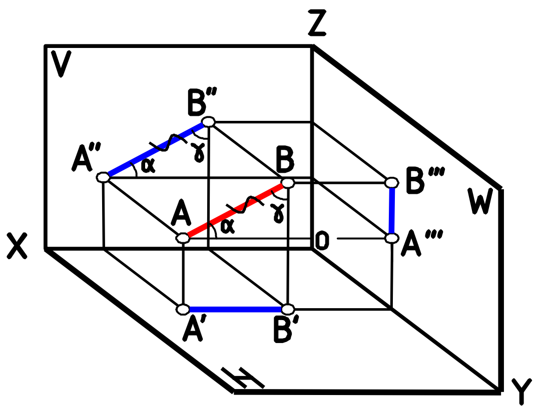
Модель (чертеж 3.12) и эпюр (чертеж 3.13) проецирования горизонтальной прямой. Фронтальная и профильная проекции лежат на одном уровне т.е. параллельно осям OX и OY соответственно (чертеж 3.13).

В истинную величину такой отрезок проецируется только на H, где углы β и γ также проецируется в истинную величину, при этом A"B"= AB·cosβ и A'"B'"= AB·cos γ.

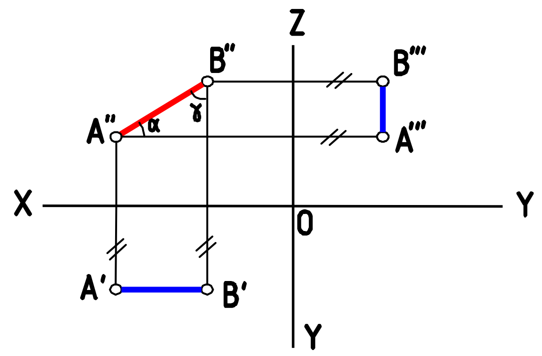
5. ФРОНТАЛЬНАЯ ПРЯМАЯ. (AB||V)

Фронтальной прямой называется прямая, параллельная толко фронтальной плоскости проекций, а с остальными плоскостями проекции составляют определенные углы, т.е. β=0, и 0<α<90˚ и 0<γ<90˚.

Ординаты ее конечных, как и всех точек, равны между собою (чертеж 24). В истинную величину такой отрезок проецируется только на V, где углы α и β также проецируются в истинную величину, при этом горизонтальная и профильная проекций расположатся параллельно ося OX и OZ соответственно. Модель (чертеж 3.14) и эпюр (чертеж 3.15) проецирования фронтальной прямой.



Чертеж 3.14

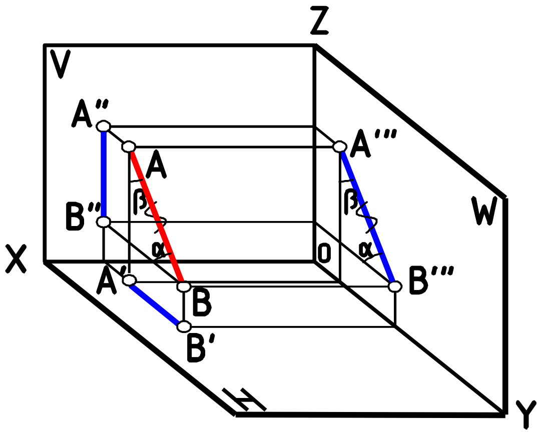


Чертеж 3.15

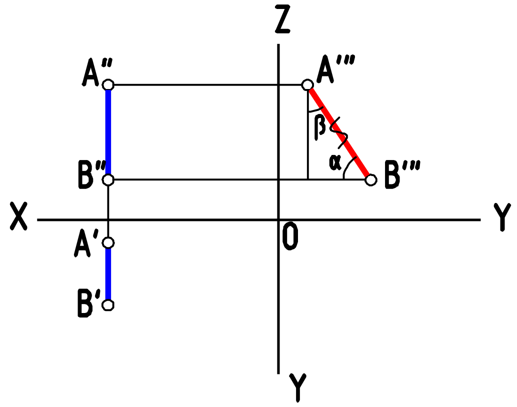
6. ПРОФИЛЬНАЯ ПРЯМАЯ.

Профильной прямой называется прямая, параллельная только профильной плоскости проекций, а состальными плоскостями проекции составляют определенные углы, т.е. γ=0, 0<α<90˚ и 0<β<90˚.

Абсциссы её конечных, как и всех точек равны между собою (чертеж 3.16).



Чертеж 3.16



Чертеж 3.17

В истинную величину такой отрезок проецируется только на W, где углы α и β также проецируются в истинную величину, при этом

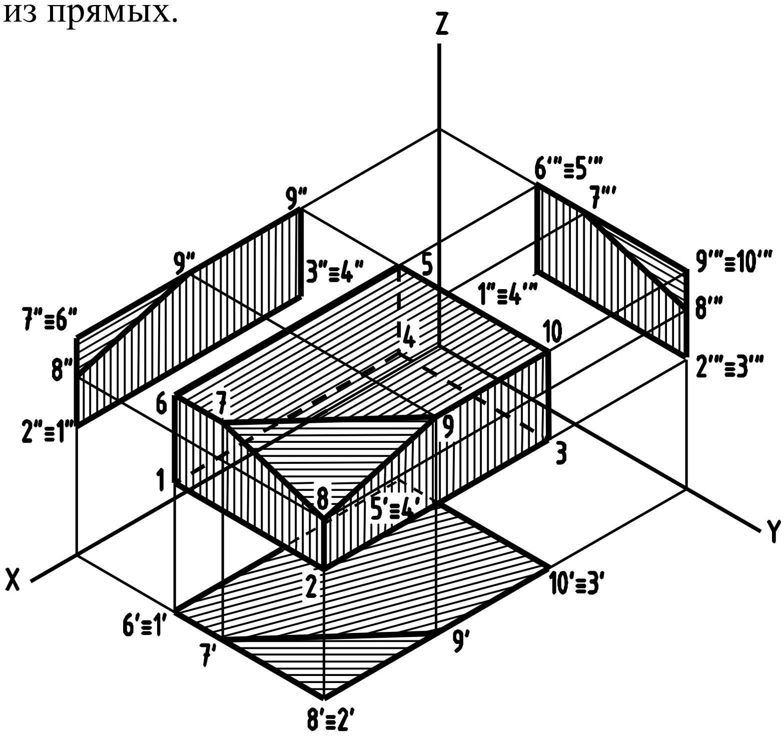
$A'B' = AB \cdot \cos\alpha$ и $A''B'' = AB \cdot \cos\beta$

Эпюр профильной прямой (чертеж 3.17).

Фронтальная и горизонтальная проекции расположатся параллельно осям OZ и OY соответственно (чертеж 3.17).

На чертеже 3.8 показан параллелепипед (спичечная коробка) с отсеченной передней левой верхней вершиной, расположенный трехгранном углу H, V, W и его пространственный чертеж, в трех проекциях. Этот параллелепипед содержит все шесть типов частных прямых.

Студентам предлагается самостоятельно рассмотреть и даже подсчитать их на параллелепипеде, а затем найти их на проекциях, записать название каждой из прямых.



Чертеж 3.18

Вопросы к лекции №3

1. Как образуются ортогональные проекции прямой?
2. Как располагаются прямые общего и частного положения относительно плоскостей проекций?
3. Какие углы нужно найти при анализе прямой общего положения.

ЛЕКЦИЯ № 4

Тема: Прямая общего положения. Принадлежность точки к прямой. Деление отрезка в данном отношении. Теорема Фалеса.

План.

1. **Прямая общего положения.**
2. **Принадлежность точки к прямой.**
3. **Деление отрезка в данном отношении.**
4. **Теорема Фалеса.**

2.5. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ЗАДАННОМ ОТНОШЕНИИ

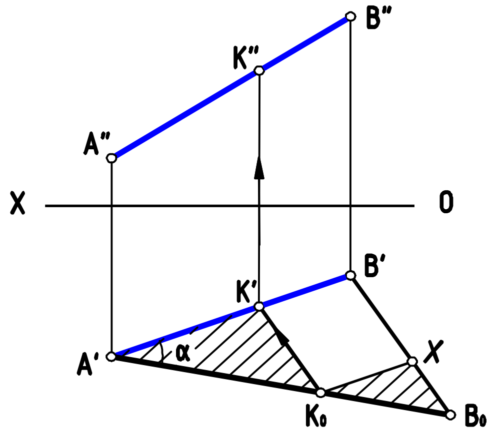
Если необходимо разделить отрезок прямой на две части, в заданном отношении, то надо разделить в этом же отношении его проекции.

Пример: требуется разделить заданный отрезок АВ (чертеж 33) на две части, в данном отношении m:n. Это значит, что требуется найти внутри АВ точку К так, чтобы АК:КВ = m:n или КВ:КА = m:n.

Для этого необходимо и достаточно любую заданную проекцию разделить в данном отношении m:n способом пропорционального деления: из конечной точки А' или В' (или А" или В") проводится вспомогательная прямая под любым углом α: на ней от конечной точки А' откладывается отрезки m и n (или наоборот, n и m) в любых единицах. Конечная точка B_0 находящаяся вне проекций и способствующая конечной точке В', соединяется с последней точкой прямой, а через точку K_0 проводится параллельная прямая K_0K' есть горизонтальная проекция искомой точки, и строится вторая фронтальная проекция К".

Доказательство правильности деления видно из подобных треугольников $A'K'K_0$ и K_0B_0, если провести K_0I параллельно К'В':

А'К':К'В'=m:n=А"К":К"В"=АК:КВ



Чертеж 33.

Вопросы к лекции №4

1.Когда принадлежит точка к прямой?

2.Под каким углом проводится вспомогательная прямая при делении отрезка?

ЛЕКЦИЯ № 5

Тема: Следы прямой. Взаимное положение прямых.

План.

1.Построение следов прямой.
2. Построение профильного следа прямой.
3. Взаимное положение двух прямых.
4. Параллельные прямые. Частные случаи параллельных прямых.
5. Проецирование пересекающихся прямых.
6. Проецирование скрещивающихся прямых.

5.1. ПОСТРОЕНИЕ СЛЕДОВ ПРЯМОЙ

Следом прямой линии называется точка пересечения ее плоскостью проекций.

Через свой след прямая переходит из одной части пространства в другую.

Прямая общего положения имеет максимальное количество следов, т.е. три следа, по одному из каждой плоскости проекций.

Горизонтальный след M(M', M", M"').

Фронтальный след N(N', N", N"').

Профильный след P(P', P", P"').

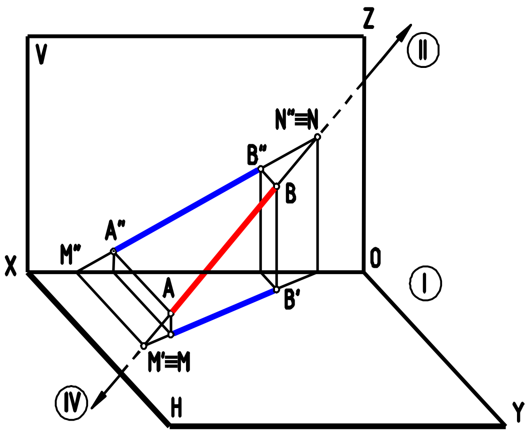
Следы делят прямую на отрезки, расположенные в различных частях пространства. Например, через свой горизонтальный след M' прямая может перейти из 1 четверти в IV, или из II в III. Через свой фронтальный след N' прямая может перейти из I четверти во II, или из IV в III.

Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций (чертежи 3.6, 3.8, 3.10), имеют только по одному следа.

Прямые, параллельные плоскостям проекций (чертежи 3.12, 3.14, 3.16), имеют только по два следа.

Таким образом, в зависимости от положения в пространстве, прямая может иметь от одного до трех следов.

На чертеже 5.1 показана модель прямой общего положения, заданной отрезком AB.



Чертеж 5.1

При продолжении его вниз, до пересечения с плоскостью – H, получается горизонтальный след M; горизонтальная его проекция M' совпадает самим следом M; фронтальная проекция M" находится на оси OX; профильная проекция M''' будет находиться на оси OY.

При продолжении отрезка AB вверх, до пересечения с плоскостью V, получается фронтальный след N прямой; фронтальная его проекция N" совпадает с самим следом N; горизонтальная проекция N' будет находиться на оси OZ.

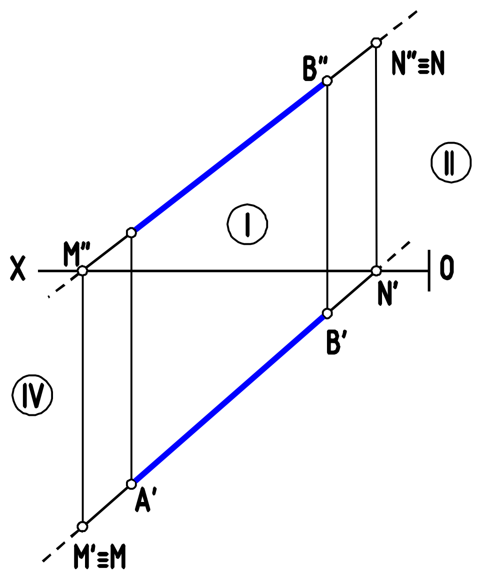
Таким образом, одна проекция любого следа совпадает самим следом (одноименным), а два другие его проекции находятся на осях.

Анализируя чертеж 5.1 легко сформулировать правила нахождения следов M и N, заданного отрезка AB, по его проекциям A'B' и A"B".

Действительно, чтобы найти горизонтальный след M отрезка прямой, необходимо: продолжить его фронтальную проекцию A"B" до пересечения с осью OX и отметить точку M", т.е. фронтальную проекцию горизонтального следа; из M" провести перпендикуляр к оси OX, до пересечения с продолжением горизонтальной проекции A'B', где отметит точку M' и сам горизонтальный след M.

Чтобы найти фронтальный след N, отрезка прямой, необходимо: продолжить его горизонтальную проекцию A'B' до пересечения с осью OX и отметит точку N', т.е. горизонтальную проекцию фронтального следа; из N' провести перпендикуляр к оси OX, до пересечения с продолжением фронтальной проекции A"B", где отметить точку N" и искомый фронтальный след N.

На чертеже 5.2 показан эпюр заданного отрезка AB и найдены его горизонтальный и фронтальный следы M и N по указанному правилу.

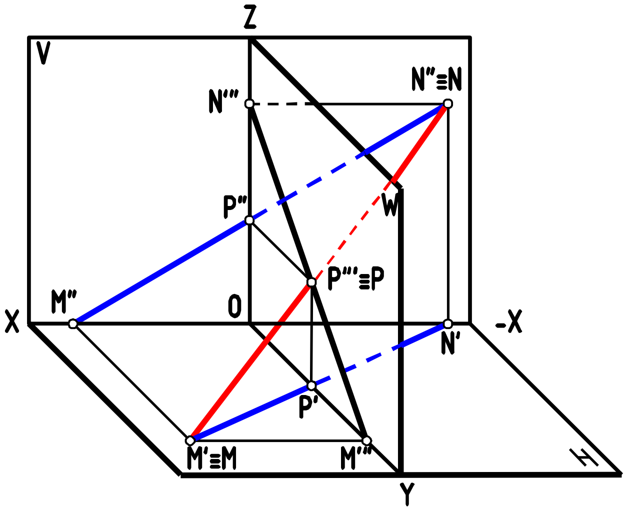


Чертеж 5.2

При продолжении прямой MN левее точки M'(M) – прямая переходит в четвертую четверть, что хорошо видно на эпюре; при продолжении же его правее точки N"(N) прямая переходит через свой фронтальный след во вторую четверть, а между следами M и N она находится в первой четверти.

5.2. ПОСТРОЕНИЕ ПРОФИЛЬНОГО СЛЕДА ПРЯМОЙ

Если на чертеже 5.1 к плоскостям V и H добавить плоскость W, перенеся начало 0 несколько левее, то прямая MN пересечет плоскость W через свой профильный след P (чертеж 5.3).

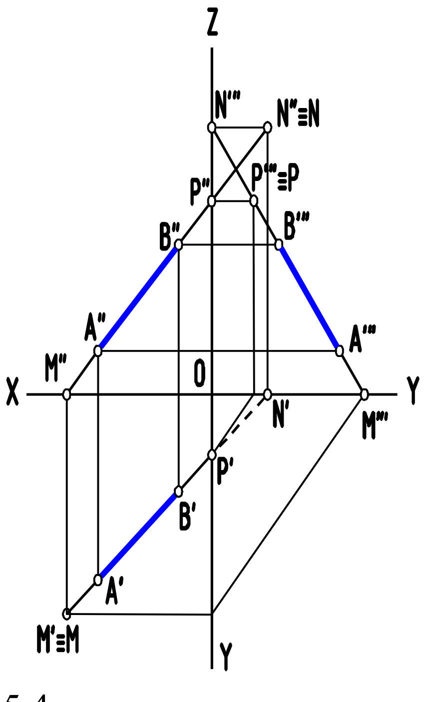


Чертеж 5.3.

Из этого чертежа видно, что горизонтальная проекция профильного следа P', находится на пересечении горизонтальной проекции M'N' прямой с осью Y;

Фронтальная проекция P" профильного следа P, находится на пересечении фронтальной проекции M"N" с осью OZ;

Профильная проекция P''', профильного следа P, находится обычным способом, как третья проекция точки по двум заданным (P' и P"). Профильная проекция P''' совпадает с самим профильным следом P, аналогично тому, как горизонтальная проекция M' совпадает с самим горизонтальным следом M, а фронтальная проекция N" совпадала с самим фронтальным следом N. .



Чертеж 5.4.

Эпюр построения профильного следа прямой выглядит следующим образом:

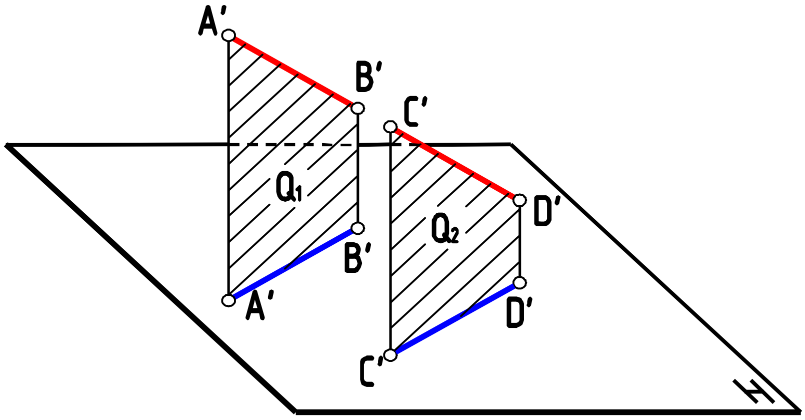
Проверка правильности построения: все горизонтальные проекции или одноименные проекции на одной линии.

5.3. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

Две прямые в пространстве могут быть расположены следующим образом:

5.3.1. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ.

Если прямые в пространстве взаимно параллельны, то их одноименные проекции также параллельны между собою.



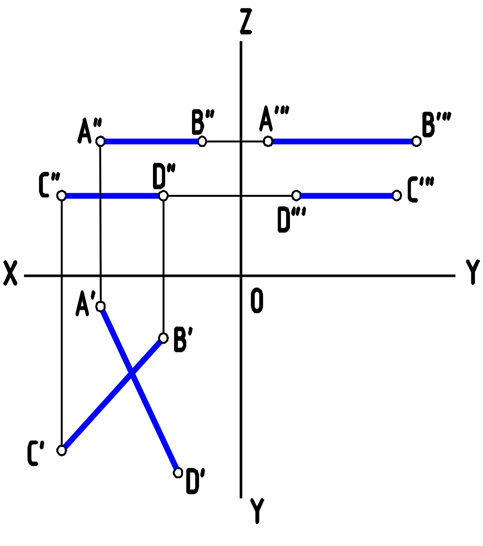
Чертеж 5.5.

Действительно, если дано, что AB||CD в пространстве, то A'B'||C'D' на плоскости Q_1 и Q_2, проведенные через заданные отрезки AB и CD параллельны между собою и пересекаются третьей плоскостью по параллельным между собою линиями A'B' и C'D'.

При проецировании двух параллельных прямых общего положения достаточно обеспечить параллельность их одноименных проекций на двух любых плоскостях проекций.

Это правило не сохраняется при проектировании двух параллельных между собою горизонталей, или фронталей, или профильных прямых.

Действительно, на чертеже 5.5. показаны две горизонтальные прямые, для которых заданные проекции A"B" и C"D", а также A'''B''' и C'''D''' взаимно параллельны. Несмотря на параллельность этих горизонтальных прямых на фронтальной и профильной, т.е. на двух плоскостях проекций, они между собою оказались не параллельными, что стало очевидным после того как мы построили их горизонтальные проекции. Эти прямые оказались скрещивающимися линиями.



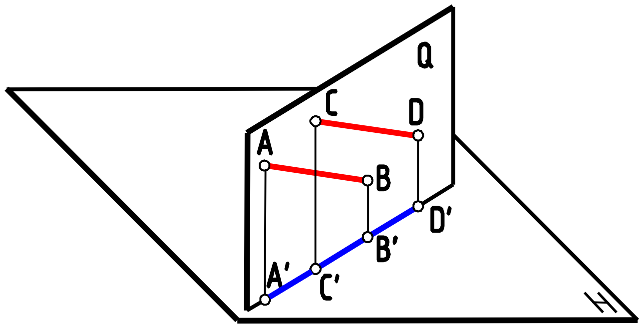
Чертеж 5.6.

Отсюда следует вывод: при проектировании двух параллельных горизонталей (фронталей, профильных прямых) необходимо обеспечить (или проверить), в первую очередь параллельность их горизонтальных, (фронтальных, профильных) проекций.

5.3.2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

На чертеже 5.7. показаны две параллельные прямые, у которых горизонтальные проекции совпадают в одну линию.

Также могут совпадать фронтальные и профильные проекции.

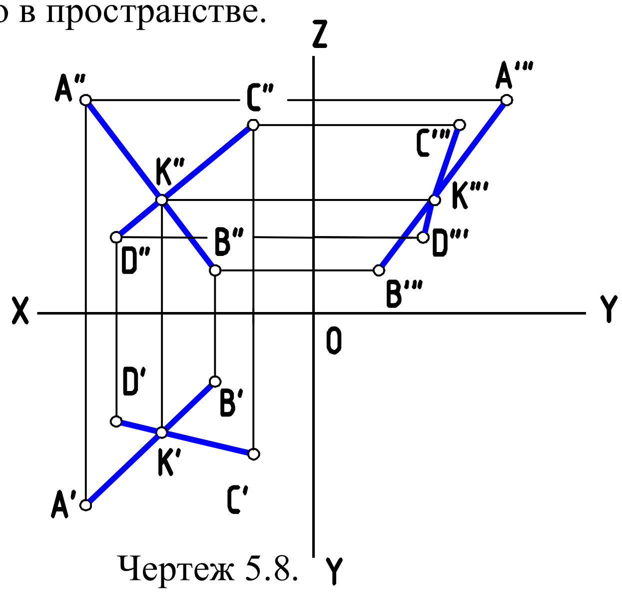


Чертеж 5.7.

5.4. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

Если прямые пересекаются, то они имеют одну общую точку, точка К (чертеж 5.8.). Проекции этой общей точки находятся в пересечении одноименных проекций прямых и, одновременно, на направлениях проецирования, перпендикулярных осям.

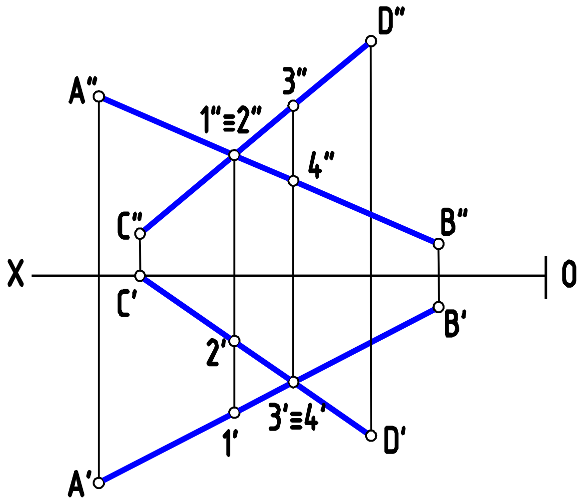
Две пересекающиеся прямые определяют плоскость, единственную по своему положению в пространстве.



Чертеж 5.8.

5.5. ПРОЕЦИРОВАНИЕ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

Если две прямые не параллельны и не пересекаются между собою, то она называются *скрещивающимися* (чертеж 5.9). Такие прямые не имеют общей точки и не лежат в одной плоскости, иначе говоря не определяют плоскость.



Чертеж 5.9.

Вопросы к лекции №5

1. Как образуются следы прямых на плоскостях проекциях?
2. Сколько взаимных положений имеют прямые между собой?
3. Имеют ли прямые частные положения?

ЛЕКЦИЯ № 6

Тема: Плоскость и задание плоскости на чертеже. Плоскости общего и частного положения.

План.

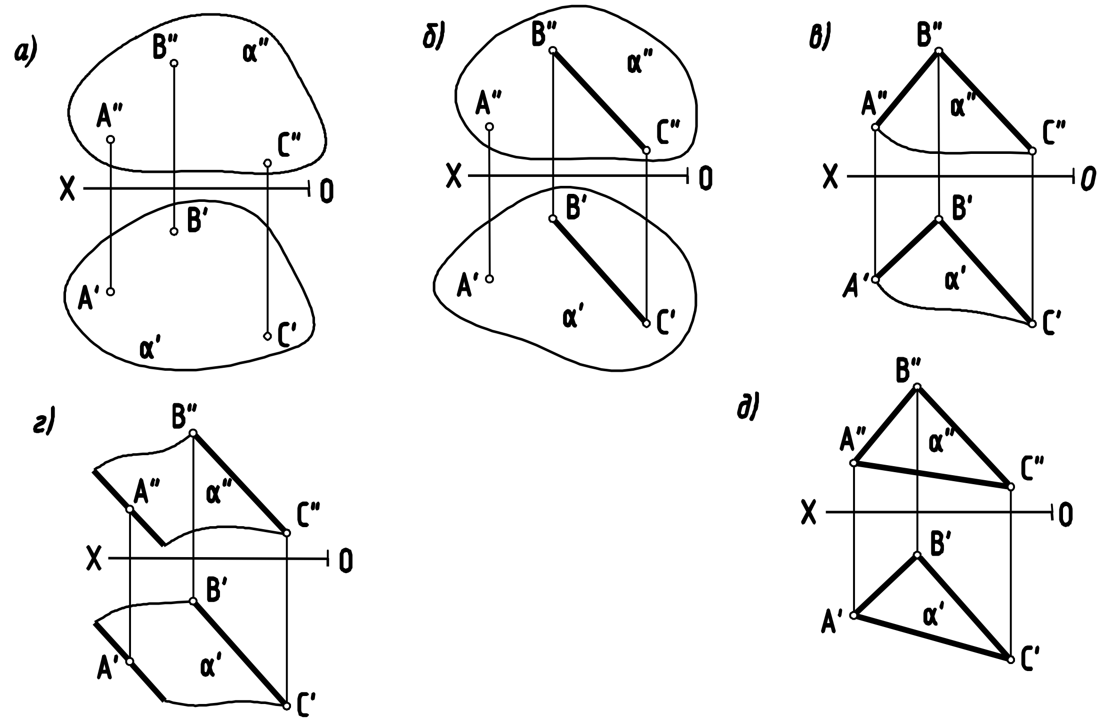
1. **Плоскость и задание плоскости на чертеже.**
2. **Плоскость общего положения.**
3. **Плоскости частных положений.**

6.1. Плоскость и задание плоскости на чертеже.

Из геометрии известно, что положение плоскости в пространстве определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой. Поэтому в проекциях плоскость, неограниченная контуром, может быть задана следующими взаимозаменяемыми элементами (чертеж 6.1.):

а) тремя любыми точками, не лежащими на одной прямой;

б) точкой и прямой, если две точки, из трех заданных, соединить прямой;



Чертеж 6.1

в) двумя пересекающимися прямыми, если все три точки соединить двумя прямыми;

г) двумя параллельными прямыми, если через одну точку провести прямую, параллельную другой прямой;

д) треугольником, если заданные все три точки соединить прямыми.

Наиболее удобным способом задания плоскостей из указанных является треугольник и четырехугольник, если соединить концы параллельных прямых (чертеж 6.1, *г*).

6.2. Плоскости общего и частного положения.

Если заданная плоскость Р не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, она называется плоскостью общего положения. Плоскость общего положения могут задаваться следами (Чертеж 6.1).

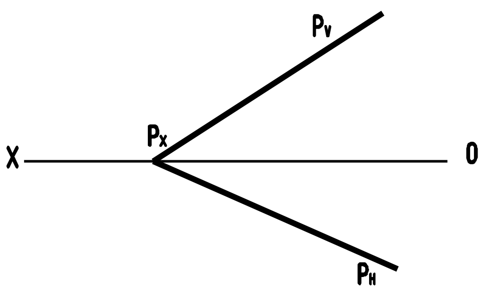
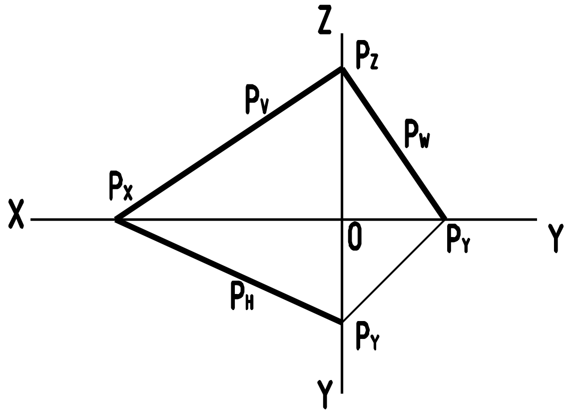


Чертёж 6.1.

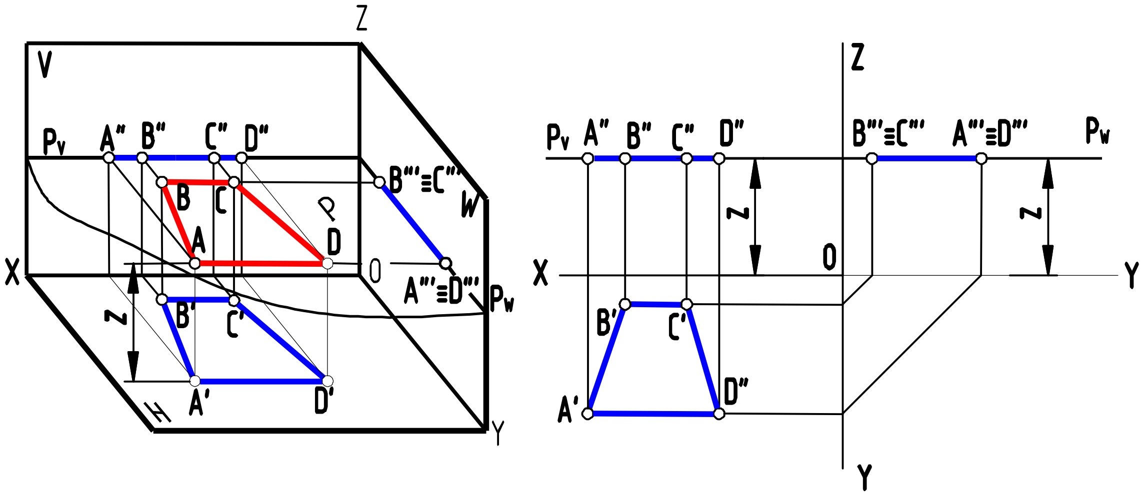


Кроме общего положения плоскость может занимать в пространстве шесть так называемых частные положения, когда она параллельна или перпендикулярна плоскости проекций (H, V или W).

