ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

САМАРҚАНД ИҚТИСОДИЁТ ВА СЕРВИС ИНСТИТУТИ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

О Л И Й М А Т Е М А Т И К А

5811700- сервис (туризм ва мехмонхона хўжалиги) ,5811000-сервис техника ва технологияси (хизмат кўрсатиш тармоқлари бўйича) ,5811600-сервис(сифат экспертизаси,хизмат кўрсатиш ва ишлар сертификацияси) йўналишидаги талабалари учун лаборатория ишларини бажариш бўйича

У С Л У Б И Й К Ў Р С А Т М А
ва
Т О П Ш И Р И Қ Л А Р

САМАРҚАНД 2006

Бегматов А. Б. Олий математикадан лаборатория ишларини бажариш учун услубий кўрсатма ва топшириқлар.Самарқанд. СамИСИ. 2006. -100б.

Таризчилар:
Файзиев С.Р. ф-м.ф.н., доцент, Самарқанд Давлат архитектура ва қурилиш институти;
Умаров Т. И. т.ф.н., доцент, Самарқанд иқтисодиёт ва сервис институти;
Алиқулов А. И. и.ф.н., доцент, Самарқанд иқтисодиёт ва сервис институти, ахборотлар технологияси кафедраси мудири.

Услубий кўрсатма Самарқанд иқтисодиёт ва сервис институти ўқув-услубий Кенгаши , 2006 йил 5-декабр мажлисида муҳокама қилиниб(5-сон баённома), нашр этишга тавсия қилинган.

Услубий кўрсатма, 5811700- сервис (туризм ва меҳмонхона хўжалиги) ,5811000-сервис техника ва технологияси (хизмат кўрсатиш тармоқлари бўйича), 5811600-сервис(сифат экспертизаси,хизмат кўрсатиш ва ишлар сертификацияси) йўналишлари ўқув режасидаги „Олий математика'' фани лаборатория ишларини бажаришга мўлжалланган бўлиб, уни бажариш бўйича умумий тушунчалар, ишнинг мақсади, тегишли назарий қисм ва амалий машқларни бажариш учун услубий кўрсатмалар ҳамда лаборатория ишлари топшириқлари берилган.

Самарқанд иқтисодиёт ва сервис институти,А.Б. Бегматов. 2006.

Лаборатория ишларини бажариш учун услубий кўрсатмалар

Умумий тушунчалар.

Маълумки, ҳозирги замонда иқтисодга, ишлаб чиқаришга қўйилаётган юксак талабларни бажаришда кадрларнинг умумий малакаси олдинги ўринга қўйилмоқда.Бу юксак талаблар ҳамма, хусусан сервис йўналишидаги мутахассисларга ҳам тегишлидир.

Бундай ҳар томонлама малакага эга бўлган мутахассисларни тайёрлашда ,,Олий математика'' фанининг алоҳида ўринга эгалиги ҳеч кимда шубҳа туғдирмаса керак.

Хамма соҳаларда,математик қонуниятларга асосланган замонавий компьютерларнинг муваффақият билан татбиқ этилиши ҳамда унинг кундан-кунга ривожланиб бораётганлиги, ёш мутахассисларнинг тегишли соҳалар масалаларининг математик моделларини туза билиши ва унда ҳисоблаш техникасини қўллай олиши, долзарб масалалардан бўлиб қолмоқда. Бундай масалаларни моделлаштириш математик амаллар ва усуллар ёрдамида амалга оширилади.

Олий мактабда ,,Олий математика'' фанини ўрганиш жараёни маърузалар, амалий машғулотлар,лаборатория ишлари ва мустақил таълим орқали олиб борилади. Талабалар ўқитувчи томонидан берилган маълумотларнинг маъносини англаб олишга, тушунишга ҳаракат қилади ва ундан ўзининг амалий фаолиятида фойдаланади.

Математик аппаратни ўрганишда ,,Олий математика'' фанидан лаборатория ишларини бажариш ҳам катта аҳамиятга эга. Лаборатория ишлари назарий билимларни қўллаш механизмини чуқур билиш имкониятини яратиш билан биргаликда талабалар фикрлаш қобилиятини ривожлантириб унга фаоллик касб этади.

Лаборатория ишларини бажариш жараёнида талабанинг илмий текшириш малакалари шаклланиб, фанга ижодий ёндашиш кўникмалари ҳосил бўлади.

Шудай қилиб, лаборатория машғулотлари талабанинг ижодий фикрлашини ривожлантириб, фанда изланишга йўналтиради.

Бундай натижаларга эришишда, лаборатория ишларини режалаштириш, талабанинг назарий тайёргарлигини ҳамда олинган билимларини чуқурлаштириштириб эгаллашга илҳомлантирувчи мойилларни яратиш, иш мақсадининг аниқлиги ҳамда талабанинг мустақил ишдан оладиган натижасига ўзи эришиш имкониятини ҳосил қилиш талаблари қўйилади. Услубий кўрсатмани тузишда бу талаблар эътиборга олинди.

Маълумки, мутахассис исталган амалий фаолиятида ҳар хил турдаги ҳисоблашларни бажаришга тўғри келади. Шунинг учун ҳам лаборатория ишини бажаришда ҳисоблашларни қўлда ҳамда компьютерда амалга ошириш имконияти яратилиши керак.

Лаборатория ишларини, ўқитувчи ва талабалар иштирокида эркин диалог шаклида ўтказиш, муҳокома қилиш билан ишни бажаришга мўлжалланган.

Лаборатория машғулотини ўтказишда гуруҳ талабаларини 3-4 нафардан қилиб, кичик гуруҳларга бўлиб, ишни ташкил қилиш ҳам мумкин. Яъни дарснинг бу турида талабаларнинг ҳамкорликда фаолият кўрсатиши ҳисобга олинади. Бунда ҳар бир талаба ўз улушини қўшиб, ўзаро алмашинув ҳосил этилади. Бу жараёнда дўстона муносабатлар муҳити асосида, ўзаро ҳамкорлик ва биродорлик юқори даражага кўтарилишига имконият яратилади.

Шундай қилиб, лаборатория ишини бажариш, маълум мавзу бўйича якуний босқич бўлибгина қолмасдан,талабаларни тарбиялашда ҳам муҳимдир.

Ишни расмийлаштириш тартиби:

1) назирий қисмнинг қисқача матни конспектлаштирилади;
2) амалий қисм ҳамма ҳисоблашлари қўлда ва компьютерда бажарилади, бу амалий қисмда кўрсатилади;
3) юқоридагилар бажарилгандан кейин лаборатория машғулоти олиб борувчи ўқитувчи томонидан баҳоланади. Ижобий баҳоланган иш кафедрада рўйхатга олинади. Акс ҳолда иш маълум тартибда қайта бажарилади.

1-лаборатория иши.

Мавзу: **Чизиқли тенгламалар системасини текшириш.**

Лаборатория ишининг мақсади: модел ва математик моделларни англаш, бу моделларни тузиш, текширишда фойдаланиладиган детерминантлар ва уларнинг асосий хоссалари, матрицалар ва улар устида амалларни бажариш малакаларини ; бу масакаларни чизиқли тенгламалар системасини текширишга қўллаш билан амалий масалаларнинг моделларини тузиш ҳамда уларни ечиш кўникмаларини ҳосил қилиш.

Лаборатория иши жиҳозлари: маъруза ва амалий машғулот конспектлари; олий математика фани дарслик ёки қўлланмалари, ҳисоблаш техникаси (компьютер).

Лаборатория ишини бажариш тартиби.

1.Назарий қисм.

Назарий қисм мақсади,

1) модел ва математик моделлаштириш тушунчаларини англаш;
2) детерминантлар ва уларнинг хоссаларини ўрганиш;

3) матрицалар ва улар устида амалларни бажаришни билиш;
4) матрицанинг ранггини ва тескари матрицани топишни ўрганиш;
5) чизиқли тенгламалар системасини ечиш усуллари(Крамер қоидаси,тескари матрицалар усули, Гаусс усули,Жордано-Гаусс модификациялашган усули)ни билиш;
6) умумий кўринишдаги чизиқли тенгламалар системасини текширишни ўрганиш;
7) биржинсли чизиқли тенгламалар системаси ечимини текширишни ўрганиш.

Энди назарий қисм талабларини бажариш учун услубий кўрсатма беришга ўтамиз.

1.Назарий қисм саволлари:

1) иқтисодий- математик моделлаштириш деганда нимани тушунасиз(оддий иқтисодий математик моделларга мисол келтиринг, масалан, хом ашё сарфи модели ва ҳ.к.);
2) иккинчи, учинчи ва ундан юқори тартибли детерминантлар нималар?
3) детерминантларнинг асосий хоссалари қандай?
4) тўртинчи ва ундан юқори тартибли детерминантлар қандай ҳисобланади?
5) матрицалар устида амаллар қандай бажарилади?
6) матрицанинг рангги нима?
7) элементар алмаштиришлар деб нимага айтилади?
8) тескари матрица қандай топилади?
9) Кронекер-Капелли теоремасини биласизми?
10) биргаликда бўлмаган ва биргаликда бўлган системалар қандай системалар?
11) биргаликда бўлган чизиқли тенгламалар системасини ечиш усулларини биласизми?
12) биржинсли чизиқли тенгламалар системаси нима ва у қандай текширилади?

1.Ушбу **иқтисодий масалани қарайлик.** A ва B маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун 2 турдаги хом ашёдан фойдаланилади. Битта A маҳсулотни ишлаб чиқариш учун 5 бирлик 1-тур ва 4 бирлик 2-тур хом ашё сарфланади,битта B маҳсулотни ишлаб чиқариш учун эса, 3 бирлик 1-тур ва 5 бирлик 2-тур хом ашё ишлатилади. 1-тур хом ашё 62 бирлик, 2-тур хом ашё 73 бирликда берилган бўлса, энг катта фойда олинадиган ишлаб чиқаришни режалаштириш учун, хом ашё сарфи моделини тузинг.

Ечиш. Бу иқтисодий масаланинг математик моделини тузиш мақсадида x_1 билан ишлаб чиқарилиши керак бўлган A маҳсулот миқдорини, x_2 билан эса ишлаб чиқарилиши керак бўлган B маҳсулот миқдорини белгилайлик. Бу ҳолда $5x_1$ A маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарфланган 1-тур хом ашё миқдорини, $3x_2$ эса B маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарфланган 1-тур хом ашё миқдорини ифодалайди. $5x_1+3x_2$ A ва B маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун сарфланадиган 1-тур хом ашё жами сарфи миқдорини ифодалайди, бу хом ашё чегараланган бўлиб, 62 бирликда мавжуд, демак $5x_1+3x_2=62$ тенглама келиб чиқади. Худди шундай қилиб, 2-тур хом ашё сарфи учун $4x_1+5x_2=73$ тенгламани ҳосил қилиш мумкин. Шундай қилиб,

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2=62 \\ 4x_1+5x_2=73 \end{cases}$$

икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қилдик. Бу тенгламалар системаси берилган A ва B маҳсулотларни ишлаб чиқаришда, берилган хом ашё сарфининг математик моделини ифодалайди.

2. 3-тартибли детерминантлар.Ушбу

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} a_{13}a_{12} \\ a_{33}a_{32} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{22}a_{23} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

ифодага ***3-тартибли детерминант** дейилади* ва

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

билан белгиланади. a_{11}, a_{22}, a_{33} элементлар ***бош диагонални***, a_{13}, a_{22}, a_{31} элементлар ***ёрдамчи диагонални*** ифодалайди. (1) тенгликда 2-тартибли детерминантларни унинг катталиклари билан алмаштирсак

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (2)$$

бўлади.

3. Детерминантларнинг асосий хоссалари. Детерминантлар қуйидаги хоссаларга эга:

1) детерминантнинг барча сатридаги элементларини мос устун элементлари билан алмаштирилса, унинг катталиги ўзгармайди, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{21}a_{31} \\ a_{12}a_{22}a_{32} \\ a_{13}a_{23}a_{33} \end{vmatrix}.$$

1-мисол.Ушбу детерминантнинг катталиги

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 6 - 0 - 0 + 4 - 0 = 22$$

бўлиб, бу детерминантда барча сатрларини мос устунлар билан алмаштирсак

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 6 + 0 - 0 + 4 - 0 = 22$$

бўлади. Бундан кўринадики, иккала ҳолда ҳам бир хил катталик ҳосил бўлди, бу биринчи хоссанинг тўғрилигини кўрсатади;

2) детерминантда иккита сатр(устун)ларининг ўринларини ўзаро алмаштирилса, унинг катталигининг ишораси тескарисига ўзгаради; ҳақиқатан ҳам 1- мисолдаги детерминантда 1-сатрини 3-сатри билан ўзаро алмаштирсак

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4 - 24 - 0 + 6 = -28 + 6 = -22$$

бўлиб, бу 2-хоссанинг ўринли эканлигини исботлайди;

3) иккита бир хил сатр (устун)ли детерминант катталиги нўлга тенг; иккита сатри бир хил бўлган детерминантни ҳисобласак

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -36 + 0 + 0 + 36 - 0 - 0 = 0$$

бўлади, бу эса 3-хоссанинг тўғрилигини кўрсатади;

4) детерминантнинг бирор сатр (устун) нинг ҳамма элементларини $m \neq 0$ сонга кўпайтирилса, унинг катталиги шу m сонга кўпаяди;
ҳақиқатан ҳам 1-хоссада келтирилган детерминантнинг 2-сатри элементларини 2 га кўпайтирсак

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 12 + 0 - 0 + 8 - 0 = 44$$

бўлиб, бундан бу хоссанинг ҳам тўғрилиги кўринади;

5) детерминантнинг иккита сатри (устуни) элементлари ўзаро пропорционал (мутаносиб) бўлса, унинг катталиги нўлга тенг;
мисол учун

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминант берилган бўлсин. Бу детерминантнинг 1 ва 2-сатри элементлари ўзаро пропорционал, уни ҳисобласак

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6+0-12-0+6+12=0$$

бўлиб, бу эса 5-хоссанинг тўғрилигини исботлайди;

6) детерминантнинг катталиги, бирор сатри (устуни) элементларини унга мос алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб қўшилганига тенг;
1-хоссада келтирилган мисолни қараймиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

бу детерминантни 3-сатр элементлари бўйича ёйиб ёзсак

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6+0+28=22$$

келиб чиқади, бу эса 6-хоссанинг ҳам ўринли эканлигини кўрсатади;

7) детерминант бирор сатри (устуни)нинг ҳар бир элементи иккита қўшилувчидан иборат бўлса, у ҳолда бу детерминант иккита детерминант йиғиндисига тенг бўлади, яъни

$$\begin{pmatrix} (a_{11}+b_1) a_{12} a_{13} \\ (a_{21}+b_2) a_{22} a_{23} \\ (a_{31}+b_3) a_{32} a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{pmatrix};$$

ушбу детерминантни

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

қуйидагича алмаштирамиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2+2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

кейинги иккита детерминантни ҳисобласак

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 18+0-3-18+3-0=0;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6+0-3+18+1-0=22;$$

1-хоссадаги мисолдан маълумки, у 22 га тенг эди, кейинги икки детерминант йиғиндиси ҳам 22 га тенг бўлади,бу эса 7-хоссанинг ўринли эканлигини кўрсатади;

8) детерминантнинг бирор устини (сатри) элементларига бошқа устини(сатри)нинг мос элементларини исталган умумий кўпайтувчига кўпайтириб қўшилса, унинг катталиги ўзгармайди, яъни:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}+\lambda a_{12}) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}+\lambda a_{22}) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}+\lambda a_{32}) & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

бўлади, мисол учун ,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

детерминантнинг 2-устун элементларини 2 га кўпайтириб, 1-устуннинг мос элементларига қўшиб, ҳосил бўлган детерминантни ҳисобласак:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 6 = 22$$

бўлади. Бу детерминантнинг катталиги 1- мисолда ҳисоблаганимиздек 22 га тенг эди, бу эса 8-хоссанинг ҳам тўғрилигини кўсатади;

Детерминантларнинг хоссаларидан фойдаланиш кўп ҳолларда қулай ҳисоблашларга олиб келади. Ушбу мисолни қараймиз.

