ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕАКЦИИ БЕЛОУСОВА-ЖАБОТИНСКОГО

Р.Ш. Ярлашов
Научный руководитель доц. Д. Утебаев
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха

Математические модели многих биохимических явлений приводят к решению задач для системы уравнений параболического типа

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = L(\vec{u}) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$\vec{u}(0) = \vec{u}_0 \qquad (2)$$

и некоторыми граничными условиями. Здесь $L(\vec{u})$ - некоторый нелинейный оператор пространственных переменных. В частности, математическая модель бегущей волны для реакций Белоусова-Жаботинского имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= u(1-u-rv) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -kuv + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где r и k - положительные параметры. Ищем волновые решения, удовлетворяющие следующим граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(l,t) = 0. \qquad (4)$$

Это условие «отсутствие потоков» на границах, что соответствует химическим превращениям в замкнутом сосуде. Можно рассматривать и другие типы граничных условий, например, «фиксированные» граничные условия, в котором требуется, чтобы u и v на границах были равны своим равновесным значениям.

Найти точные решения задачи (3), (4) затруднительно. Поэтому для решения задачи (3), (4) с начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x) \qquad (5)$$

обычно применяются такие численные методы, как метод конечных разностей или метод конечных элементов.

В настоящей работе для решения задачи (3)-(5) применяется метод, который аппроксимирует с начала пространственные переменные методом конечных разностей, в результате чего получается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$U' + AU = F(U), \; U(0) = U_0, \; U' = dU/dt, \qquad (6)$$

где $U=(u,v)$, A - некоторая матрица. Далее для решения задачи (6) сначала применяются явные и неявные разностные схемы Эйлера невысокого порядка точности. Кроме того, эта задача решается методом Руньге-Кутты четвертого порядка точности. Здесь надо быть осторожным, так как система (6) может оказаться жестким. В этом случае придется использовать специальные численные методы, например, A-устойчивые или $A(\alpha)$-устойчивые методы типа Руньге-Кутты, Гира и т.д. Любые двухслойные разностные схемы этих методов приводит к разностному уравнению вида

$$y_{n+1}=S_n y_n+f_n(y_n),\quad y(0)=y_0,\quad n=0,1,\ldots \tag{7}$$

Здесь, S_n - оператор перехода. Исследованию устойчивости нелинейных разностных уравнений (7) посвящена работа [2], где получены условия устойчивости по начальным данным и по правой части.

На основе вычислительного эксперимента с использованием системы MathCad получены численные результаты. Кроме того, в работе получены некоторые информации о поведении рассматриваемой системы. Для этого система (3) линеаризована относительно малых величин и на основе ряда Фурье получены однородные системы уравнений для нахождения собственных значений, а собственные значения удовлетворяют некоторому характеристическому уравнению. Подробный анализ этих уравнений выявил несколько интересных аспектов по отношению устойчивости однородного равновесного состояния.

Литература

1. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. – М.: Мир, 1983. – 400 с.
2. Утебаев Д., Утебаев Б.Д., Ярлашов Р.Ш. О устойчивости нелинейных разностных уравнений и ее некоторые приложения // Труды международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2016», 9-10 ноябрь 2016 г., г. Бухара, Бухарский Государственный университет, С. 141 – 144.