А. <u>Плоскости, параллельные плоскостям проекций (дважды проецирующие).</u> Такие плоскости, параллельные одной какой-либо плоскости проекций, и перпендикулярны двум другим плоскостям проекций. Поэтому они называются иногда дважды проецирующими.

<u>1. Горизонтальная плоскость (P||H, P⊥V, W).</u>

На чертеже 6.2. показан модель и эпюр горизонтальной плоскости и расположенная на ней плоская фигура, в виде трапеции, ABCD.



Чертеж 6.2.

Из этого чертежа видно, что:

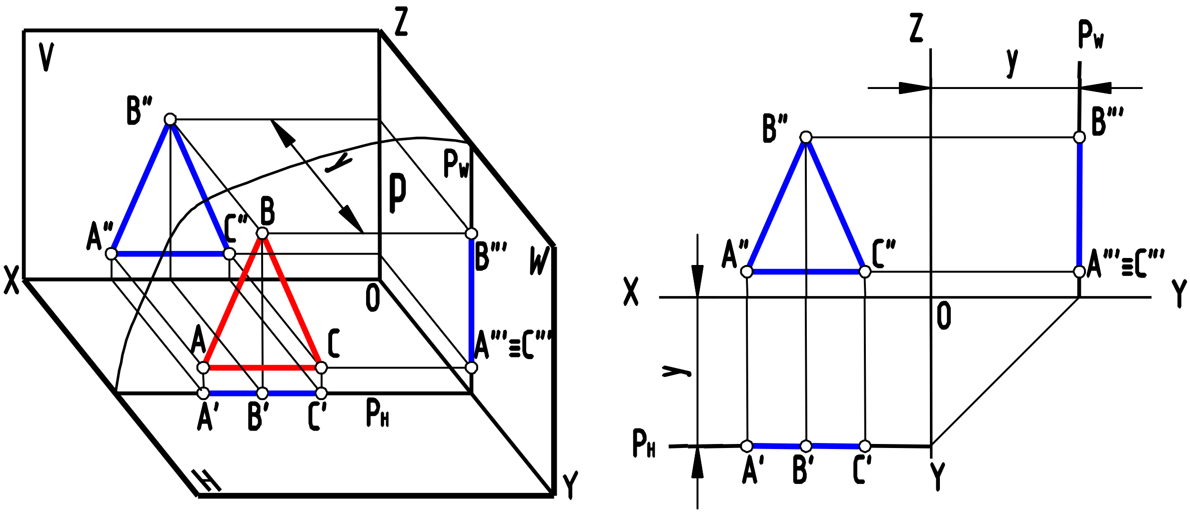
а) Горизонтальная плоскость имеет только два следа − фронтальный P_V и профильный P_W; она не имеет горизонтального следа, т.к. не пересекает горизонтальную плоскость проекций. Ее фронтальный и профильный следы расположены на эпюре на одной высоте Z и перпендикулярно оси OZ.

б) Горизонтальная проекция плоской фигуры ABCD, расположенной в горизонтальной плоскости, проецируется на H в истинную величину.

в) Фронтальная и профильная проекции плоской фигуры ABCD проецируются в прямые линии, совпадающие с одноименными фронтальным и профильным следами.

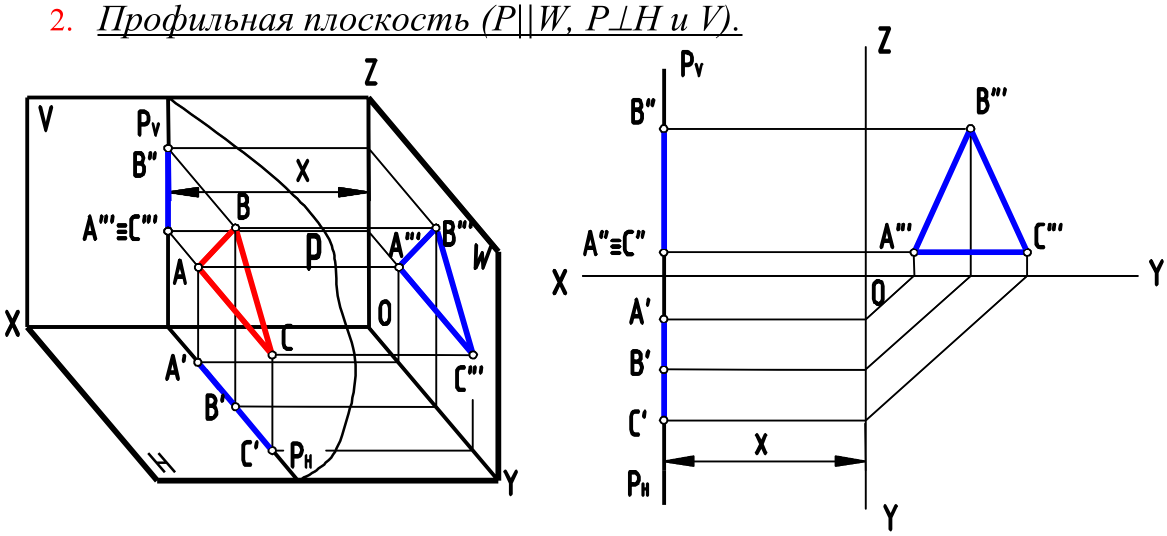
Такое проекционное явление, когда плоская фигура, будучи перпендикулярной плоскости проекций, проецируется в прямую, соответствующим следом плоскости, будем называть собирательным свойством проецирующей плоскости. Следовательно, горизонтальная плоскость обладает собирательным свойством на V и W.

1. *Фронтальная плоскость (P||V, P⊥H и W).*



Чертеж 6.3.

2. *Профильная плоскость (P||W, P⊥H и V).*



Чертеж 6.4.

На чертежах 6.3, 6.4. показаны модели и эпюры фронтальной и профильной плоскостей и расположенные в них плоских фигур, в виде треугольника, ABC.

Из этих чертежей видно, что

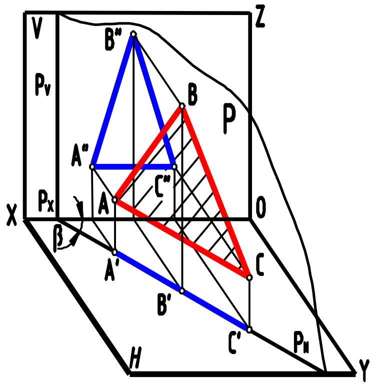
а) Фронтальная и профильная плоскости имеют только по два следа, они не имеют фронтального и профильного следов соответственно.

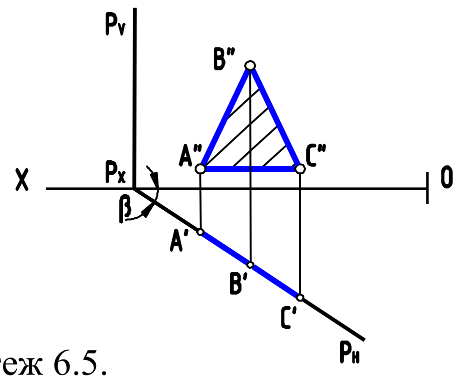
б) Фронтальная проекция плоской фигуры, расположенной во фронтальной плоскости, и профильная проекция плоской фигуры ABC, расположенной в профильной плоскости, проецируется на V и W соответственно в истинную величину.

Они обладают собирательными свойствами на фронтальной и профильной соответственно плоскостях проекций.

<u>Б. Плоскости, перпендикулярные плоскостям проекций (проецирующие плоскости).</u> Эти плоскости не параллельны ни одной из плоскостей проекций и каждая из них перпендикулярна только одной плоскости проекций.

4. Горизонтально проецирующая плоскость. (P⊥H).

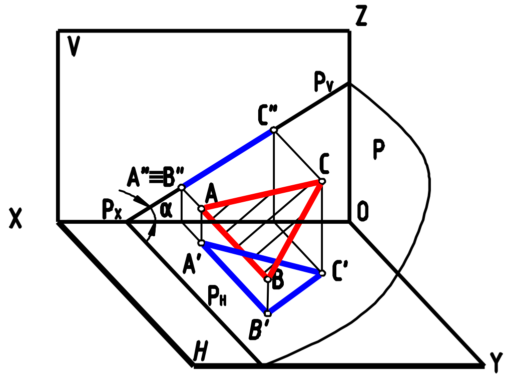


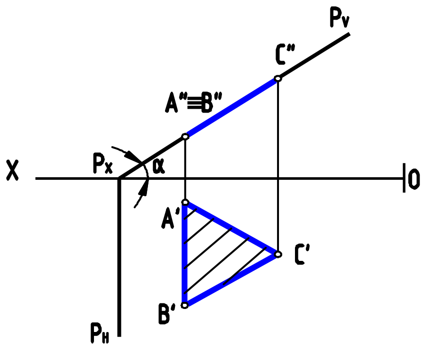


Чертеж 6.5.

Любые геометрические элементы – точка, прямая и плоская фигура проецирующей плоскости, расположенные в проецирующей плоскости совпадают, в силу собирательного свойства, с тем следом на плоскость проекций, на которой она перпендикулярна, и этот след принято называть рабочим.

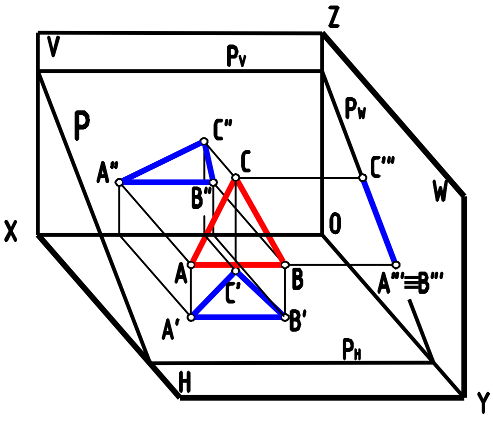
5. Фронтально – проецирующая плоскость (P⊥V).

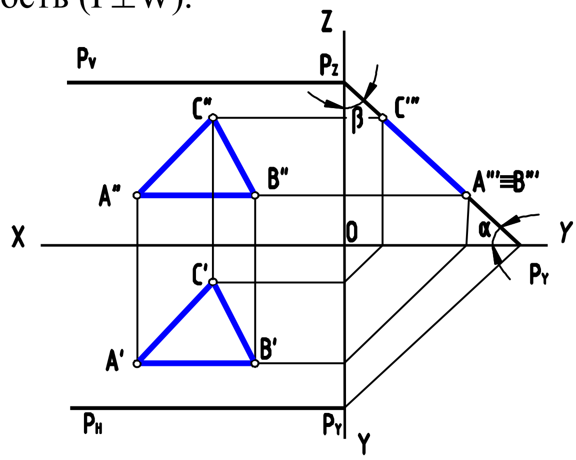




Чертеж 6.6.

6. Профильно – проецирующая плоскость (P⊥W).





Чертеж 6.7.

Вопросы к лекции №6

1. Как может задаваться плоскость на чертежах?
2. Сколько частных положений может иметь плоскость?
3. Как расположены проецирующие плоскости относительно плоскостей проекций?

ЛЕКЦИЯ № 7

Тема: Принадлежность точки и прямой плоскости. Главные линии плоскости. Линия наибольшего наклона плоскости.

План.

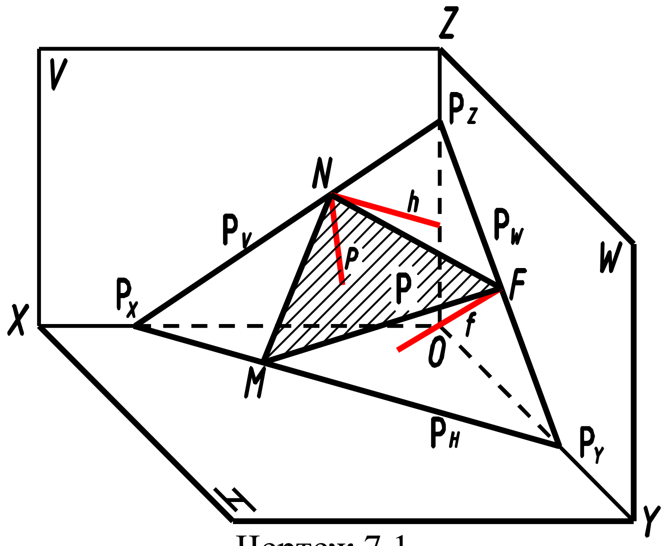
1. **Принадлежность точки и прямой плоскости.**
2. **Главные линии плоскости.**
3. **Линия наибольшего наклона плоскости.**

При задании плоскости следами полностью сохраняется условие принадлежности прямой к плоскости: прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки плоскости или через одну точку плоскости, но параллельно другой прямой плоскости.

На основании этого можно сделать следующие два вывода:

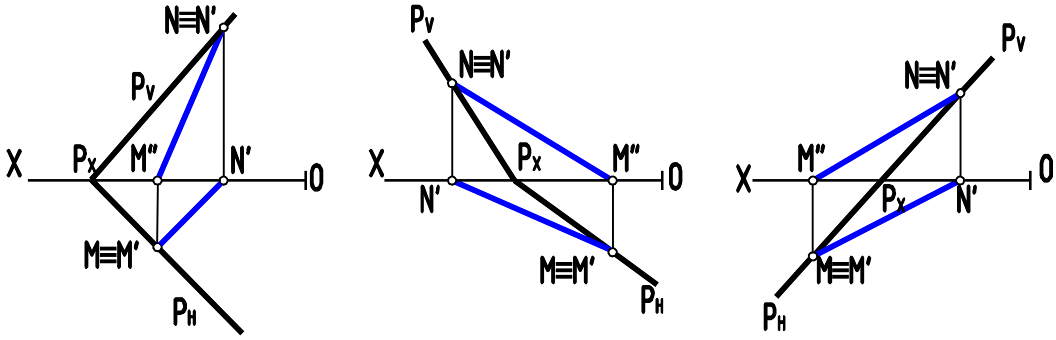
а) Прямая принадлежит плоскости, если два ее следа лежат на одноименном следе плоскости (например MN, NF или FM, чертеж 7.1.).

б) Прямая принадлежит плоскости, если только один ее след лежит на одноименном следе плоскости, но она параллельна другой прямой плоскости (например, к следам $P_H P_V$ или P_W, чертеж 47).



Чертеж 7.1.

Из этого чертежа видно, что для проведения произвольной прямой лежащей на плоскости P, достаточно выбрать по одной точке на каждом следе и соединить их одноименные проекции (чертеж 48).



Чертеж 7.2.

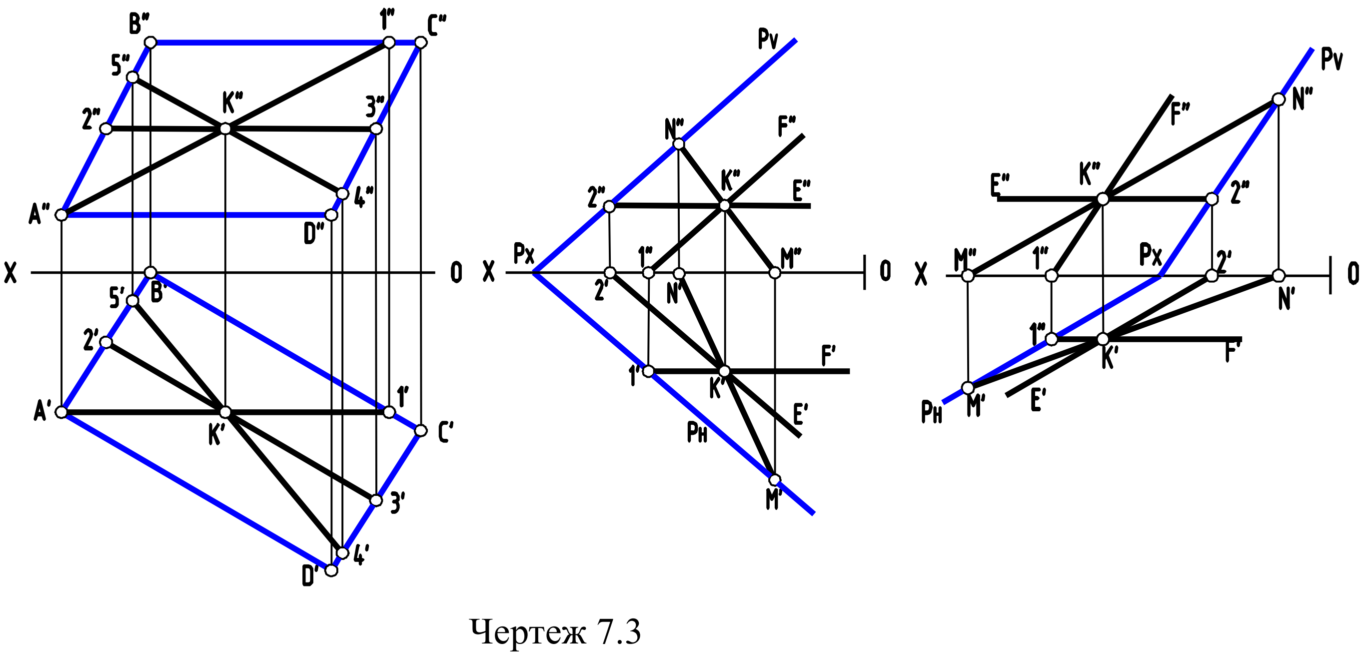
7.2. ВЫБОР ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ

Точки на плоскости выбираются с помощью любой вспомогательной линии плоскости, т.к. точка принадлежит плоскости только в том случае, если она находится на прямой, лежащей в плоскости. Отсюда, чтобы найти в плоскости недостающую проекцию точки (чертеж 7.3) по одной выбранной (К) или данной ее проекции, необходимо:

1. Через заданную проекцию (например, горизонтальная К') точки провести в плоскости, в качестве вспомогательной линии, любую линию плоскости (удобнее горизонталь 2, 3; или фронталь А,1; или произвольную линию 4, 5, чертеж 7.3, а).

2. Построить вторую проекцию этой линии и отметить на ней искомую недостающую проекцию точки.

а) *б*) *в*)



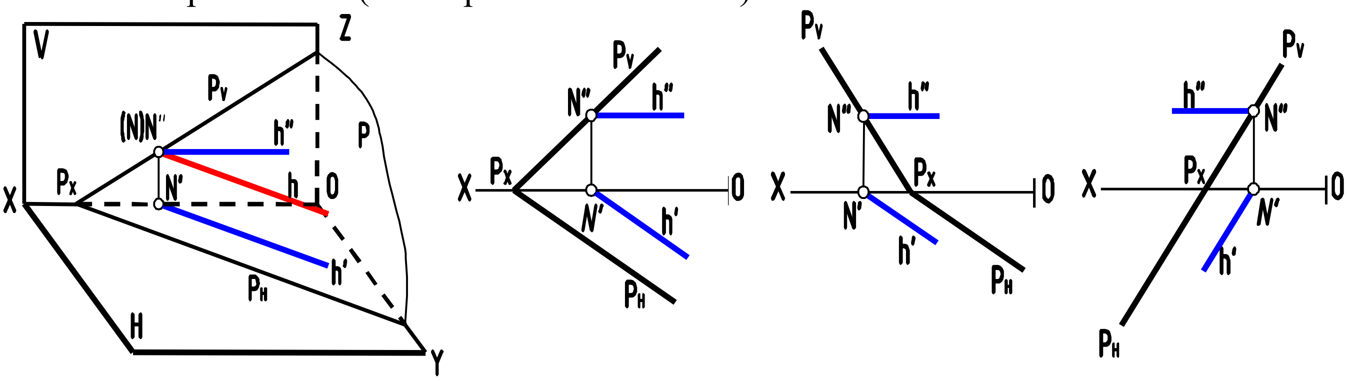
Чертеж 7.3

На чертежах 7.3, *б* и *в* Е – горизонталь, F – фронталь и MN произвольная линия плоскости.

7.3. Главные линии плоскости.

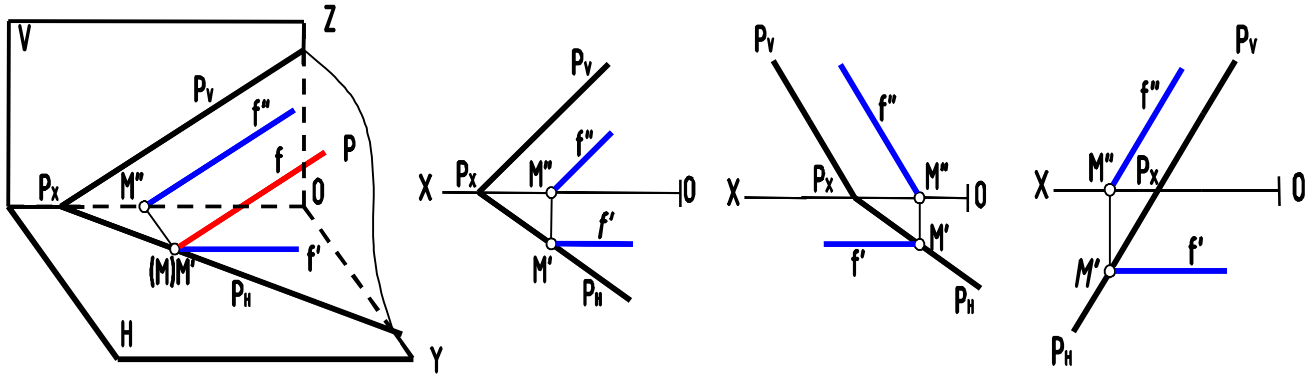
К главным линиям плоскости следуют отнести горизонталь, фронталь и профильную прямую плоскости,которые на модели и на эпюре выглядят как на чертеже 7.3, 7.4. и 7.5.

Горизонталь (см. чертежи 3.12 и 3.13).



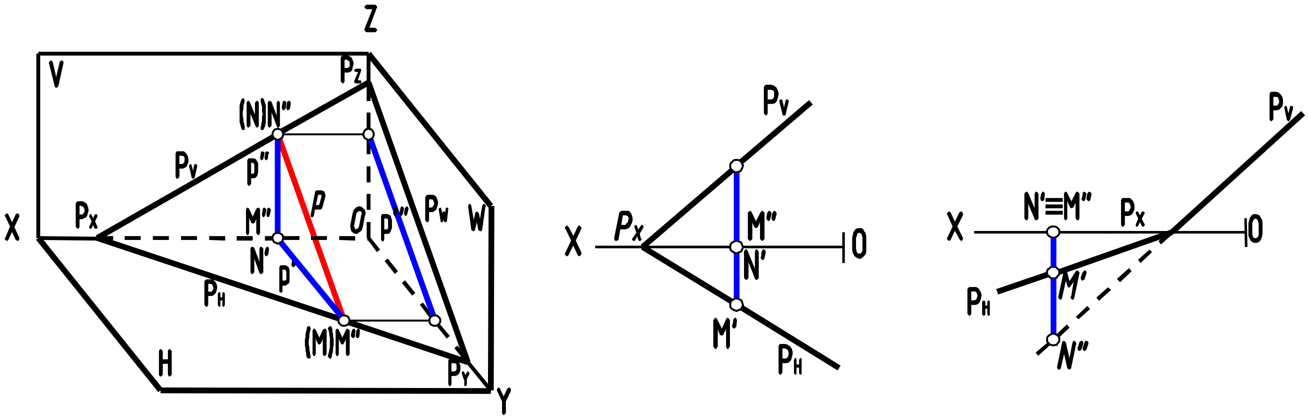
Чертеж 7.3

Фронталь (см.чертежи 3.14, 3.15)



Чертеж 7.4.

Профильная прямая (см.чертежи 3.16, 3.17)



Чертеж 7.5

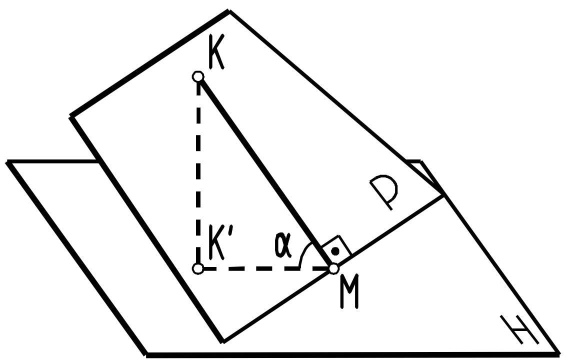
7.4. Линия наибольшего наклона плоскости.

Угол α наклона плоскости общего положения, есть угол наклона линия наибольшего ската этой плоскости относительно горизонтальной плоскости проекций.

Чтобы определить угол наклона любой плоскости проекций, необходимо:

1) Провести в плоскости общего положения через любую точку, в двух проекциях, линию наибольшего ската.
2) Определить способом прямоугольного треугольника, по разности аппликат, истинную величину произвольного отрезка линии наибольшего ската, этот угол α есть искомый угол наклона плоскости.

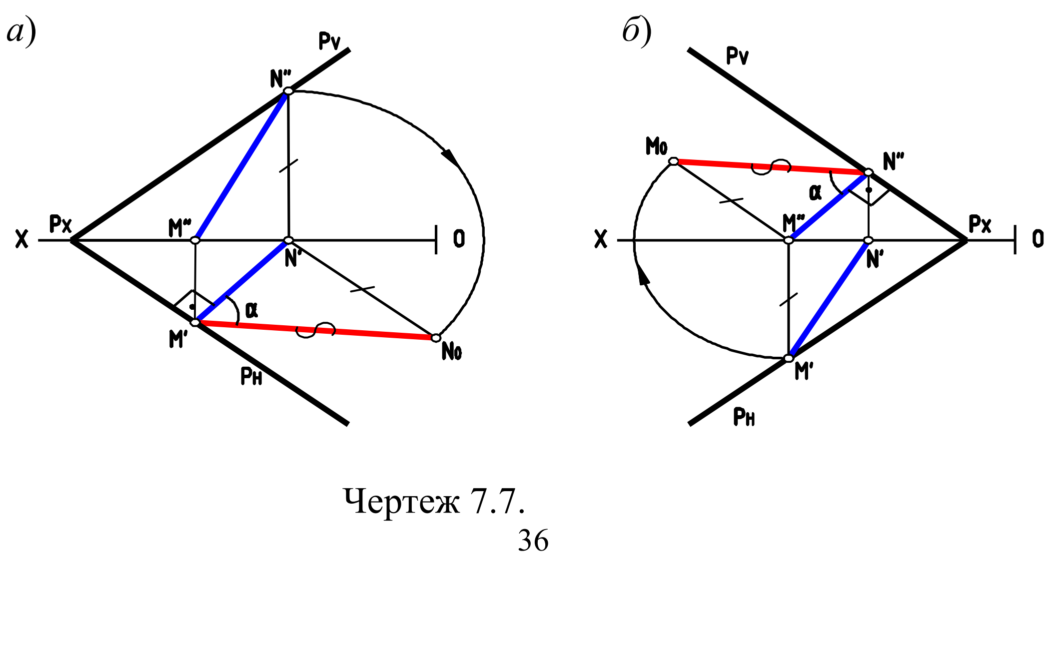
На модели это выглядит как на чертеже 54.



Чертеж 7.6.

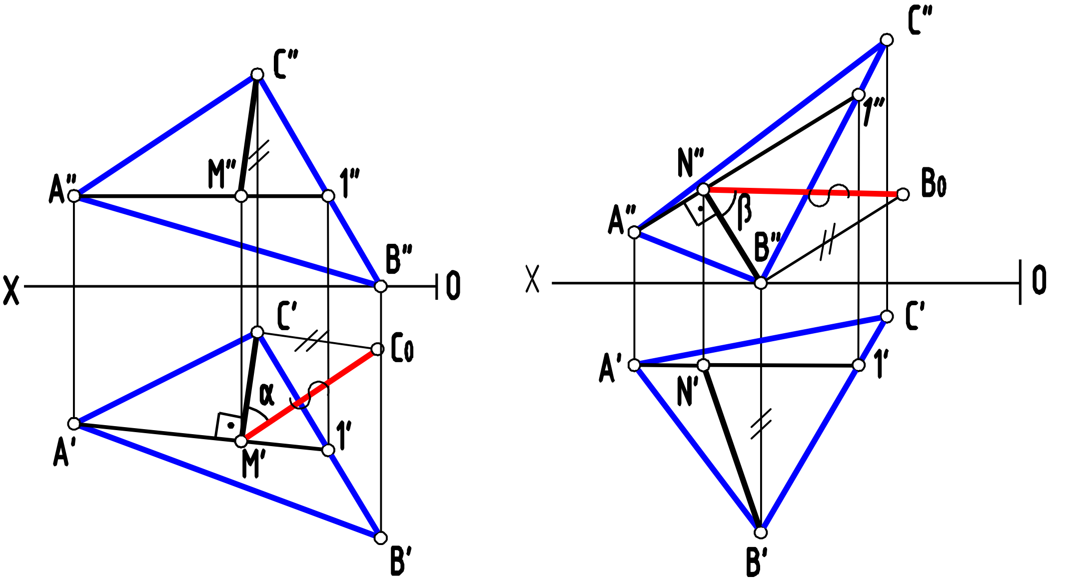
Типовой пример: определить угол α и β наклона плоскости P или плоской фигуры ABC общего положения (чертеж 7.7. *а*, *б*).

На чертежах 7.8. *а* и 7.8. *б* (CM и BN) условные линии наибольшего ската.