2-мисол.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12314 & 16536 & 20537 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix}$$

детерминантнинг катталигини ҳисобланг.

Ечиш. Бу детерминантни учбурчак қоидаси билан ҳисоблаш кўп хонали сонлар бўлганлиги учун анча ноқулайликларга олиб келади. Шунинг учун бу детерминантни ҳисоблаш учун, унинг хоссаларидан фойдаланишга уринамиз. Иккинчи сатр элементларини -2 га кўпайтириб, 1-сатр мос элементларига қўшамиз, бу ҳолда ушбу детерминант ҳосил бўлади:.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix};$$

ҳосил бўлган детерминантни 1- сатр элементлари бўйича ёйиб,ушбуни

$$\Delta = 0 \cdot \begin{vmatrix} 8268 & 10268 \\ 689 & 126 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 6157 & 10268 \\ 513 & 126 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} (-12)$$

оламиз.Охирги детерминант 2-сатр элементларини (-12) га кўпайтириб 1-сатр мос элементларига қўшиб ушбу натижага эга бўламиз:

$$\begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = 1 \cdot 689 - 0 \cdot 513 = 689.$$

Бу мисолдан кўринадики, детерминантларни ҳисоблашда унинг хоссаларидан фойдаланиш анча қулайликларга олиб келади.

3–тартибли детерминантни *диагоналлар усули* деб аталувчи ушбу усул билан ҳам ҳисоблаш мумкин:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

1-мисолдаги детерминантни диагонал усулидан фойдаланиб ҳисобласак

$$\left|\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{matrix} = 24 - 6 + 0 + 0 + 0 + 4 = 22$$

бўлади.

4. 4,5,… n- *тартибли детерминантлар ҳақида.* Кўпгина масалаларни ечишда 2 ва 3-тартибли детерминантлардан ташқари янада юқори тартибли детерминантлар ҳам учрайди. Масалан, 4-тартибли детерминант ушбу кўринишда бўлади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Умумий ҳолда n-тартибли детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

кўринишда бўлади. Бунда $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ мос равишда $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ элементларнинг алгебраик тўлдирувчиларидир. Маълумки, алгебраик тўлдирувчилар $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ ларнинг тартиблари $(n-1)$ бўлади. Детерминантларнинг ҳамма хоссалари n-тартибли детерминант учун ҳам ўринлидир.

Юқори тартибли детерминантларни ҳисоблашда детерминантларнинг 6-хоссасидан фойдаланиб, унинг тартибини пасайтириш билан 3 ёки 2-тартибли детерминантларга келтириб ҳисобланади. Масалан, 4-тартибли детерминантни 1-сатр элементлари бўйича ёйсак ушбу кўринишда бўлади:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{44}\end{vmatrix}-a_{14}\cdot\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{vmatrix}$$

Бундан юқори тартибли, детерминантларнинг ҳам катталиги юқоридагига ўхшаш ҳисобланади. Масалан, 6-тартибли детерминантнинг катталигини ҳисоблаш керак бўлса, уни бирор сатри ёки устуни элементлари бўйича ёйиб 5-тартибли детерминантларга, кейин ўз навбатида 5-тартибли детерминанатларни ҳам бирор сатри ёки устуни элементлари бўйича ёйиб, 4-тартибли детерминантларга келтирилади ва ҳоказо.

Детерминантларнинг юқорида кўрсатилган хоссалари ҳамма тартибли детерминантлар учун ҳам тўғри.

Энди юқори тартибли детерминантларни ҳисоблашга мисол қараймиз. Ушбу

$$\begin{vmatrix}2&0&3&0\\-1&3&2&4\\-2&4&0&3\\0&2&1&1\end{vmatrix}$$

детерминантнинг катталигини ҳисобланг.

Ечиш.Берилган детерминантни 1-сатр элементлари бўйича ёйиб ҳисоблаймиз:

$$\begin{vmatrix}2&0&3&0\\-1&3&2&4\\-2&4&0&3\\0&2&1&1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}3&2&4\\4&0&3\\2&1&1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}-1&2&4\\-2&0&3\\0&1&1\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}-1&3&4\\-2&4&3\\0&2&1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}-1&3&2\\-2&4&0\\0&2&1\end{vmatrix}=$$

$$2\left[3\cdot\begin{vmatrix}0&3\\1&1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&3\\2&1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}4&0\\2&1\end{vmatrix}\right]\quad+3\cdot\left[(-1)\cdot\begin{vmatrix}4&3\\2&1\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-2&3\\0&1\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}-2&4\\0&2\end{vmatrix}\right]=$$

$$=2(-9+4+16)+3(2+6-16)=22-24=-2.$$

Детерминантларни ҳисоблашда унинг бирор сатри ёки устунларида нўллар кўпроқ бўлса, ўша сатр ёки устун элементлари бўйича ёйиб ҳисоблаш анча қулайлик келтиради, масалан, юқоридаги мисолда 1-сатр элементлари бўйича ёйганимиз учун, яъни унда 2 та нўл элемент бўлгани учун 2 та 3- тартибли детерминантларни ҳисоблаб чиқишга ҳожат қолмади. Бундай сатр ёки устунлар бўлмаса детерминантларнинг 8-хоссасидан фойдаланиб, уни бундай сатрга ёки устунга эга бўладиган қилиб ўзгартириш мумкин, мисол учун ушбу

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминантни ҳисоблайлик. Бунинг учун 1-устун элементларини олдин 2 га кейин мос равишда 5 га, -4 га кўпайтириб, 2,3 ва 4- устунларнинг мос элементларига қўшамиз, бу ҳолда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix}$$

бўлиб, кейинги 3-тартибли детерминантни 2-сатр элементлари бўйича ёйсак:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-33 + 21) = 7 \cdot (-12) = -84.$$

бўлади.

5. Матрицалар ҳақида умумий тушунчалар. Иқтисодий системаларни моделлаштиришда **м*<u>атрицалар алгебраси</u>*** деган тушунча муҳим аҳамиятга эга . Режалаштириш муаммолари, ялпи маҳсулот, жами меҳнат сарфи, нархни аниқлаш каби масалалар ҳамда уларда компьютерларни қўллаш матрицалар алгебрасини қарашга олиб келади.Ишлаб чиқаришни режалаштириш, моддий ишлаб чиқариш орасидаги мавжуд боғланишларни ифодалашда ва бошқаларда, маълум даражада тартибланган ахборотлар системасига асосланган бўлиши лозим. Бу тартибланган ахборотлар системаси муайян жадваллар кўринишида ифодаланган бўлади. Мисол ўрнида моддий ишлаб чиқариш тармоқлари орасидаги ўзаро боғлиқлик ахборотлари системасини қарайлик. Ишлаб чиқариш 5 та (масалан, машинасозлик, электроэнергия, метал, кўмир, резина ишлаб чиқариш саноатлари) тармоқдан иборат бўлсин. Бунда улар орасидаги ўзаро боғлиқлик 1-жадвал билан ифодалансин.

1-жадвал.

Тармоқ-лар	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Бу жадвалда $a_{ij}\ (i,j=1,2,3,4,5)$ лар билан, i-тармоқнинг j- тармоққа етказиб берадиган (таъминлайдиган) маҳсулоти миқдори белгиланган, чунончи, a_{21}, a_{22}, ..., a_{25} лар 2-тармоқнинг мос равишда ҳамма тармоқларга; a_{31}, a_{32}, ..., a_{35} лар эса 3-тармоқнинг мос равишда ҳамма тармоқларга етказиб берадиган маҳсулотлари миқдорини билдиради. a_{22}, a_{33} лар мос равишда 2,3-тармоқларнинг ўз эҳтиёжларига сарфини ифодалайди.

Юқоридагига ўхшаш ишлаб чиқариш мезони (нормаси) ахборотлари системасига сонли мисол қарайлик. Корхона 3 турдаги хом ашё ишлатиб 4 хилдаги маҳсулот ишлаб чиқарадиган бўлсин, бунда хом ашё сарфи нормаси системаси 2-жадвал билан берилган бўлсин.

2-жадвал.

Хом ашёлар	Маҳсулотлар			
	1	2	3	4
1	2	3	2	0
2	4	0	3	5
3	3	5	2	4

2-жадвалда масалан, 1-турдаги хом ашё сарфи нормаси мос равишда 1,2,3,4-хилдаги маҳсулотлар ишлаб чиқариш учун 2,3,2,0 бўлади.

1 ва 2 жадваллар, математикада ўрганиладиган матрицалар тушунчасининг мисоллари бўлаолади. Матрицалар иқтисодий изланишларда кенг қўлланилмоқда, хусусан, улардан фойдаланиш ишлаб чиқаришни режалаштиришни осонлаштириб, меҳнат сарфини камайтиради, ҳамда режанинг ҳар хил вариантларини тузишни ихчамлаштиради. Бундан ташқари ҳар хил иқтисодий кўрсаткичлар орасидаги боғлиқликни текширишни осонлаштиради. Бу ҳолатлар матрицаларни умумий ҳолда қарашга олиб келади.

1-таъриф. m та сатрли ва n та устунли тўғри бурчакли $m \cdot n$ та элементдан тузилган жадвал

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ ----- & ----- \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m\times n$ ***ўлчамли матрица*** дейилади. A матрицани қисқача (a_{ij}) $(i=1,...m,\ j=1,...n)$ билан ҳам белгилаш мумкин. Матрицаларда сатрлар сони устунлар сонига тенг бўлса, бундай матрицалар квадрат матрица деб аталади.

Ҳар бир n тартибли квадрат матрица учун унинг элементларидан тузилган ***детерминантни*** ҳисоблаш мумкин, бу детерминантга A матрицанинг ***детерминанти*** дейилади ва $\det A$ ёки $|A|$ билан белгиланади. $\det A=0$ бўлса, A матрицага ***махсус матрица,*** $\det A\neq 0$ бўлса, ***махсусмас матрица*** дейилади. Квадрат матрицанинг $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ элементлар жойлашган диагонали ***бош диагонал,*** $a_{1n},a_{2n-1},\ldots,a_{n1}$ элементлари жойлашган диагонали ***ёрдамчи диагонал*** дейилади. Бош диагоналдаги элементлар 0дан фарқли бошқа барча элементлари 0 га тенг квадрат матрица ***диагонал матрица*** дейилади.Масалан,

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

матрица диагонал матрицадир. Диагоналдаги барча элементлари 1 га тенг диагонал матрица ***бирлик матрица*** дейилади ва

$$E=\begin{pmatrix} 1\,0\ldots 0 \\ 0\,1\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\,0\cdots 1 \end{pmatrix}$$

билан белгиланади.

Фақат битта сатрдан иборат $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$ матрицага **сатр** матрица дейилади. Фақат битта устунга эга

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$$

матрицага **устун** матрица деб аталади.

Барча элементлари 0 лардан иборат бўлган матрицага **нўл матрица** дейилади ва O билан белгиланади.

А матрицага қуйидаги матрицани мос қўйиш мумкин:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21}\cdots a_{m1} \\ a_{12}a_{22}\cdots a_{m2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Бу матрицанинг ҳар бир сатри A матрицанинг унга мос устунидан иборат. A^T матрицани A матрицага нисбатан **транспонирланган** дейилади.

$A=(a_{ij})$ ва $B=(b_{ij})$ $(i=\overline{1m},\ j=\overline{1n})$ матрицаларнинг мос элементлари $a_{ij}=b_{ij}$ тенг бўлса, бундай **матрицалар тенг** дейилади.

6. Матрицалар устида амаллар. Матрицаларни қўшиш, сонга кўпайтириш ва бир-бирига кўпайтириш мумкин.

Бир хил ўлчамли $A=(a_{ij})$ ва $B=(b_{ij})$ $(i=\overline{1m},\ j=\overline{1n})$ матрицаларнинг **йиғиндиси** деб, элементлари $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ равишда аниқланадиган учинчи $C=(c_{ij})$ матрицага айтилади. Равшанки, C матрицанинг ўлчами олдинги матрицаларнинг ўлчами билан бир хил бўлади. Масалан:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad ва \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицалар йиғиндиси

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 0+3 \\ 3-2 & 1+4 & -1+2 \\ 0+5 & 4+0 & 5+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}=C$$

бўлади. Матрицаларни қўшиш амали қуйидаги ўрин алмаштириш ва гуруҳлаш хоссаларига эга, яъни

$$A+B=B+A, \qquad (A+B)+C=A+(B+C).$$

Матрицаларни қўшишда бирор матрицага O матрицани қўшиш одатдаги сонларни қўшишдаги нўл сони ролини ўйнайди, яъни

$$A+O=A.$$

масалан,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

А матрицани λ сонга кўпайтириш деб унинг ҳамма элементларини шу сонга кўпайтиришга айтилади, яъни

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

масалан,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

матрицани $\lambda = 3$ га кўпайтирсак, $\lambda A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 0 \\ 12 & 9 & 3 \\ 15 & 6 & 12 \end{pmatrix}$ бўлади.

$m \times k$ ўлчамли $A = (a_{ij})$ матрицанинг $k \times n$ ўлчамли $B = (b_{ij})$ матрицага, **кўпайтмаси** деб $m \times n$ ўлчамли шундай $C = (c_{ij})$ матрицага айтиладики унинг c_{ij} элементи A матрица i-сатри элементларини B матрица j-устунининг мос элементларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг, яъни:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

Матрицалар кўпайтмаси $C = AB$ билан белгиланади. Демак, матрицаларни кўпайтириш учун биринчи кўпайтувчининг устунлари сони, 2- кўпайтувчининг сатрлари сонига тенг бўлиши талаб қилинади. Шу сабабли, умуман $AB \neq BA$.

1-мисол.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицалар берилган. A ва B матрицаларни кўпайтиринг.

Ечиш. Биринчи матрицанинг устунлар сони, иккинчи матрицанинг сатрлар сонига тенг, шунинг учун бу матрицаларни кўпайтириш мумкин:

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\4&-3&1&0\\2&5&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&7\\0&2\\5&4\\6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot0+2\cdot5+3\cdot6 & 1\cdot7+0\cdot2+2\cdot4+3\cdot0\\4\cdot2+(-3)\cdot0+1\cdot5+0\cdot6 & 4\cdot7+(-3)\cdot2+1\cdot4+0\cdot0\\2\cdot2+5\cdot0+3\cdot5+1\cdot6 & 2\cdot7+5\cdot2+3\cdot4+1\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}30&15\\13&26\\25&36\end{pmatrix}.$$

Матрицаларни кўпайтириш ушбу

$$A\cdot(BC)=(AB)\cdot C$$

гуруҳлаш ҳамда

$$(A+B)\cdot C=AC+BC$$

тақсимот хоссасига эга. Масалан,

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&2\\3&4\\1&-3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}$$

бўлсин. Бу ҳолда

$$A\cdot(BC)=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0&2\\3&4\\1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\cdot(-1)+2\cdot0 & 0\cdot2+2\cdot(-3)\\3\cdot(-1)+4\cdot0 & 3\cdot2+4\cdot(-3)\\1\cdot(-1)+(-3)\cdot0 & 1\cdot2+(-3)\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-6\\-3&-6\\-1&11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13&14\\-14&-110\end{pmatrix}.$$

Энди $(AB)\cdot C$ кўпайтиришни бажарамиз:

$$(AB)C=\left[\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\3&4\\1&-3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&4\\14&46\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13\cdot(-1)+4\cdot0 & 13\cdot2+4\cdot(-3)\\14\cdot(-1)+46\cdot0 & 14\cdot2+46\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13&14\\-14&-110\end{pmatrix}$$

Шундай қилиб,

$$A\cdot(BC)=(AB)\cdot C$$

хосса ўринли бўлади. Энди тақсимот хоссасини қараймиз:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\\ & & \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

бўлсин. Олдин тақсимот хоссасининг чап томонини

$$(A+B)\cdot C$$

ҳисоблаймиз:

$$(A+B)\cdot C=\left[\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6 & -5\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 34\\ 5 & -7\end{pmatrix}.$$

Ўнг томони

$$AC+BC=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 19\\ -1 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 15\\ 6 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 34\\ 5 & -7\end{pmatrix}.$$

бўлади.
Шундай қилиб,

$$(A+B)\cdot C=AC+BC$$

тенглик ўринли бўлади.

