ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА ДЛЯ МНОЖЕСТВ МЕНЬШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ КРУГОВЫХ ОБЛАСТЕЙ

КАРАКАЛПАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.Ж. ТЛЕУМУРАТОВ, Ж.А. ОМИРБАЕВА

Интегральные представления голоморфных функций играют важную роль в классический теории функций одного комплексного переменного и в многомерном комплексном анализе. Они решают классическую задачу восстановления в точках области D голоморфной функции, достаточно хорошо себя ведущей при подходе к границе ∂D, по ее значениям на ∂D или на S, (граница Шилова $S = S(D)$). Наряду с этой классической задачей можно и естественно рассматривать следующую: восстановить голоморфную функцию в D по ее значениям на некотором множестве $M \subset \partial D$, не содержащем S. Конечно, M должно быть множеством единственности для рассматриваемого класса голоморфных функций (например, тех из них, которых непрерывны на $\overline{D}$ или входят в класс Харди $H^p(D),\ p \geq 1$).

В данной работе рассмотрим некоторые общие соображения о построении формул Карлемана с голоморфными ядрами. Пусть $D-$ ограниченная область в C^n с кусочно-гладкой границей ∂D. Потребуем, чтобы ∂D являлась объединением конечного числа кусков гиперповерхностей, либо аналитических, или имеющих голоморфный «барьер», гладко зависящий от точки из этого куска. Через $A_C(D)$ обозначим множество всех голоморфных функции в областей D и непрерывно в $\overline{D}$. Тогда существует для функций из $A_C(D)$ интегральное представление с голоморфным ядром, которое можно явно выписывать в виде суммы интегралов по некоторым граням и некоторым ребрам на ∂D.

Пусть D – n- круговая область в C^n. Требование $0 \in D$ не закладывается, т.е. голоморфные в D функции представимы, вообще говоря, рядом Лорана, а не Тейлора. Обозначим Δ_r – тор остов из $\overline{D}$. В этом работе предполагается, что функция $f \in A(D)$ и $f \in C(D \cup \Delta_r)$, если $\Delta_r \subset \partial D$.

Теорема 1. Для $z \in D$

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Delta_r} f(\varsigma) \prod_{j=1}^{n} \frac{\left(\varsigma_j^m / z_j^m\right) - \left(z_j^m / \varsigma_j^m\right)}{\varsigma_j - z_j} d\varsigma \tag{1}$$

если в D есть точки z, у которых координата $z_j = 0$, то в (1) нужно вместо $\varsigma_j^m z_j^{-m}$ писать 1.

Пусть теперь $Q-$круговая область в C^n, $0 \in Q$.

Теорема 2. Для всякой точки $z \in Q$

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\int_{\Delta_r} f(\varsigma)\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(\frac{z_j\bar{\varsigma}_j}{r_j^2}\right)^{n-1}-\left(\frac{z_j\bar{\varsigma}_j}{r_j^2}\right)^{m+n}}{\left(1-\frac{z_j\bar{\varsigma}_j}{r_j^2}\right)\prod\left(\frac{z_j\bar{\varsigma}_j}{r_j^2}-\frac{z_i\bar{\varsigma}_i}{r_i^2}\right)}d\mu \qquad (2)$$

где μ мера.

Пусть N –объединение упомянутых граней и ребер, по которым ведется интегрирование в интегральном представлении с голоморфным ядром. Отметим, что граница Шилова $S(D)$ обязана содержаться в N. Запишем указанное интегральное представление коротко в виде

$$f(z)=\int_N f(\zeta)R(z,\zeta,d\zeta,d\bar{\zeta}),$$

где $R=R(z,\zeta,d\zeta,d\bar{\zeta})$ – соответствующая внешняя дифференциальная форма по ζ с коэффициентами, зависящими от ζ и голоморфно зависящими от z.

Пусть для множества $M\subset N$ выполняются условия 1) и 2), аналогичные соответствующим условиям из [1. разд.1] 1) существует функция $\varphi(z)\in H^{\infty}(D)$, для которой $|\varphi|=1$ почти всюду на $N\setminus M$; 2) $|\varphi|>1$ в D.

Теорема 3. Для функций $f\in A_C(D)$ и точек $z\in D$ справедлив многомерный аналог формулы Карлемана с голоморфным ядром

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m R \qquad (3)$$

Приведем некоторые предложение конкретных реализаций формулы (3).

Пример 1. Пусть $f\in A_C(D)$ и $D=\{z:r_1<|z_1|<R_1,\ r_2<|z_2|<R_2\}$ – топологическое произведение колец в C^2. Тогда формула Карлемана

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\int_M \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}\left(\frac{\zeta_1}{z_1}\right)^m d\zeta$$

где интегрирование происходит только по двум остовым $M=\Delta_{R_1,r_2}\cup\Delta_{R_1,R_2}$, $\Delta_{r,\rho}=\{z:|z_1|=r,\ |z_2|=\rho\}$.

Пример 2. Пусть $D\subset C^2$ область ограниченную гиперповерхностями $\Gamma_1=\{z:|z_2|=r\}$ и $\Gamma_2=\{z:|z_2|=A|z_1|^{\alpha}\}$ и $S\subset\partial D$. Тогда формула Карлемана

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_S\left(\frac{\zeta_1}{z_1}\right)^m\frac{f(\zeta)(\delta_1 d\bar{\zeta}_2+\delta_1 d\bar{\zeta}_n)\wedge d\zeta}{[\rho'_{\zeta_1}(\zeta_1-z_1)+\rho'_{\zeta_2}(\zeta_2-z_2)]^2}$$

где $S = \{(z_1, z_2) : \rho = 0\}$.

Литература

1. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе \\ Новосибирск «Наука» 1990 г. С 247.