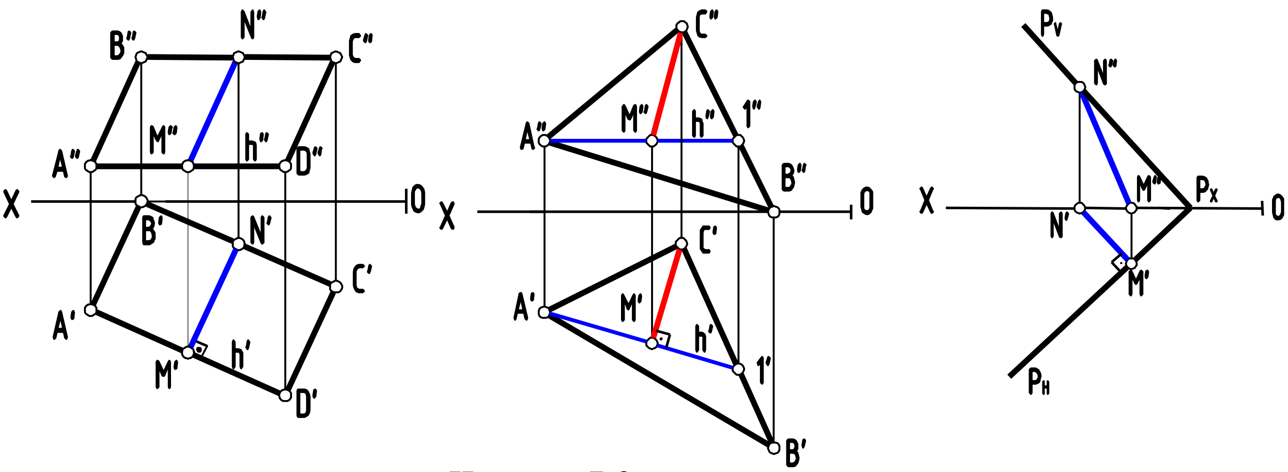
Чертеж 7.7.

в) *г)*



Чертеж 7.8.

Линия наибольшего ската MN будет проходить перпендикулярно к горизонтали плоскости или горизонтальному следу (нулевой горизонтали) плоскости.



Чертеж 7.9.

Вопросы к лекции №7

1. **Когда принадлежит точка к прямой и плоскости?**
2. **Какие существуют главные линии плоскости?**
3. **Как располагае**
4. **тся линия наибольшего наклона плоскости относительно горизонтали и фронтали?**

ЛЕКЦИЯ № 8

Тема: Следы плоскости. Точка встречи прямой с плоскостью частного положения. Взаимное пересечение плоскости общего положение с плоскостью частного положения.

План.

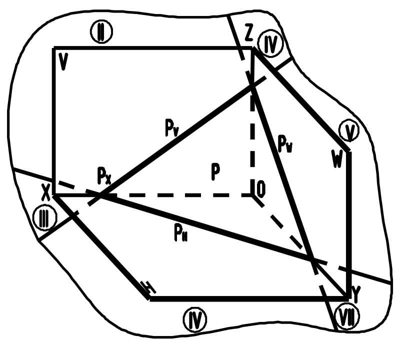
1.Следы плоскости.

2.Точка встречи прямой с плоскостью частного положения.

3.Взаимное пересечение плоскости общего положения в плоскостью частного положения.

8.1. Следы плоскости.

Следом плоскости называется линия пересечения ее с плоскостью проекций. Если заданная плоскость P не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, она называется плоскостью общего положения, пересечет все три плоскости проекций и будет иметь три следа (чертеж 8.1.).



Чертеж 8.1.

Горизонтальный след $P_{н}$ – линия пересечения плоскости P с H;

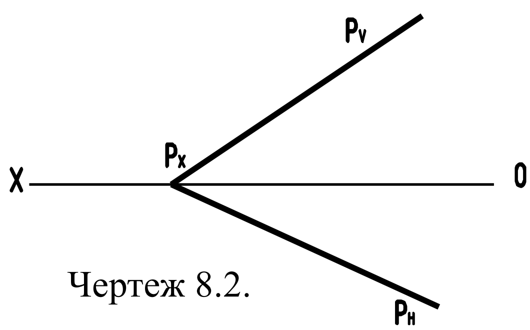
Фронтальный след P_V – линия пересечения плоскости P с V;

Профильный след P_W – линия пересечения плоскости с W.

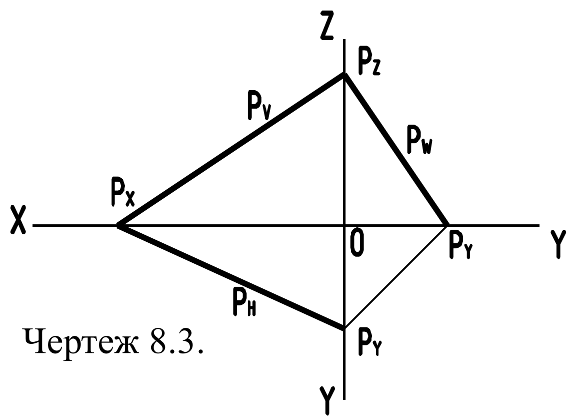
Точки схода следов P_X, P_Y, P_Z – точки пересечения плоскости P с осями.

Плоскость, заданная на чертеже 8.1, проходит через все октанты кроме седьмого. Если ее переместить назад, параллельно самой себе за начало пространства (0), то она будет проходить через все октанты, кроме первого, а треугольник следов ее будет в седьмом октанте.

Основными следами считаются P_H и P_V (чертеж 8.2). Профильный след P_W считается дополнительным и вводится в действие при решении задач в случае необходимости.



Чертеж 8.2.



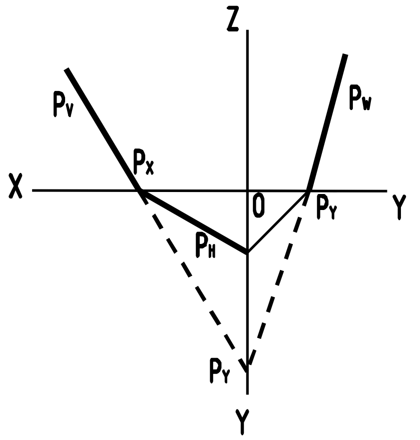
Чертеж 8.3.

Если необходимо построить профильный след P_W заданный плоскости (чертеж 8.3.), то исходя из чертежей 8.2. и 8.3 можно сформировать следующую схему решения:

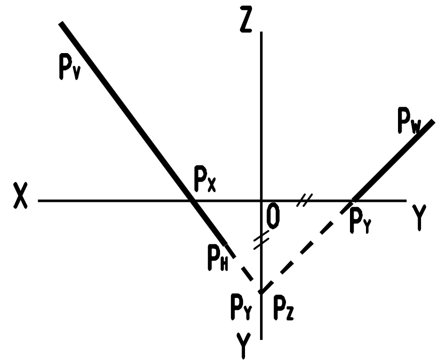
1. Продолжить фронтальный след P_V до пересечения с осью OZ (или минус OZ) и отметить точку схода P_Z.
2. Продолжить горизонтальный след P_H до пересечения с осью OY (или минус Y) и отметить точку схода P_Y.
3. Перенести точку схода P_Y с плоскости H на плоскость W (откладывая ординату Y) и соединить на W точку P_Y и P_Z.

Это есть искомый профильный след P_W.

Примеры построения профильных следов (чертежи 8.4 и 8.5).



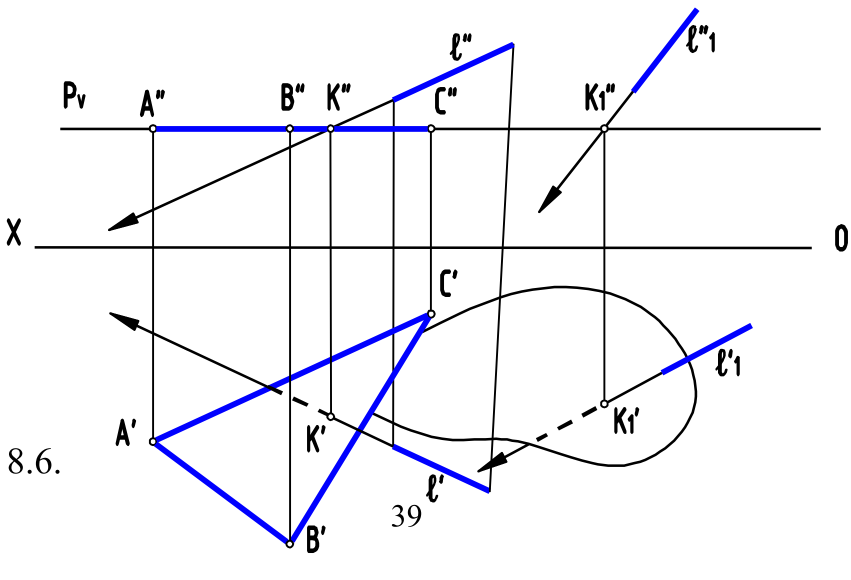
Чертеж 8.4.



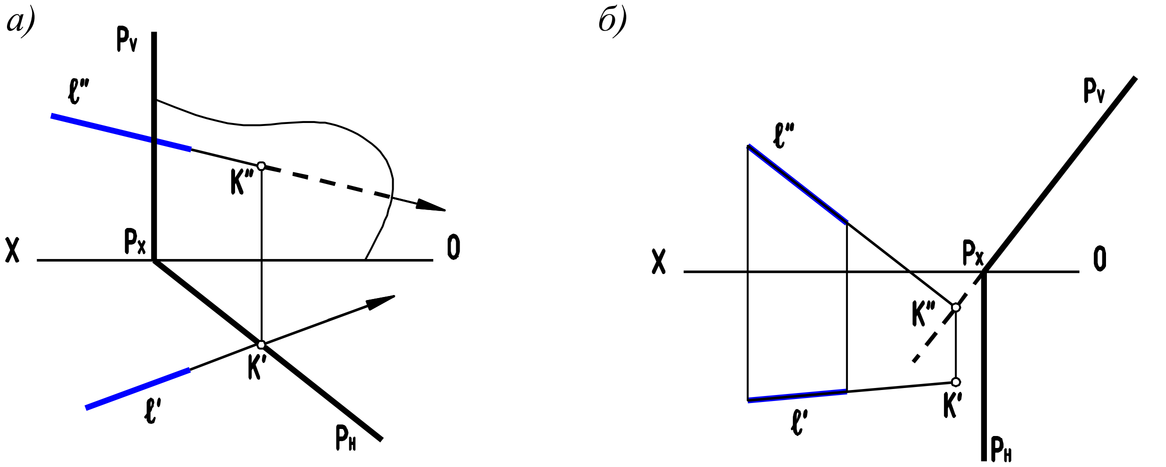
Чертеж 8.5.

8.2. Точка встречи прямой с плоскостью частного положения.

Благодаря тому, что проецирующая плоскость обладает собирательным свойством, точка встречи (К) любой прямой с ней находится без всяких дополнительных построений – искомая точка встречи (чертеж 8.6, 8.7. а, б) как общая точка, должна одновременно находится и на прямой и в заданной проецирующей плоскости, т.е. на рабочем следе.



Чертеж 8.6.

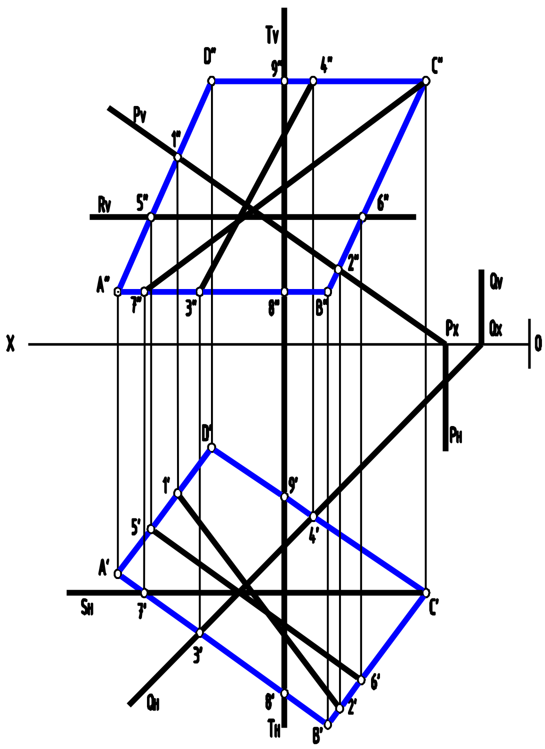


Чертеж 8.7.

8.3. Взаимное пересечение плоскости общего положение с плоскостью частного положения.

Линия сечения любой плоской фигуры проецирующей плоскостью есть прямая, которая строится по точкам встречи (чертеж 8.8.) двух любых прямых, плоской фигуры, с секущей проецирующей плоскостью.

На чертеже 8.8 задана плоская фигура ABCD в виде прямоугольника общего положения, который рассечен в различных направлениях разными проецирующими плоскостями: Фронтально – проецирующая плоскость P(P_V, P_W) пересекает заданную фигуру по линии общего положения 12(1'2'; 1"2").



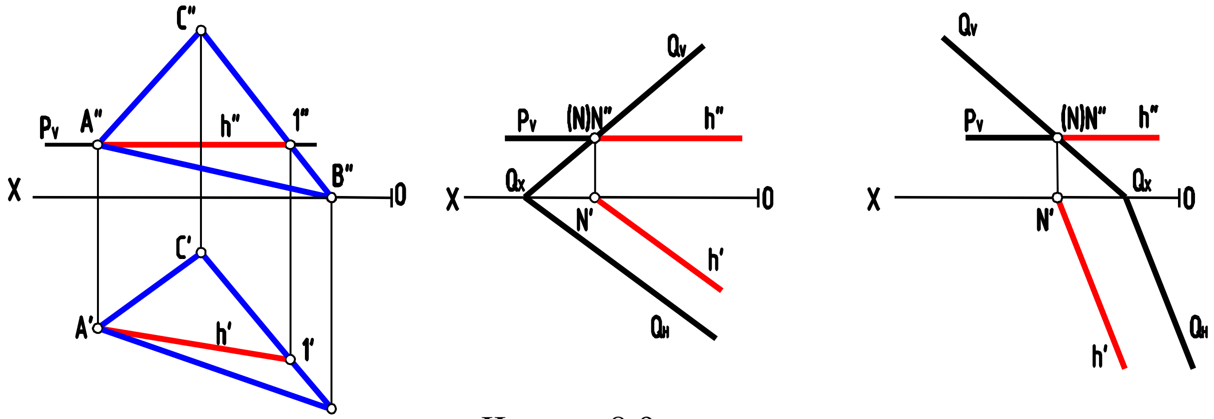
Горизонтально – проецирующая плоскость Q(Q_H, Q_V) пересекает заданную фигуру также по линии общего положения 34 (3'4'; 3"4"). Если плоская фигура рассечется горизонтальной плоскостью R(R_V), то линия сечения 56 (5"6"; 5'6') будет являться горизонталью, т.е. ее фронтальная проекция 5"6" параллельна оси OX. Кроме того, эта линия сечения в горизонтальной плоскости R, а любая линия, расположенная в горизонтальной плоскости, заведомо является горизонталью.

Чертёж 8.8.

На произвольном расстоянии от V проведена фронтальная секущая плоскость S(S_H), которая пересекала заданную фигуру по фронтали C7 (C'7').

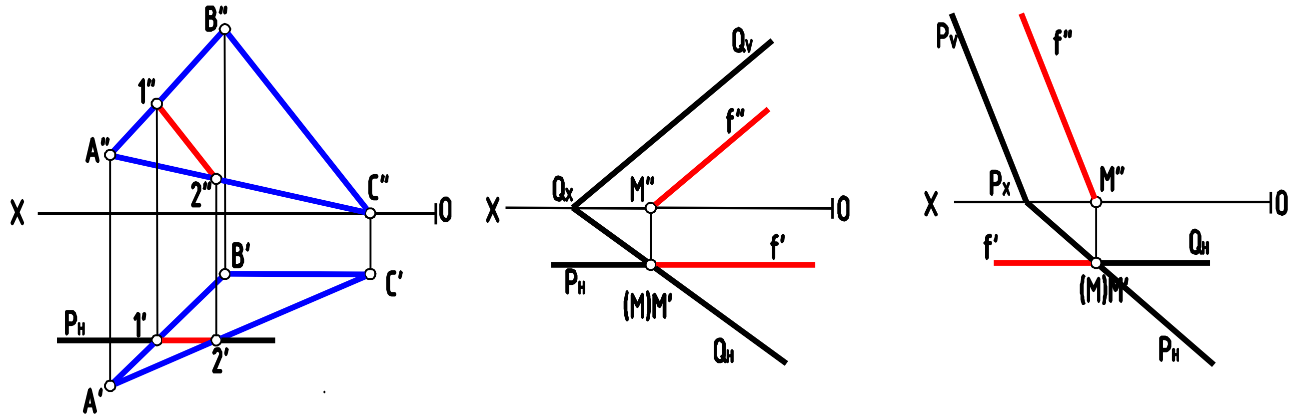
И наконец, на произвольном расстоянии от W проведена профильная секущая плоскость T($T_V T_H$), которая рассекла плоскую фигуру именно по профильной прямой 89 (8'9'; 8"9").

Из изложенного следует вывод:
Любую плоскость пересекает:
– горизонтальная плоскость – по горизонтали;
– фронтальная плоскость – по фронтали;
– профильная плоскость – по профильной прямой.
Это видно и на следующих чертежах 8.9., 8.10.
Горизонтальная плоскость – по горизонтали:
а) б) в)



Чертеж 8.9

Фронтальной плоскостью – по фронтали:



Чертеж 8.10.

Вопросы к лекции №8

1.Как образуются следы плоскости?
2.Какое геометрическое тело образуется при пересечении прямой с плоскостью частного положения?
3. Как могут пересекаться плоскости общего положение с плоскостью частного положения?

ЛЕКЦИЯ № 9

Тема: Взаимное пересечения плоскостей общего положения. Точка встречи прямой общего положения с плоскостью общего положения.

План.

1. **Взаимное пересечение плоскостей общего положения.**
2. **Точка встречи прямой общего положения с плоскостью общего положения.**

9.1. Взаимное пересечения плоскостей общего положения.

Чтобы построить прямую линию взаимного пересечения двух любых плоскостей, необходимо и достаточно найти любым приемом две общие точки, которые можно найти следующими построениями:

а) методом общих сечений, на основе сечения любых плоскостей проецирующими плоскостями (чертежи 8.8, 8.9, 8.10.). В дальнейшем этот основной метод будет применяться для построения пространственной кривой линии взаимного пересечения двух любых поверхностей и для решения ряда других вопросов.

б) Построением точек встречи двух прямых одной плоскости со второй заданной плоскостей.

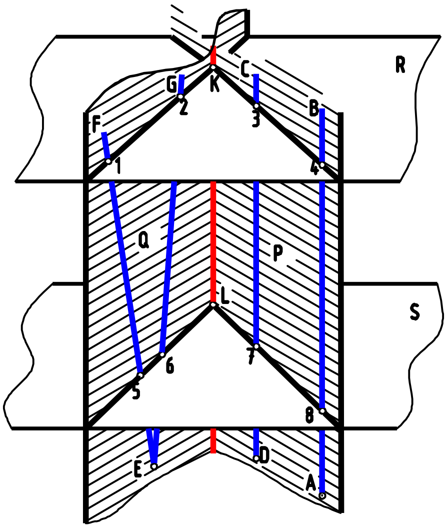
в) Непосредственно в пересечении одноименных следов заданных плоскостей.

Рассмотрим следующий случай взаимного пересечения плоскостей, заданных различным образом:

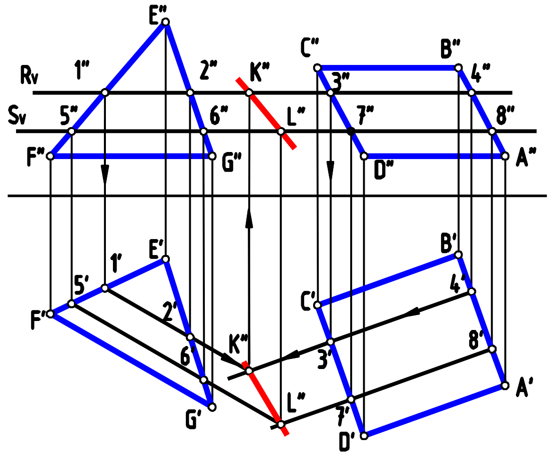
9.1.1. Обе плоскости заданы в пространстве плоскими фигурами. (Это равносильно тому, что плоскости заданы двумя прямыми линиями – параллельными или пересекающимися, которые можно замкнуть до произвольного полного контура).

На чертежах 9.1. и 9.2. даны две произвольные плоскости общего положения. Линия взаимного пересечения их найдена методом общих сечений, с помощью двух вспомогательных проецирующих секущих плоскостей R и S (обе горизонтальные).

Первая горизонтальная плоскость R, проведенная на произвольной высоте, рассекла заданные плоскости ABCD и EFG по горизонталям 1, 2 и 3, 4, вторая секущая горизонтальная плоскость также по двум горизонталям 5, 6 и 7, 8.



Чертеж 9.1



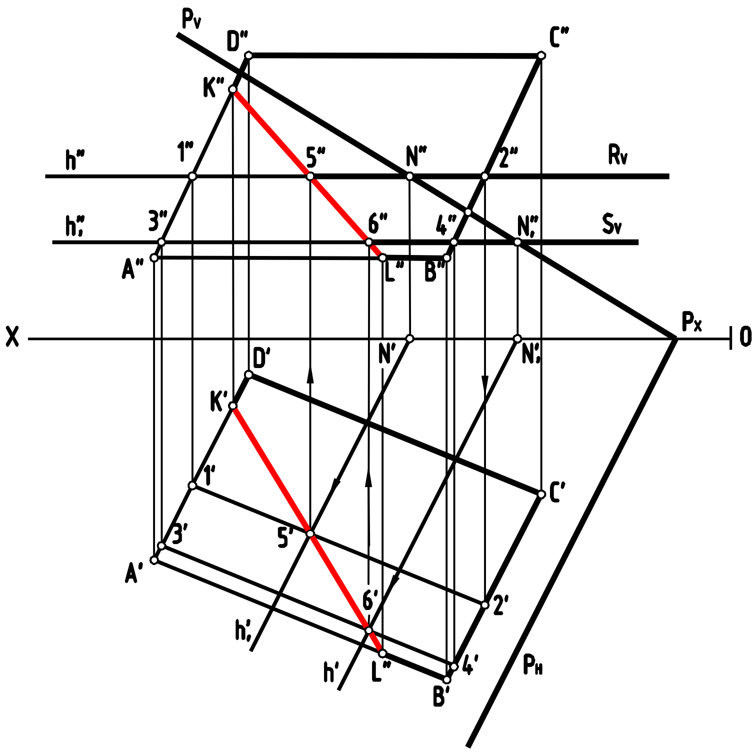
Чертеж 9.2.

Каждая пара этих вспомогательных горизонталей, расположенная в одной секущей плоскости R или S, при продолжении их на встречу дает одну общую точку K или L.

Эти общие точки определяют искомую линию пересечения KL заданных плоскостей.

9.1.2. Одна плоскость задана фигурой, другая следами.

На чертеже 68 заданы две произвольные плоскости общего положения: прямоугольник ABCD и плоскость P. Здесь линия сечения KL построена, также как и в предыдущем случае, метом общих сечений. Проведена первая секущая горизонтальная плоскость R, которая пересечет данные плоскости по горизонталям 1, 2, и h. в пересечении горизонтальных проекций этих горизонталей первая общая точка 5. аналогично получена и вторая точка 6 с помощью плоскости S.

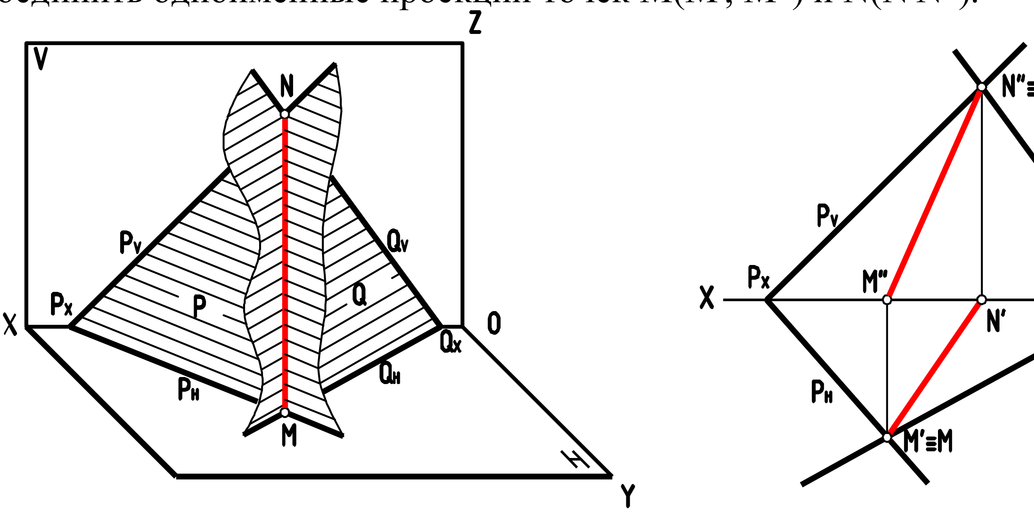


Чертеж 9.3.

9.1.3. Обе плоскости заданы следами.

Для построения линии пересечения таких плоскостей достаточно будет брать точки пересечения одноименных следов, в основе которой лежит тоже метод общих сечений.

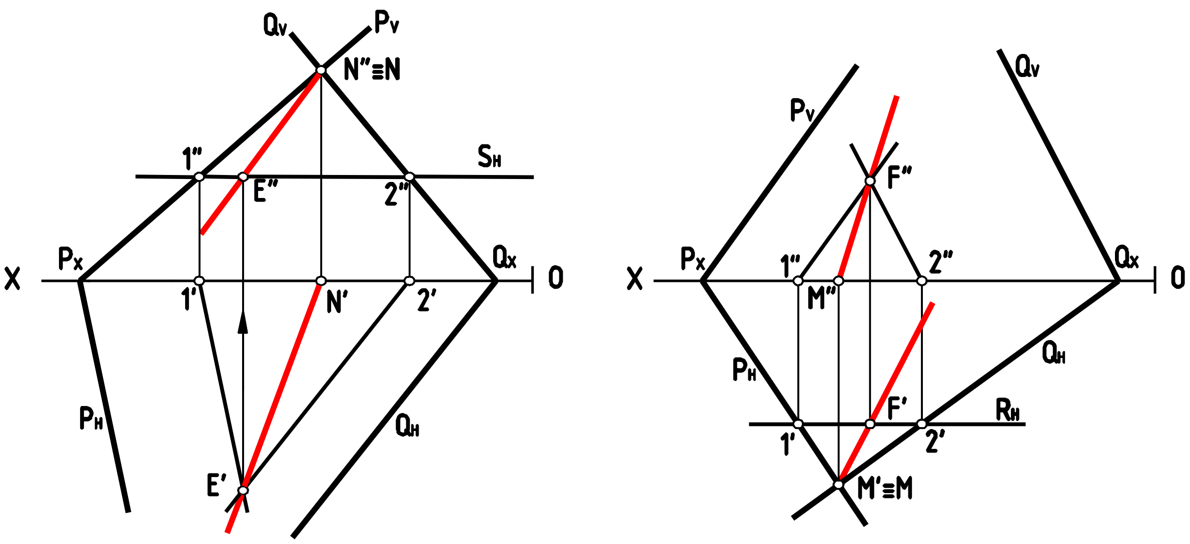
Из чертежа 9.4. видно, что горизонтальный след линии пересечения M плоскостей P и Q находится в пересечении горизонтальных следов, а фронтальный след N – вторая общая точка – в пересечении фронтальных следов данных плоскостей. Для построения на эпюре достаточно будет соединить одноименные проекции точек M(M', M") и N(N'N").



Чертеж 9.4.

На чертеже 9.5. это задача решена с помощью дополнительной горизонтальной S и фронтальной R секущей плоскости.

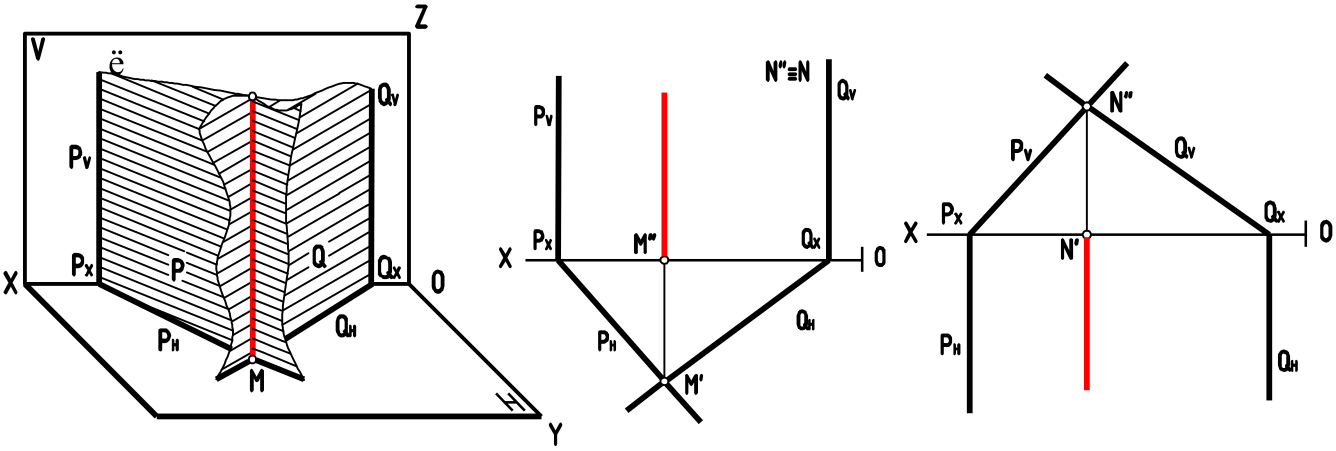
Тут одна пара следов пересекаются, а другая пара в пределах чертежа не пересекаются. Из этих эпюр видно, что наряду с горизонтальной секущей плоскостью, с таким же успехом можно пользоваться и с помощью фронтальной секущей плоскости. Если не пересекаются обе пары следов, то число вспомогательных секущих плоскостей будет две.



Чертеж 9.5.

Может быть следующий вариант, что одна пара следов пересекаются, а другая пара – не пересекается (пересечение одноименных проецирующих плоскостей, чертеж 9.6.).

Так как, обе плоскости перпендикулярны какой-либо плоскости проекций, то линия пересечения их тоже будет перпендикулярна этой плоскости, поэтому одна ее проекция в виде точки (чертеж 9.6.).

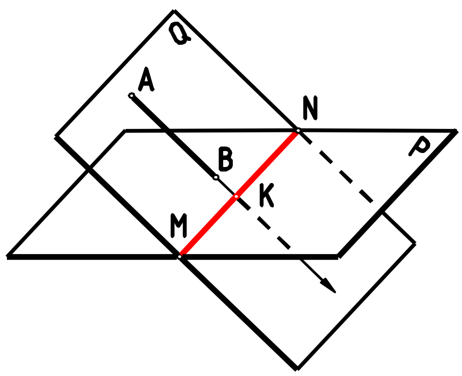


Чертеж 9.6.