Исталган квадрат матрица A ни мос бирлик E матрицага кўпайтирганда

$$AE=EA=A$$

тенглик ўринли бўлади, масалан

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&3\\-3&0&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot0+0\cdot1\\ -1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0 & -1\cdot0+2\cdot1+3\cdot0 & -1\cdot0+2\cdot0+3\cdot1\\ -3\cdot1+0\cdot0+0\cdot(-2) & -3\cdot0+0\cdot1+(-2)\cdot0 & 3\cdot0+0\cdot0+(-2)\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&3\\-3&0&-2\end{pmatrix}$$

Худди шунга ўхшаш $EA=A$ тенгликни ҳам текшириб кўриш мумкин (буни бажаришни ўқувчига ҳавола қиламиз).

7.Матрицанинг ранги. A $m\times n$ ўлчовли матрицада k сатр ва k та устунини ажратамиз, бунда, k,m ва n сонлардан кичик ёки уларнинг кичигига тенг бўлиши мумкин. Ажратилган сатр ва устунларнинг кесишувида ҳосил бўлган k-тартибли детерминантга A ***матрицанинг*** k***-тартибли минори*** *дейилади*.

Таъриф. A матрицанинг 0 дан фарқли минорларининг энг юқори тартибига A ***матрицанинг ранги*** дейилади. A матрицанинг ранги $rangA$ ёки $r(A)$ билан белгиланади.

Матрица рангини бевосита ҳисоблашда кўп сондаги детерминантларни ҳисоблашга тўғри келади. Қуйидаги амаллардан фойдаланиб матрица рангини ҳисоблаш қулайроқ. Матрицада:

1) фақат 0 лардан иборат сатри (устуни)ни ўчиришдан;

2) иккита сатр (устун)нинг ўринларини алмаштиришдан;

3) бирор сатр (устун)нинг элементларини бирор $\lambda\neq0$ сонга кўпайтириб, бошқа сатр (устун) мос элементларига қўшишдан;

4) матрицани транспонирлашдан, унинг ранги ўзгармайди. Бу амалларга одатда ***элементар алмаштиришлар*** дейилади.

1-мисол.

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1&-3&-1\\2&-1&-1&0&3\\4&5&2&-6&-5\\1&-4&-2&3&7\end{pmatrix}$$

матрицанинг рангини ҳисобланг.

Ечиш. A матрицанинг рангини ҳисоблаш учун элементар алмаштиришлардан фойдаланамиз. Биринчи сатр элементларини иккинчи сатр элементларига, биринчи сатр элементларини (–2)га кўпайтириб, учинчи сатр элементларига, ҳамда учинчи сатр элементларини тўртинчи сатр элемнтларига қўшиб қуйидаги матрицани ҳосил қиламиз:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Кейинги матрицада 2-сатрини (–1) га кўпайтириб тўртинчи сатрига қўшсак

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ матрица ҳосил бўлади. Бу матрицада

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5+2=7 \neq 0$ бўлиб, тўртинчи тартибли минорлар 0 га тенг.

Шундай қилиб, берилган матрицанинг ранги 3 га тенг.

8.Тескари матрица ва уни топиш. A квадрат матрица учун $AB = BA = E$ бирлик матрица бўлса, B квадрат матрица A матрицага ***<u>тескари матрица</u>*** дейилади. Одатда, A матрицага тескари матрица A^{-1} билан белгиланади.

Теорема: A **квадрат матрица тескари матрицага эга бўлиши учун** A **матрицанинг детерминанти 0 дан фарқли бўлиши зарур ва етарлидир.** (Бу теоремани исботсиз келтирдик, унинг исботини кенгроқ дастурли курслардан топиш мумкин, масалан, В.Е.Шнейдер ва бошқалар. «Олий математика қисқа курси» 1том. Т. Ўқитувчи. 1985. 407 б.)

A квадрат матрица учун $\det A \neq 0$ бўлса , унга тескари бўлган ягона матрица A^{-1} мавжуд.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------- \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицага тескари A^{-1} матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ ------- \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

формула билан топилади. Бунда A_{ij} мос равишда a_{ij} элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари ва $\Delta = \det A$.

Тескари матрицани топишга мисол қараймиз.

1-мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрицани топинг.

Ечиш. Олдин A матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 3 - 2 - 12 - 9 = 2 \neq 0.$$

Юқоридаги теоремага асосан тескари матрица мавжуд, чунки

$$\Delta = 2 \neq 0$$

яъни берилган матрица махсусмас матрицадир. A^{-1} ни топиш учун A матрица ҳамма элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Тескари матрицани топиш

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

формуласига асосан

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

бўлади. A^{-1} тескари матрицанинг тўғри топилганлигини

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

тенгликнинг бажарилиши билан текшириб кўриш мумкин, ҳақиқатан ҳам,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2.5 & 4 & -1.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 1\cdot(-2.5) + 1\cdot 0.5 & 1\cdot(-3) + 1\cdot 4 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 1\cdot(-1.5) + 1\cdot 0.5 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot(-2.5) + 4\cdot 0.5 & 1\cdot(-3) + 2\cdot 4 + 4\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1.5) + 4\cdot 0.5 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot(-2.5) + 9\cdot 0.5 & 1\cdot(-3) + 3\cdot 4 + 9\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 3\cdot(-1.5) + 9\cdot 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

яъни $AA^{-1} = E$ бирлик матрица ҳосил бўлади, бу A^{-1} тескари матрицанинг тўғри топилганлигини исботлайди.

9. Чизиқли тенгламаламалар системаси ҳақида тушунчалар.

Малумки, бир неча тенгламалар биргаликда қаралса, уларга тенгламалар системаси дейилади.

Тенгламалар системасидаги ҳамма тенгламалар чизиқли (1-даражали) бўлса, бундай тенгламалар системасига **чизиқли тенгламалар** системаси дейилади.

Тенгламалар системасидаги номаълумлар ўрнига маълум сонлар мажмуини қўйганда, системанинг ҳамма тенгламалари айниятга айланса, бундай сонлар мажмуига тенгламалар системасининг **ечими (илдизи)** дейилади. Бундай сонлар мажмуи битта бўлса, тенгламалар системаси **ягона** ечимга эга бўлиб, бу **система аниқланган (тайин, муайян)** деб аталади ва бу тенгламалар системаси **биргаликда** дейилади. Биргаликда бўлган система биттадан кўп ечимга эга бўлса, бундай система **аниқ бўлмаган** система дейилади.

Биргаликда бўлган тенгламалар системаси бир хил ечимлар мажмуига эга бўлса, бундай системалар **эквивалент** дейилади.

Тенгламалар системаси бирорта ҳам ечимга эга бўлмаса, бундай системага **биргаликда бўлмаган система** дейилади.

Берилган тенгламалар системасининг бирорта тенгламасини 0дан фарқли сонга кўпайтириб, бошқа тенгламасига ҳадма-ҳад қўшиш билан ҳосил бўлган система берилган системага эквивалент бўлади (бу хоссадан келгусида кўп фойдаланилади).

Фан ва техниканинг кўп соҳаларида бўлганидек, иқтисодиётнинг ҳам кўп масалаларининг математик моделлари чизиқли тенгламалар системаси орқали ифодаланади.

Чизиқли тенгламалар системасини тузишга иқтисодиётдан мисол қараймиз.

1-мисол. Корхона уч хилдаги хом ашёни ишлатиб уч турдаги маҳсулот ишлаб чиқаради. Ишлаб чиқариш характеристикалари 1-жадвалда берилган.

1-жадвал.

Хом ашё хиллари	Маҳсулот турлари бўйича хом ашё сарфлари			хом ашё захираси
	1	2	3	
1	5	12	7	2000
2	10	6	8	1660
3	9	11	4	2070

Берилган хом ашё заҳирасини ишлатиб, маҳсулот турлари бўйича ишлаб чиқариш ҳажмини аниқланг.

Ечиш: Ишлаб чиқарилиши керак бўлган маҳсулотлар ҳажмини мос равишда x_1, x_2, x_3 лар билан белгилаймиз. 1-тур маҳсулотга, 1-хил хом ашё, биттаси учун сарфи 5 бирлик бўлганлиги учун $5x_1$ 1-тур маҳсулот ишлаб чиқариш учун кетган 1-хил хом ашёнинг сарфини билдиради. Худди шундай 2,3-тур маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун кетган 1-хил хом ашё сарфлари мос равишда $12x_2$, $7x_3$ бўлиб, унинг учун қуйидаги тенглама ўринли бўлади: $5x_1+12x_2+7x_3=2000$. Юқоридагига ўхшаш 2,3-хил хом ашёлар учун

$$10x_1+6x_2+8x_3=1660$$
$$9x_1+11x_2+4x_3=2070$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Демак, масала шартларида қуйидаги уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$5x_1+12x_2+7x_3=2000$$
$$10x_1+6x_2+8x_3=1660$$
$$9x_1+11x_2+4x_3=2070$$

Бу масаланинг ***математик модели уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системаси***дан иборат бўлди. Бу масала ечими, чизиқли тенгламалар системасининг ечимини топиш билан ҳал этилади. Бундай тенгламалар системасини ечишни умумий ҳолда қараймиз.

10. Чизиқли тенгламалар системасини Крамер усули(қоидаси) билан ечиш.

Чизиқли тенгламалар системасининг ечимини топишни олдин икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системаси учун қараймиз. Ушбу икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

дан, биринчи тенгламани a_{22} га, иккинчи тенгламани $-a_{12}$ га ҳадма-ҳад кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган тенгламаларни қўшамиз, натижада

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \qquad (1)$$

тенглама ҳосил бўлади. Худди шунга ўхшаш, 1-тенгламани $-a_{21}$ га, 2-тенгламани a_{11} га ҳадма-ҳад кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгламаларни қўшиб ушбуни ҳосил қиламиз:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21} \qquad (2)$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

бўлгани учун, қуйидаги белгилашларни киритиб

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(1)ва (2) тенгликларни

$$\Delta x = \Delta_1, \qquad \Delta y = \Delta_2$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан $\Delta \neq 0$ бўлса,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

бўлади, ёки детерминантлар орқали ёзсак

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Бу формулаларга **Крамер формулалари** дейилади, бунда Δ_1 ёрдамчи детерминант Δ детерминантнинг биринчи устунини озод ҳадлар билан, Δ_2 да эса иккинчи устун озод ҳадлар билан алмаштирилади. Δ детерминантга тенгламалар системасининг детерминанти дейилади.

Шундай қилиб, берилган чизиқли тенгламалар системасининг детерминанти 0 дан фарқли бўлса, система ягона ечимга эга бўлади.

Энди системанинг детерминанти 0 га тенг, яъни

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \quad \text{ёки} \quad a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$

бўлсин. Бу ҳолда 1-тенгламанинг номаълумлари олдидаги коэффициентлари 2-тенгламанинг номаълумлари олдидаги коэффициентларига пропорционалдир. Ҳақиқатан, коэффициентлардан бири, масалан a_{11} нолдан фарқли бўлсин деб $\frac{a_{22}}{a_{11}} = \lambda$ билан белгиласак, бундан $a_{21} = \lambda a_{11}$ бўлади. У ҳолда $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$ тенгликдан $a_{11}a_{22} = \lambda a_{11}a_{12}$ бўлиб, $a_{22} = \lambda a_{12}$ келиб чиқади. Буларни ҳисобга олиб, берилган системани

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2 \end{cases} \qquad (3)$$

кўринишда ёзиш мумкин. бунда иккита хусусий ҳол бўлиши мумкин:

1) иккала Δ_1 ва Δ_2 детерминантлар 0 га тенг, яъни $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0, \quad \Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = 0$ бундан $b_2 = \lambda b_1$, чунки $a_{22} = \lambda a_{12}$.
Бу ҳолда $a_{21,}\ a_{22},\ b_2$ сонлар $a_{11,}\ a_{12},\ b_1$ сонларга пропорционал бўлиб, берилган тенгламалар системаси ушбу кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = \lambda b_1 \end{cases}$$

Шундай қилиб, системанинг иккинчи тенгламаси, биринчи тенгламасидан унинг иккала қисмини λ га кўпайтириш билан ҳосил қилинади, яъни у 1-тенгламанинг натижасидир. Бу ҳолда берилган система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга бўлади. Масалан, y га ихтиёрий қийматлар бериб, x нинг тегишли қийматини $x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}$ тенгликдан топамиз.

2) Δ_1 ва Δ_2 детерминантлардан ҳеч бўлмаганда биттаси 0 дан фарқли, масалан,

$\Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \neq 0$ бўлсин. У ҳолда $b_2a_{11} \neq b_1a_{21}$ бўлади, демак $b_2 \neq \lambda b_1$.

бу ҳолда (3) системадан маълум бўладики, $\lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2$ тенглама биринчи $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ тенгламага қарама-қаршидир. Демак, берилган система ечимга эга эмас, яъни биргаликда эмас.

Энди уч номаълумли учта тенгламалар системасини қараймиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

тенгламалар системаси берилган бўлсин. Бу система номаълумлари коэффициентларидан

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминант тузамиз, бунга (4) ***<u>системанинг детерминанти</u>*** ёки аниқловчиси дейилади. $\Delta \neq 0$ бўлса, (4) система ягона

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \qquad (5)$$

ечимга эга бўлади, бунда

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{31} b_3 a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{32} b_3 \end{vmatrix}$$

(5) формулага ҳам икки номаълумли иккита тенгламалар системасидагидек ***Крамер формулалари*** *дейилади*. Крамер формулалари n номаълумли n та тенгламалар системаси учун ҳам умумлаштирилади.

Энди мисоллар қараймиз.

1-мисол. Ушбу

$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 18 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Бу системанинг детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 = 2 + 9 = 11 \neq 0.$$

Демак, берилган тенгламалар системаси ягона ечимга эга.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 18 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 18 \cdot 3 = 55, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 36 - 3 = 33.$$

Шундай қилиб, $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{55}{11} = 5, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{33}{11} = 3$.

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+2x_4=3 \\ x_1+2x_2+2x_3+x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=-1 \\ x_1+4x_2+3x_3+2x_4=5 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Система детерминантини тузиб, унинг учинчи сатри элементларини (-1)га кўпайтириб, 1- сатр мос элементларига қўшиб, ҳосил бўлган детерминантни 1-сатр элементлари бўйича ёйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Охирги 3-тартибли детерминантда 1-устун элементларини (-2)га кўпайтириб 3-устун мос элементларига қўшиб, ҳамда 3-устун элементлари бўйича ёйиб

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-(3-4)=1$$

ни ҳосил қиламиз. $\Delta\neq 1$, демак, тенгламалар системаси ягона ечимга эга. Энди бошқа детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2,\quad \Delta x_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}=1,\quad \Delta x_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}=-3,$$

$$\Delta x_4=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}=4$$

(Бу детерминантларни ҳисоблаб кўришни ўқувчига ҳавола этамиз).
Шундай қилиб, Крамер формулаларига асосан

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}=\frac{2}{1}=2,\quad x_2=\frac{1}{1}=1,\quad x_3=\frac{-3}{1}=-3,\quad x_4=\frac{4}{1}=4.$$

Топилган ечимни тенгламалар системасига бевосита қўйиб унинг тўғрилигига ишонамиз.
3-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг ечимини топинг.

Ечиш. Олдин системанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 18 + 4 + 18 - 24 - 4 = 0.$$

Система детерминанти 0 га тенг, бунда икки ҳол бўлиши мумкин. Тенгламалар системаси ечимга эга бўлмаслиги ёки чексиз кўп ечимга эга бўлиши мумкин. Буни аниқлаш учун $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$ ёрдамчи детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Иккинчи ва биринчи тенгламаларни солиштириб, иккинчи тенглама биринчи тенгламадан иккига кўпайтириш билан ҳосил бўлганлигини пайқаймиз. Демак, берилган система

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \qquad (6)$$

тенгламалар системасига тенг кучли бўлади. Бу системанинг бирорта номаълумига ихтиёрий қийматлар бериш билан чексиз кўп ечимлар тўпламига эга бўламиз, масалан,
$x_3 = 1$ бўлсин, уни охирги системага қўйсак

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

система ҳосил бўлиб, $x_1 = -\dfrac{5}{11},\ \ x_2 = \dfrac{18}{11}$ бўлади. Бу ҳолда $\left(\dfrac{-5}{11},\ \dfrac{18}{11},\ 1\right)$ ечим ҳосил бўлади. $x_3 = -2$ бўлсин, буни (6) системага қўйиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

бундан, $x_1 = \frac{10}{11},\ x_2 = -\frac{3}{11}$ бўлиб, $\left(\frac{10}{11},\ -\frac{3}{11},\ -2\right)$ ечимни оламиз.

Шундай қилиб, номаълумларнинг бирига ихтиёрий қийматлар бериб, чексиз кўп ечимларни оламиз.

4-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Берилган система детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

бўлиб, ёрдамчи детерминантлар ҳам $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ бўлади. Бу тенгламалар системаси ечимга эга эмас, чунки 1-тенглама билан 3-тенглама ўзаро зиддир, яъни 1-тенгламани -3 га кўпайтириб 3- тенгламага ҳадма-ҳад қўшсак 0=-3 тенглик ҳосил бўлиб, бу тенгламалар системасининг биргаликда бўлмаслигини билдиради.

11.***Чизиқли тенгламалар системасини матрицалар ёрдамида ечиш.***

Энди матрицалар ёрдамида чизиқли тенгламалар системасини ечишга ўтайлик.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

n номаълумли, n та тенгламалар системаси берилган бўлсин.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ -- & ------ \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

белгилашларни киритамиз. Энди (1) системани матрицаларни кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб

$$AX = B \qquad (2)$$

кўринишда ёзиш мумкин. $\det A \neq 0$ бўлса, A^{-1} мавжуд ва $A^{-1}AX = A^{-1}B$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб, номаълум X матрица $A^{-1}B$ матрицага тенг бўлади. Бу (1) тенгламалар системасини ечишнинг ***матрицавий ёзувини*** билдиради.

1-мисол. Матрицалар ёрдамида ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}.$$

Ечиш. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Бу матрицалар ёрдамида берилган тенгламалар системасини

$$AX = B \qquad (3)$$

кўринишда ёзамиз. Энди A матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 9 + 1\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 9 - 1\cdot 4\cdot 3 = 2.$$

A матрицанинг детерминанти 0 дан фарқли бўлганлиги учун, унга тескари ягона A^{-1} матрица мавжуд ва тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади. Энди A^{-1} тескари матрицани топиш учун Δ детерминант элементларининг ҳамма алгебраик тўлдирувчиларини ҳисоблаймиз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&4\\3&9\end{vmatrix}=18-12=6,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&4\\1&9\end{vmatrix}=-5,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&9\end{vmatrix}=-6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&9\end{vmatrix}=8,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1.$$

Тескари A^{-1} матрицани топиш формуласига асосан

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2,5&4&-1,5\\0,5&-1&0,5\end{pmatrix}$$

(3) тенгликнинг икки томонини чапдан A^{-1} га кўпайтирсак $A^{-1}AX=A^{-1}B$ ёки $X=A^{-1}B$ бўлиб, яъни

$$X=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2,5&4&-1,5\\0,5&-1&0,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot4+(-3)\cdot4+1\cdot2\\-2,5\cdot4+4\cdot4+(-1,5)\cdot2\\0,5\cdot4-1\cdot4+0,5\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

ҳосил бўлади.

Шундай килиб, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ ёки $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=-1$.

(Топилган ечимларни берилган тенгламалар системасига бевосита қўйиб ечимнинг тўғрилигини текшириб кўринг).

12.Кронекер-Капелли теоремаси.

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{array}\right\}\qquad(1)$$

умумий кўринишдаги,яьни n та номаьлумли m та чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин.

Берилган система номаълумлари коэффициентларидан А матрицани ҳамда бу матрицага озод ҳадлардан тузилган устунни бирлаштириб, иккинчи В матрицани тузамиз, яъни булар ушбу кўринишшда бўлади.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ -------- \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} & b_2 \\ ----------- \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

A матрицага (1) **системанинг матрицаси**, B матрицага **системанинг кенгайтирилган матрицаси** дейилади. Қуйидаги теорема ўринли.

1- теорема. **(Кронекер-Капелли теоремаси). Чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда бўлиши учун система матрицаси A нинг ранги система кенгайтирилган B матрицасининг рангига тенг бўлиши зарур ва етарлидир.**

Кронекер-Капелли теоремаси ечим мавжуд эканлигини тасдиқлайди, лекин бу системанинг барча ечимларини амалда топиш учун усулни бермайди. Энди, ихтиёрий чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг қуйидаги қоидасини келтирамиз.

A матрицанинг ранги B матрицанинг рангига тенг бўлиб, $r(A)=r(B)=k$ бўлсин. Бунда k сон A матрицанинг чизиқли эркли сатрларининг максимал сонига тенг бўлиб, k номаълумлар сонига тенг бўлса, у ҳолда система тенгламалари сони номаълумлари сонига тенг ва унинг детерминанти нолдан фарқли бўлади, бундай системанинг ечими ягона бўлиб уни Крамер қоидаси бўйича топиш мумкин бўлади.

Энди матрицаларнинг ранги k номаълумлар сонидан кичик, яъни $k<n$ бўлсин. Бу ҳолда k - тартибли минор нолдан фарқли бўлади. Система тенгламаларининг ҳар қайсисида $x_{k+1},\, x_{k+2},\, \ldots,\, x_n$ номаълумли ҳадларини тенгламаларнинг ўнг томонига ўтказамиз ва бу номаълумлар учун бирор $c_{k+1},\, c_{k+2},\ldots,c_n$ қийматлари мажмуини танлаб олиб k номаълумли k та тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган системага Крамер қоидасини қўллаш мумкин ва ягона $c_1,\, c_2,\ldots,c_k$ ечим мажмуи мавжуд бўлади. Система тенгламаларининг ўнг томонига ўтказилган номаълумларни ***озод*** **номаълумлар** деб атаймиз. Чап томондаги номаьлумлар **бош(базис) ўзгарувчилар**, озод номаълумлар учун $c_{k+1},\, c_{k+2},\ldots,c_n$ сонларни ихтиёрий танлаб олишимиз мумкин бўлганлиги учун ҳосил бўлган системанинг чексиз кўп турлича ечимлари шу йўл билан ҳосил қилинади. Шундай қилиб, бу ҳолда **чексиз кўп ечимлар** тўпламига эга бўламиз.

$x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k$ номаълумларнинг $x_{k+1},\, x_{k+2},\, \ldots,\, x_n$ озод номаълумлар қатнашган ечимига ***умумий ечим*** деб аталади, чунки бошқа чексиз кўп ечимлар $x_{k+1},\, x_{k+2},\, \ldots,\, x_n$ озод номаълумларга ихтиёрий қийматлар мажмуини бериш билан олинади.

Тенгламалар системасини ечишга бир неча мисоллар қараймиз.

1-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

Ечиш. Система коэффициентларидан матрица тузамиз.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг ранги 2 га тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \neq 0$$

бўлиб,

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

бўлади. Кенгайтирилган матрица

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 & 12 \\ 4 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

нинг ранги 3 га тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

$r(A) = 2,\ r(B) = 3$ бўлиб, $r(A) \neq r(B)$ бўлади, демак,Кронекер-Капелли теоремасига асосан система биргаликда эмас.
2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - 4x_2 = -1 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечинг.
Ечиш. Система коэффициентларидан тузилган матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

бўлиб, $r(A) = 2$, чунки

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

3-тартибли минори йўқ. Кенгайтирилган матрицанинг ранги ҳам 2 га тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \\ 7 & 10 & 12 \end{vmatrix} = -144 + 40 - 14 + 112 - 24 + 30 = 0$$

Биринчи иккита тенгламанинг чап қисмлари чизиқли эркли, бу иккита тенгламалар системасини ечиб, номаълумлар учун ушбу қийматларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - 4x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Бу ечим 3-тенгламани ҳам қаноатлантиради.
3-мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Ечиш. Система матрицасининг ранги $r(A) = 2$, чунки

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

бўлганлигини, яъни кенгайтирилган матрицанинг барча 3-тартибли минорлари 0 га тенг бўлганлиги учун, унинг ҳам ранги $r(B) = 2$. Шундай қилиб, система биргаликда ва $r(A) = r(B) = k = 2 < 4$ номаълумлар сонидан кичик, бу ҳолда биринчи ва учинчи тенгламалар системасини олайлик, чунки

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7 \neq 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

бундан

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 1 - 8x_3 - x_4 \end{cases}$$

бўлиб, тенгламалар системасини x_1, x_2 асосий номаълумларга нисбатан ечсак:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5 \\ 1 - 8x_3 - x_4 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{2}{7} - 4x_3 + \frac{4}{7}x_4,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 5 & 1 - 8x_3 - x_4 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{4}{7} - \frac{12}{7}x_3 - 2x_4$$

бўлади. Озод номаълумларни $x_3 = C_1,\ x_4 = C_2$ деб

$$x_1 = \frac{2}{7} - 4C_1 + \frac{4}{7}C_2,$$

$$x_2 = \frac{4}{7} - \frac{12}{7}C_1 + 2C_2$$

умумий ечимни оламиз. C_1 ва C_2 ларга хар хил қийматлар бериб, масалан, $C_1=2,\ C_2=3$ бўлганда $x_1=-6,\ x_2=\frac{22}{7},\ x_3=2,\ x_4=3,$ яъни $\left(-6,\frac{22}{7},2,3\right)$ ечимни, $C_1=0, C_2=-3$ бўлганда $x_1=-\frac{10}{7},\ x_2=-\frac{38}{7},\ x_3=0,\ x_4=-3,$ яъни $\left(-\frac{10}{7},-\frac{38}{7},\ 0,-3\right)$ ва ҳоказо чексиз кўп ечимларни олиш мумкин.

13.Бир жинсли тенгламалар системаси.**Ушбу умумий кўринишдаги тенгламалар системаси берилган бўлсин:**

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

(1) тенгламалар системасида озод ҳадлар 0 лардан иборат бўлса, бундай системага <u>***бир жинсли система***</u> дейилади, яьни

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{array}\right\}$$

бўлиб, биржинсли система доимо биргаликда.

Бир жинсли система 0 дан фарқли ечимга эгалигини аниқлаш муҳимдир.

2-теорема. **Бир жинсли система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун система матрицасининг ранги номаълумлар сонидан кичик бўлиши зарур ва етарлидир.**

1-натижа. Бир жинсли системада номаълумлар сони тенгламалар сонидан катта бўлса, система 0 дан фарқли ечимларга ҳам эга бўлиши мумкин.

2-натижа. n номаълумли n та бир жинсли тенгламалар системаси 0 дан фарқли ечимларга эга бўлиши учун системанинг детерминанти 0 га тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 6x_1+4x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}.$$

бир жинсли тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Система матрицасининг рангини топамиз.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Биринчи учта сатрини қўшиб, тўртинчи сатридан айирамиз:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ҳосил бўлган матрицанинг рангги 3 га тенг, чунки

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0.$$

Шундай килиб, A матрицанинг ранги 3 га тенг, номаълумлар сони тўртта, 2-теоремага асосан система 0 дан фарқли ечимга эга. Берилган система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

системага тенг кучли. x_1, x_2, x_3 номаълумлар коэффициентидан тузилган детерминант 0 дан фарқли бўлгани учун x_4 ни ўнг томонга ўтказиб тенгламалар системасини ечамиз.

$$\Delta = 21, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -x_4 & -1 & -3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & -x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4.$$

Крамер формулаларига асосан:

$$x_1 = -\frac{31}{21}x_4, \; x_2 = \frac{43}{21}x_4, \; x_3 = -\frac{28}{21}x_4 = -\frac{4}{3}x_4.$$

Бу ечимни берилган системага бевосита қўйиб ечимнинг тўғрилигига ишониш мумкин. x_4 номаълумга ихтиёрий қийматлар бериб,чексиз кўп ечимларга эга бўламиз.

14. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечиш. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг энг кўп ишлатиладиган усулларидан бири Гаусс усулидир. Унинг моҳиятини уч номаълумли учта чизиқли тенглама учун кўрсатамиз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Бунда $a_{11} \neq 0$ бўлсин. Биринчи тенгламанинг ҳамма ҳадларини a_{11} га бўламиз ва уни $-a_{21}$, $-a_{31}$ га кўпайтириб мос равишда иккинчи ва учинчи тенгламаларга қўшамиз. Бу ҳолда қуйидаги тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2 \\ \alpha_{23}x_1 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases}$$

бу ерда $\alpha_{22} = a_{22} - a_{21}\dfrac{a_{12}}{11}$, $\alpha_{23} = a_{23} - a_{21}\dfrac{a_{13}}{a_{21}}$ ва ҳ.к.

$a_{11} = 0$ бўлиб, бошқа тенгламаларда номаьлумлар олдидаги коэффициентлари орасида нўлдан фарқлилари бўлса, у ҳолда бу тенгламалардан бирини биринчи тенгламанинг ўрни билан алмаштирамиз, кейин юқоридаги амалларни бажарамиз. Бу **биринчи қадам** бўлади. Демак, биринчи қадамда биринчи тенгламада x_1 - номаълум қолиб, қолган тенгламалардан кетма-кет x_1 - ***номаълумни йўқотамиз***. **Иккинчи қадам**да биринчи тенглама ўз ўрнида қолиб, иккинчи ва учинчи тенглама учун юқоридаги амалларни бажарамиз, яъни иккинчи тенгламада x_2 номаълумни қолдириб, учинчи тенгламадан уни йўқотамиз. Шундай қилиб, бу амаллар натижасида (1) тенгламалар системаси

$$\begin{cases} x_1 + \alpha'_{12}x_2 + \alpha'_{13}x_3 = \beta'_1 \\ \qquad \alpha'_{22}x_2 + \alpha'_{23}x_3 = \beta'_2 \\ \qquad\qquad \alpha'_{33}x_3 = \beta'_3 \end{cases} \qquad (2)$$

кўринишга келади. Энди ҳамма номаълумларни сўнгги тенгламадан бошлаб ***тескари қадам*** билан топиш қолди.

1-мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг.

Ечиш. Биринчи тенгламани (-4) ва (-3) га кўпайтириб мос равишда иккинчи ва учинчи тенгламаларга қўшамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ (4-4)x_1 + (1-8)x_2 + (4-12)x_3 = 9 - 4\cdot 6 \\ (3-3)x_1 + (5-6)x_2 + (2-9)x_3 = 10 - 3\cdot 6 \end{cases},$$

яъни

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 7x_2 - 8x_3 = -15 \\ -x_2 - 7x_3 = -8 \end{array}\right\}$$

бўлади.

Шу билан биринчи қадам тугади.