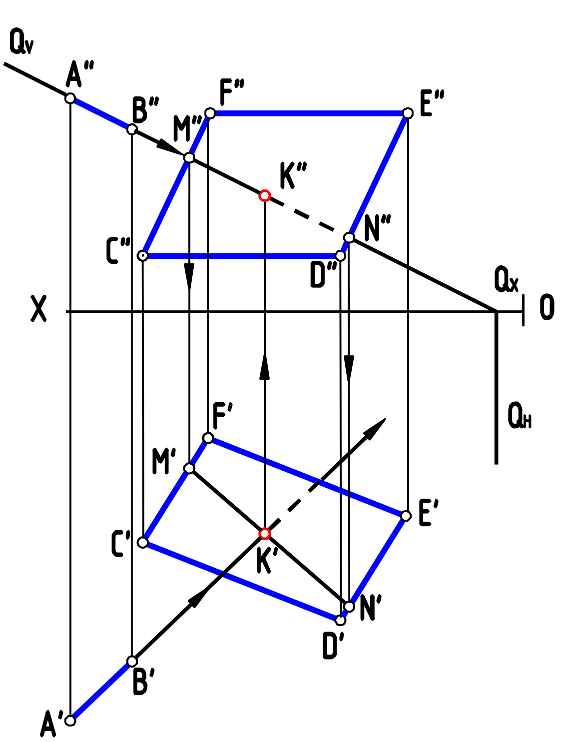
9.2. Точка встречи прямой общего положения с плоскостью общего положения.

Чтобы построить точку встречи K любой прямой AB с плоскостью общего положения CDEF или P – необходимо применять следующую схему решения (чертеж 9.7.).

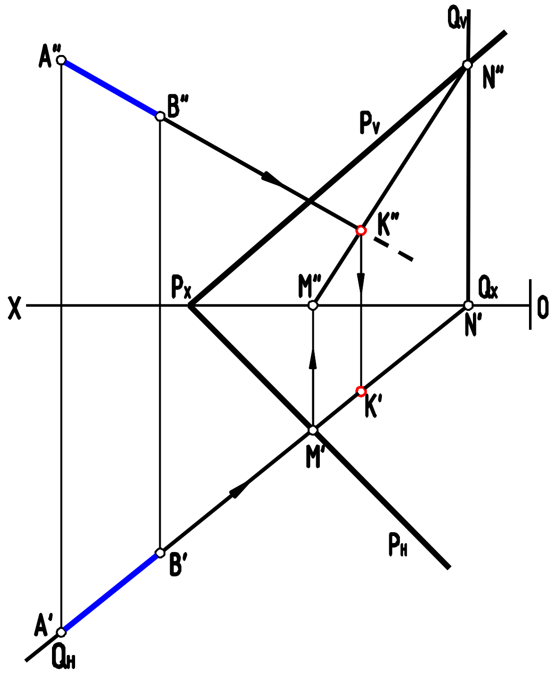
1) Через данную прямую A провести вспомогательную проецирующую плоскость Q.
2) Построить линию пересечения MN вспомогательной плоскости Q с заданной P.
3) Продолжить прямые AB и MN до взаимного пересечения в точке K, которая будет искомой точкой встречи.



Чертеж 9.7



Чертеж 9.8.



Чертеж 9.9

На чертеже 9.8. выполнена на эпюре определение точки встречи, по указанной схеме решения, когда плоскость задана в виде прямоугольника общего положения. На чертеже 9.9. тоже плоскость задана следами. В первом случае применена фронтально-проецирующая Q, а во втором построение выполнено для случая, когда горизонтально-проецирующая плоскость Q.

Вопросы к лекции №9

1. Что образуется при пересечении плоскостей общего положения.

2. Какую плоскость нужно провести через прямую чтобы найти точку встречи прямой общего положения с плоскостью общего положения?

ЛЕКЦИЯ № 10

Тема: Перпендикулярность прямой плоскости. Определение расстоянии от точки до плоскости. Перпендикулярность двух плоскостей.

План.

1.Перпендикулярность прямой к плоскости.

2. Определение кратчайшего расстояний от точки до плоскости.

3.Перпендикулярность двух плоскостей.

10.1. Перпендикулярность прямой плоскости.

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна к любой прямой, проведенной в плоскости через основание перпендикуляра, в том числе и к горизонтали и фронтали плоскости.

Исходя из правил проецирования прямого угла без искажения, угол между горизонтальной проекцией прямой и горизонталью плоскости, и угол между фронтальной проекцией прямой фронталью плоскости будет составлять равным 90˚ (чертеж 10.1.). Это и есть условие перпендикулярности прямой к плоскости.

На основе изложенного определяется следующая схема решения для построения перпендикуляра.

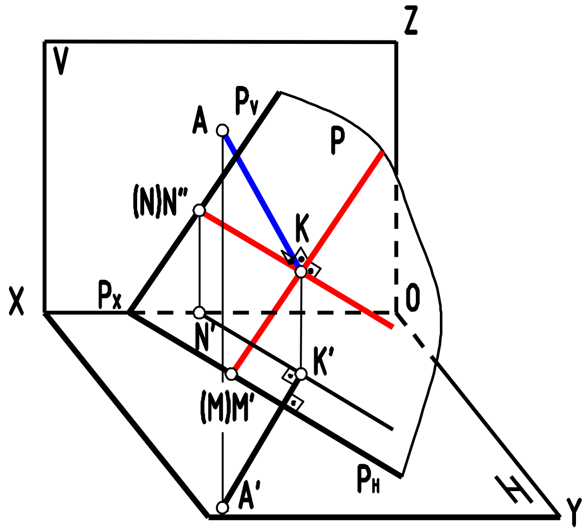
Чтобы начертить в проекциях прямую, перпендикулярную плоскости необходимо:

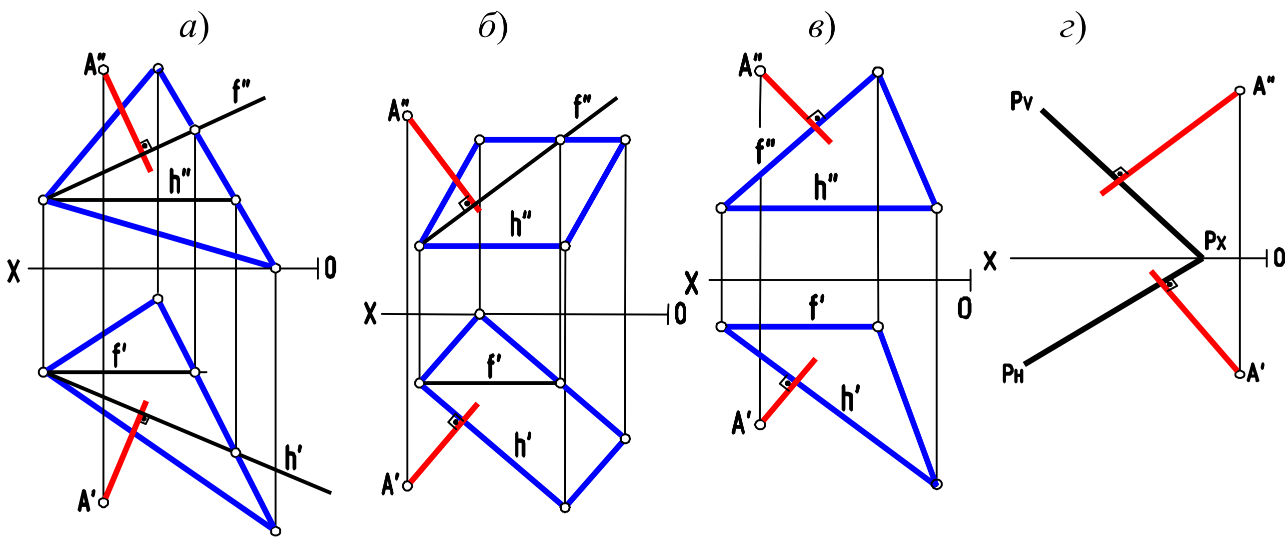
1) Провести в плоскости вспомогательные горизонталь, фронталь и профильную прямую (если нет следов плоскости).

2) Горизонтальную проекцию перпендикуляра провести под прямым углом к горизонтальной горизонтали или к следу P_H плоскости (чертеж 10.1.).

3) Фронтальную проекцию перпендикуляра провести под прямым углом к фронтальной проекции фронтали или к фронтальному следу P_V плоскости.

4) Профильную проекцию перпендикуляра провести под прямым углом профильной проекции профильной прямой или профильному следу.





Чертеж 10.2.

Если имеется в плоскости готовая горизонталь или фронталь, то перпендикуляр проводится прямо к ним (чертеж 10.2., *б* и *в*).

10.2. Определение расстоянии от точки до плоскости.

Типовые задачи на условие перпендикулярности. Чтобы решить в проекциях любую пространственную задачу, надо знать не только основные построения, но и схему решения, т.е. порядок действия.

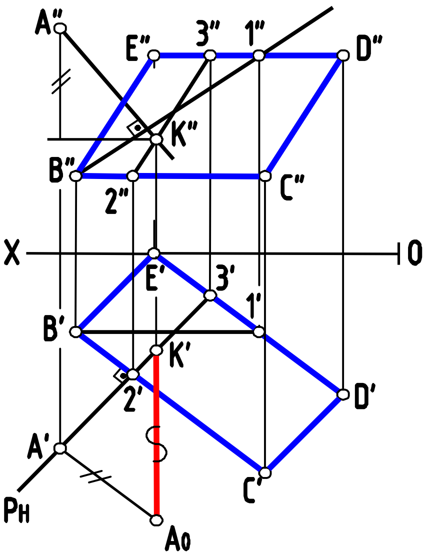
Первая типовая задача.

а) Определить расстояние от точки А до плоскости ABCD или P, что то же самое:
б) Спроецировать точку А на плоскость ABCD или P чертежи 10.3., 10.4., 10.5.

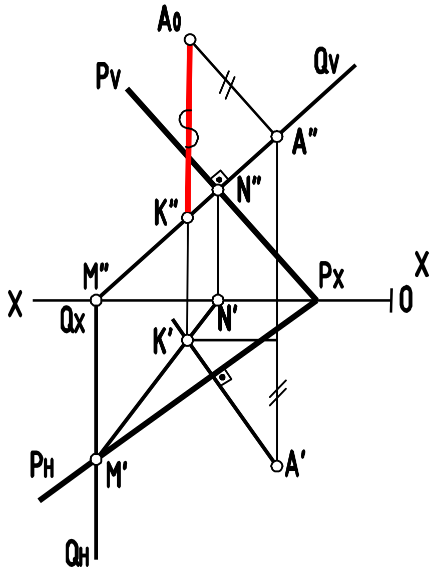
Схема решения:

1. Через точку А провести прямую, перпендикулярную плоскости см. чертеж 10.3.
2. Найти точку встречи К (см. чертежи 10.3.) перпендикулярной прямой с плоскостью.
3. Определить истинную длину отрезка перпендикуляра между точками А и К методом прямоугольного треугольника. Это и есть искомое расстояние.

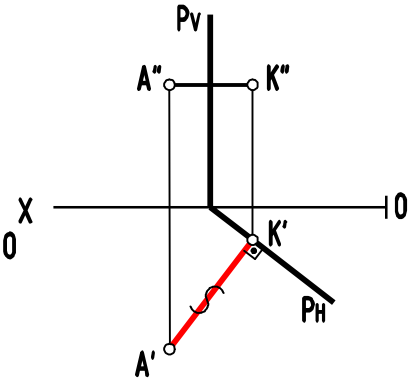
Указание: Пункт (2) решается только первыми двумя действиями схемы решения, т.к. точка встречи перпендикуляра есть искомая проекция данной точки на данной плоскости.



Чертеж 10.3



Чертеж 10.4.



Чертеж 10.5.

На чертеже 10.3 определено расстояние от точки А до плоскости общего положения BCDE.

На чертеже 10.4. определено расстояние от точки А до плоскости общего положения Р.

На чертеже 10.5. определено расстояние от точки А до горизонтально проецирующей плоскости Р.

Вторая типовая задача.

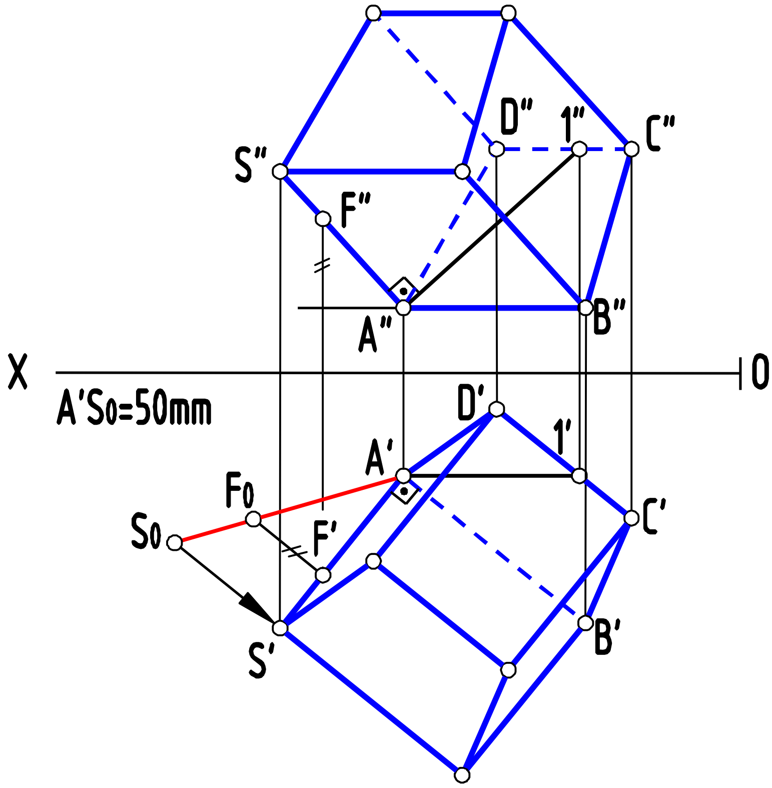
На заданном расстоянии, (например 50 мм) провести равную и параллельную плоскость заданной ABCD и оформить образовавшуюся призму.

Схема решения:

1) Через любую вершину основания (например, через А, чертеж 10.6.) провести перпендикуляр к плоскости (на Н к горизонтали, на V к фронтали) и отложить на нем произвольный отрезок AF.

2) Определить истинную длину произвольного отрезка AF(A'F').

3) По направлению истинной длины отложить данную высоту 50 мм = A'S$_0$.



Чертеж 10.6.

4) $A'S_0$ обратно спроецировать на перпендикуляр A'S' и найти фронтальную проекцию A"S".
5) На H отложить отрезок A'S' на всех ребрах.
6) На V отложить отрезок A"S" на всех ребрах и оформить призму с условием видимости.

<u>Третья типовая задача.</u>

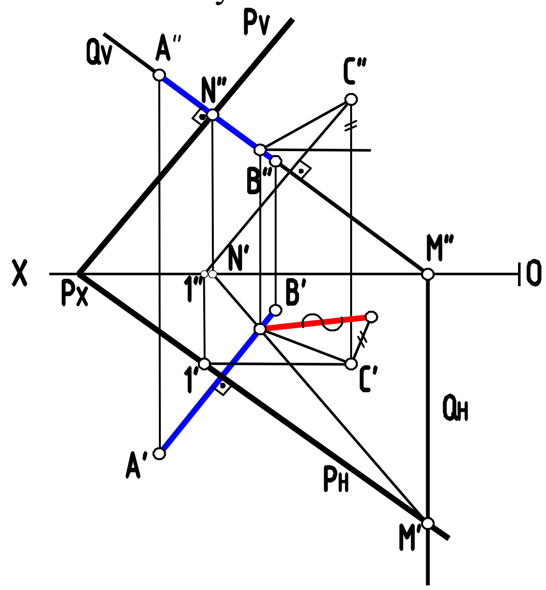
Определить расстояние от точки C до прямой AB (чертеж 10.7.).

<u>Схема решения:</u>

1) Через данную точку C провести вспомогательную плоскость P перпендикулярную данной прямой AB, для этого: через C" проводим фронталь C"1" будущей перпендикулярной плоскости перпендикулярно к A"B" и находим горизонтальный след 1' этой фронтали, через которого проходит горизонтальный след P_H перпендикулярной плоскости. P_H проводим перпендикулярно A'B' до P_X, от P_X проводим фронтальный след P_V перпендикулярно к A"B.

2) Построить точку встречи K данной прямой с нормальной плоскостью P .

3) Соединить данную точку (C) с точкой встречи (K). Полученный отрезок прямой будет искомым расстоянием



Чертеж 10.7.

10.3. Перпендикулярность двух плоскостей.

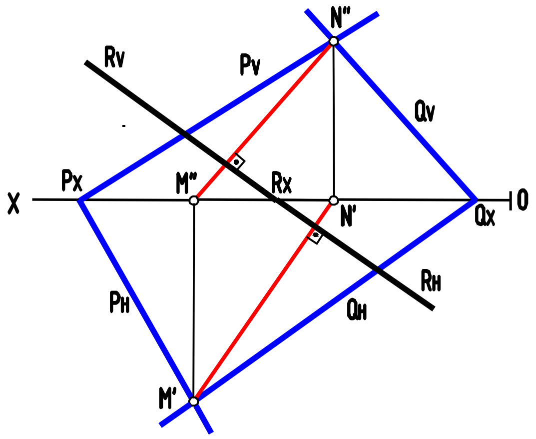
Если какая-либо прямая перпендикулярна данной плоскости, то плоскость, проходящая через эту прямую, будет перпендикулярна данной плоскости.

<u>Первая типовая задача.</u> Через прямую AB провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости CDE.

Решение: Через произвольную точку на прямой (например A(A'A"), чертеж 10.7.) провести перпендикуляр к плоскости, для чего проводим горизонталь C1(C'1'; C"1") и фронталь C2(C'2'; "2") плоскости CDE. Горизонтальная проекция перпендикуляра будет перпендикулярна к горизонтали (A'K'⊥C'1'), а фронтальная проекция – перпендикулярна к фронтали (A"K"⊥C"2"). Полученная плоскость BAK – будет искомой.

<u>Вторая типовая задача.</u> Через точку R_X на оси провести перпендикулярную плоскость $R(R_H, R_V)$ к двум заданным P и Q (чертеж 10.8).

Для решения этой задачи предварительно определяется линия взаимного пересечения MN (M'N'; M"N) данных плоскостей. Горизонтальный след плоскости $R(R_H)$ будет перпендикулярен к горизонтальной проекции линии пересечения, т.е. $R_H \perp M'N'$, а фронтальный след плоскости $R(R_V)$ пройдет перпендикулярно к фронтальной проекции, т.е. $R_V \perp M''N''$.



Чертеж 10.8

Вопросы к лекции №10

1. **Для решений каких задач используются перпендикулярность прямой плоскости?**
2. **Сколько этапов нужно для определения расстоянии от точки до плоскости?**
3. **Как можно определить перпендикулярность двух плоскостей?**

ЛЕКЦИЯ № 11

Тема: Параллельность прямой к плоскости. Две взаимно параллельные плоскости.

План.

1.Параллельность прямой к плоскости.

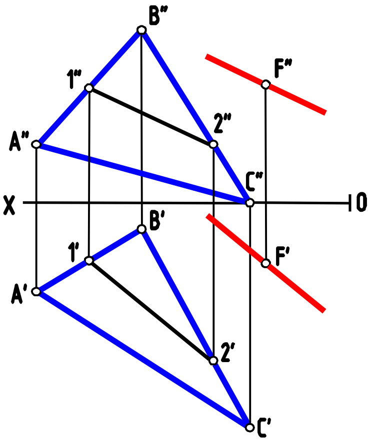
2. Две взаимно параллельные плоскости.

11.1. Параллельность прямой к плоскости.

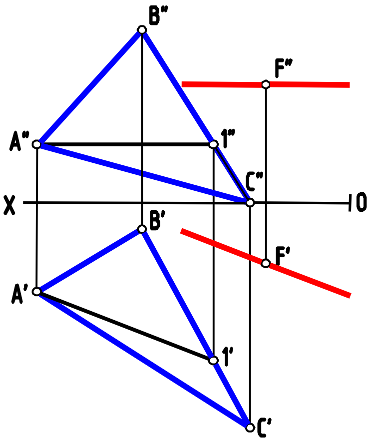
Из геометрии известно, что прямая параллельна плоскости, если ее проекции параллельны одноименным проекциям другой прямой, лежащей в плоскости.

Первый типовой пример: Через точку провести прямую, параллельную плоскости.

Даны (чертеж 11.1) плоскость ABC и точка F. В плоскости ΔABC проводится соответствующая вспомогательная прямая, например 1, 2, а через заданную точку F – искомая прямая, проекции которой параллельны одноименным проекциям вспомогательной прямой 1, 2 плоскости.



Чертеж 11.1



Чертеж 11.2

<u>Второй типовой пример</u>. Через точку провести прямую, параллельную плоскости и одновременно, параллельную, например, горизонтальной плоскости проекций.

Даны (чертеж 11.2) плоскость ABC и точка F. Здесь в плоскости проводится вспомогательная прямая, параллельная H, т.е. горизонталь A1. искомая прямая проводится через точку F по условию параллельности.

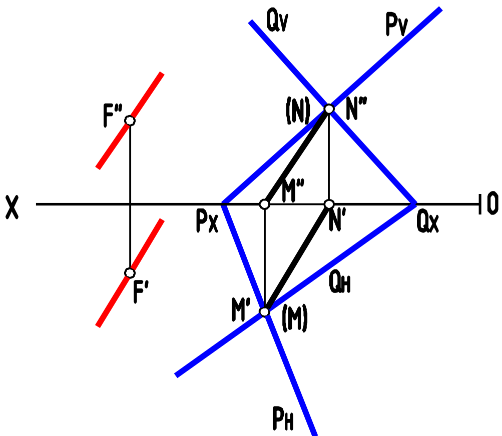
<u>Третий типовой пример.</u> Через точку провести прямую, параллельную одновременно двум плоскостям.

Здесь искомая прямая (чертеж 11.3) должна быть параллельна линии взаимного пересечения заданных двух плоскостей.

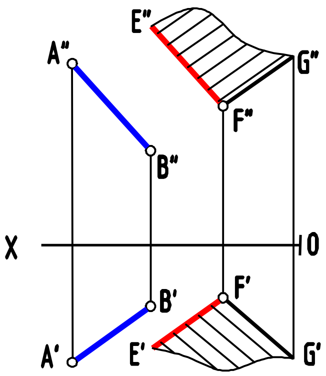
<u>Четвертый типовой пример.</u> Через точку провести плоскость, параллельную данной прямой.

Очевидно, через точку можно провести множество плоскостей, отвечающей условию.

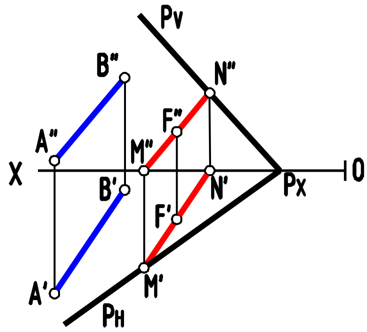
Даны (чертежи 11.3, 11.4) точка F(F'F") и прямая AB(A'B', A"B"). В первом варианте плоскость проведена в пространстве, двумя пересекающимися линиями, одна из которых, здесь FE, должна быть проведена параллельна заданной прямой, а вторая FG – произвольно.



Чертеж 11.3



Чертеж 11.4



Чертеж 11.5

Во втором варианте (чертеж 11.5) искомая плоскость P проведена следами P_H P_V, через вспомогательную прямую MN(M'N'; M"N"), проходящую через заданную точку F(F'; F"), и параллельна данной прямой AB. Здесь точка схода следов P_X может быть выбрана в любом месте на оси OX.

11.2. Две взаимно параллельные плоскости.

Из геометрии известно, что если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны между собою, значит:

1) Если плоскости взаимно параллельны, то одноименные их следы параллельны между собою
2) Если плоскости параллельны, то одноименные главные линии их параллельны между собою.

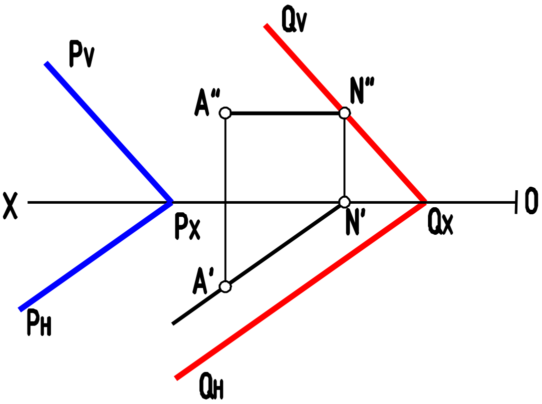
Первая типовая задача. Через точку A провести плоскость Q, параллельную заданной P (следами).

Схема решения:

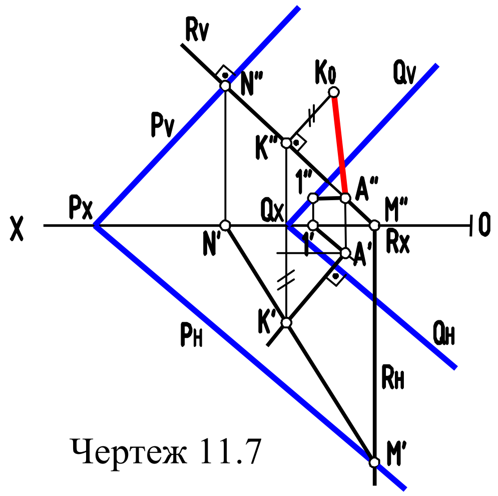
1) Через точку A проводим горизонталь NA (или фронталь) параллельно горизонтальному следу данной плоскости (чертеж 11.6.) и находим ее фронтальный след (N', N");

2) Через N" проводим фронтальный след Q_V параллельно P_V и отмечаем точку схода следов Q_X.

3) Через Q_X проводим горизонтальный след Q_H параллельно P_H.



Чертеж 11.6



Чертеж 11.7

Вторая типовая задача. Определить расстояние между параллельными плоскостями P и Q (чертеж 11.7).

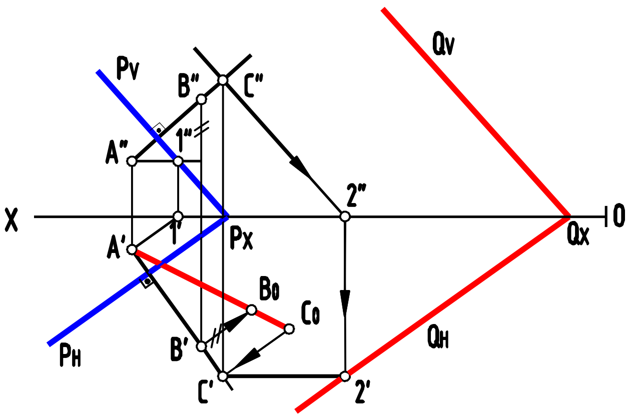
Решение:

1) На одной из плоскостей (например Q) выбираем произвольную точку A(A'A") и восстановим общий перпендикуляр.
2) Находим точку встречи K(K'K") перпендикуляра со второй плоскостью P(P_H, P_V).
3) Определяем истинную длину отрезка AK перпендикуляра, заключенного между двумя параллельными плоскостями.

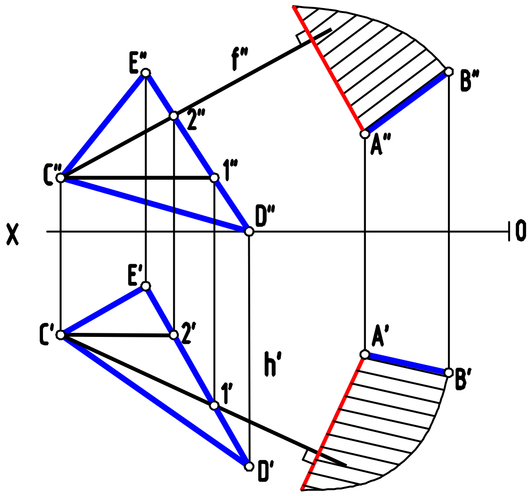
Третья типовая задача. На заданном расстоянии (например, 50 мм) от заданной плоскости $P(P_H, P_V)$, провести параллельную плоскость Q.

Решение:

1) Через произвольную точку А на заданной плоскости проведем перпендикуляр и ограничим произвольной точкой B(B',B'') (чертеж 11.8).
2) Находим истинную длину произвольного отрезка AB($A'B_0$).
3) По направлению истинной длины, от точки A' отложим данное расстояние ($A'C_0$=50) и обратно спроецируем на перпендикуляр и получаем точку C(C', C'').
4) Через точку C'' проведем фронталь (или горизонталь через C') и



Чертеж 11.8



Чертеж 11.9

находим горизонтальный след 2' фронтали.

5) Параллельная плоскость $Q(Q_H)$ проводим через точку 2' до пересечения с осью OX и получим точку схода следов Q_X, через которую пройдет фронтальный след Q_V параллельно P_V.

Вопросы к лекции №11

1. Когда прямая будет параллельна к плоскости?
2. Как можно определить расстояние между двумя взаимно параллельными плоскостями?
3. Сколько этапов нужно для решения задачи по определению расстояния между двумя параллельными плоскостями?

ЛЕКЦИЯ № 12

Тема: Способы преобразования чертежа. Способ вращения. Способ совмещения.

План.

1.Способы преобразования чертежа.
2.Способ вращения.
3.Способ совмещения.

12.1. Способы преобразования чертежа.

Для определения истинных величин отрезков, плоских фигур, линейных и двугранных углов и для решения различных задач применяются следующие способы:

I. СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ.
II. СПОСОБ ПЕРЕМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ.

Эти два способа взаимно противоположны и дают возможность решать одни и те задачи, но:

I. При решении задач способом перемены плоскостей проекций заданные геометрические элементы остаются неподвижными, а плоскости проекций заменяются новыми;
II. При решении же задач способом вращения, наоборот, - основные заданные плоскости проекций остаются неизменными, неподвижными, а исследуемые геометрические элементы вращаются вокруг выбираемых осей до необходимых положений, дающих решение поставленной задачи.

Некоторые задачи решаются обеими способами.

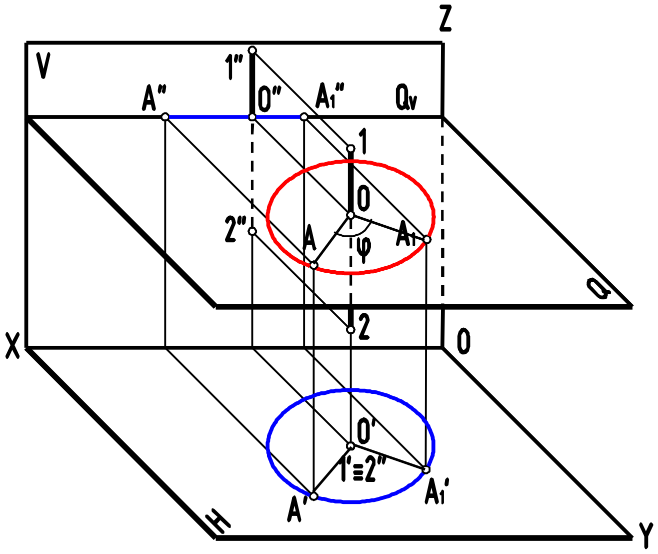
12.2. Способ вращения.