Иккинчи қадамда, биринчи тенгламани ўз ўрнида қолдириб, иккинчи тенгламани (-7) га бўлиб ёзамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + \dfrac{8}{7}x_3 = \dfrac{15}{7} \\ x_2 + 7x_3 = 8 \end{cases}$$

Учинчи тенгламадан x_2 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун иккинчи тенгламани (-1) га кўпайтириб учинчи тенгламага қўшамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + \dfrac{8}{7}x_3 = \dfrac{15}{7} \\ \dfrac{41}{7}x_3 = \dfrac{41}{7} \end{cases}$$

Охирги тенгламадан $x_3 = 1$ ни топамиз. $x_3 = 1$ ни иккинчи тенгламага қўйсак, $x_2 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7}$ ёки $x_2 = \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = 1$, $x_2 = 1$ бўлади. $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ ларни биринчи тенгламага қуйсак $x_1=1$ бўлади. Шундай қилиб, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Гаусс усулининг хусусияти шундан иборатки, унда системанинг биргаликда масаласини олдиндан аниқлаб олиш талаб этилмайди ва:

1) система **биргаликда ва аниқ бўлса**, у ҳолда усул **ягона** ечимга олиб келади;

2) система ***биргаликда ва аниқмас бўлса***, бу ҳолда бирор қадамда иккита айнан тенг тенглама ҳосил бўлади ва шундай қилиб, тенгламалар сони номаълумлар сонидан битта кам бўлиб қолади;

3) система ***биргаликда бўлмаса,*** у ҳолда бирор қадамда чиқарилаётган (йўқотилаётган) номаълум билан биргаликда қолган барча

номаълумлар ҳам йўқотилади, ўнг томонда эса нолдан фарқли озод ҳад қолади.

15. Жордано-Гаусс модификациялаштирилган усули.

Маълумки, Гаусс усули билан чизиқли тенгламалар системасини ечишда тенгламалар системаси учбурчак кўринишдаги системага келтирилади. Номаълумларнинг қиймати бевосита топиладиган, яъни тескари қадам билан номаълумлар қийматини кетма-кет топишга ҳожат қолмайдиган усулни қараймиз. Бу усулни ушбу чизиқли тенгламалар системасининг ечимини топиш билан ифодалаймиз.
1-мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ечимини топинг.
Ечиш. 1-тенгламани ўзгаришсиз қолдириб системанинг қолган тенгламаларидан x_1 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 1- тенгламани кетма-кет (-4), (-1) га кўпайтириб мос равишда 3,4-тенгламаларга ҳадма-ҳад қўшиб ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 0 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = 21 \\ 0 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 15 \end{cases}$$

Энди 2–тенгламани ўзгаришсиз қолдириб, бошқа тенгламалардан x_2 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 2 тенгламани (-2), 8,1 ларга кетма-кет кўпайтириб, мос равишда 1,3,4 – тенгламаларга ҳадма –ҳад қўшамиз ва ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 5x_2 - 2x_3 = -22 \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99 \\ 0 + 0 + 2x_3 + 6x_4 = 30 \end{cases}$$

Эндиги қадамда 3-тенгламани ўзгаришсиз қолдириб бошқа тенгламалардан x_3 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 3- тенгламани кетма-кет (5/21), (-3/21) (-2/21) ларга кўпайтириб мос равишда 1,2,4 –

тенгламаларга ҳадма-ҳад қўшсак, ушбу тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 + \frac{3}{21}x_4 = \frac{33}{21} \\ 0 + x_2 + 0 - \frac{6}{21}x_4 = \frac{18}{21} \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99 \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Охирги қадамда 4-тенгламани ўзгаришсиз қолдириб бошқа тенгламалардан, x_4 номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 4 – тенгламани кетма-кет $(-\frac{21}{3}), (\frac{21}{6}), (-9)$ ларга кўпайтириб, мос равишда 1,2,3-тенгламаларга ҳадма-ҳад қўшамиз натижада, ушбуга эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 0 + 0 = 1 \\ 0 + x_2 + 0 + 0 = 2 \\ 0 + 0 + 21x_3 + 0 = 63 \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Охирги системадан $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$ ягона ечимни оламиз. Юқоридаги тенгламалар системасини ечишда x_1, x_2,x_3, x_4 номаълумларни кетма-кет йўқотдик, ҳисоблашларни ихчамлаштириш учун ҳар сафар коэффициенти 1 га тенг бўлган номаълумни чиқариш ҳам мумкин эди.

Бу усулда ҳам Гаусс усулининг хусусиятлари ўз кучида қолади, яъни тенгламалар системаси аниқ бўлса, бу усул ягона ечимга, тенгламалар системаси биргиликда лекин аниқ бўлмаса бирор қадамда 0=0 тенглик ҳосил бўлиб чексиз кўп ечимга олиб келади. Тенгламалар системаси биргаликда бўлмаса, бирор қадамда тенгликларнинг бирининг чап томонида 0 ўнг томонида 0 дан фарқли сон бўлиб, система ечимга эга бўлмайди.

2. Амалий қисм.

Амалий қисм мақсади:

1) берилган 4-тартибли детерминантни унинг хоссаларидан фойдаланиб ҳисоблаш;

2) чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда ёки биргаликда эмаслигини аниқлаш, биргаликда бўлса, Крамер қоидаси, тескари матрица усули, Гаусс усули ҳамда модификациялаштирилган Жордано-Гаусс усулида ечиш;

3) берилган бир жинсли тенгламалар системасинин ечиш;

4) юқоридагиларни бажариб бўлгандан кейин 1-лаборатория иши расмийлаштирилади.

Амалий қисмни бажариш учун услубий кўрсатмалар.

1-мисол. Ушбу 4-тартибли

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 & 1 \\ 13 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

детерминантни унинг хоссаларидан фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш. Маълумки, детерминантнинг катталиги сатр(устун) элементлари бўйича ёйиш билан ўзгармайди. Берилган детерминантни 1-устун элементлари бўйича ёйиб, унинг тартибини ўзгартирамиз:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 & 1 \\ 13 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(-3) \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 13 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

(1) тенгликнинг ўнг томонидаги детерминантлар 3-тартибли, уларни учбурчак , диагонал усулларидан фойдаланиб ёки тартибини пасайтириб ҳам ҳисоблаш мумкин. (1) тенгликдаги 1-учинчи тартибли детерминантни диагоналлар усулидан фойдаланиб ҳисоблаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{matrix} = 0+9-8-0+10-36=-25 \ .$$

2-детерминантни ҳисоблаш зарур эмас, чунки у 0 га кўпайтирилган.
3-детерминантни учбурчаклар усулидан фойдаланиб ҳисобласак:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0+12+40+36+0-12=76$$

бўлади.
4-детерминантни унинг хоссаларидан фойдаланиб ҳисобласак,

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 26 & 0 \\ 1 & -9 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 26 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} = -45-26=-71$$

бўлади.
3-тартибли детерминантларнинг ҳисобланган катталикларини (1) тенгликка қўйиб, ушбу натижани ҳосил қиламиз:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 & 1 \\ 13 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4(-25)+0-3\cdot 76-13(-71) = -100-228+923=595.$$

Берилган детерминантни ҳисоблашда унинг хоссаларидан бир неча марта фойдаландик, бу ҳолат детерминантларнинг хоссаларини пухта ўзлаштириш лозимлигини кўрсатади.

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

чизиқли тенгламалар системасининг биргаликдалигини аниқланг.

Ечиш. Берилган тенгламалар системасининг биргиликдалигини аниқлаш учун Кронекер- Капелли теоремасидан фойдаланмиз. Бунинг учун берилган тенгламалар системасининг матрицасини ва кенгайтирилган матрицаларини тузиб уларнинг рангларини топамиз:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 10\\ 1 & -3 & 4\\ 2 & 5 & 3\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}5 & 7 & 10 & 4\\ 1 & -3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 3 & 8\end{pmatrix}$$

А матрицанинг иккинчи тартибли минори $\begin{vmatrix}5 & 7\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-15-7=-22\neq 0;$

учинчи тартибли минори

$$\left|\begin{matrix}5 & 7 & 10\\ 1 & -3 & 4\\ 2 & 5 & 3\end{matrix}\right|\begin{matrix}5 & 7\\ 1 & -3\\ 2 & 5\end{matrix}=-45+56+50-21-100+60=166-166=0.$$

Демак, А матрицанинг рангги 2 га тенг, яъни $r(A)=2.$

В матрицанинг 3 – тартибли минорини ҳисоблаймиз, масалан,

$$\left|\begin{matrix}5 & 7 & 4\\ 1 & -3 & 5\\ 2 & 5 & 8\end{matrix}\right|\begin{matrix}5 & 7\\ 1 & -3\\ 2 & 5\end{matrix}=-120+70+20-56-125+24=-187\neq 0.$$

Бу ҳол В матрицанинг ранги 3 га тенглигини аниқлайди, яъни $r(B)=3.$

Шундай қилиб, А ва В матрицалар ранглари тенг эмас, Кронекер- Капелли теоремасига асосан берилган тенгламалар системаси биргиликда эмас.

3-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=5\\ 2x_1-3x_2-x_3=5\\ 4x_1-x_2-5x_3=-9\end{cases}$$

чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда эканлигини текширинг, биргаликда бўлса, уни:

1) Крамер формулалари (қоидаси) ёрдамида;
2) тескари матрицадан фодаланиб (матрицалар усули);
3) Гаусс усули;
4) Жордано-Гаусс модификациялашган усулидан фойдаланиб ечимини топинг.

Ечиш. Берилган система, матрицаси ва кенгайтирилган матрицаларининг рангларини аниқлаймиз.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -3 & -1\\ 4 & -1 & -5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 2 & -3 & -1 & 5\\ 4 & -1 & -5 & -9\end{pmatrix}.$$

Сатрлар устида тегишли элементар алмаштиришларни бажариб, А ва В матрицалар рангларини топамиз:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 2 & -3 & -1 & 5\\ 4 & -1 & -5 & -9\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & -5 & -5 & -5\\ 0 & -5 & -13 & -29\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -8 & -24\end{pmatrix}\approx$$
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1,\qquad \begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -9\end{vmatrix}=-9$$

минорлар 0 дан фарқли

Бу матрицалар рангларининг тенглигини билдиради, яъни $ч(A)=ч(B)=3$. Демак, Кронекер- Капелли теоремасига асосан тенгламалар системаси ягона ечимга эга.

1) ягона ечимни топиш учун Крамер қоидасидан фойдаланамиз: тенгламалар системаси детерминантини ҳисобласак

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -3 & -1\\ 4 & -1 & -5\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & -3\\ 4 & -1\end{matrix}=15-4-4+10-1+24=49-9=40.$$

бўлади.

Энди ёрдамчи $\Delta_1, \ \Delta_2, \Delta_3$ детерминантларни тузиб, уларни ҳисоблаб ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \\ -9 & -1 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 1 \\ 5 & -3 \\ -9 & -1 \end{matrix} = 75 + 9 - 10 + 25 - 5 - 54 = 109 - 69 = 40;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -9 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \\ 4 & -9 \end{matrix} = -25 - 20 - 36 + 50 - 9 - 40 = -130 + 50 = -80;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & -9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{matrix} = 27 + 20 - 10 + 18 + 5 + 60 = 130 - 10 = 120;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Крамер формулаларига асосан,

$$x_1 = \frac{40}{40} = 1, \quad x_2 = \frac{-80}{40} = -2, \ x_3 = \frac{120}{40} = 3,$$

$(1, -2, 3)$ ягона ечим бўлади. Бу ечимнинг тўғрилигини берилган тенгламалар системасига бевосита қўйиш билан текшириб кўриш мумкин.

2)берилган система матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

га тескари матрицани топамиз. Маълумки, $\det A = 40 \neq 0,$ демак, тескари матрица мавжуд. A^{-1} тескари матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

формула билан топилади, бунда A_{ij} лар мос равишда a_{ij} элементларнинг алгебраик тўлдирувчиларидир. Алгебраик тўлдирувчиларни ҳисоблаймиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 1 = 14, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 - 4 = 6; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 12 = 10; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 - 2 = 3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 8 = -13; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 6 = 5; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 - 2 = -5.$$

Энди тескари матрицани тузамиз:

$$A^{-1} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 14 & 3 & 5 \\ 6 & -13 & 5 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/20 & 3/40 & 1/8 \\ 3/20 & -\frac{13}{40} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 1/8 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Бу ерда $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$ тенгликнинг тўғрилигини ҳам текшириб кўриш мумкин.
Берилган тенгламалар системасини

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

белгилашларни киритиб

$$AX = B_1$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу матрицавий тенгламанинг ечими

$$X = A^{-1}B_1$$

кўринишда бўлади. Юқоридаги ҳисоблашларга кўра

$$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & {}^{3}\!/_{40} & \frac{1}{8} \\ {}^{3}\!/_{20} & -\frac{13}{40} & \frac{1}{8} \\ {}^{1}\!/_{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{20}\cdot 5 + & \frac{3}{40}\cdot 5 + & \frac{1}{8}(-9) \\ \frac{3}{20}\cdot 5 - & \frac{13}{40}\cdot 5 - & \frac{9}{8} \\ \frac{1}{4}\cdot 5 + & \frac{1}{8}\cdot 5 + & \frac{9}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ягона ечимни ҳосил қиламиз.

3) берилган тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечамиз. Иккинчи ва учинчи тенгламалардан x_1 номаълумни йўқотамиз. Бунинг учун 1-тенгламани $(-2),(-4)$ ларга кўпайтириб, мос равишда иккинчи ва учинчи тенгламалар билан ҳадлаб қўшамиз. Натижада ушбу системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ -5x_2 - 5x_3 = -5 \\ -5x_2 - 13x_3 = -29 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ -5x_2 - 13x_3 = -29 \end{cases}.$$

Биринчи ва иккинчи тенгламани ўзгартиришсиз қолдириб 2- тенгламани 5 га кўпайтириб 3- тенгламага ҳадлаб қўшамиз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ -8x_2 = -24 \end{cases}.$$

Охирги системадан

$x_3 = 3;\quad x_2 + 3 = 1,\; x_2 = -2;\quad x_1 - 2 + 2 \cdot 3 = 5,\quad x_1 = 1$ бўлади.

Шундай қилиб, $x_1 = 1,\; x_2 = -2,\; x_3 = 3$ ягона ечимни оламиз.

4) берилган тенгламалар системасини Жордано-Гаусс усули билан ечамиз. Системанинг кенгайтирилган B матрицаси сатрларии устида элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & -5 & -9 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -13 & -29 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -29 \end{array}\right)$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

.

Охирги матрицадан

$$x_1 = 1,\; x_2 = -2,\; x_3 = 3$$

ечимни оламиз.

4 – мисол. Ушбу биржинсли тенгламалар системасини текширинг.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

Ечиш.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицанинг рангини ҳисоблаймиз.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -2\\ 1 & -1 & -4\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & -1 & -4\\ 3 & 5 & -2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & -1 & -4\\ 0 & 9 & 10\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & -1 & -4\\ 0 & 1 & \frac{10}{9}\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

$$\approx\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{26}{4}\\ 0 & 1 & \frac{10}{9}\\ 0 & 0 & 5/9\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

А матрицанинг ранги 3 га тенг, бу ҳолда системанинг детерминанти нолдан фарқли бўлиб, $x_1=0, x_2=0, x_3=0$ ягона ечимга эга. Матрицанинг рангги номаълумлар сонидан кичик бўлса, система 0 дан фарқли ечимга эга бўлиши мумкин.

5- мисол. Ушбу

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+3x_3=0\\ x_1-4x_2-x_3=0\\ 2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$$

биржинсли тенгламалар системасини текширинг.

Ечиш. Система детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & 3\\ 1 & -4 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-12-4-3+24-2-3=0.$$

Бу система матрицасининг рангги 3 дан кичиклигини билдиради, яъни матрицанинг рангги номаълумлар сонидан кичик, чунки

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-12-2=-14\neq 0,\quad ч(A)=2<3.$$

Бундай ҳолда система 0 дан фарқли ечимга эга бўлиши мумкин. Биринчи икки тенгламалар системасида бирор ўзгарувчини эркли ҳисоблаб, масалан, x_3 ли ҳадларни ўнг томонга ўтказиб ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -3x_3, \\ x_1 - 4x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Охирги системани Крамер қоидасидан фойдаланиб ечамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 2 = -14 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3x_3 & 2 \\ x_3 & -4 \end{vmatrix} = 12x_3 - 2x_3 = 10x_3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3x_3 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = 3x_2 + 3x_3 = 6x_3.$$

Шундай қилиб,

$x_1 = \dfrac{10x_3}{-14}$, $x_2 = \dfrac{6x_3}{-14}$ бўлиб, $x_3 = -14t$ бўлсин.(бунда t ихтиёрий пропорцианаллик коэффициенти). Бу ҳолда
$x_1 = 10t, \quad x_2 = 6t, \; x_3 = -14t$
бўлади. t га ихтиёрий қийматлар бериб, чексиз кўп ечимларни ҳосил қиламиз:

$t = 2$ бўлсин. Бунда $x_1 = 10 \cdot 2 = 20, \; x_2 = 12, x_3 = -28$ ечимга эга бўламиз. $t = -1$ бўлса, $x_1 = -10, \quad x_2 = -6, \quad x_3 = 14$ бўлади.

Бу ечимлар берилган тенгламалар системасининг ечими эканлигини бевосита қўйиб текшириб кўриш мумкин.

1– лаборатория иши вариантлари

Вариант рақами	1,2,3-топшириқлар рақамлари	Вариант рақами	1,2,3-топшириқлар рақамлари
1	1,31,56	29	29,33,67
2	2,32,57	30	30,40,66
3	3,33,58,	31	15,41,65
4	4,34,59	32	16,42,64
5	5,35,60	33	14,55,63
6	6,36,61	34	18,46,62
7	7,37,62	35	19,45,61
8	8,38,63	36	20,44,60
9	9,39,64	37	21,34,59
10	10,40,65	38	22,42,58
11	11,41,66	39	23,41,57
12	12,42,67	40	24,49,56
13	13,43,68	41	25,48,68
14	14,44,69	42	26,47,69
15	15,45,70	43	27,46,70
16	16,46,71	44	28,45,71
17	17,47,72	45	29,44,72
18	18,48,73	46	30,43,73
19	19,49,74	47	1,42,74
20	20,50,75	48	2,41,75
21	21,51,75	49	3,50,56
22	22,52,74	50	4,49,57
23	23,53,73	51	5,55,58
24	24,54,72	52	6,54,59
25	25,55,71	53	7,53,60
26	26,31,70	54	8,52,61
27	27,34,69	55	9,51,62
28	28,32,68	56	10,31,63

1-лаборатория иш топшириқлари.

1–топшириқлар.

Ушбу 4-тартибли детерминантни унинг хоссаларидан фойдаланиб ҳисобланг.

1. $\begin{vmatrix} -5 & 5 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 8 & -7 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & -6 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & -10 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 40 & 3 \\ -4 & 3 & 8 & -5 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 0-2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & -4 \\ 6 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 2 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -9 & 5 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & -6 \\ 1 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & -4 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & -6 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$$25.\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} \qquad 26.\ \begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$27.\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad 28.\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$29.\ \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & -5 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \qquad 30.\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

2–топшириқлар. Берилган тенгламалар системасининг биргаликда эканлигини текширинг, биргаликда бўлса, уларни:

1) Крамер формулалари(қоидаси)дан;
2) тескари матрица усули;
3) Гаусс усули ;
4) Жордано –Гаусс модификациялашган усулларидан фойдаланиб ечинг.

$$31.\ a)\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 7x_1 + x_3 = 6 \end{cases} \qquad б)\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -7 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$32.\ a)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_3 + x_3 = 3; \end{cases} \qquad б)\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$33.\ a)\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 17, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -5; \end{cases} \qquad б)\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

34. $a)\begin{cases} x_1+3x_2-8x=3, \\ x_1-3x_2-2x_3=8 \\ x_1-9x_2+2x_3=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6. \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20. \end{cases}$

35. $a)\begin{cases} -x_1+3x_2-2x_3=1, \\ 5x_1-x_2+3x_3=2 \\ 4x_1+2x_2+x_3=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1-5x_2=31 \\ 4x_1+11x_2=-43, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=-20, \end{cases}$

36. $a)\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3=8 \\ 2x_1-x_2+3x_3=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ -4x_1-x_2+3x_3=-3 \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2. \end{cases}$

37. $a)\begin{cases} 4x_1+6x_2+3x_3=17, \\ 2x_1+6x_2+5x_3=12 \\ 3x_1+6x_2+4x_3=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$

38. $a)\begin{cases} x_1+x_2-x_3=7, \\ 3x_1+9x_2+4x_3=10 \\ 2x_1+8x_2+5x_3=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=9 \\ 5x_1+6x_2+2x_3=18 \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4. \end{cases}$

39. $a)\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=2, \\ 3x_1-2x_2-x_3=8 \\ 2x_1+x_2-5x_3=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=-2, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=3 \\ 2x_1-4x_2-3x_3=0 \end{cases}$

40. $a)\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=1, \\ 4x_1-x_2=6, \\ 3x_1+2x_2+x_3=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31 \\ 3x_1-x_2+x_3=0 \\ 5x_1+x_2+2x_3=20. \end{cases}$

41. $a)\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=2, \\ 3x_1-2x_2-x_3=8 \\ 2x_1+x_2-5x_3=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=-2 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=3 \\ 2x_1-4x_2-3x_3=0. \end{cases}$

42. $a)\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=3, \\ 4x_1+5x_2-3x_3=5 \\ 3x_1+2x_2-x_3=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 5x_1+8x_2-x_3=0 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=-6. \end{cases}$

43. $a)\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=0, \\ 3x_1+x_2+x_3=6 \\ 3x_1-5x_2-6x_3=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+x_3=2 \\ 4x_1+x_2+2x_3=8 \\ 5x_1-3x_2+3x_3=4. \end{cases}$

44. $a)\begin{cases} x_1-x_2-x_3=4, \\ x_1-5x_2+5x_3=7 \\ x_1+3x_2-7x_3=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3=10 \\ 3x_1-x_2+5x_3=12 \\ 5x_1+2x_2-13x_3=21. \end{cases}$

45. $a)\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-2, \\ 4x_1-3x_2+x_3=13 \\ 2x_1+x_2-5x_3=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2-5x_3=3 \\ 3x_1+x_2-2x_3=7 \\ 4x_1+3x_2+x_3=5. \end{cases}$

46. $a)\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=7, \\ 6x_1+4x_2-7x_3=3 \\ 7x_1+x_2-3x_3=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=-1 \\ 2x_1+7x_2-x_3=10 \\ 3x_1-5x_2+3x_3=-14. \end{cases}$

47. $a)\begin{cases} x_1-4x_2+x_3=8, \\ 2x_1+3x_2-2x_3=4 \\ 3x_1-x_2-x_3=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-4 \\ 8x_1+3x_2-6x_3=-15 \\ 4x_1+x_2-3x_3=-6. \end{cases}$

48. $a)\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=10 \\ 3x_1-2x_2-5x_3=-14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3=-3 \\ 3x_1-x_2+2x_3=4 \\ 3x_1-2x_2+3x_3=-2. \end{cases}$

49. $a)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

50. $a)\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 10x_3 = -5, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

51. $a)\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

52. $a)\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 6x_3 = -13 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

53. $a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 3 \end{cases}$

54. $a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 19 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 23. \end{cases}$

55. $a)\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

3 – топшириқлар. Берилган бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг ечимини топинг.

56. $a)\begin{cases} x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

57. $a)\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

58. $a)\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

59. $a)\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 6x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

60. $a)\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 6x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

61. $a)\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

62. $a)\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

63. $a)\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

64. $a)\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

65. $a)\begin{cases} x_1+7x_2-4x_3=0, \\ 7x_1-x_2+3x_3=0 \\ 2x_1-3x_2+x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-4x_2-2x_3=0 \\ 7x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$

66. $a)\begin{cases} x_1+7x_2-4x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+4x_2-3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=0 \\ 6x_1+5x_2-x_3=0. \end{cases}$

67. $a)\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+3x_2-5x_3=0 \\ 6x_1+2x_2-3x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2-5x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+4x_2-x_3=0. \end{cases}$

68. $a)\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 2x_1+x_2-3x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+x_3=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ 6x_1+5x_2-4x_3=0 \\ 3x_1+4x_2-3x_3=0. \end{cases}$

69. $a)\begin{cases} x_1-7x_2+3x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-2x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=0 \\ 5x_1+x_2-3x_3=0. \end{cases}$

70. $a)\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 5x_1-6x_2+4x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3=0 \\ 4x_1+5x_2-3x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0. \end{cases}$

71. $a)\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=0 \\ 2x_1-3x_2+4x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1-x_2+4x_3=0 \\ 3x_1-4x_2+7x_3=0. \end{cases}$

72. $a)\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3=0, \\ x_1-4x_2+6x_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=0 \\ 3x_1-2x_2-3x_3=0 \\ 4x_1+x_2+2x_3=0. \end{cases}$

73. $a)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

74. $a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

75. $a)\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2- лаборатория иши. 4 соат.

Мавзу. Аналитик геометрия элементлари

1. **Лаборатория ишининг мақсади.** Координаталар усулининг моҳиятини мукаммал даражада пайқаш. Бу усул ёрдамида берилган икки нуқта орасидаги масофани топиш, кесмани берилган нисбатда бўлиш, тўғри чизиқ ва унинг тенгламалари ҳамда улар устида асосий тушунчалари (икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак, нуқтадан тўғри чизиққача масофа, икки тўғри чизиқнинг кесишуви ва ҳ.к) иккинчи тартибли чизиқлар ва унинг тенгламалари ҳамда уларни текшириш, фазода текислик ва тўғри чизиқ тенгламалари ҳамда уларни текшириш малакаларини, аналитик геометрия элементларининг иқтисодиётдаги қўлланлиши кўникмаларини ҳосил қилиш.

Лаборатория иши жиҳозлари: маъруза ва амалий машғулот конспектлари; олий математика фани дарслик ёки қўлланмалари, ҳисоблаш техникаси (компьютер).

2. Назарий қисм.

Назарий қисм саволлари:

1) координатлар усули ва унинг моҳияти;
2) икки нуқта орасидаги масофа;
3) кесмани берилган нисбатда бўлиш;
4) чизиқ ва унинг тенгламаси ҳақида;
5) тўғри чизиқ ва унинг тенгламалари;
6) иккинчи тартибли чизиқлар ва уларнинг тенгламалари;
7) фазода текислик тенгламалари;
8) фазода тўғри чизиқ тенгламалари.

1.Координатлар усули ва унинг моҳияти.

XVII асрда француз математиги ва философи Рене Декарт ишлари туфайли, бутун математикани, хусусан геометрияни инқилобий қайта қурган координатлар усули (методи) вужудга келди. Алгебраик тенглик (тенгсизлик) ларни геометрик образ (график) лар орқали талқин қилиш ва аксинча геометрик масалаларни ечишни аналитик-формулалар, тенгламалар системалари ёрдамида излаш имконияти пайдо бўлди. Янги тармоқ ***аналитик геометрия*** вужудга келди. Аналитик геометриянинг моҳияти, геометрик обектларга унинг алгебраик (аналитик) ифодасини мос қўйиб, уларнинг хусусиятларини ўрганишни, унга мос алгебраик ифодаларни текшириш орқали амалга оширилади.

Маълумки, ўзаро перпендикуляр бўлган горизонтал ва вертикал сонлар ўқи Декарт тўғри бурчакли координатлар системасини ташкил қилади. Бу система орқали текисликдаги нуқта билан бир жуфт ҳақиқий сон ўртасида бир қийматли мослик ўрнатилади. Текисликда нуқта $A(x,y)$ билан белгиланади. x,y сонларга унинг ***координатлари*** дейилади. Координатлар системаси орқали ўрнатилган бундай мосликка координатлар усули дейилади. Бу усулни геометриянинг **айрим** ***асосий масалаларини ечишга*** қўллаймиз.

“Нуқта берилган” деган ибора унинг координатларининг берилганлигини, “Нуқтани топинг” деган ибора эса, шу координатларни топишни тушунилади.

2.Икки нуқта орасидаги масофа.

Текисликда берилган иккита $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2,y_2)$ нуқталар орасидаги масофани топамиз. Маълумки $AC = x_2 - x_1,\ BC = y_2 - y_1.$ ABC тўғри бурчакли учбурчакдан, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, ,бўлиб,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

бўлади.(1) формулага берилган иккита нуқта орасидаги масофани топиш формуласи дейилади (1-чизма).

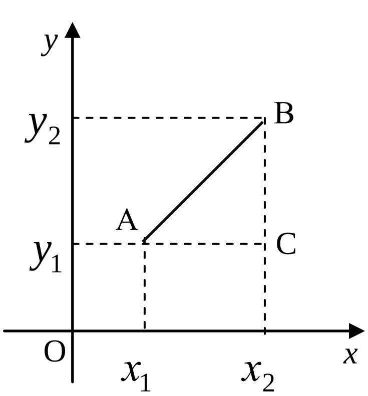
1-мисол. Берилган $A(5,1),\ B(2,-3)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. (1) формулага асосан

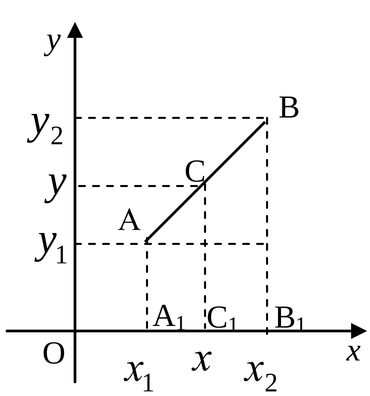
$$AB = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Демак,берилган нуқталар орасидаги масофа 5 узунлик (масштаб) бирлигига тенг бўлади.

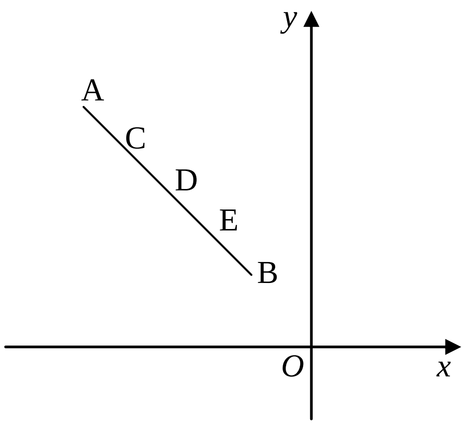
Юқорида, геометрик образларга уларнинг алгебраик ифодалари мос қўйилиб, уларнинг хусусиятларини шу ифода ёки формулалар орқали аниқланади деб таъкидладик, мана буни икки нуқта орасидаги масофани топиш мисолида ҳам кўриш мумкин, чунончи $A(5,1)$ ва $B(2,-3)$ берилган нуқталар орасидаги масофани исботланган (1) формулага асосан топилди.



1-чизма



2-чизма



3-чизма

3..Кесмани берилган нисбатда бўлиш.

AB кесма берилган бўлиб, унинг учлари $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ бўлсин. AB кесмани $AC:CB=\lambda$ нисбатда бўлувчи $C(x,y)$ нуқтани топамиз (2-чизма). Маълумки,

$$\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\lambda, \text{ ёки} \qquad \frac{AC}{BC}=\frac{A_1C_1}{B_1C_1}$$

$$A_1C_1=x-x_1, \quad B_1C_1=x_2-x,$$

бундан, $(x-x_1)/(x_2-x)=\lambda,$ бўлиб, $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ бўлади.