При решении задач способом вращения заданные основные плоскости проекции остаются неподвижными, а геометрический элемент (отрезок прямой, плоская фигура, плоскость, объемные тела) вращается до нового положения, необходимого для решения задачи.

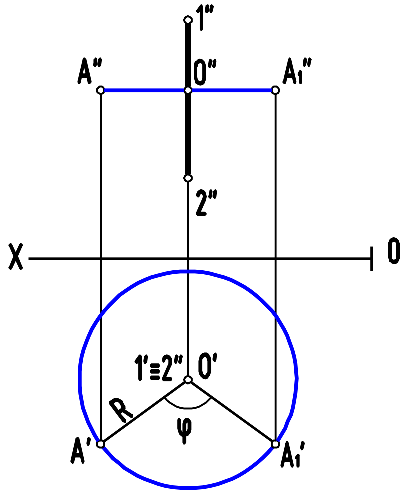
Вращения производится вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций H, V и W и выбираемых в зависимости от условия задачи, и выполняется на заданном эпюре V/H с помощью практически вполне доступных, несложных геометрических построений.

Способ вращения основан на вращении точки A вокруг неподвижной оси 1, 2 в плоскости перпендикулярной оси, при неизменном радиусе вращения. Таким образом, траекторией вращаемой точки является окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения (чертеж 12.1.).

Если вращение точки производится вокруг оси 1, 2 (чертеж 12.2.), перпендикулярной H, то горизонтальная проекция точки описывает окружность, а фронтальная проекция перемещается по прямой, параллельной оси (по следу плоскости вращения).



Чертеж 12.1.



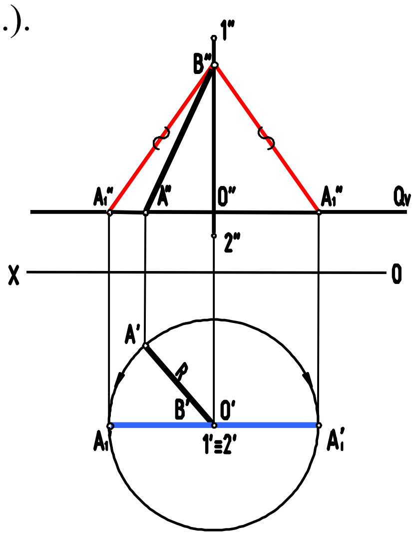
Чертеж 12.2.

Здесь через A" проведен след Q_V плоскости вращения, под углом 90° к оси 1"2", отмечая центр вращения O', O" и радиус вращения R в истинную величину. Радиусом R, из центра O' описывается проекция полной траектории (окружность) вращаемой точки. На окружности отмечена горизонтальная проекция A' и смешенное на угол φ положение A_1'. На следе Q_V отмечена соответствующая фронтальная проекция смещенной точки A_1''.

Типовая задача. Определить истинную величину (и угол наклона α) отрезка AB прямой общего положения (чертеж 12.3.).

Решение:

1) Через любую конечную точку отрезка, здесь B', B" расположенная на оси вращения, остается неподвижной. Вращается только точка A(A", A").
2) Через фронтальную проекцию A" проводится след Q_V плоскости вращения $Q_V \perp 1"2"$.
3) Отмечается центр вращения O'O" и радиус вращения R в истинную величину.
4) Радиусом R, из центра O' описывается окружность.



Чертеж 12.3.

5) Точка A' поворачивается в крайнее левое A_1' или крайнее правое положения A_1', что соответствует смещенному положению отрезка, когда он параллелен плоскости V, и следовательно спроецируется на V в истинную величину, что позволит определить угол α.

Если повернуть отрезок на полный оборот вокруг оси, то образуется конус вращения, хорошо видимый на проекциях.

Если вращение точки производится вокруг оси ⊥V, то проекции, чертеж 12.4., поменяется местами, а Q_V будет Q_H.

Рассмотренную типовую задачу практически очень удобно использовать в будущем, при построении разверток поверхностей пирамид и конусов, для определения истинных длин ребер пирамиды или образующих конуса.

12.2.1. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ

Если плоская фигура расположена в проецирующей плоскости, т.е. перпендикулярна плоскости проекций, то вращением вокруг оси, перпендикулярной этой же плоскости проекций, фигуру можно повернуть до положения, параллельно другой плоскости проекций, что даст ее истинную величину.

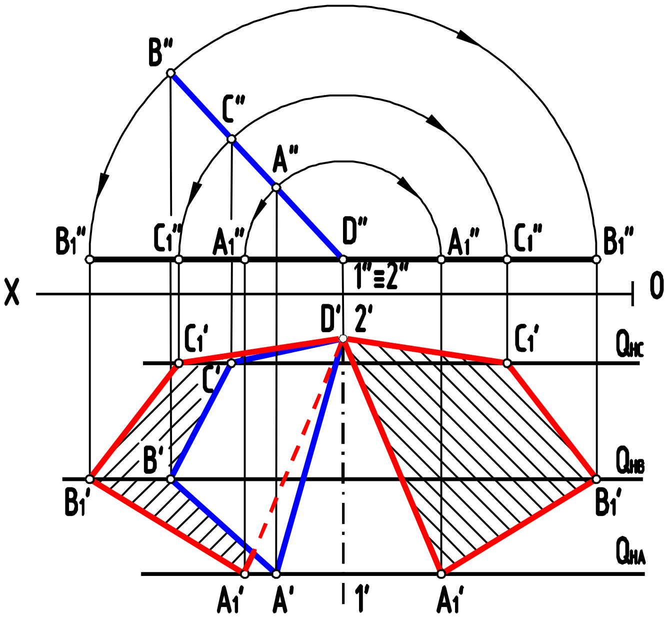
Пример. Определить истинную величину плоской фигуры, расположенной во фронтально-проецирующей плоскости, способом вращения.

На чертеже 12.4. дана плоская фигура ABCD.

Решение:

1) Выбирается ось вращения 12(1'2'; 1"2")⊥V, и проходящая через вершину D(D'D"), т.е. точка D при вращении фигуры остается неподвижной, вращаются точки A, B, C.

2) Точки A"B"C" поворачивается по дуге окружности из центра 1"2", либо в правое положение A_1",C_1" и B_1", либо в левое – A_1", C_1" и B_1".



Тогда фронтальная проекция фигуры будет параллельна оси X, а горизонтальная – проецируется в истинную величину, т.к.

фигура окажется параллельной H, в новом положении. Чертеж 12.4.

Действительно:

3) Проведя следы Q_{HA}, Q_{HB} и Q_{HC} плоскостей движения через точки A', B' и C', найдем на них проекции A_1', B_1' и C_1' справа, или A_1', B_1' и C_1' – слева. Соединив эти точки прямыми линиями с неподвижной точкой D', получим искомую проекцию фигуры в истинной величине. Из чертежа видно, что необходимо и достаточно вращать фигуру только в одну сторону – по часовой стрелке, или против.

12.2.2. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ ВОКРУГ ОСЕЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ H и V

Плоскую фигуру общего положения всегда можно привести в положение, параллельное плоскости проекций, последовательным вращением вокруг двух осей, перпендикулярных H и V. Тогда на эту плоскость проекций заданная плоская фигура проецируется в истинную величину.

На чертеже 12.5. дан плоский треугольник ABC(A'B'C', A"B"C") общего положения. Вращение до получения его истинной величины выполняется в следующем порядке:

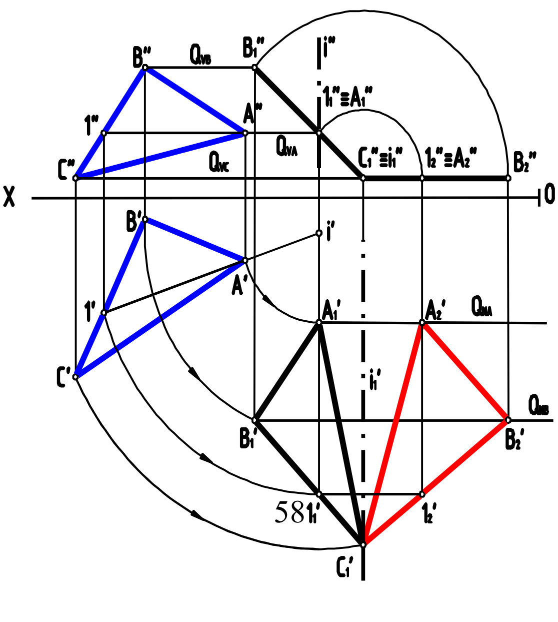
1) На любой высоте в плоскости фигуры выбирается ведущая горизонталь (здесь A'1'; A"1").

2) На достаточном удалении от плоской фигуры проводится первая ось вращения i', i"⊥H и пересекающая ведущую горизонталь.

3) Вращением вокруг этой оси, с помощью ведущей горизонтали, которая поворачивается до положения перпендикулярного плоскости V, плоская фигура поворачивается во фронтально-проецирующее положение A_1'B_1'C_1'; A_1"B_1"C_1".

4) Через любую вершину (например C_1', C_1") плоской фигуры проводится вторая ось вращения 3'4', 3"4".

5) Вращением этой второй оси в направлении стрелки заданная плоская фигура приводится в положение, параллельное плоскости H, на которую она с проецируется в истинную величину.



Чертеж 12.5.

12.2.3. ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ГОРИЗОНТАЛИ

Если вращать плоскую фигуру общего положения вокруг собственной горизонтали, то очевидно, что одним поворотом всегда можно привести ее в положение, параллельное плоскости Н, на которую она проецируется в истинную величину.

Единственным недостатком этого способа является то, что новая проекция фигуры, представляющая ее истинную величину, в ряде случаев частично накладывается на заданную фигуры. Однако, этот недостаток следует считать условным, т.к. в случае ограниченности места на чертеже, не позволяющею применить способ вращения или перемены плоскостей проекций, этот недостаток превратится в положительное свойства данного способа. Существенным достоинством этого способа является краткость построений: первая же новая проекция – есть истинная величина фигуры.

Типовой пример: Определить истинную величину плоской фигуры ABC(A'B'C'; A"B"C") вращением вокруг собственной горизонтали.

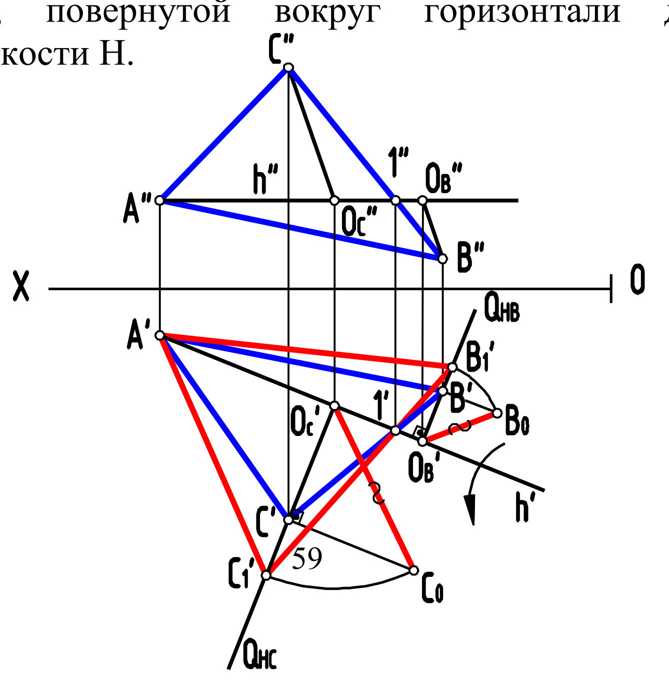
Решение: 1) Проводится вспомогательный горизонталь (A"1", A'1') которая является осью вращения (чертеж 12.6.).

2) Проводятся следы Q_{HB} и Q_{HC} плоскостей вращения, через вращаемые точки С и В (под углом 90° к оси h. Отмечается центры O_C и O_B вращения и радиусы R_B=O_BB и R_C=O_CC.

3) Определяется истинная величина радиусов вращения O_{B0} и O_{C0} по разности аппликат.

4) На следах плоскостей вращения от центра O_B и O_C откладывается радиусы вращения в истинную величину. При этом, поскольку точки В и С находятся по разные стороны. Необходимо проследить, чтобы прямая B_1' и C_1' прошла через неподвижную точку 1'.

Полученная проекция A'B_1'C_1' есть искомая истинная величина заданной фигуры, повернутой вокруг горизонтали до положения, параллельного плоскости Н.



Чертеж 12.6.

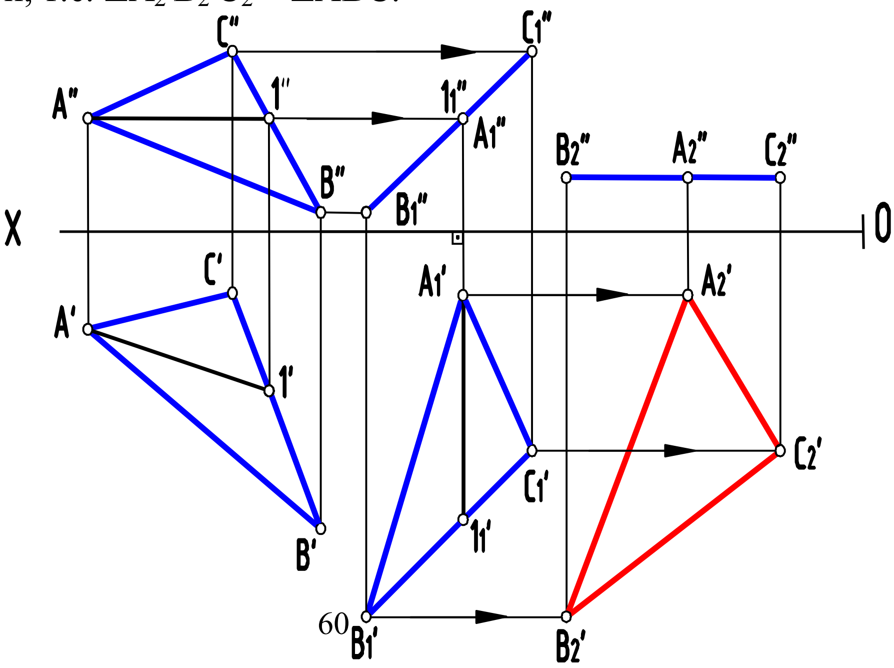
12.2.4. СПОСОБ ПЛОСКО – ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

При плоско-параллельном перемещении все точки плоской фигуры перемещается параллельно какой-либо плоскости проекций, при этом плоская фигура не меняет свою форму и размеры, относительно той плоскости проекций, на которую она перемещается параллельно, но только меняет свое положение относительно оси проекций. Другая проекция фигуры движется по прямой, параллельной оси, оси проекций (эти прямые является следами плоскостей движения). Этот способ позволяет избежать наложении друг на друга.

Типовая задача. Построить натуральную величину плоской фигуры ABC(A'B'C'; A"B"C") общего положения (чертеж 12.7.).

Решение:

1) Проводится горизонталь (A"1"↓A'1');
2) Перестроим горизонтальную проекцию треугольника так, чтобы горизонталь A'1' была перпендикулярно оси X, при этом горизонтальная проекция не меняет свою форму и размеры, т.е. $A_1'B_1'C_1'$= A'B'C';
3) Фронтальная проекция будет перемещаться по своей плоскости движения, параллельной H, тогда новая фронтальная проекция будет в виде прямой $B_1''C_1''$;
4) Теперь плоская фигура будет перемещаться параллельно V, при этом каждая точка будет перемещаться параллельно оси OX и новая фронтальная проекция приводится в положение, параллельное оси OX т.е. – $B_2''A_2''C_2''$||OX;
5) Строим новую горизонтальную проекцию, определяя каждую точку на своей плоскости движения, полученная фигура будет искомой величиной, т.е. $\Delta A_2'B_2'C_2'$= ΔABC.

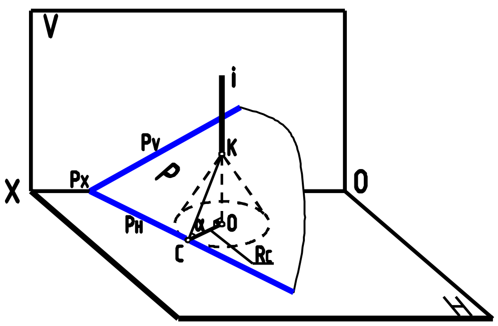


Чертеж 12.7.

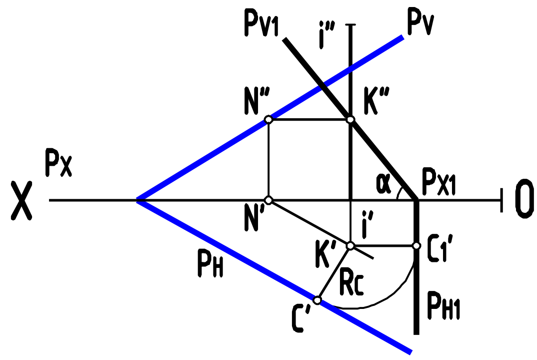
12.2.5. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ЗАДАННОЙ СЛЕДАМИ ВОКРУГ ОСИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ

Если плоскость P общего положения (чертеж 12.8.), заданную следами P_H,P_V, вращать вокруг вертикальной оси, пересекающей плоскость P, в точке – K, то угол α наклона этой плоскости относительно H, определяемый линией KC наибольшего ската, остается неизменным.

Отсюда, чтобы повернуть плоскость P общего положения вокруг вертикальной оси i, до положения фронтально-проецирующей плоскости, необходимо: (чертеж 12.9.):



Чертеж 12.8.

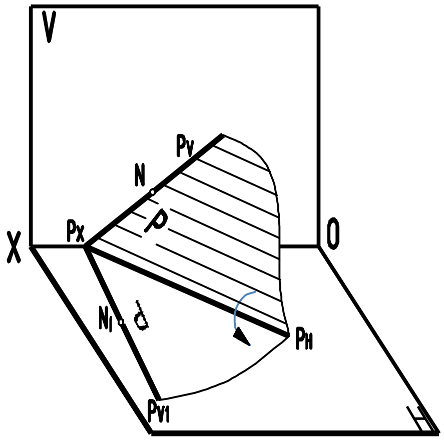


Чертеж 12.9.

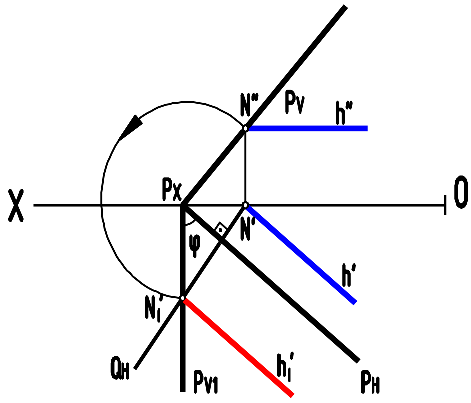
1) Определить точку встречи K (K'K'') оси вращения i(i'i'') с плоскостью P, для чего проводится горизонталь через i' и в пересечении фронтальной проекции горизонтали с осью i отмечается K'', т.к. i ⊥ H, горизонтальная проекция K' совпадает с i'.
2) Провести ведущий радиус R_C и повернут горизонтальный след P_H, с помощью ведущего радиуса, до положения перпендикулярного оси X (i'C_1'||X). отметить новую точку схода следов P_{X1}.
3) Провести новый фронтальный след P_{V1}, через P_{X1} и K''.

12.3. СПОСОБ СОВМЕЩЕНИЯ.

Способ совмещения есть частный вид способа вращения. В этом случае осью вращения будет служить горизонтальный (или фронтальный) след плоскости. С помощью простой модели (чертеж 12.10) плоскостей V и H отсека плоскости P, определяемой следами P_V и P_H, легко продемонстрировать, что плоскость P можно вращать вокруг горизонтального следа P_H до совмещения ее с H. При этом след P_V отрывается от плоскости V, а угол между следами P_V и P_H в пространстве (т.е. "ширина" отсека плоскости P остается неизменным и в проекциях, что даст возможность решать разнообразные конкретные задачи.



Чертеж 12.10



Чертеж 12.11.

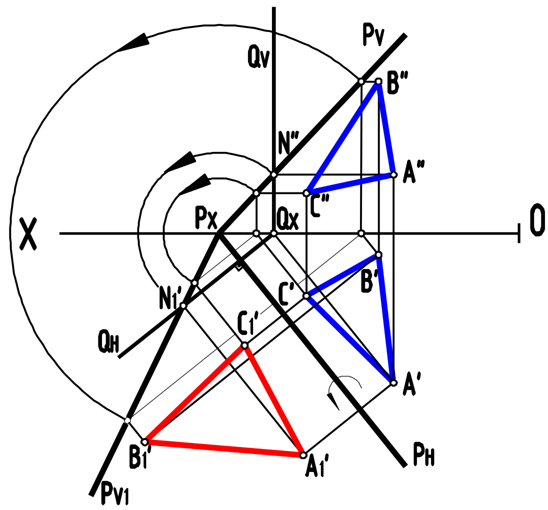
На чертеже 12.11 дана плоскость $P(P_V, P_H)$, чтобы совместить плоскость P общего положения, с плоскостью H, вращением вокруг горизонтального следа необходимо:

1) Выбрать произвольную точку N(N'N") на фронтальном следе P_V и, через ее горизонтальную проекцию N' провести след Q_H плоскости движения, под углом 90° к следу P_H .
2) Радиусом P_XN" сделать засечку N_1 на следе Q_H плоскости движения.
3) Провести искомый совмещенный след P_{V1}, через точку P_X и N_0. Горизонталь h плоскости всегда остается параллельна горизонтальному следу P_X.

<u>Типовая задача</u>. Определить истинную величину плоской фигуры ABC, лежащей на плоскости P, способом совмещения. (Задана одна проекция фигуры, горизонтальная).

<u>Решение:</u>

1) Строится недостающая, (чертеж 12.12.) фронтальная проекция фигуры, с помощью горизонталей (или фронталей).
2) Строится совмещенный след P_{V1}, с помощью вспомогательной точки N(N').
3) Строится вспомогательные совмещенные горизонтали, для всех характерных точек заданной плоской фигуры, с помощью следов Q_H плоскостей движения.



Чертеж 12.12

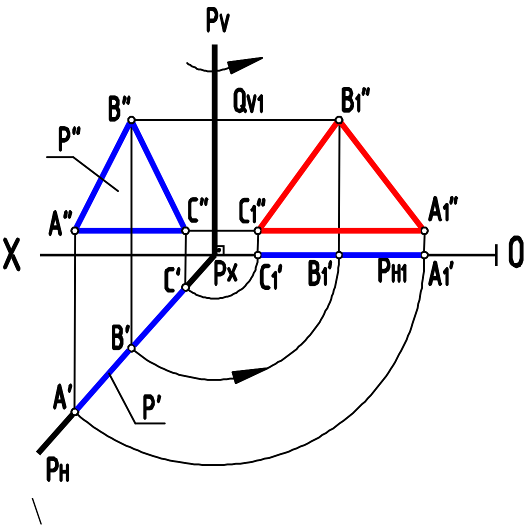
4) Находятся в совмещенном положении все характерные точки $A_1'B_1'C_{1'}$ заданной фигуры – каждая на своей горизонтали, с помощью следа Q_H своей плоскости движения.

В совмещенном положении все характерные точки соединяются линиями и получается искомая истинная величина заданной фигуры.

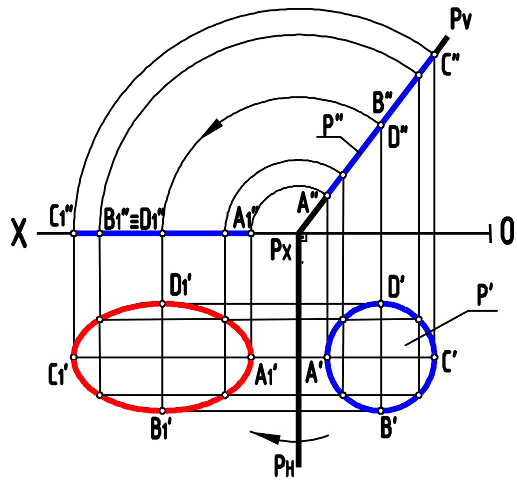
12.3.1. СОВМЕЩЕНИЕ ПРОЕЦИРУЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

В проецирующих плоскостях углы φ между следами всегда составляют 90°. Это явление облегчает нахождение совмещенного следа, т.к. его направление, по отношению к неподвижному следу, вокруг которого производится вращение, всегда заранее известно и составляет угол 90°. Поэтому здесь не требуется вспомогательная точка N(N") на фронтальном следе, как это имело место при совмещении плоскостей общего положения.

Совмещение горизонтально (чертеж 12.13) и фронтально (чертеж 12.14.) проецирующих плоскостей показано на следующих проекциях.



Чертеж 12.13



Чертеж 12.14.

Вопросы к лекции №12

1.Сколько способов преобразования чертежа существует в начертательной геометрии?

2. В чём суть способа вращения?

3. Как образуется способ совмещения?

ЛЕКЦИЯ № 13

Тема: Замена плоскостей проекции.

План.

1.Перемена одной плоскости проекций.

2.Перемена двух плоскостей проекций.

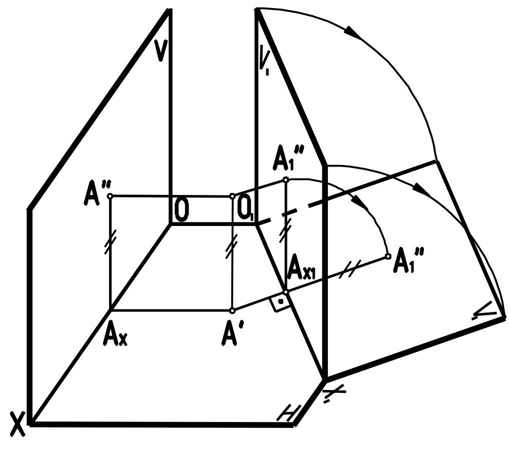
13.1. ПЕРЕМЕНА ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ.

Пусть в системе плоскостей проекций V/H задана пространственная точка A (чертеж 13.1.). Ее проекциями будут точки A' и A", полученные обычным методом прямоугольного проецирования.

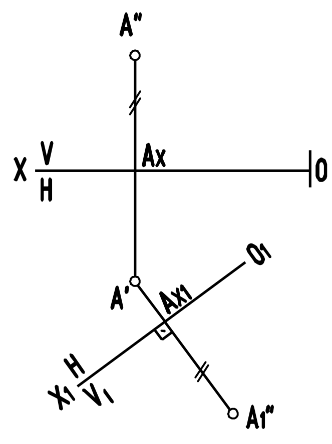
Если заменить заданную фронтальную плоскость V новой вертикальной плоскостью V_1, обязательно перпендикулярной к H, получим новую систему взаимно-перпендикулярных плоскостей проекций V_1/H, с новой осью проекций X_1.

Спроецируем данную точку A_1, тем же методом прямоугольного проецирования, на новую фронтальную плоскость V_1. Точка A_1'' есть новая фронтальная проекция данной точки A. очевидно, что аппликата

$AA' = A_XA'' = A_{X1}A_1''$.



Чертеж 13.1.



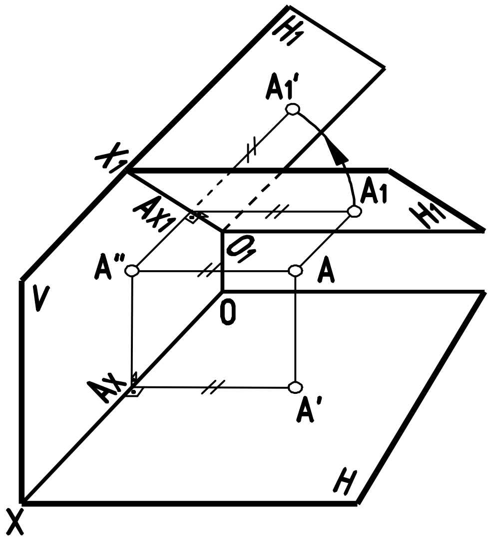
Чертеж 13.2.

Если теперь повернуть плоскость V_1 на 90° вокруг оси X_1, в направлении стрелки, то она совместится с плоскостью H в одну плоскость и образует эпюр V_1/H, на котором новая фронтальная проекция A_1'' расположится на одной прямой линии с точками $A'A_{X1}$ и будет перпендикулярна оси X_1. отрезок $A_{X1}A_1''$ равен аппликате AA'.

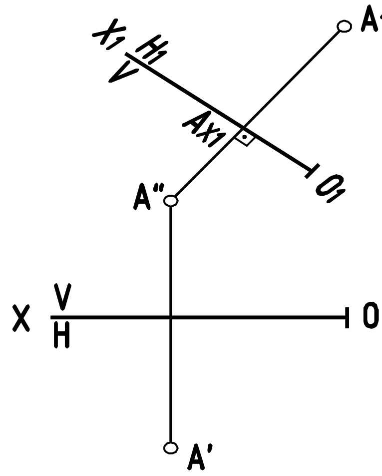
На основе изложенного, на чертеже 98 (эпюр) показано построение новой проекции A_1" точки А на плоскость V_1.

Здесь ось O_1X_1 проведена на произвольном расстоянии от А' и на нее проведен перпендикуляр. Из точки A_{X1} пересечение перпендикуляра с осью X_1 откладываем аппликату, равную A_XA", и найдем новую проекцию A_1" точки А на плоскости V_1.

С таким же успехом можно заменить и плоскость Н. На чертежах 13.3 и 13.4. (эпюр) показан переход от системы X(V/H) к системе $X_1(H_1/V)$ заменой плоскости Н плоскостью H_1. здесь новая плоскость H_1 располагается перпендикулярно к V, поэтому, т.к. ордината AA" = A'A_X параллельно к H_1, она проецируется без искажения (AA" = A_{X1}A'). здесь новая плоскость H_1 повернута вокруг оси X_1 до совмещения с V.



Чертеж 13.3.

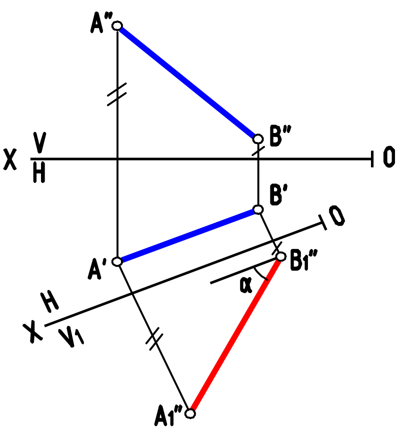


Чертеж 13.4.