Худди шундай $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

бўлади.

Демак, C нуқтанинг координатлари учун

$$x_C=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \qquad y_C=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (2)$$

формулани ҳосил қилдик. (2) формулага AB кесмани λ нисбатда бўлувчи $C(x,y)$ нуқтани топиш формуласи дейилади. Хусусий ҳолда

$\dfrac{AC}{CB}=\lambda=1$ бўлса, $\quad x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

бўлиб, кесмани тенг иккига бўлиш формуласи келиб чиқади.

1-мисол. A(-6;7) ва B(-2;3) нуқталар берилган. AB кесма C,D,E нуқталар орқали 4 та тенг қисмларга ажратилган. C,D,E бўлиниш нуқталарини топинг (3-чизма).

Ечиш: Маълумки $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{1}{3}, \ \dfrac{AD}{DB}=1, \ \dfrac{AE}{EB}=3$.

С нуқтанинг координатларини (2) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$x_C=\frac{-6+\frac{1}{3}\cdot(-2)}{1+\frac{1}{3}}=-5, \quad y_C=\frac{7+\frac{1}{3}\cdot 3}{1+\frac{1}{3}}=6.$$

Демак, $C(-5,6)$. (D ва E нуқталарни мустақил топинг).

4. *Чизиқ ва унинг тенгламаси ҳақида.*

Аналитик геометриянинг энг муҳим тушунчаларидан бири чизиқ тенгламаси тушунчасидир. Текисликда тўғри бурчакли координатлар системасида L чизиқ берилган бўлсин. (4-чизма)

Таъриф. L чизиқда ётувчи исталган $M(x, y)$ нуқтанинг координатлари

$$G(x, y) = 0 \qquad (3)$$

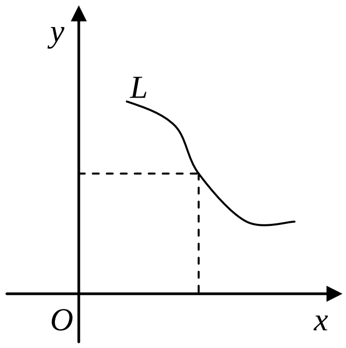
тенгламани қаноатлантириб, унда ётмаган нуқталарнинг координатлари қаноатлантирмаса, бу тенглама L чизиқнинг тенгламаси дейилади.

Бундан L чизиқ, координатлари (3) тенгламани қаноатлантирувчи барча нуқталар тўпламидан иборат эканлиги келиб чиқади. Чизиқнинг тенгламасини тузиш деганда унга тегишли ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтанинг координатлари орасидаги муносабатни (боғланишни) тенглама кўринишида аниқлашдан иборат. Топилган чизиқ тенгламаси учун, чизиқдаги исталган нуқтанинг координатлари уни қаноатлантиради ва аксинча, нуқтанинг координатлари тенгламани қаноатлантирса, бу нуқта шу чизиқда ётади.

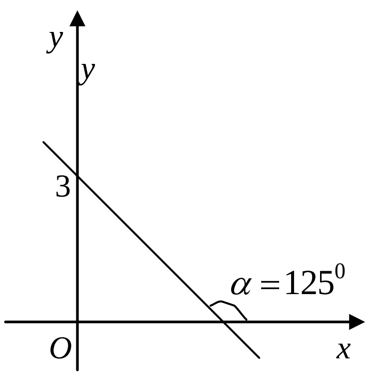
<u>5. Тўғри чизиқ ва унинг тенгламалари.Тўғри чизиқ</u> тушунчаси аналитик геометриянинг асосий тушунчаларидан биридир. Қуйида ҳар хил ҳолатларда тўғри чизиқнинг аналитик ифодаларини (тенгламаларини) келтириб чиқарамиз ва улар ёрдамида тўғри чизиқнинг текисликдаги вазиятларини ўрганамиз.

1).Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициэнтли ва умумий тенгламалари.
Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси.

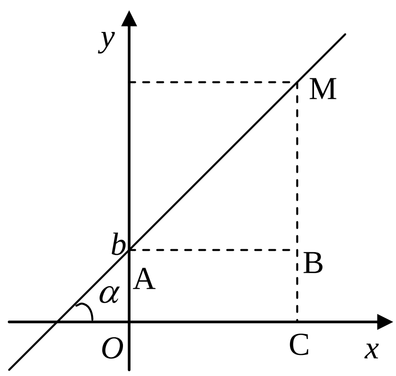
Текисликда Декарт координатлар системасида бирор тўғри чизиқни қарайлик. Ox ўқи мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчаги α ва тўғри чизиқнинг ординатлар ўқидан ажратган кесмасининг катталиги b берилганда унинг текисликдаги ҳолати аниқ бўлади. Масалан, $b = 3,\ \alpha = 125^0$ бўлса, унинг ҳолати аниқ бўлади (5-чизма).



4-чизма



5-чизма



6-чизма

Юқоридаги қийматлар берилганда тўғри чизиқнинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. $M(x,y)$ тўғри чизиққа тегишли ихтиёрий нуқта бўлсин (6-чизма). AMB тўғри бурчакли учбурчакдан

$\frac{BM}{AB}=tg\alpha$, бундан $BM=ABtg\alpha$

6-чизмадан $y=BC+BM$; ёки $y=ABtg\alpha+b,\ AB=x$ бўлганлиги учун $y=xtg\alpha+b$ бўлади.

$tg\alpha$ тўғри чизиқнинг **бурчак коэффициенти** дейилади ва $tg\alpha=k$ билан белгилаймиз. Шундай қилиб,

$$y=kx+b \qquad (4)$$

муносабат келиб чиқади. Бунга тўғри чизиқнинг **бурчак коэффициентли тенгламаси** дейилади. $b=0$ бўлса, тўғри чизиқ координатлар бошидан ўтиб тенгламаси $y=kx$ бўлади. $k=1$ бўлса, $y=x$ бўлиб, бу биринчи координатлар бурчагининг биссектрисаси бўлади.

Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари.

Икки номаълумли $Ax+By+C=0$ чизиқли тенгламани қараймиз.

Бундан $By=-Ax-C,\ y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},\ k=-\frac{A}{B},\ b=-\frac{C}{B}$ билан белгиласак $y=kx+b$ тенглама ҳосил бўлади. Шундай қилиб, $Ax+By+C=0$ тенглама ҳам тўғри чизиқ тенгламаси эканлиги келиб чиқади.

$$Ax+By+C=0 \qquad (5)$$

тенгламага тўғри чизиқнинг **умумий тенгламаси** дейилади.

Хусусий ҳоллари: 1) $A\neq 0,\ B\neq 0,\ C=0$ бўлса, $Ax+By=0$ бўлиб, тўғри чизиқ координатлар бошидан ўтади, чунки $O(0,0)$ нуқтанинг координатлари тенгламани қаноатлантиради;

2) $A=0,\ B\neq 0,\ C=0$, бўлса, $y=-\frac{C}{B}$ бўлиб, Oy ўқдан $-\frac{C}{B}$ кесма ажратиб, Ox ўқига параллел тўғри чизиқ тенламаси бўлади;

3) $A\neq 0,\ B=0,\ C\neq 0$ бўлса, $x=-\frac{C}{A}$ бўлиб, Ox ўқдан $-\frac{C}{A}$ кесма ажратиб Oy ўқига паралллел тўғри чизиқ тенгламаси бўлади;

4) $A=0,\ B\neq 0,\ C=0$ бўлса, $y=0$ бўлиб, Ox ўқининг тенгламаси ҳосил бўлади;

5) $A\neq 0,\ B=0,\ C=0$ бўлса, $x=0$ бўлиб, Oy ўқининг тенгламаси ҳосил бўлади;

6) $A=0,\ B=0,\ C\neq 0$ бўлса, $C=0$ бўлиб, ўзгармас миқдор 0 дан фарқли ҳамда 0 га тенг келиб чиқади, бундай бўлиши мумкин эмас.

2).Берилган битта ва иккита нуқналардан ўтувчи тўғри чизиқлар тенгламаси.

$A(x_1, y_1)$ нуқта берилган.

$$y = kx + b \qquad (6)$$

тўғри чизиқ A нуқтадан ўтсин. Бу ҳолда A нуқтанинг координатлари тўғри чизиқ тенгламасини қаноатлантиради,яъни $y_1 = kx_1 + b$. (6) дан охирги тенгликни айирсак:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (7)$$

ҳосил бўлади. (7) тенгламага берилган **битта нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг** тенгламаси дейилади.

Тўғри чизиқ $B(x_2, y_2)$ иккинчи нуқтадан ҳам ўтса, $y - y_2 = k(x - x_2)$ бўлиб, $k = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ бўлади. k нинг қийматини (7) га қўйиб

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (8)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. **(8) берилган икки** $A(x_1, y_1)$**) ва** $B(x_2, y_2)$ **нуқталардан ўтувчи** тўғри чизиқ тенгламаси бўлади.

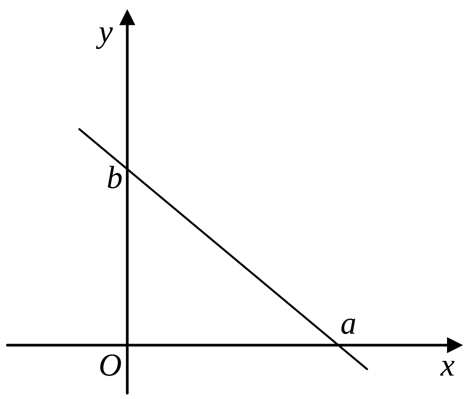
3).Тўғри чизиқнинг кесмаларга нисбатан ва нормал тенгламалари.

Тўғри чизиқ координат ўқларидан мос равишда a ва b кесмалар ажратиб ўтсин (7-чизма). Тўғри чизиқ $A(a;0)$ ва $B(0;b)$ нуқталардан ўтади. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасига асосан

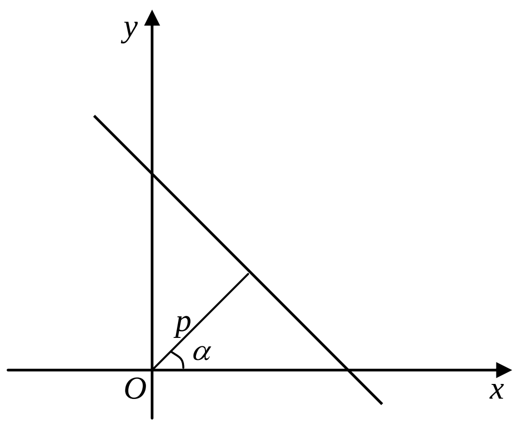
$$\frac{a-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}, \quad \frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a}, \quad \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 \quad \text{ёки}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (9)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламага тўғри чизиқнинг **кесмаларга нисбатан** тенгламаси дейилади.



7- чизма.



8- чизма.

Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси. Тўғри чизиққа координат бошидан туширилган перпендикулярнинг (нормал) узунлиги ва унинг Ox ўқи мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчаги α берилганда тўғри чизиқнинг текисликдаги ҳолати аниқ бўлади (8-чизма) ва унинг тенгламаси

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (10)$$

бўлади. (10) тенгламага тўғри чизиқнинг **нормал тенгламаси** дейилади. Маълумки, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Нормал тенгламада шу шарт бажарилиши керак. Тўғри чизиқ умумий тенгламасини нормал тенглама келтириш учун **нормалловчи кўпайтувчи**

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$ ни топиб, уни $Ax + By + C = 0$

тенгламага кўпайтирамиз. Бу ҳолда

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

нормал тенглама ҳосил бўлади. Нормалловчи кўпайтувчининг ишораси озод ҳад ишорасига тескари олинади.

4) ,Икки тўғри чизиқнинг кесишуви, улар орасидаги бурчак ва нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа.

Иккита тўғри чизиқнинг кесишуви. Иккита тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини топиш учун уларнинг тенгламаларини биргаликда ечиб кесишиш нуқтасининг координатлари топилади.

2-мисол.

$$2x + y - 3 = 0, \qquad x + y - 2 = 0$$

тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини топинг.

Ечиш.

$$2x + y - 3 = 0,$$
$$x + y - 2 = 0$$

Иккинчи тенгламани (-1)га кўпайтирамиз, ҳосил бўлган тенгламаларни ҳадма-ҳад қўшиб, $x - 1 = 0, x = 1$ ни ҳосил қиламиз. $x = 1$ ни биринчи тенгламага қўйсак, $2\cdot 1 + y - 3 = 0$ ёки $y = 1$ бўлади. Шундай қилиб, бу тўғри чизиқлар $A(1;\,1)$ нуқтада кесишади.

Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Иккита

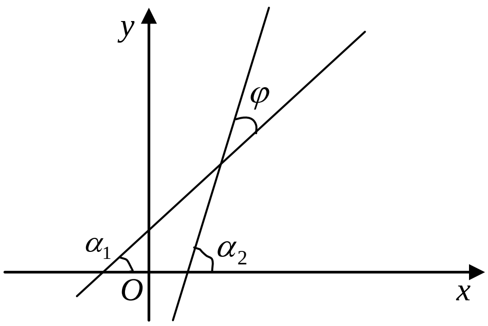
$$y = k_1x + b_1$$
$$y = k_2x + b_2$$

тўғри чизиқлар берилган бўлсин. Бунда $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$. бу тўғри чизиқлар параллел бўлмасин ва улар орасидаги бурчакни топиш талаб этилсин. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни φ билан белгилаймиз. $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (9-чизма).

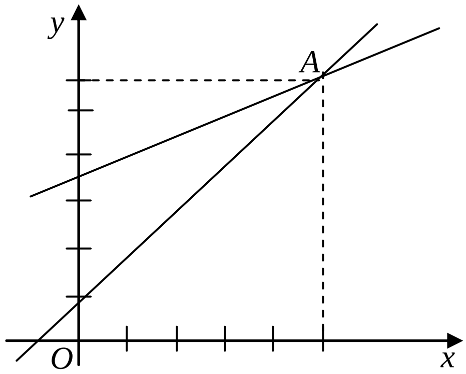
$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} \quad ёки$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (11)$$

(11) икки тўғри чизиқ орасидаги **бурчакнинг тангенсини топиш** формуласи бўлади.



9-чизма.



10-чизма.

Тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлса, улар орасидаги бурчак

$$\varphi = 90^0 \text{ **бўлиб** } \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1.k_2} = \infty, \qquad 1 + k_1.k_2 = 0\ ,\ k_1.k_2 = -1,\ \ k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

бўлади, бунга икки тўғри чизиқнинг **<u>перпендикулярлик</u> шарти** дейилади.

Тўғри чизиқлар параллел бўлса, φ = 0, бўлиб, tg 0^0=0, ёки

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1.k_2} = 0, \qquad k_2 - k_1 = 0\ ,\ \ k_1 = k_2$$

келиб чиқади.

$k_1 = k_2$ тенгликка икки тўғри чизиқнинг **<u>параллеллик</u> шарти** дейилади.

Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа. M(x_0; y_0) нуқта ва xcosα + ysinα - p=0 тўғри чизиқ берилган бўлсин. Берилган нуқтадан, берилган тўғри чизиққача бўлган масофа

$$d = |\,x\cos\alpha + y\sin\alpha - p\,| \qquad (12)$$

формула ёрдамида топилади. Тўғри чизиқ тенгламаси умумий Ax+By+C=0 кўринишда берилган бўлса,

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right| \qquad (13)$$

формула билан топилади.
Тўғри чизиқ тушунчасининг иқтисодиётда қўлланишига бирнеча мисоллар қараймиз.

3-мисол. Бирор хил маҳсулотдан 100 донасини ишлаб чиқаришга 300 минг сўм ҳаражат қилинсин. 500 донаси учун эса ҳаражат 1300 минг сўм бўлсин. Ҳаражат функцияси чизиқли (тўғри чизиқ) бўлса, шу маҳсулотдан 400 дона ишлаб чиқариш ҳаражатини топинг.