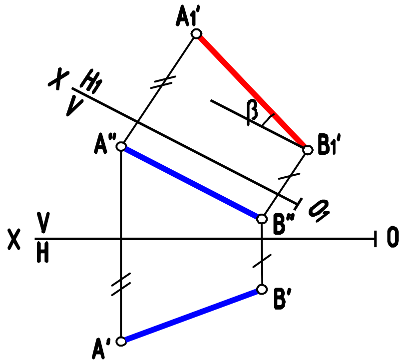
<u>Первая типовая задача</u>. Определить истинную величину отрезка АВ (А'В', А"В") общего положения переменою плоскости.

На чертеже 13.5 показан пример определения истинной величины отрезка АВ заменой плоскости V на V_1.

Новая плоскость проекций V_1 располагается параллельно заданному отрезку, на любом от него расстоянии. Для этого ось X_1 проводится параллельно горизонтальной проекции А'В' отрезка. Через конечные точки проекции проводятся новые направления проецирования под углом 90° к оси X_1, на которые откладывается аппликаты от новой оси X_1. на концах аппликат отмечаются новые фронтальные проекции A_1" и B_1", соединяя которые получим истинную длину и одновременно угол наклона α прямой относительно Н. Если заменим плоскость Н, плоскостью H_1, параллельной прямой АВ, то получим (чертеж 13.6.) $A_1'B_1'$ = АВ и угол наклона β прямой АВ к V.



Чертеж 13.5.



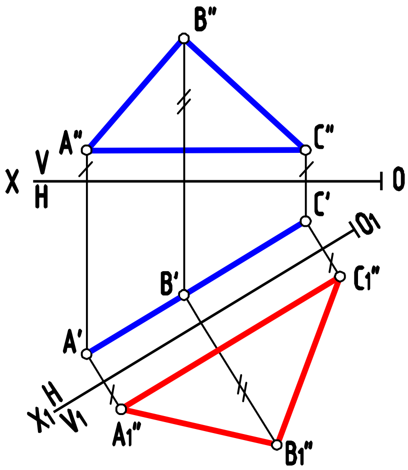
Чертеж 13.6.

<u>Вторая типовая задача.</u> Определить истинную величину проецирующей фигуры.

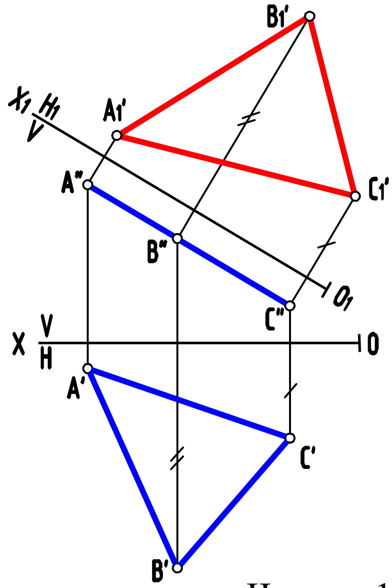
Здесь новая плоскость проекций будет расположена параллельно плоскости фигуры.

На чертеже 13.7. дана горизонтально-проецирующая фигура ABC (A'B'C', A"B"C") и определена ее истинная величина заменой плоскости проекций V на V_1. ось X_1 взята параллельна горизонтальной проекций фигуры, аппликаты отложены от оси X_1 и получена истинная фигура.

На чертеже 13.8. показано определение истинной величины фигуры ABC заменой плоскости проекций H, плоскостью H_1. здесь ось X_1 проведена параллельно фронтальной проекции, отложены ординаты и получена истинная фигура ($\Delta A_1'B_1'C_1' = \Delta ABC$).



Чертеж 13.7.



Чертеж 13.8.

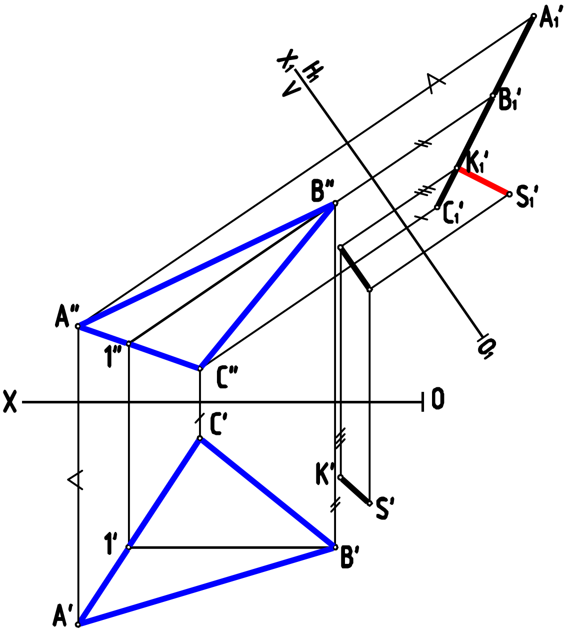
<u>Третья типовая задача.</u> Определить расстояние от точки S до плоскости общего положения ABC (чертеж 13.9.) или P (чертеж 13.10.).

Как известно, расстояние от точки до плоскости определяется перпендикуляром между ними. Если, заменяя одну из плоскостей проекций, превратить плоскость общего положения в проецирующую, то эта задача решается легко.

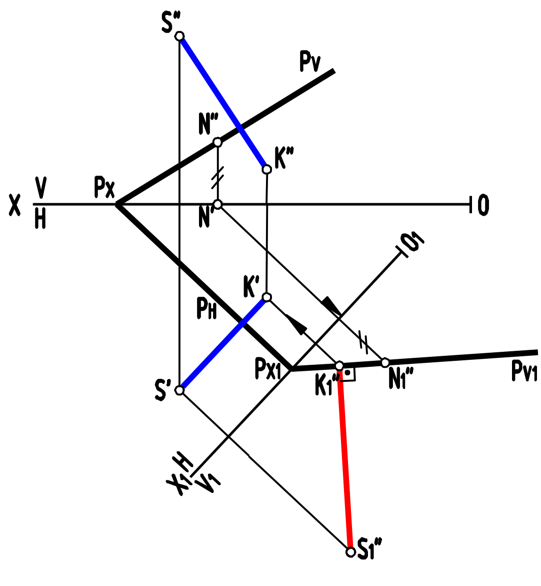
На чертежах 13.9 и 13.10. данные плоскости находятся в общих положения, которые после замены плоскости проекций H на H_1, получили горизонтально-проецирующее положение.

На чертеже 13.9 ось X_1 проведена перпендикулярно фронтали плоскости A"1", далее отложены ординаты в новом направлении и получены проецирующее положении плоскости ABC и точка S_1'. От S_1' проводим перпендикуляр к A_1'B_1'C_1', полученный отрезок S_1'K_1' будет искомым расстоянием. Фронтальная проекция SK будет параллельна оси X_1, а горизонтальная проекция определяется отложением ординаты в обратном направлении.

Чертеж 13.10. выполнен заменой плоскости проекции V наV_1. Ось X_1 взята перпендикулярно к P_H. для построения P_{V1} на P_V берем произвольную точку N(N"), через N' проведем новое направление проецирования и от оси X_1 откладываем аппликату N'N". Соединяя P_{X1} с N_1", получим проецирующее положение плоскости P. Расстояние S_1"K_1" будет искомым.



Чертеж 13.9.



Чертеж 13.10.

13.2. ПЕРЕМЕНА ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Для решений некоторых сложных задач приходится менять плоскости проекции два и более раза. Во всех случаях новая заменяемая плоскость будет перпендикулярна той плоскости, которая не меняет свое положение.

Новый эпюр в системе плоскостей проекции V_1/H, после замены плоскости V, или в системе V/H_1, после замены плоскости H, можно рассматривать самостоятельно, как исходный, заданный эпюр, и тем же способом заменить вторую плоскость. Если, сначала заменялась плоскость V, то при второй перемене заменяется плоскость H, или наоборот, новый эпюр получится в системе V_1/H_1.

Рассмотрим последовательность перемены двух плоскостей проекции только для одной пространственной точки, т.к. для ряда заданных точек построение остаются теми же, что и для одной точки. На чертеже 104 дана точка A(A',A"). перемена двух плоскостей проекций производится в следующем порядке:

1) Выбирается новая ось X_1 относительно горизонтальной проекции точки (направление этой оси определяется условием задачи).
2) Строится новая фронтальная (или горизонтальная) проекция A_1" (A_1') заданной точки, по аппликате (или по ординате).
3) Выбирается новая ось X_2 относительно новой проекции точки (направление этой оси так же определяется самим условием задачи). При второй перемене эпюр $X_1(H/V_1)$ рассматривается как исходный.
4) Строится новая горизонтальная проекция A_1' заданной точки, по новой ординате.

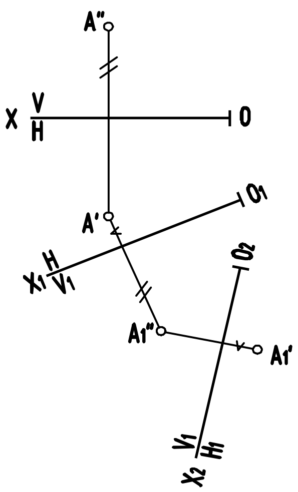
При последовательной перемене двух плоскостей проекций можно решить следующие основные, типовые задачи:

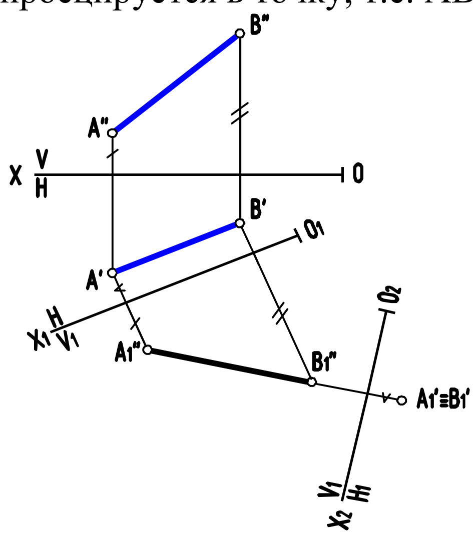
Первая типовая задача. Отрезок прямой общего положения, представить в виде прямой, перпендикулярной новой плоскости проекций.

Дано (чертеж 13.12.): A'B'; A"B". Требуется $AB \perp H_1$.

Решение:

1) Определяется истинная длина отрезка AB заменой плоскости V. Для этого ось X_1 проводится параллельно горизонтальной проекции A'B'. Строится новая фронтальная проекция A_1"B_1" отрезка в истинную величину по аппликатам.
2) Заменяется плоскость H на H_1, причем плоскость H_1 располагается перпендикулярно A_1"B_1".
3) Строится новая горизонтальная проекция A_1'B_1' отрезка по новым ординатам. Здесь отрезок обязательно спроецируется в точку, т.е. $AB \perp H_1$.





Чертеж 13.11 Чертеж 13.12.

Вторая типовая задача. Определить истинную величину плоской фигуры общего положения.

Дана (чертеж 13.13.) плоская фигура ABC (A'B'C', A"B"C") общего положения.

Решение :

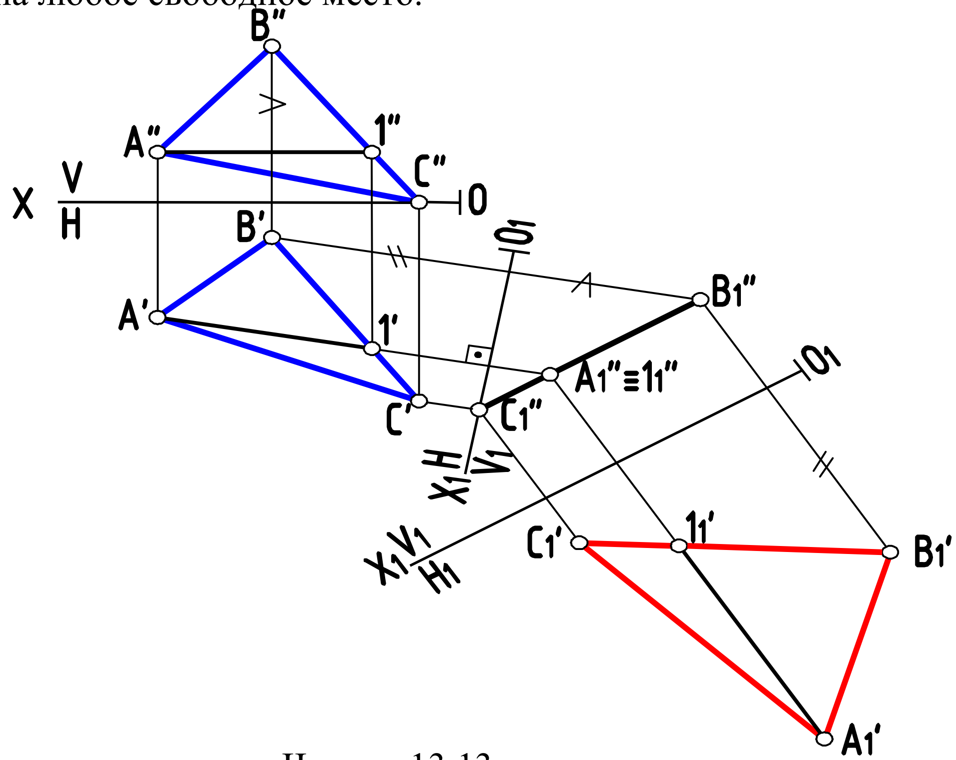
1) Новая ось X_1 проводится на плоскости H под углом 90° к горизонтали.

2) Строится новая фронтальная проекция по ординатам и получится прямая линия, т.е. плоскость превратилась в проецирующую).

3) Новая ось X_2 проводится параллельно проекции на V_1.

4) Строится новая горизонтальная проекция $A_1'B_1'C_1'$ по новым ординатам. Эта новая вторая проекция есть искомая истинная величина фигуры.

ПРИМЕЧАНИЕ: В случае недостачи места, систему $X_2(V_1/H_1)$ можно перенести на любое свободное место.



Чертеж 13.13.

Третья типовая задача. Определить величину двухгранного угла (между двумя плоскостями) с ребром общего положения.

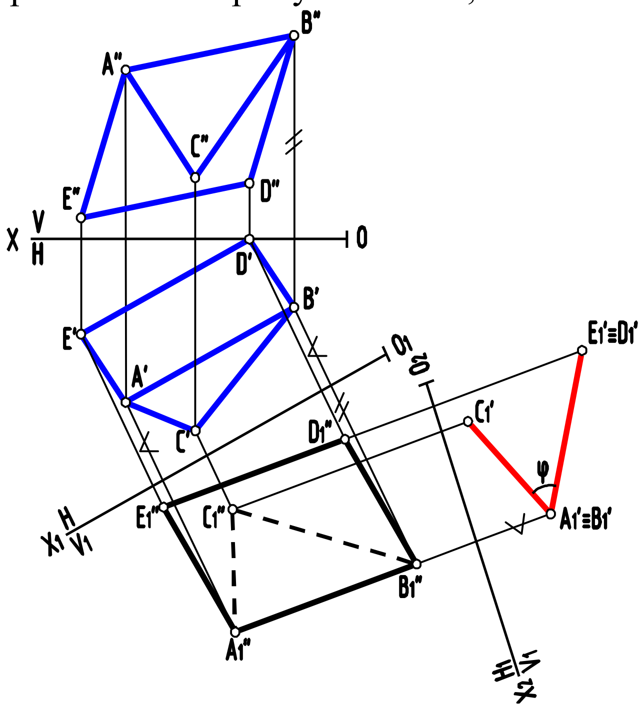
На чертеже 113.14. задан двугранный угол, образованный двумя (четырехугольным и треугольным) гранями. Его ребро AB есть прямая общего положения.

Решение:

1) Построена новая фронтальная проекция угла переменою плоскости V на V_1, по аппликатам. При этом, ось X_1 расположена параллельно A'B'.

2) Новая плоскость H_1 расположена перпендикулярно ребру AB, т.е. ось X_2 проведена под углом 90° к истинной величине ребра.

3) Построена новая горизонтальная проекция граней, в результате каждая грань проецировалась в прямую линию, а искомый угол φ в истинную величину.



Чертеж 13.14.**росы к лекции №13.**

1.Какие плоскости проекций часто заменяются при методе замены плоскостей?

2.Сколько раз нужно заменить плоскость чтобы плоскость общего положения привести в проецирующую плоскость?

ЛЕКЦИЯ № 14

Тема: Поверхности. Линейчатые развертываемые поверхности.

План.

1.Образование поверхностей.

2.Линейчатые развёртываемые поверхности.

14.1. Поверхности.

При движении в пространстве какой-либо линии, называемой образующей, по определенным законам образуется поверхность, причем образующая может быть постоянная или бесконечно меняющаяся.

В зависимости от вида образующей линии поверхность может быть прямолинейной или криволинейной.

При вращении образующей вокруг какой-либо оси образуется ***поверхность вращения*** (конус вращения, цилиндр вращения, шар, эллипсоид, параболоид, тор и т.п.).

При движении какой-либо образующей вокруг какой-либо оси в поступательно и вращательно, образуется винтовая поверхность.

Прямолинейные поверхности делятся на развертываемые (торсы) и на неразвертываемые.

14.2. Линейчатые развертываемые поверхности (торсы).

Такие поверхности образуется при бесконечном касательном движении образующей прямой линии к какой-либо прямой или кривой линии и при развертывании их всеми точками лежат на плоскости.

Торсы бывают:

1. Поверхности с ребром возврата.
2. Конические поверхности.
3. Цилиндрические поверхности.

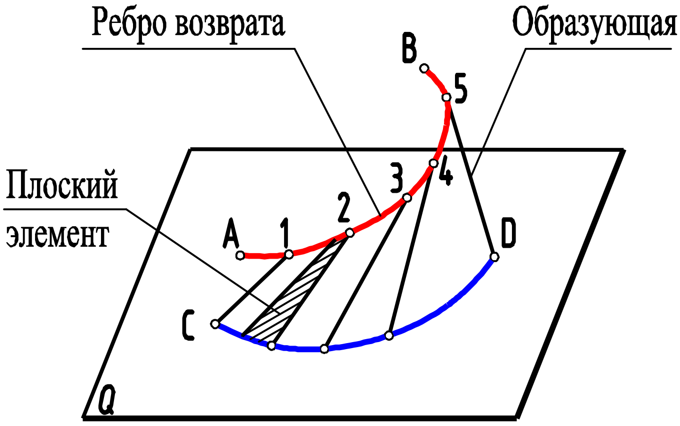
14.2.1. ПОВЕРХНОСТИ С РЕБРОМ ВОЗВРАТА

Такие поверхности образуются при движении образующей прямой, касательно кривой AB, называемой ребром возврата, тут ребро возврата называется направляющей кривой линией поверхности. Ребро возврата делит поверхность на две части (на чертеже 14.1. показана только одна половина такой поверхности). На чертеже кривая линия CD образована сечением образующих плоскостью Q.

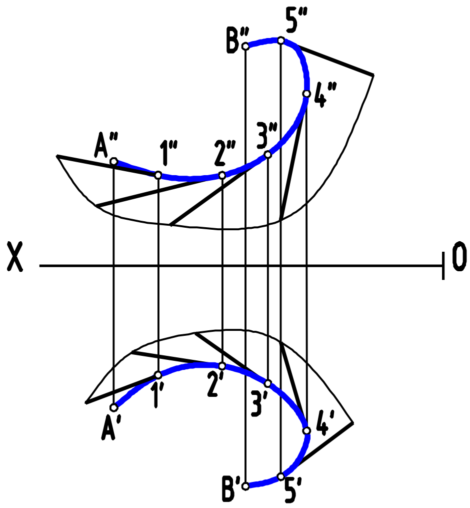
Площадь между соседними образующими поверхности с ребром возврата называется плоским элементом, поэтому их можно развернуть на плоскость.

Вид поверхности с ребром возврата зависит от вида ребра. Если ребро возврата является винтовой линией, то касательно движущаяся линия образует поверхность развертываемого гелипсоида.

Поверхности с ребром возврата на эпюре изображается проекциями ребра, для чего на ребре выбирается ряд точек (1'1", 2'2", …..) и через них (чертеж 14.2.) проводятся проекции касательных, здесь касательные ограничены произвольной кривой.



Чертеж 14.1.



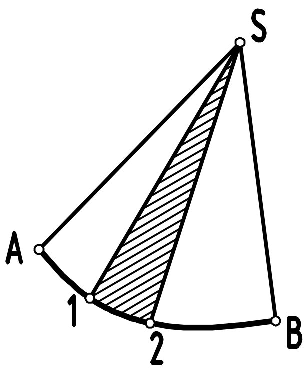
Чертеж 14.2.

14.2.2. КОНИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

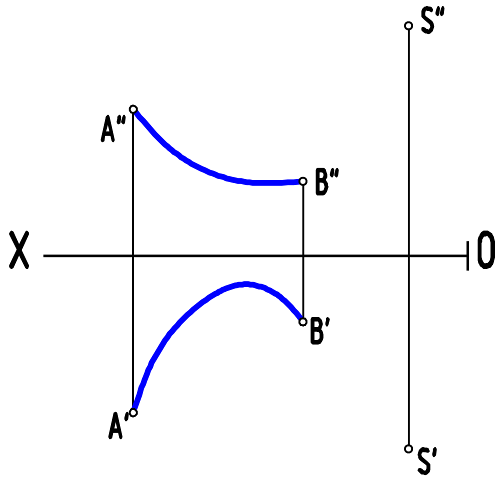
Если ребро возврата, бесконечно уменьшаясь, превратится в точку, то все образующие поверхности пройдут через точку и образуют коническую поверхность.

Для получения конической поверхности необходима, кроме вершины (ребра возврата), и направляющая кривая (в частном случае – ломанная линия). Поэтому конические поверхности задаются вершиной S и направляющей AB (чертеж 14.3.). Значить, конические поверхности образуется движением прямой, проходящей через неподвижные точки, и касающейся направляющей кривой.

Если направляющая линия ломаная, тогда коническая поверхность называется пирамидой.

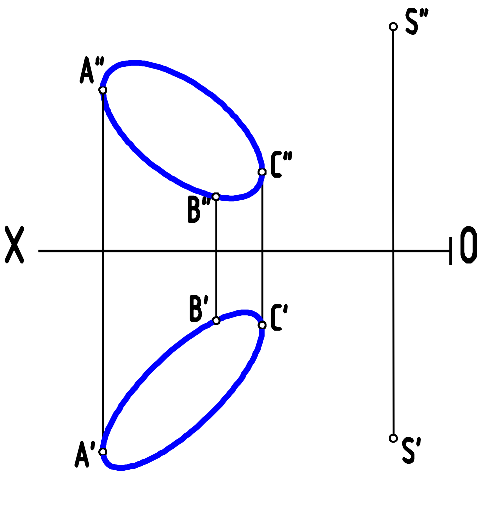


Чертеж 14.3.

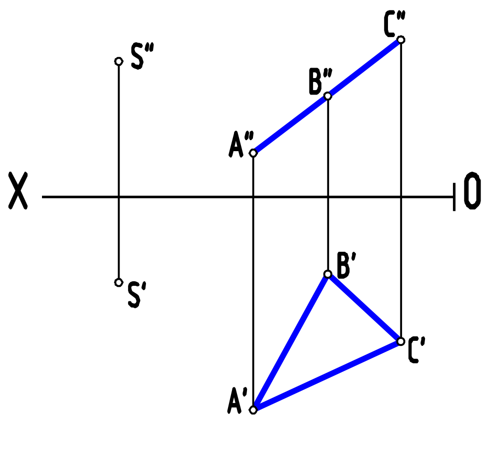


Чертеж 14.4.

Вид конической поверхности зависит от вида направляющей кривой. Если направляющая кривая открытая кривая, то поверхность называется открытой (чертеж 14.4.), если закрытая – то поверхность называется закрытой (чертеж 14.5.). На чертеже 14.6. изображена пирамида, основанием которой является фронтально-проецирующая плоскость в виде треугольника.



Чертеж 14.4.

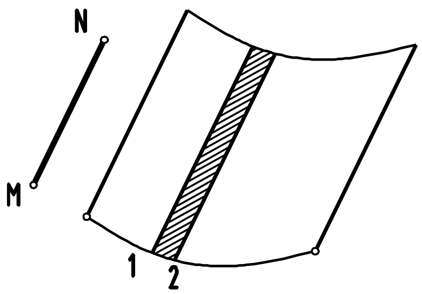


Чертеж 14.5

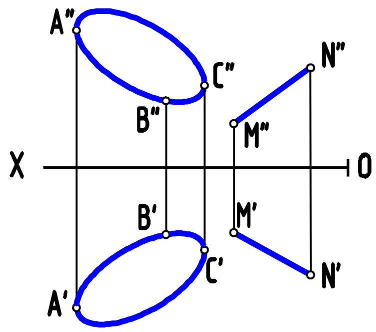
14.2.3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Если ребро возврата (вершина) конуса в бесконечности, то его образующие будут параллельны между собою, и такие поверхности называются цилиндрическими (или коротко – цилиндрами). Для построения цилиндра необходимо иметь направляющую кривую и направление образующих. В частных случаях направляющей может быть ломанная линия, в таких случаях цилиндр называется призмой.

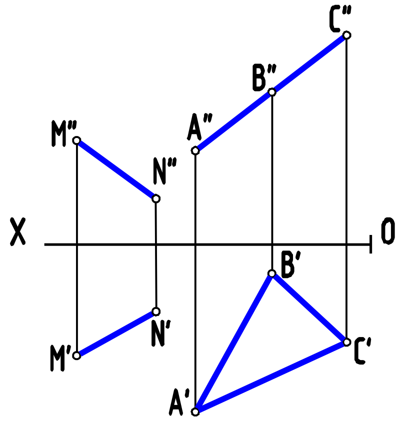
На чертеже 14.6. изображена открытая цилиндрическая поверхность, где кривая AB является направляющей, а линия MN направлением образующих цилиндра. Через соседние точки 1, 2 проходит две параллельные образующие цилиндра, которые образуют плоский элемент. Это означает, что цилиндрическую поверхность можно развернуть на плоскость.



Чертеж 14.6.



Чертеж 14.7.



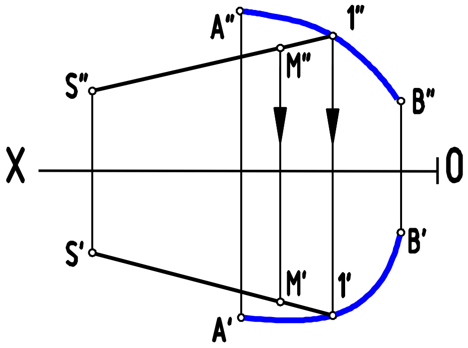
Чертеж 14.8.

На чертежах 14.7. и 14.8 даны эпюры закрытого цилиндра и призмы с помощью направляющих ABC и направлением образующих MN.

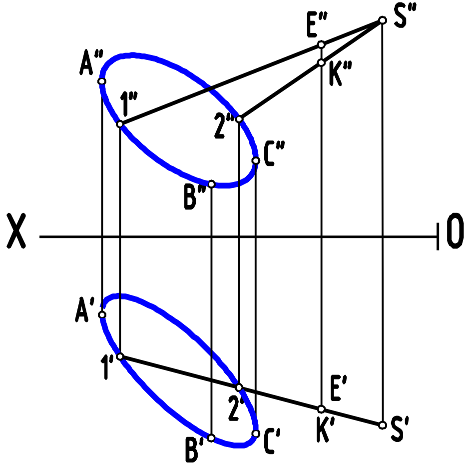
14.3. Выбор точки на поверхности.

Через любую точку, лежащую на торсах, можно провести образующую прямую линию, значит выбираемая точка должна принадлежать образующему прямолинейной развертываемой поверхности.

Рассмотрим пример выбора точки на поверхности конуса (чертеж 14.9.). Здесь фронтальная проекция точки M(M") задана, требуется определить ее горизонтальную проекцию(M'), для чего соединяя S" и M", находим фронтальную проекцию образующей S(S"1"), затем определяется горизонтальная проекция S'1', на которой будет лежать горизонтальная проекция точки M(M').



Чертеж 14.9



Чертеж 14.10.

Если направляющая кривая конуса закрытая, то ответ определения недостающей проекции точки на поверхности конуса может быть двоякий. Например, дана горизонтальная проекция точки К, на поверхности конуса с закрытой направляющей АВС и вершиной S, требуется определить фронтальную проекцию M" (чертеж 14.10.).

Для этого соединяя точки S' и К', получим горизонтальную проекцию образующей, на которой лежит точка К, образующая, пересекаясь с направляющей кривой, даст точки 1 (1'1") и 2(2'2"), поэтому фронтальная проекция образующей линии может быть 1"S" или 2"S", а фронтальная проекция выбранной точки К будет лежать на одном из них. Если будем считать, что точка К лежит на образующей S1, то фронтальная проекция будет на S"1", точно также точка Е('Е"), находясь на образующей S2(S"2", S'2'), будет на одной линии связи.

Следовательно, две образующие конуса с закрытой направляющей кривой могут лежать на одной проецирующей плоскости. Это явление может быть и на открытом конусе.

Вопросы к лекции №14.

1.Как образуются поверхности?

2.Какие бывают ленейчатые развёртываемые поверхности?

ЛЕКЦИЯ № 15

Тема: Пересечение поверхности с плоскостью. Точка встречи прямой с поверхности.

План.

1.Пересечение поверхности с плоскостью.

2. Пересечение многогранника с плоскостью.

15.1. Пересечение поверхности с плоскостью.

15.1.1. Пересечение многогранника с плоскостью.

На эпюре многогранника плоскостью изображаются проекциями своих вершин и ребер. Сечением многогранника плоскостью является многоугольник, вершинами которого служат точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью, а сторонами – отрезки прямых пересечения граней многоугольника той же плоскостью.

Поэтому построение сечения многогранника плоскостью сводится к многократному решению задачи о пересечении прямой с плоскостью или же к многократному решению задачи о пересечении двух плоскостей. Так как решение первой задачи проще второго, то обычно при построении сечения многогранника строят вершины сечения как точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью. После построения вершин сечения следует соединить отрезками прямых каждые две вершины, лежащие в одной и той же грани многогранника. При этом стороны сечения, лежащие в видимых гранях, будут видимы, а лежащие в невидимых гранях – невидимы.

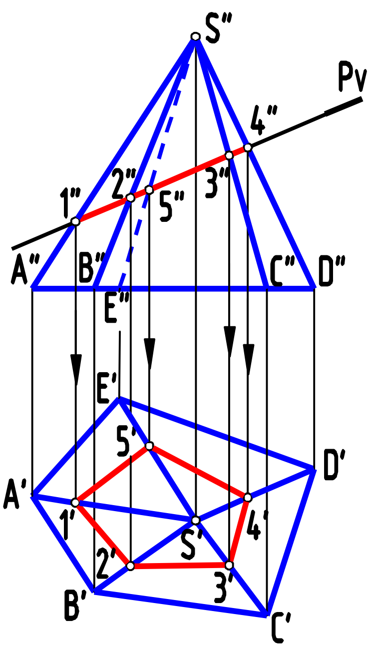
Таким образом, построение вершин сечения многогранника плоскостью сводится к проведению на секущей плоскости вспомогательных прямых, конкурирующих с ребрами многогранника, и определению точек пересечения этих прямых с соответствующими ребрами.

Разумеется, что если при построении сечения многогранника плоскостью секущая плоскость или грани многогранника являются проецирующими, что следует использовать вырождение их соответствующих проекций в прямые.

Рассмотрим примеры построения сечения многогранника плоскостью.

Пример 1. Построить проекции сечения пирамиды SABCDE фронтально-проецирующей плоскостью P(P_V), (чертеж 15.1.).

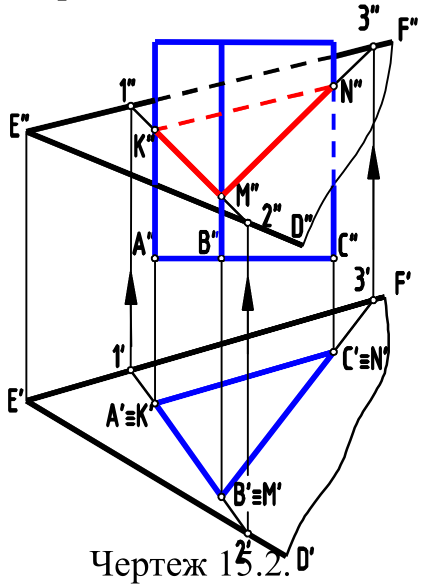
Так как фронтальная проекция сечения в данном случае совпадает с отрезком прямой, лежащей в плоскости P(P_V), то можно отметить фронтальные проекции



Чертеж 15.1.

"2"3"4"5" вершин искомого сечения. Горизонтальные проекции 1'2'3'4'5' вершин сечения находим на соответствующих горизонтальных проекциях ребер, соединяя которые в последовательном порядке отрезками прямых, получим горизонтальную проекцию сечения.

Пример 2. Построить проекции сечения треугольной призмы АВС, боковая поверхность которой является горизонтально проецирующей поверхностью, плоскостью DEF(D'E'F', D"E"F") общего положения (чертеж 15.2.).



Чертеж 15.2.

Так как боковые ребра данной призмы являются горизонтально-проецирующими прямыми, то горизонтальные проекции К'M'N' вершин К, M, N искомого сечения совпадают с горизонтальными проекциями самих ребер. Фронтальные же проекции К", M" и N" этих вершин легко определяются из условия их принадледности секущей плоскости DEF, для чего использованы прямые 1-2 и M-3.

15.1.2. Пересечение поверхности с плоскостью

Основным способом построения точек линии пересечения поверхности с плоскостью является способ вспомогательных проецирующих плоскостей, который заключается в следующем: вводится ряд вспомогательных проецирующих плоскостей, пересекающих данную поверхность по некоторым линиям, а данную секущую плоскость – по прямым. Точки пересечения этих линий с соответствующими прямыми, являясь общими для данной поверхности и данной плоскости, будут точками искомой линии пересечения.

При выборе вспомогательных проецирующих плоскостей следует руководствоваться простотой построения линий пересечения этих плоскостей с данной поверхностью. Эти линии должны быть графически простыми линиями, т.е. прямыми или окружностями. Кроме того, если этими линиями являются окружности, то поверхность должна быть так расположена относительно плоскостей проекций, чтобы эти окружности не искажались на одной из плоскостей проекций.

Так как линия пересечения каждой из вспомогательных проецирующих плоскостей с данной поверхностью и с данной секущей плоскостью являются конкурирующими линиями, то построение точек линии пересечения поверхности с плоскостью производится по существу тем же способом конкурирующих линии, который ранее применялся нами при решении позиционных задач с прямыми, плоскостями и многогранниками.

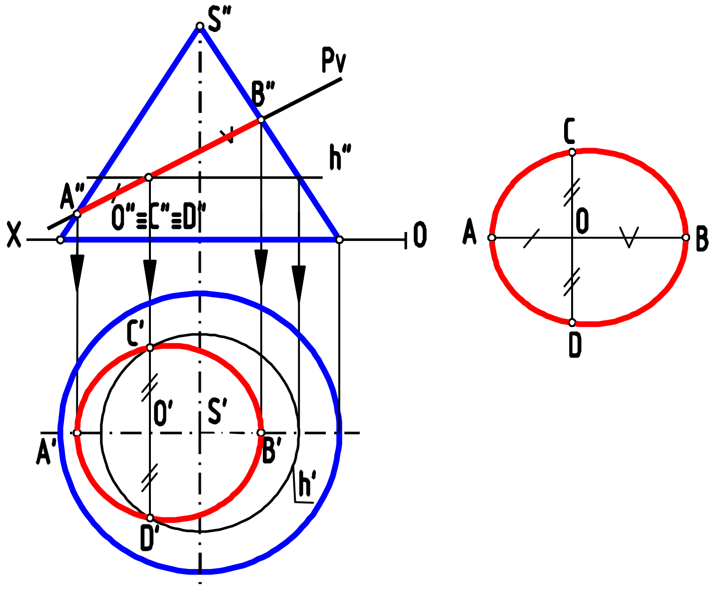
Итак, для построения точек линии пересечения поверхности с данной плоскостью необходимо провести на секущей плоскости прямые, конкурирующие с графически простыми линиями данной поверхности; тогда точки пересечения каждой прямой и конкурирующей с ней линией поверхности будут точками искомой линии пересечения.

Если секущая плоскость является проецирующей, то точка пересечения определяется сразу в пересечении проецирующей плоскости с графически простыми линиями поверхности.

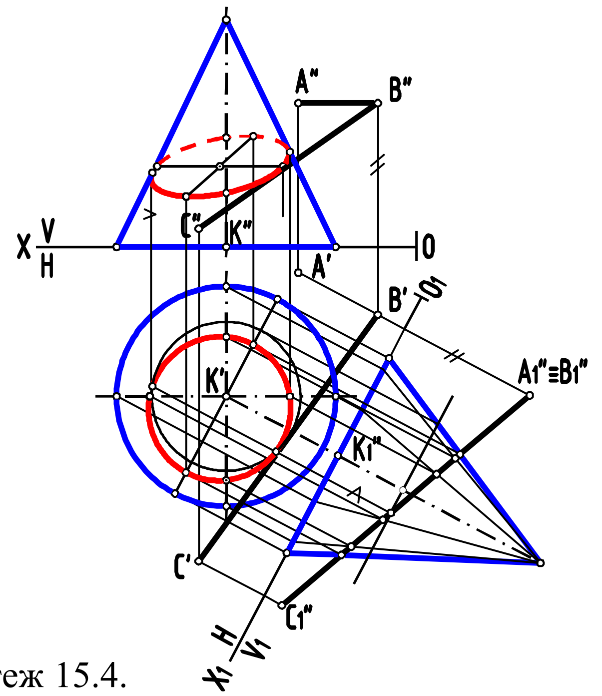
Отсюда следует, что при построении линии пересечения поверхности с плоскостью общего положения иногда бывает полезным предварительное преобразование секущей плоскости в проецирующую (способом замены плоскостей проекции).

Среди точек линии пересечения имеются такие точки, которые выделяются из других точек какими-либо своими особыми свойствами. К этим точкам относится экстремальные точки и точки видимости. Экстремальными точками являются высшая и низшая точки сечения, а также самая ближная, самая дальняя, самая левая и самая правая точки сечения (по отношению к наблюдателю, стоящему лицом к плоскости проекции V).

Пример: Построить проекции и натуральный вид сечения конуса вращения данной плоскостью.



Чертеж 15.3.



Чертеж 15.4.

Вначале рассмотрим случай, когда секущая плоскость является фронтально проецирующей (чертеж 15.3.).

Так как в данном случае фронтально проецирующая плоскость $P(P_V)$ пересекает все образующие конуса, то в сечении получится эллипс. Фронтальная проекция эллипса будет отрезок A"B", а горизонтальная проекция будет эллипсом, так как фронтальная проекция эллипса, в общем случае, также является эллипсом.

Большая ось эллипса – сечения является фронтальной и поэтому не искажается на фронтальной плоскости проекции V. Малая же ось CD является фронтально проецирующей прямой, поэтому она проецируется на плоскость V в точку O"≡C"≡D", делящую отрезок A"B" пополам (точка O – центр эллипса), а на плоскость H проецируется без искажения. Для построения горизонтальной проекции C'D' малой оси достаточно провести на уровне точек C и D параллель h конуса; тогда C'D' будет хордой окружности, являющейся горизонтальной проекцией этой параллели.

Теперь эллипс, являющийся горизонтальной проекцией эллипса – сечения, можно построить по его осям.

Натуральный вид эллипса – сечения можно построить при помощи его осей AB и CD; при этом AB=A"B"; CD=C'D'.

Рассмотрим случай пересечения конуса вращения (чертеж 15.4.) плоскостью общего положения ABC.

Этот случай легко сводится к предыдущему при помощи замены плоскости плоскости проекции V на плоскость V_1, перпендикулярно к горизонтали AB секущей плоскости ABC. Тогда в системе плоскостей проекций (H/V_1) плоскость ABC будет проецирующей и, следовательно, данный случай сведется к предыдущему.

15.2.Точка встречи прямой с поверхности.

15.2.1. Пересечение многогранника прямой.

Для определения точки пересечения прямой с поверхностью многогранника поступают так же, как при определении точки пересечения прямой с плоскостью, но конкурирующая с данной прямой линия проводится не на плоскости, а на поверхности многогранника.

Указанное построение на эпюре выполняется следующим образом:

<u>Пример 1</u>. Построить точки M и N пересечения прямой *l* с поверхностью треугольной пирамиды SABC (чертеж 15.5.).

Через *l(l")* проводим вспомогательную плоскость $P(P_V)$.

Фигурой сечения является ломаная линия 1, 2 и 3. из чертежа видно, что прямая *l* пересекается с вспомогательной ломанной линией в точках M и N, которые и являются искомыми точками. При этом вначале строятся горизонтальные проекции M' и N', в пересечении *l'*, а затем отмечаются фронтальные проекции M" и N" на проекции *l"*.

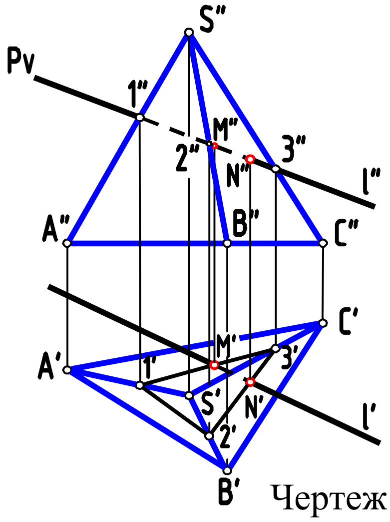
Установим видимость прямой *l*. По горизонтальной проекции определяем, что точки M и N лежат соответственно в гранях ASC и BSC. Эти грани видимы в горизонтальной проекции, поэтому видимы и обе точки M и N, следовательно, прямая *l* будет невидима только на отрезке MN, находящемся внутри пирамиды. Во фронтальной проекции грань ACS невидима, и поэтому прямая *l* невидима от точки N до точки M и далее до точки, конкурирующей с точкой 1 ребра AS.

<u>Частный случай пересечения многогранника с прямой</u>.

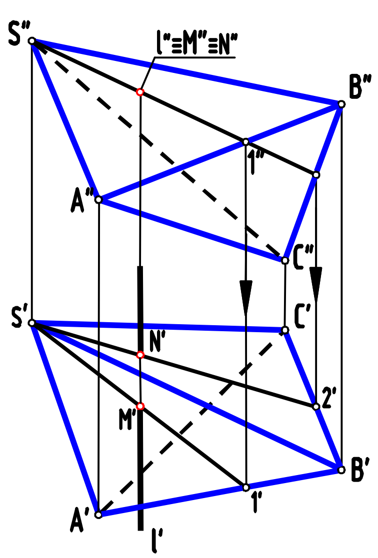
При построении точек пересечения прямой с поверхностью многогранника, когда прямая или грани многогранника являются проецирующими, следуют использовать выцрождение их соответствующих проекций в точку или прямые.

Пример 2. Построить точки M и N пересечения горизонтально-поперечной прямой *l* с поверхностью треугольной пирамиды SABC (чертеж 15.6.).

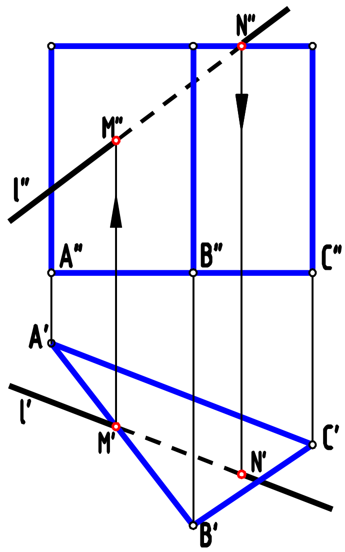
Фронтальные проекции M" и N" искомых точек совпадают с фронтальной проекцией *l*". Горизонтальные же проекции M' и N' легко находятся с помощью вспомогательных прямых S-1 и S-2, принадлежащих граням SAC и CBS, которые пересекает прямая *l*.



Чертеж 15.5.



Чертеж 15.6.



Чертеж 15.7.

Пример 3. Построить точки M и N пересечения прямой общего положения с поверхностью треугольной призмы ABC, боковые грани которой являются горизонтально-проецирующими плоскостями, а основания-горизонтальными плоскостями (чертеж 15.7.).

Нетрудно увидеть, что прямая *l* пересекается в точке M с боковой гранью призмы, а в точке N – с ее верхним основанием. При построении этих точек сначала найдем их проекции M' и N" в пересечении соответствующих проекций прямой *l* с горизонтальной проекцией боковой грани и фронтальной проекцией основания, а затем построим проекции M" и N' соответственно на проекциях *l"* и *l'* прямой.

15.2.2. Точка встречи прямой с поверхностью.

Для построения точек пересечения прямой с какой-либо поверхностью необходимо провести через данную прямую вспомогательную секущую плоскость; затем найти линию пересечения вспомогательной плоскости с данной поверхностью и, наконец, определить точки пересечения полученной линии данной прямой с поврхностью.

Обычно в качестве вспомогательной плоскости выбирают проецирующую плоскость, проходящую через данную прямую, так как в общем случае линия пересечения поверхности с проецирующей плоскостью строится проще, чем с плоскостью общего положения.

Так как линия пересечения поверхности с проецирующей плоскостью, проведенной через данную прямую, и данная прямая является конкурирующими линиями, то общий прием построения точек пересечения прямой с поверхностью можно сформировать так:

Для формирования точек пересечения прямой с поверхностью нужно построить на поверхности вспомогательную линию, конкурирующую с данной прямой, и найти точки пересечения этой линии с прямой.

При этом, строя вспомогательную линию, следует для определения ее отдельных точек пользоваться графически простыми линиями поверхности. Так, в случае поверхности вращения такими простыми линиями будут параллели (окружности), а в случае линейчатой поверхности – образующие (прямые).

<u>Типовые примеры.</u>

<u>Пример 1</u>. Построить точки входа и выхода (точки пересечения) прямой с поверхностью вращения (тором) (чертеж 15.8.).

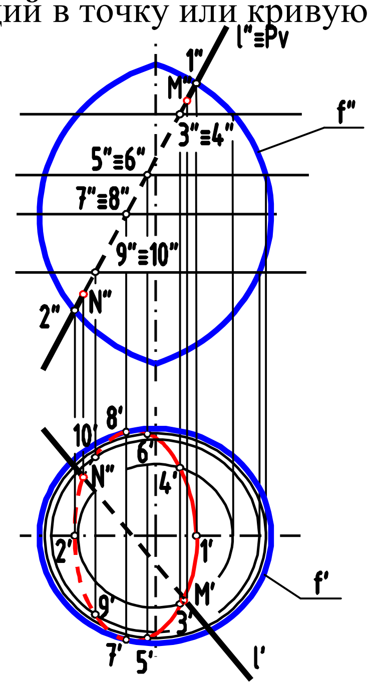
Через данную линию ℓ проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость $P(P_V)$, в пересечении которой с главным меридианом f поверхности находим точки 1 и 2, остальные точки 3, 4, 5, 6, 7,8 находим на ее параллелях, из которых одна является экватором поверхности (самая большая параллель). Соединяя полученные точки плавной кривой, находим фигуру сечения поверхности плоскостью $P(P_V)$, которая пересекаясь с ℓ, даст точки M и N, являющиеся искомыми точками.

Нетрудно видеть, что точка M будет видимой в горизонтальной и фронтальной проекциях, так как она находится над экватором и перед главным меридианом поверхности. Точка же N будет невидимой в обеих проекциях, так как она находится под экватором и за главным меридианом.

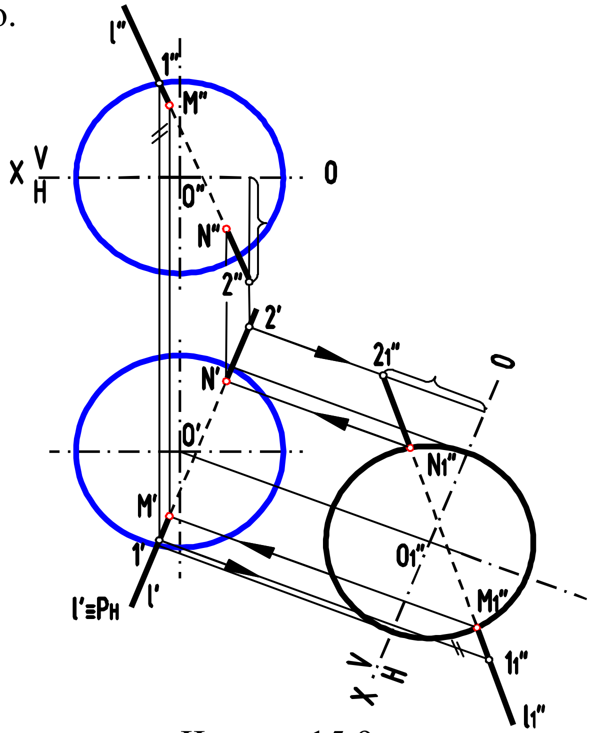
Пример 2. Построить точки пересечения сферы с прямой ℓ (чертеж 15.9).

Через данную прямую ℓ проводим горизонтально проецирующую плоскость $P(P_H)$. так как всякая плоская кривая на сфере является окружностью, то полученное сечение плоскостью $P(P_H)$ тоже будет окружностью. Чтобы избежать построения эллипса, являющегося фронтальной проекцией этой окружности, производим замену плоскости проекций V на плоскость V_1, параллельную плоскости $P(P_H)$ и перпендикулярную плоскости H. тогда на плоскости V_1, линия сечения изобразится окружностью. Построив также проекцию ℓ_1" прямой ℓ и определив точки M_1" и N_1" пресечения, можно вернуться на исходные проекции.

В частных случаях, при построении точек пересечения прямой с кривой поверхностью, когда прямая или поверхность являются проецирующими, следует использовать вырождение их соответствующих проекций в точку или кривую линию.



Чертеж 15.8.



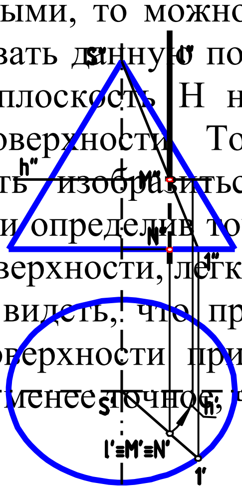
Чертеж 15.9.

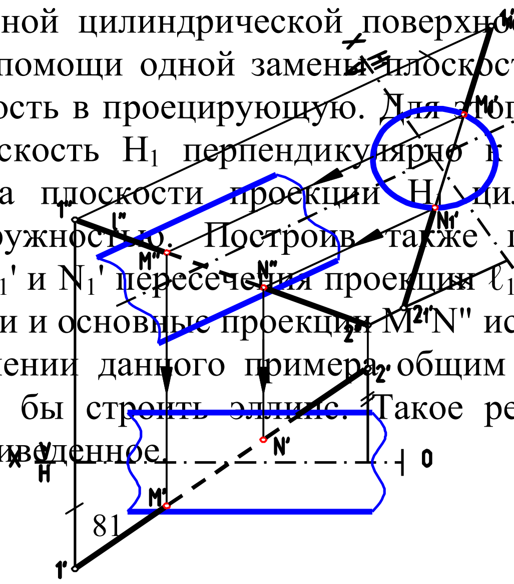
Пример 3. Построить точки пересечения поверхности кругового конуса с вертикальной прямой ℓ (чертеж 15.10.).

Горизонтальные проекции M' и N' искомых точек совпадают с горизонтальной проекцией ℓ' данной прямой. Фронтальные же проекции этих точек легко определяются: M" с помощью образующей S – 1 конуса, N- на фронтальной проекции основании конуса.

Пример 4. Построить точки пересечения поверхности кругового цилиндра с прямой ℓ (чертеж 15.11.).

Так как образующие данной цилиндрической поверхности являются фронтальными, то можно при помощи одной замены плоскостей проекций преобразовать данную поверхность в проецирующую. Для этого достаточно заменить плоскость H на плоскость H_1 перпендикулярно к образующим данной поверхности. Тогда на плоскости проекции H_1 цилиндрическая поверхность изобразиться окружностью. Построив также проекцию ℓ_1' прямой ℓ и определив точки M_1' и N_1' пересечения проекции ℓ_1' с проекцией данной поверхности, легко найти и основные проекции M" N" искомых точек. Нетрудно видеть, что при решении данного примера общим способом на данной поверхности пришлось бы строить эллипс. Такое решение более сложное и менее точное, чем приведенное.





Чертеж 15.10. Чертеж 15.11.

Вопросы к лекции №15.

1. Как образуется пересечение поверхности с плоскостью?

2. Каким образом можно найти точку встречи прямой с поверхностью?

ЛЕКЦИЯ № 16

Тема: Развертка поверхностей.

План.

1.Развёртка поверхностей.

2. Построение разверток линейчатых поверхностей.

3. Построение разверток призматических и цилиндрических поверхностей.

Представляя поверхность в виде гибкой, но нерастяжимой пленки, можно говорить о таком преобразовании поверхности, при котором поверхность совмещается с плоскостью без складок и разрывов. Следует указать, что далеко не каждая поверхность допускает такое преобразование.

Поверхности, которые допускают такое преобразование, называются развертывающимися, а фигура на плоскости, в которую поверхность преобразуется, называется разверткой поверхности.

Построение разверток поверхностей имеет большое практическое значение при конструировании различных изделий из листового материала. При этом необходимо отметить, что часто приходится изготовлять из листового материала не только развертывающуюся поверхность разбивают на части, которые можно приближенно заменить развертывающимися поверхностями, а затем строят развертки этих частей.

16.1. ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТОК ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Построение разверток пирамидальных и конических поверхностей приводит к многократному построению натурального вида треугольников, из которых состоит данная пирамидальная поверхность или многогранная поверхность, вписанная (или описанная) в данную коническую или линейчатую поверхность, которой заменяется эта поверхность

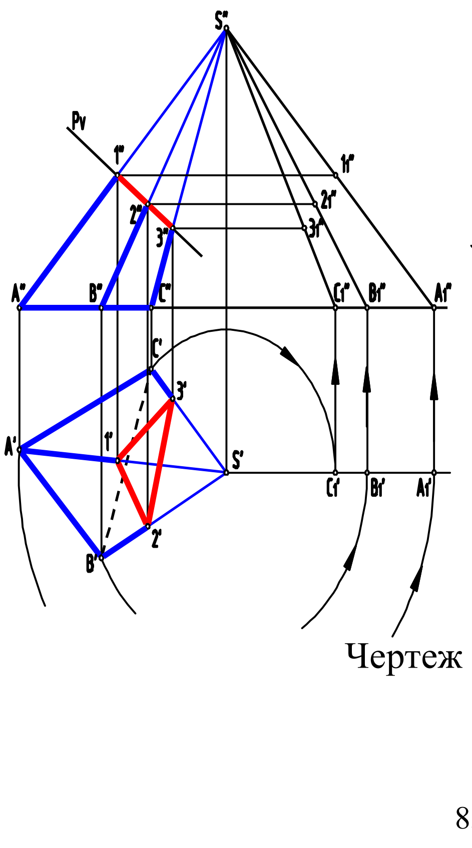
Пример. Построить полную развертку треугольной пирамиды SABC (чертеж 16.1.).

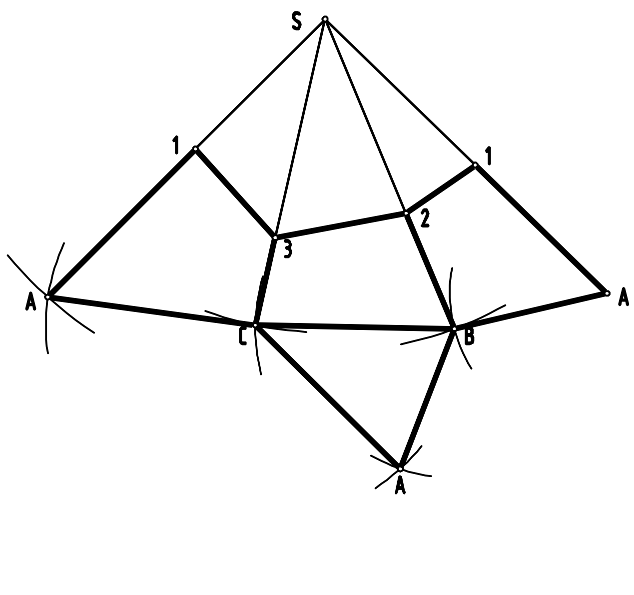
Вначале следует построить развертку боковой поверхности всей пирамиды SABC. Так как боковые грани пирамиды являются треугольниками, то для построения ее развертки можно построить натуральные виды этих треугольников. Для этого предварительно должны быть определены натуральные величины боковых ребер. Боковые ребра можно определить при помощи вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций H и проходящей через вершину пирамиды S. Так как стороны нижнего основания являются горизонталями, то их натуральные величины можно измерить на H.

После этого каждая боковая грань строится как треугольник по трем сторонам. Развертка боковой поверхности пирамиды получается в виде ряда примыкающих один к другому треугольников с общей вершиной S.

Если пирамида усечена плоскостью $P(P_V)$, то для нанесения на развертку точек 1, 2 и 3 нужно предварительно определить их натуральные расстояния от вершины S, для чего следует перенести точки 1", 2" и 3" на соответствующие натуральные величины боковых ребер.

После построения развертки боковой поверхности усеченной части пирамиды следует пристроить к ней треугольник основания, как показано на чертеже.





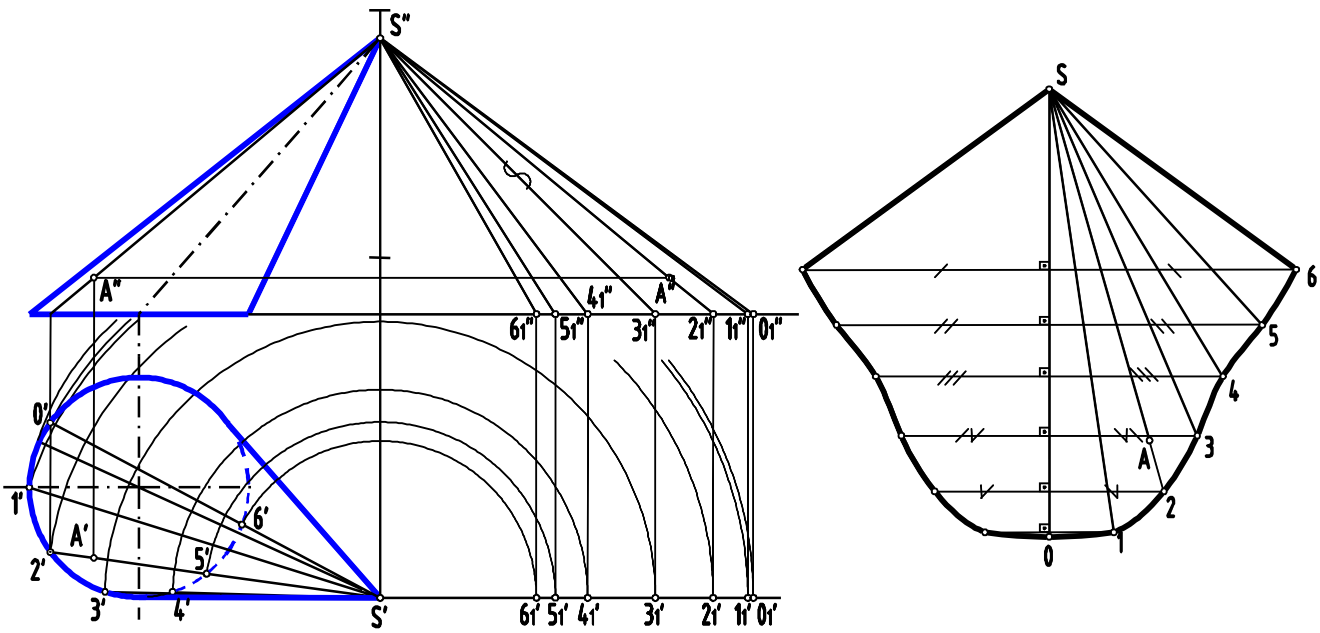
Чертеж 16.1.

Рассмотрим построение разверток конических поверхностей. Несмотря на то, что конические поверхности являются развертывающимися и, следовательно, имеют теоретически точные развертки, практически строят их приближенные развертки для этого заменяют коническую поверхность вписанной в нее поверхностью пирамиды.

Пример 1. Построить развертку боковой поверхности эллиптического конуса с круговым основанием (чертеж 16.2.).

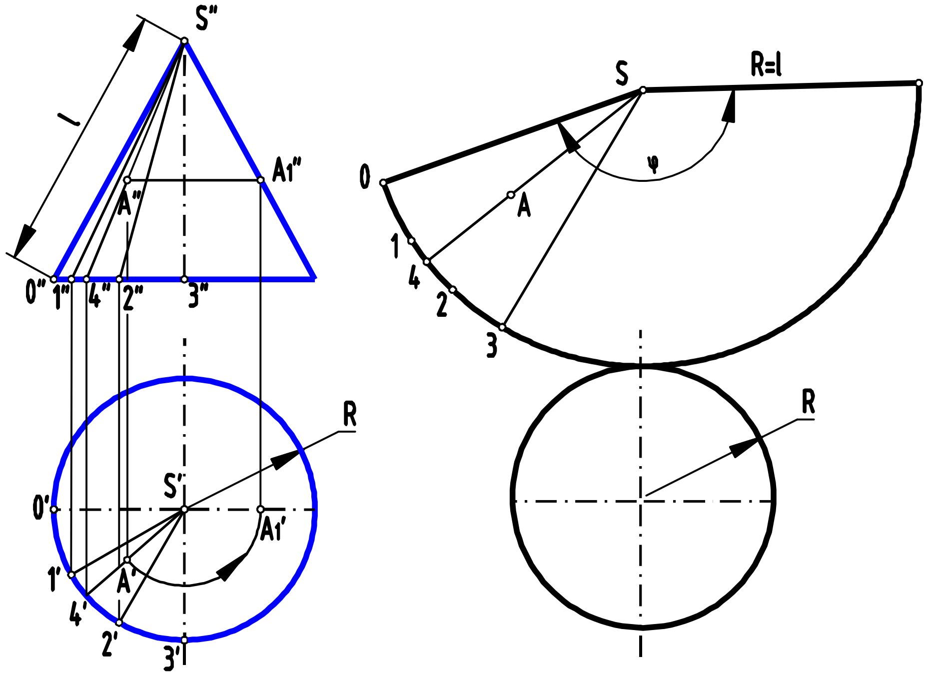
В данном примере коническая поверхность заменяется поверхностью вписанной двенадцатиугольной пирамидой. Так как коническая поверхность имеет плоскость симметрии, которая проходит через точки основания 0 и S и вершину S, то можно построить развертку одной половины поверхности. Разделив от точки 0 половину окружности основания конической поверхности на шесть равных частей и определив методом вращения натуральные величины образующих, строим шесть примыкающих один к другому треугольников строится по трем сторонам: при этом две стороны равны натуральным величинам образующих, а третья – хорде, стягивающей дугу окружности основания между соседними точками деления. После этого через точки 0, 1, 2, … разогнутого по способу хорд основания конической поверхности проводится плавная кривая.

Если на развертке надо нанести какую –либо точку А, находящуюся на поверхности конуса, то следует предварительно построить А" точку, на образующей S" – A_1".



Чертеж 16.3.

Пример 2. Развернуть конус вращения и нанести на ней точку A (чертеж 16.4.).



Чертеж 16.4.

Так как и прямой круговой конус и встроенная двенадцатиугольная пирамида состоит из четырех одинаковых частей, нам достаточно развернуть одну четвертую часть, а потом продолжить до полной развертки.

Разверткой прямого кругового конуса является круговой сектор, радиус которого равен натуральной величине образующей конуса, а длина дуги равна длине окружности основания конуса. Практически дугу сектора определяют при помощи ее хорд, которые принимают равными хордам, стягивающим дуги основания конуса. Иначе говоря, поверхность конуса заменяется поверхностью вписанной пирамиды.

Для нанесения на развертку точки A, на проекциях проводим образующую через точку A и находим на развертке основание (точка 4) и соединяем с вершиной S, на котором откладывается истинная длина $SA=S''A_1''$.

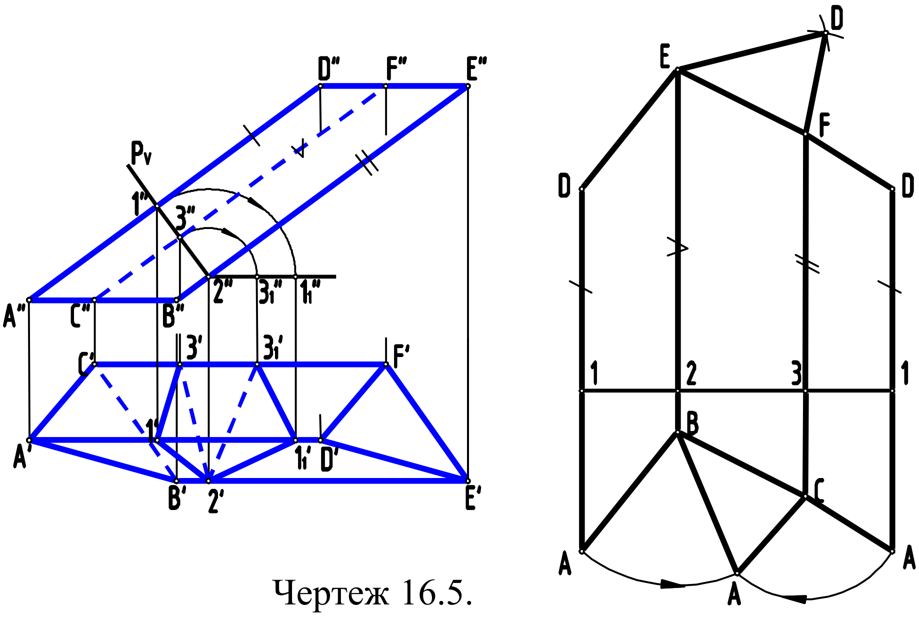
16.2. ПОСТРОЕНИЕ РАЗВЕРТОК ПРИЗМАТИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Построение разверток указанных поверхностей приводит, в общем случае, к многократному построению натурального вида трапеций, из которых состоит данная призматическая поверхность, или призматическая поверхность вписанная (или описанная) в данную цилиндрическую поверхность и заменяющая ее.

Если призматические и цилиндрические поверхности являются наклонными, то для построения разверток необходимо определить натуральный вид нормального сечения.

Пример 1. Построить полную развертку поверхности треугольной призмы ABCDEF (чертеж 16.5.).

Пусть данная призма расположена относительно плоскостей проекций так, что ее боковые ребра являются фронталями. Тогда они проецируются на плоскость проекций V в натуральную величину, фронтально проецирующая секущая плоскость $P(P_V)$ перпендикулярна боковым ребрам.



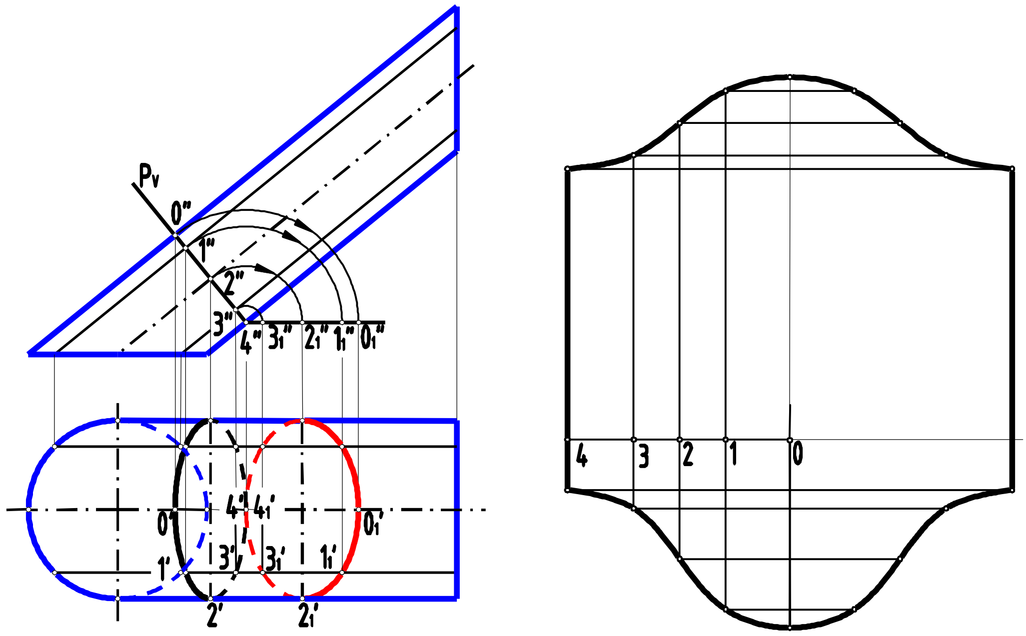
Чертеж 16.5.

Построив натуральный вид нормального сечения 1_1", 2_1", 3_1", развернем на прямую 1231. Так как ребра призмы перпендикулярно к линии 1231. Затем, измеряя на V истинные длины ребер, будем откладывать вниз и вверх, после чего пристраиваются основания натуральный вид которого находится на H.

Пример 2. Построить развертку боковой поверхности эллиптического цилиндра (чертеж 16.6.).

Так как цилиндрическая поверхность имеет фронтальную плоскость симметрии, то можно построить развертку только одной половины поверхности. Для этого проводим фронтально- проецирующую плоскость $P(P_V)$ перпендикулярно образующим цилиндрической поверхности и способом вращения определяем натуральный вид нормального сечения на H. дугу полуэллипса, который при этом будет получен, делим на четыре части, так чтобы хорды, части, возможно меньше отличились от дуг полуэллипса.

Далее проводим на поверхности цилиндра образующие, соответствующие точкам деления нормального сечения. Тогда поверхность половины цилиндра разобьется на четыре трапеции, вершины которых соединяется плавными кривыми.



Чертеж 16.6.

Вопросы к лекции № 16.

1. **Как выполняется построение разверток линейчатых поверхностей?**
2. **Каким образом строятся развертки призматических и цилиндрических поверхностей?**

ЛЕКЦИЯ № 17

Тема: Взаимное пересечение поверхностей. (Способ вспомогательных секущих плоскостей).

План.

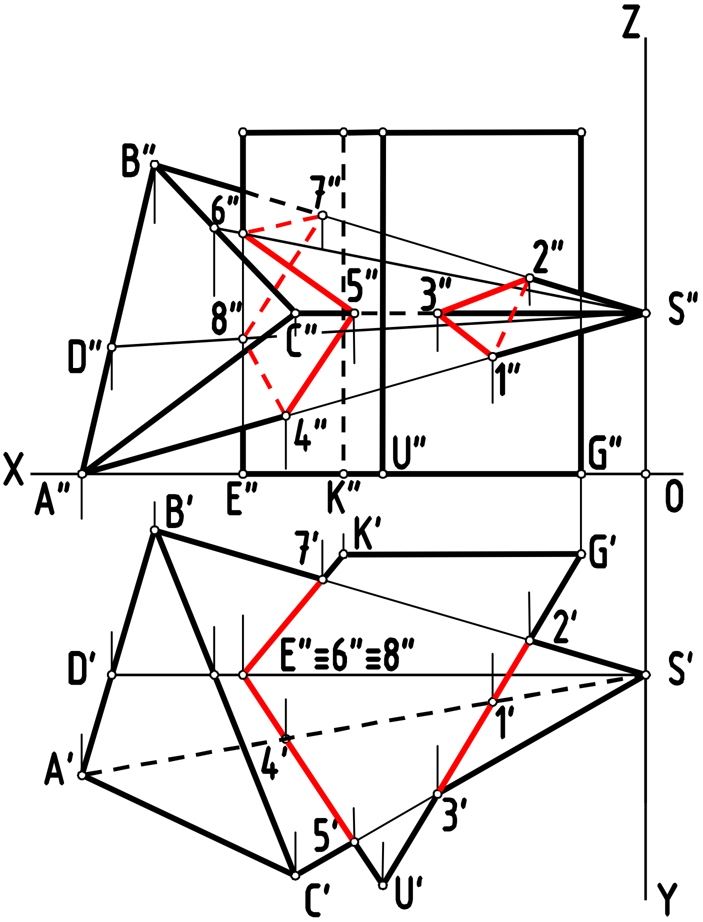
1.Взаимное пересечение поверхностей.
2.Способ вспомогательных секущих плоскостей.

17.1. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

Линия пересечения двух многогранников, называемая линией перехода, представляет собой некоторую пространственную ломанную линию, которая может распадаться на две и более отдельные часты. Эти части могут быть, в частности, и плоскими многоугольниками.

Вершинами линии пересечения многогранников являются точки пересечения ребер первого многогранника с гранями второго, а также ребер второго многогранника с гранями первого. Сторонами или звеньями линии пересечения являются отрезки прямых, по которым пересекаются грани обоих многогранников.

Поэтому построение вершин линии пересечения многогранников сводится к многократному решению задачи о пересечении прямой с плоскостью, а построение сторон этой линии – к многократному решению задачи о пересечении двух плоскостей. Обычно предпочитают находить вершины линии пересечения, а ее стороны находят соединением соответствующих вершин. При этом очевидно, что только те пары вершин можно соединять отрезками прямых, которые лежат в одной и той же грани первого многогранника и в то же время в одной и той же грани второго многогранника. Если же рассматриваемая пара вершин хотя бы в одном многограннике принадлежит разным граням, то такие вершины не соединяются.



При соединении вершин линии пересечения необходимо учитывать видимость ее звеньев. Видимым звеньям будут только те, которые принадлежат одновременно видимым граням как первого, так и второго многогранника.

При построении линии пересечения надо иметь в виду, что проекции линии пересечении могут располагаться только в пределах площади наложения одноименных проекций обоих многогранников. Поэтому, если хотя бы на одной проекции проекция какой-нибудь ребра находится вне площади наложения, то это ребро не пересекается с другим многогранником.

Таким образом, построение вершин линии пересечения двух многогранников сводится к проведению на поверхности каждого многоугольника вспомогательных ломанных линий, конкурирующих с ребрами другого многогранника, и определению точек пересечения этих линий с соответствующими ребрами и последовательному соединению этих точек.

Если при построении линии пересечения двух многогранников поверхность хотя бы одного из них является проецирующей, то следует использовать вырождение соответствующих проекций ребер и граней этого многогранника и точки и прямые.

Пример: Построить линию пересечения треугольной пирамиды с треугольной призмой, боковая поверхность которой является горизонтально проецирующей (чертеж 17.1.).

Горизонтальные проекции точек 1'2'3'4'5'7' пересечения ребер пирамиды с гранями находятся на пересечении их горизонтальных проекций, после чего определяются и фронтальные проекции этих точек на фронтальных проекциях соответствующих ребер. Горизонтальные проекции точек 6 и 8 пересечения левого ребра призмы с гранями пирамиды совпадают с горизонтальной проекцией самого ребра, а фронтальные проекции этих точек построены с помощью прямых S-D и S-D_1, принадлежащих граням пирамиды, которые пересекают ребро призмы.

17.2. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Линия пересечения двух поверхностей в общем случае представляется собой пространственную кривую, которая может распадаться на две и более части. Эти части могут быть, в частности, и плоскими кривыми. Обычно линию пересечения двух поверхностей строят по ее отдельным точкам.

Общим способом построения этих точек является способ поверхностей посредников. Пересекая данные поверхности некоторой вспомогательной поверхностью и определяя линии пресечения ее с данными поверхностями, в пересечении этих линии получим точки, принадлежащие искомой линии пересечения.

Наиболее часто в качестве поверхностей-посредников применяют плоскости или сферы, в зависимости от чего различают следующие способы построения точек линии пересечения двух поверхностей: способ вспомогательных плоскостей, разделяющийся на способы вспомогательных проецирующих плоскостей и вспомогательных плоскостей общего положения, и способ вспомогательных сфер. Применение того или иного способа зависит как от типа данных поверхностей, так и от их взаимного расположения.

Способ вспомогательных проецирующих плоскостей следуют применять тогда, когда обе поверхности возможно пересечь по графически простым линиям некоторой совокупностью проецирующих плоскостей или, в частности, совокупностью плоскостей уровня.

Способ вспомогательных плоскостей общего положения следует применять при построении линии пересечения конических (пирамидальных) и цилиндрических (призматических) поверхностей общего вида. Особенно целесообразно применение этого способа в случае, когда у обоих поверхностей заданы следы (основания) на одной и той же плоскости.

Способ вспомогательных сфер можно применять при построении линии пересечения таких поверхностей, которые имеют общую плоскость симметрии, расположенную параллельно какой-либо плоскости проекций. В частности, способ вспомогательных сфер можно применять при построении линии пересечения двух поверхностей вращения, оси которых пересекаются и параллельны какой-либо плоскости проекций.

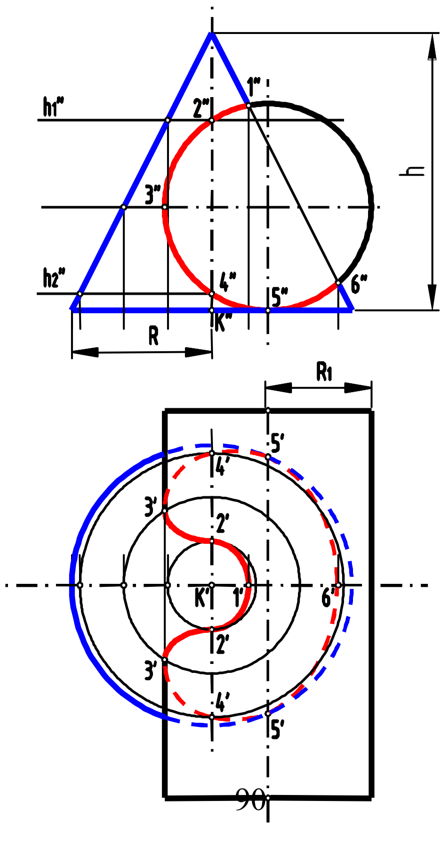
17.3. СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПРОЕЦИРУЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ (СПОСОБ КОНКУРИРУЮЩИХ ЛИНИИ)

Построение точек линий пересечения двух поверхностей способом вспомогательных проецирующих плоскостей состоит в проведении проецирующих плоскостей, пересекающих обе данные поверхности по графически простым линиям (прямым или окружностям). Пересечение этих линий даёт точки, принадлежащие искомой линии, значит: если у пересекающихся поверхностей имеются семейства графически простых линий, конкурирующих друг с другом, то точки пересечения этих линий и будут точками искомой линии пересечения.

Пример: Построить линию пересечения конуса вращения и цилиндра вращения, у которых оси скрещиваются под прямым углом (чертеж 17.2.)

Построение линии пересечения данных поверхностей можно произвести с помощью конкурирующих линий. В самом деле, если провести на цилиндрической поверхности ее образующие (прямые), то каждая из них будет конкурировать с некоторой параллелью (окружностью) конической поверхности, и так как эти параллели являются горизонталями, то они не будут искажаться на плоскости проекций H.

Вначале покажем построение опорных точек. У цилиндрической поверхности точками видимости для плоскости проекции H являются точки 3 (на H распадаются на две точки), они же будут самыми левыми точками.



Чертеж 17.2. Эти точки найдены в пересечении левой образующей цилиндра, (прямая) и конкурирующей с нею параллели, которая лежит на горизонтальной осевой поверхности цилиндра, конической поверхности. У конической поверхности точек видимости для плоскости проекции Н нет, так как вся ее боковая поверхность на этой плоскости проекций видима.

Верхние точки 1 и 2, определяемые также в пересечении конкурирующих линии, также будут видимыми, а нижние точки 4, 5 и 6, найденные в пересечении своих параллелей конуса и образующих цилиндра, будут на Н невидимыми, так как они лежат на нижних образующих цилиндра.

Вопросы к лекции №17

1.Взаимное пересечение поверхностей.

2.Способ вспомогательных секущих плоскостей.

ЛЕКЦИЯ № 18

Тема: Взаимное пересечение поверхностей. (Способ вспомогательных секущих сфер).

План.

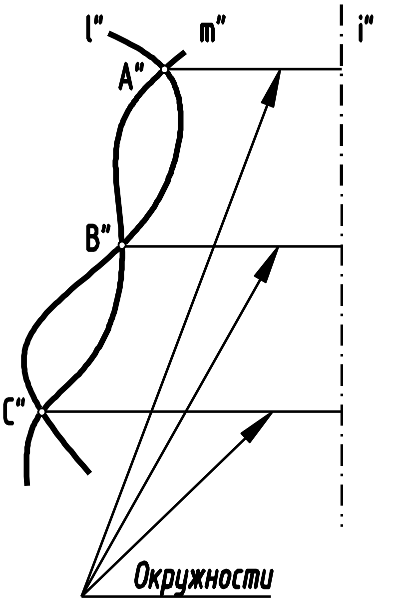
1. **Взаимное пересечение поверхности.**
2. **Способ вспомогательных сфер.**

18.1. СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СФЕР

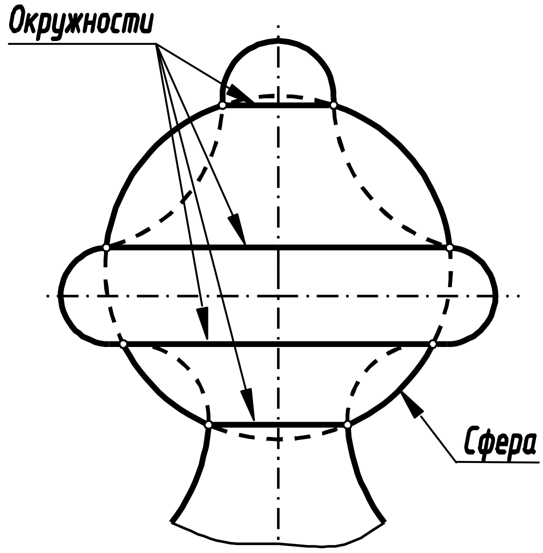
При построении линии пересечения двух поверхностей способом вспомогательных сфер возможны два случая. В одном из них пользуются сферами, проведенными из одного, общего для сфер центра, а в другом – сферами, проведенными из разных центров. В первом случае имеем способ ***концентрических сфер***, во втором способ ***эксцентрических сфер***.

Вначале рассмотрим способ концентрических сфер, для этого предварительно остановимся на пересечении соосных поверхностей вращения (с одной осью).

Из чертежа 18.1. видно, что две соосные поверхности вращения пересекаются друг с другом по окружностям, причем число окружностей



Чертеж 18.1.



Чертеж 18.2.

равно числу точек пересечения меридианов поверхностей.

В самом деле, если одна поверхность образуется вращением меридиана $\ell(\ell_2)$, а другая – меридиана m(m") около общей оси i(i"), то общие точки меридианов A(A"), B(B") и C(C") будут описывать окружности, общие для данных поверхностей. При этом если общая ось вращения параллельна какой-нибудь плоскости проекций, то эти окружности будут проецироваться на данную плоскость, в виде отрезков прямых.

Необходимо отметить частный случай пересечения двух соосных поверхностей вращения, когда одна из этих поверхностей является сферой.

Если центр сферы находится на оси какой-нибудь поверхности вращения, то сфера соосна с поверхностью вращения и в их пересечении получаются окружности (чертеж 18.2.).

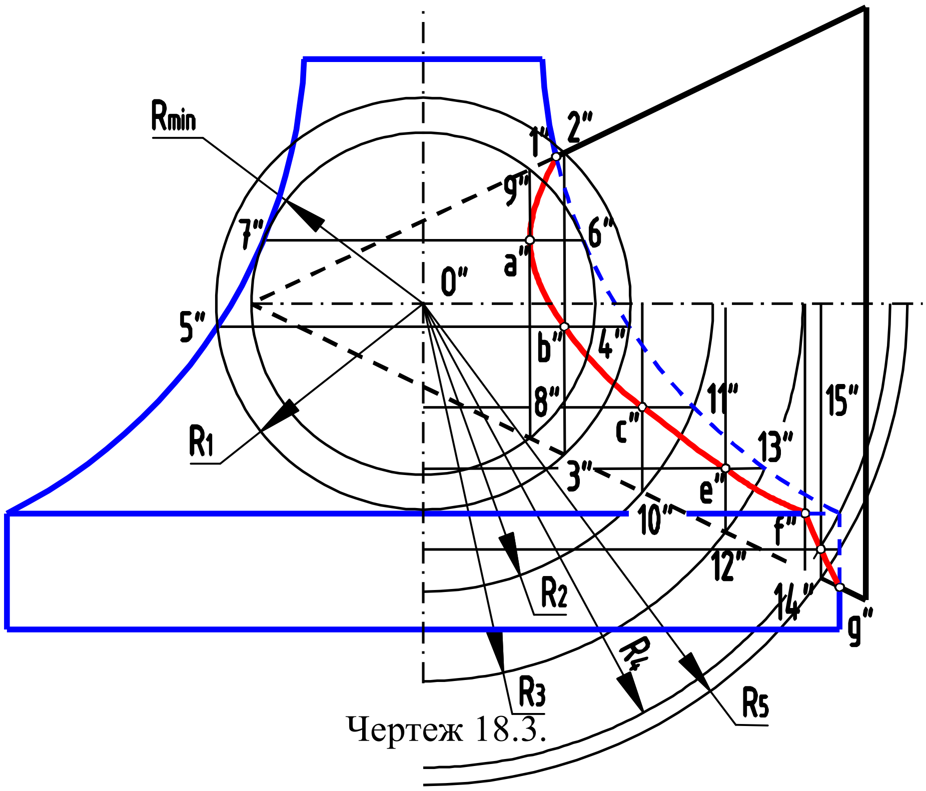
Это свойство сферы с центром на оси какой-либо поверхности вращения и положено в основу способа концентрических сфер.

Способ концентрических сфер можно применять для построения линии пересечения двух поверхностей, у которых имеется общая плоскость симметрии и каждая из которых содержит семейство окружностей, по которым ее могут пересекать концентрические сферы, общие для обеих поверхностей.

В частности, способ концентрических сфер следует применять при построении линии пересечения двух поверхностей вращения, оси которых пересекаются.

Способ эксцентрических сфер построения линии пересечения двух поверхностей состоит в применении вспомогательных сфер, имеющих различные центры.

Пример. Построить линию пересечения конуса с тором (чертеж 18.3.).

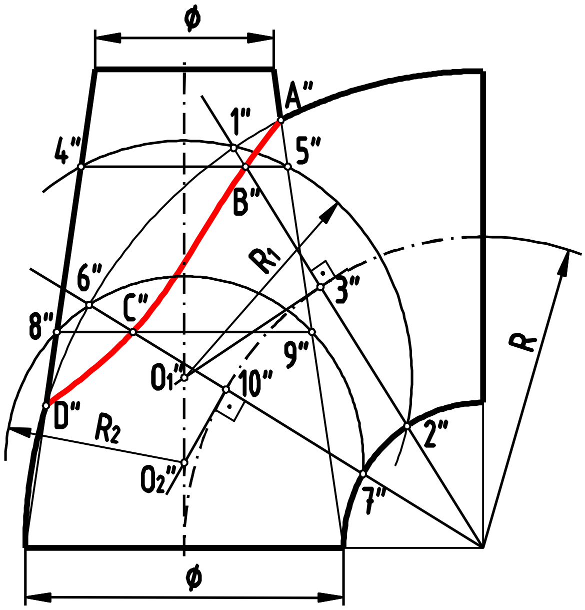


Чертеж 18.3.

Заметим, что линия пересечения конуса с тором в данном случае симметрична относительно фронтальной плоскости, проходящей через оси пересекающихся поверхностей. Фронтальные проекции видимого и невидимого участков линии пересечения совпадают. Поэтому в дальнейшем изложении будут указываться построения проекций только видимых точек линии пересечения являются высшая с проекцией 1", низшая с проекцией f" и ближайшая к оси тора с проекцией a". проекция 1" определяется точкой пересечения фронтальных проекций очерков тора и конуса. Проекция f" построена с помощью сферы R_4. она пересекает тор и цилиндр по окружности, проецирующейся в отрезок прямой, проходящей через проекцию 15" перпендикулярно их оси, и конус по окружности, проецирующейся в отрезок прямой, проходящей через проекцию 14" перпендикулярно оси конуса. Проекция a" построена с помощью вспомогательной сферы минимального радиуса R_{min}. Его находят как радиус сферы, касательной к одной из поверхностей вращения и пересекающей другую. В данном случае радиус такой сферы определен проекцией 6", в которой проекция образующей окружности тора пересекает осевую линию. Сфера радиуса R_{min} касается тора по окружности 6"7" и пересекает конус по окружности с проекцией 8"9". Для построения проекции b" произвольной точки линии пересечения конуса и тора пересечем их сферой R_1 с центром в точке O". Эта сфера пересекает конус по окружности с проекцией в виде отрезка 2"3", тор по окружности с проекцией в виде отрезка 4"5". В пересечении этих проекций находим проекцию b". Аналогично строят проекцию любых других точек линии пересечения, например проекцию c" с помощью вспомогательной сферы радиуса R_2.

18.2. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОГО КРУГОВОГО КОНУСА И ТОРА, ОСИ КОТОРЫХ СКРЕЩИВАЮТСЯ

Ось конуса параллельна плоскости V, ось тора перпендикулярна плоскости V, окружность центров осевых круговых сечений тора и ось конуса лежат в одной плоскости, параллельной плоскости V.



Чертеж 18.4.

Две очевидные характерные точки: высшая с проекцией A" и низшая D" – являются точками пересечения проекций очерков тора и конуса. Для построения проекций очерков тора и конуса. Для построения проекций промежуточных точек, например, проекции B", выполняют следующие построения. Выбирают на поверхности тора окружность, например, с проекцией 1"2" с центром в точке с проекцией 3". Перпендикуляр к плоскости этой окружности из точки с проекцией 3" является линией центров множества сфер, которые пересекают тор по окружности с проекцией 1"2".

Из множества этих сфер выбирают сферу с центром на оси конуса. Его проекция O_1". Эта сфера радиусом R_1 пересекает конус по окружности с проекцией 4"5". Пересечение проекций 1"2" и 4"5" является проекцией пары общих точек тора и конуса, т.е. линии их пересечения. На чертеже обозначена проекция B" одной из указанных точек – точки на видимом участке линии пересечения.

Построение проекций второй пары точек линии пересечения, из которых обозначена проекция C", выполнено с помощью отрезка 6"7" – проекции окружности на поверхности тора. Вспомогательная сфера для построения проекции C" – сфера радиусом R_2 с центром, проекция которого O_2". Конус эта сфера пересекает по окружности с проекцией 8"9". В пересечении проекций 6"7" и 8"9" окружностей находим проекцию C" искомой точки и симметричной ей на невидимой части пересекающихся поверхностей.

Вопросы к лекции № 18

1. **Каким образом выполняется взаимное пересечение поверхностей?**
2. **Как можно способ вспомогательных сфер найти линию пересечения?**

Оглавление

Список рекомендуемой литературы:

1. Начертательная геометрия /Н.Ф. Четверухин, В.С.Левицкий, З.И.Прянишникова и др. М.: Высшая школа, 1963. 420 с.
2. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. М., 1988, 2002. 272с.
3. С.А.Давлетов. Начертательная геометрия. Ташкент, Ўқитувчи, 1993. 173 с.
4. Э. Собитов. Чизма геометриядан қисқа курси. Ташкент, Ўқитувчи, 1993.
5. Чекмарев А.А. Начертательная геометрия и черчение. М.: Гуманитар. Изд. центр ВЛАДОС, 2005. 471 с.
6. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М.: ИНФРА – М, 2008. 286.
7. В.Т.Тозик. Электронный учебник по начертательной геометрии. Начертательная геометрия. www. Traffic. Spb./geom/
8. Иванов А.В., Родионов В.В., Лысенко К.Н., Бочков А.М. Электронный задачник по начертательной геометрии. Пензенский технологический институт. www.nocnit.ru/2st/materials/Ivanov.html .
9. Лекции по начертательной геометрии. http://yar-var.chat.ru/ingraph.htm.