Ечиш. Масала шарти бўйича A(100, 300) ва B(500, 1300) нуқталар берилган. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасига асосан

$$\frac{y-300}{1300-300} = \frac{x-100}{500-100} \quad \text{ёки} \quad y=\frac{5}{2}x + 50$$

тенглик ўринли бўлади. Охирги тенгламадан x=400 учун y=1050 эканлигини топамиз. Демак, маҳсулотдан 400 дона ишлаб чиқариш учун 1050 минг сўм ҳаражат қилинади.

4-мисол. Икки хил транспорт воситасида юк ташиш ҳаражатлари функцияси

$$y=100+50x \quad \text{ва} \quad y=200+30x$$

билан ифодалансин. Бунда, y транспорт ҳаражати, x ҳар юз километрга юк ташиш масофаси. Қандай масофадан бошлаб 2-хил транспорт воситаси тежамлироқ бўлади.

Ечиш. Масала шартида берилган y=100+50x ва y=200+30x тўғри чизиқлар кесишадиган нуқтани топамиз: тенгликларнинг чап томонлари тенг бўлганлиги учун 100+50x=200+30x тенгламани ҳосил қиламиз, бундан x=5, y=350 бўлади. Демак, тўғри чизиқлар A(5,530) нуқтада кесишади.

Энди тўғри чизиқларни ясаймиз: (10-чизма).10-чизмадан кўринадики, юк ташиш масофаси 500км дан ортиқ бўлганда, 2-хил транспорт воситаси билан юк ташилса ҳаражат камроқ бўлади.

6. Иккинчи тартибли чизиқлар ва уларнинг тенгламаси.

Маълумки, текисликда тўғри чизиқ x ва y ўзгарувчи кординатларга нисбатан биринчи даражали эди. Энди текисликда иккинчи тартибли чизиқларни ўрганамиз. Иккинчи тартибли чизиқлар x ва y ўзгарувчи координатларга нисбатан иккинчи даражали тенглама билан ифодаланади. Иккинчи даражали тенгламанинг умумий кўриниши

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (14)$$

бўлади. (14) тенгламага **<u>иккинчи тартибли чизиқнинг</u> умумий тенгламаси** дейилади. Қуйида муайян ҳолларда, иккинчи тартибли чизиқларнинг аналитик ифодаларини топиб, уларнинг хусусиятларини ўрганамиз.

1).Айлана ва эллипс тенгламалари.

Айлана ва унинг тенгламаси. Таъриф. Текисликда бирор C(a, b) нуқтадан тенг узоқликда жойлашган нуқталар тўплами **<u>айлана</u>** дейилади.

M(x, y) айланага тегишли ихтиёрий нуқта бўлсин (11-чизма). Айлана таърифига кўра CM масофа ўзгармас, бу масофани R билан белгилайлик. Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласи (1) га асосан

$$CM=\sqrt{(x - a)^2 + (y -b)^2} \quad \text{ёки} \quad \sqrt{(x - a)^2 + (y -b)^2} =R.$$

Охирги тенгликнинг иккала тарафини квадратга кўтариб

$$(x- a)^2 + (y -b)^2 =R^2 \qquad (15)$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламага маркази C(a, b) нуқтада, радиуси R га тенг **айлананинг <u>каноник</u> тенгламаси** деб аталади. (15) дан

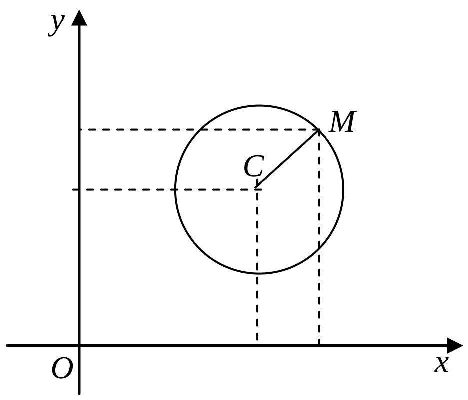
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 – 2by + b^2 = R^2 \quad \text{ёки} \quad x^2 + y^2 - 2ax – 2by + a^2 + b^2 - R^2 =0$$

бўлади. Бу тенглама (14) тенгламанинг A=C, B=0 бўлган хусусий ҳолидир. Демак, айлана иккинчи тартибли чизиқдир.

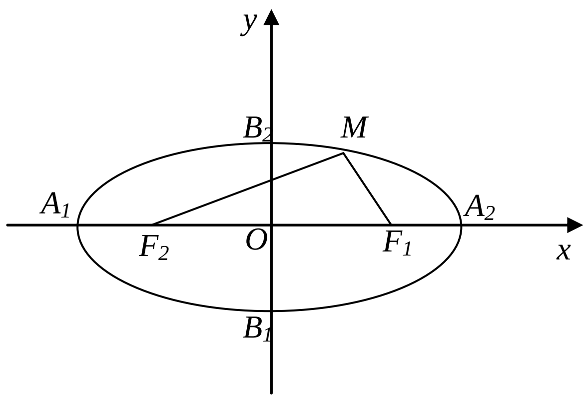
5-мисол. Иккинчи тартибли чизиқ $x^2+ y^2 - 6x + 4y - 23 =0$ тенглама билан берилган. Унинг айлана эканлигини кўрсатинг ҳамда марказини ва радиусини топинг.

Ечиш. x ва y ли ҳадлар бўйича тўла квадрат ажратамиз:

$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4- 23 =0$,$(x-3)^2 + (y+2)^2 - 9 - 4 - 23 =0$ ёки $(x -3)^2 + (y +2)^2 = 36$ бу айлананинг каноник тенгламасидир.Унинг маркази C(3; -2), радиуси R=6 бўлади.



11-чизма.



12-чизма.

Эллипс ва унинг тенгламаси. Таъриф. Текисликда, ҳар бир нуқтасидан берилган иккита нуқталаргача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас миқдордан иборат бўлган нуқталар тўпламига ***эллипс дейилади*.** Берилган нуқталар $Ғ_1$ ва $Ғ_2$ бўлсин. Бу нуқталарга эллипснинг фокуслари дейилади. Ўзгармас миқдорни 2а, фокуслар орасидаги масофани 2с билан белгилаб, координатлар системасини шундай оламизки, ОХ ўқи фокуслардан ўтсин ва координатлар боши $Ғ_1Ғ_2$ масофанинг ўртасида бўлсин (12-чизма). М(х, у) эллипсга тегишли ихтиёрий нуқта бўлса, таърифга кўра

$$Ғ_1M+Ғ_2M= 2a \qquad (16)$$

бўлади. Маълумки, $Ғ_1(+c;\ 0)$ ва $Ғ_2(-c;\ 0)$ бўлиб, икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига асосан:

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y -0)^2} + \sqrt{(x + c)^2 + (y -0)^2} =2a$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламадан иррационалликни йўқотиб

$$x^2 (a^2- c)^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2)$$

кўринишга келтирамиз. $a^2 -c^2 =b^2$ билан белгилаймиз (чунки $a>c$). Бу ҳолда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (17)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (17) тенгламага ***эллипснинг каноник*** тенгламаси дейилади.

Координатлар боши эллипснинг симметрия маркази координатлар ўқи симметрия ўқлари бўлади. $A_1(-a,\ 0)$, $A_2(a,\ 0)$,$B_1\ (0,\ -b)$, $B_2(0,\ +b)$ нуқталар эллипснинг учлари, $a= 0A_2$ ва $b=0B_2$ масофалар мос равишда эллипснинг катта ва кичик ярим ўқлари дейилади.

Шундай қилиб, эллипс иккита симметрия ўқига, симметрия марказига эга бўлган ёпиқ эгри чизиқдир.

$\varepsilon=c/a < 1$ катталик ***эллипснинг эксцентриситети*** дейилади. Айланани эллипснинг $a=b$, $\varepsilon=0$ бўлган хусусий ҳоли деб қараш мумкин.

М(х, у) нуқтадан фокусларгача бўлган масофага эллипснинг фокал радиуслари дейилади, уларнинг r_1 ва r_2 билан белгиласак $r_1 = a+ \varepsilon\cdot x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ бўлади.

6-мисол**.** $16x^2+25y^2=400$ эллипснинг ярим ўқларини, фокусларини ва эксцентриситетини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани 400 га бўлиб,

x^2 y^2

$$\frac{\quad}{25}+\frac{\quad}{16}=1$$

кўринишга келтирамиз. Бу тенгламадан $a^2=25$, $b^2=16$ бўлиб, ярим ўқлари мос равишда а =5, b=4 бўлади. Маълумки. $b^2=a^2-c^2$, бўлиб. $c^2=25-16=9$, $c=\pm 3$ бўлади. Демак, фокуслари Ғ$_1$(3; 0) ва Ғ$_2$(-3; 0) нуқталарда, эксцентриситети эса

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}.$$

бўлади.

2).Гипербола , парабола ва уларнинг тенгламалари. Гипербола ва унинг тенгламаси. Таъриф. Текисликда, ҳар бир нуқтасидан берилган иккита (фокус) нуқталаргача бўлган масофалар айирмаси ўзгармас миқдордан иборат бўлган нуқталар тўпламига ***гипербола*** **дейилади.**(Кўрсатилган айирма абсолют қиймати бўйича олиниб у фокуслар орасидаги масофадан кичик ва 0 дан фарқли).

Ўзгармас миқдорни 2а, фокуслар орасидаги масофани 2с ва координат ўқларини эллипсдагидек олиб, $c^2-a^2=b^2$ белгилаш киритиб

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (18)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (18) тенгламага ***гиперболанинг каноник*** тенгламаси дейилади. Гиперболанинг фокуслари Ғ$_1$(+с; 0) ва Ғ$_2$(-с; 0) бўлади (13-чизма). Координатлар ўқи симметрия ўқлари ва координатлар боши 0(о;о) симметрия марказидир. Гипербола кординат ўқларини A_1(-а 0) ва A_2(а; 0) нуқталарда кесиб ўтиб, бу нуқталарга ҳақиқий учлари ва $a=0A_2$ масофа ҳақиқий ярим ўқи дейилади. B_1(0, -b) ва B_2(0, b) нуқталар гиперболанинг мавҳум учлари, $b=OB_2$ - мавҳум ярим ўқи дейилади.

Гипербола иккита асимптоталарга эга бўлиб унинг тенгламалари

$$y=\pm\frac{b}{a}x \qquad \text{бўлади.}$$

$\varepsilon=\dfrac{c}{a}>1$ катталикка ***гиперболанинг эксцентриситети*** деб аталади. Гипербола ўқлари $a=b$ бўлса, унга тенг томонли гипербола дейилади ва унинг тенгламаси $x^2-y^2=a^2$ бўлади.

$$\frac{x^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

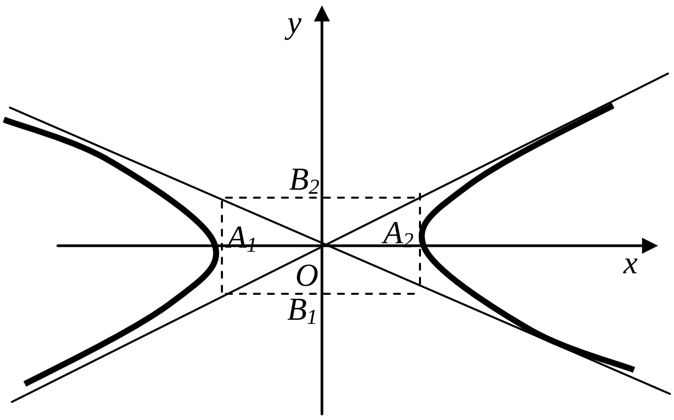
гиперболаларга ***ўзаро қўшма гиперболалар*** деб аталади.

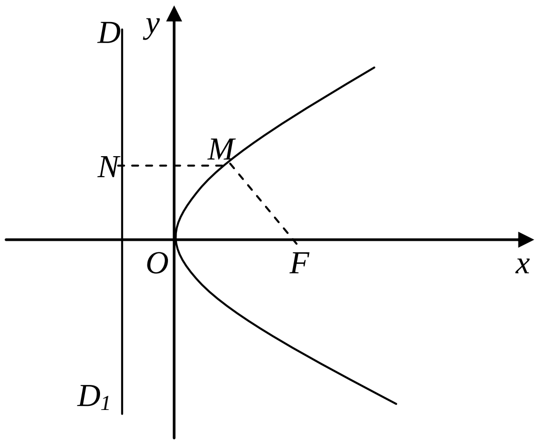
7-мисол. $9x^2-16y^2=144$ гиперболанинг ярим ўқларини, фокусларини, эксцентриситетини ҳамда аксимптоталарининг тенгламаларини топинг.

Ечиш. Берилган тенламани 144 га бўлиб тенгламани каноник

$x^2/16-y^2/9=1$, кўринишга келтирамиз. Бундан $a^2=16$, $b^2=9$ бўлиб, ҳақиқий ярим ўқ а=4, мавҳум ярим ўқ b=3 бўлади. $c^2=a^2+b^2$, $c^2=16+9$, $c=\pm 5$ бўлиб, Ғ$_1$ (+5; 0), Ғ$_2$(-5; 0) бўлади.

Ексцентриситет ε= c/a =5/4.   a ва b ларнинг қийматини асимптота тенгламасига қўйиб y= ±3/4·x тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу асимптоталар тенгламасидир.





13-чизма   14-чизма

Парабола ва унинг тенгламаси. Таъриф. Текисликда, ҳар бир нуқтасидан берилган нуқта (фокус)гача ва берилган тўғри чизиқ (директриса)гача масофалари ўзаро тенг бўлган нуқталар тўпламига парабола дейилади.

Координатлар системасини шундай оламизки, OX ўқи Ғ (фокус)дан ўтиб, DD_1 директрисага перпендикуляр, OY ўқи эса фокус ва директрисанинг ўртасидан ўтсин (14-чизма). M(x,y) параболага тегишли ихтиёрий нуқта бўлсин. Ғ нуқтадан DD_1 тўғри чизиққача бўлган масофани p (p>0) билан белгилаймиз. Бунда Ғ(p/2, 0) бўлиб, директрисанинг тенгламаси x= - p/2 бўлади.

Таърифга асосан MN = MF. N $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$.

Икки нуқта орасидаги масофа формуласига асосан

$$x + p/2 = \sqrt{(x-p/2)^2 + y^2}$$

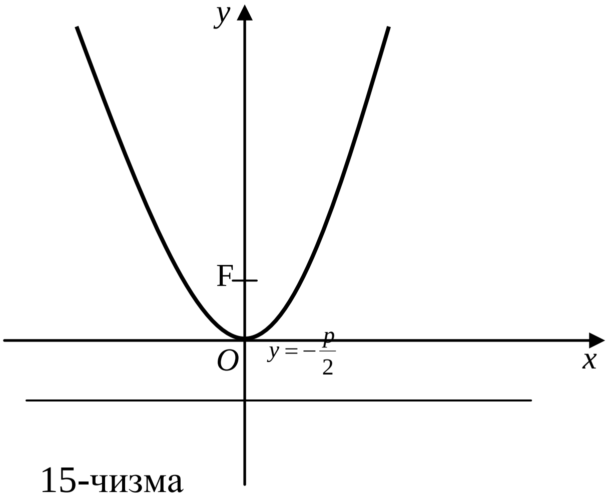
Бу тенгламадан иррационалликни йўқотиб,

$$y^2 = 2px \qquad (19)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ***<u>параболанинг каноник</u>*** тенгламаси бўлади. Ординатлар ўқи симметрия ўқи бўлса, парабола тенгламаси

$$x^2 = 2py \ (p > 0)$$

кўринишда бўлади. Бу ҳолда y=-p/2 директриса тенгламаси, Ғ=(0; p/2) нуқта фокус бўлади(15-чизма).



15-чизма

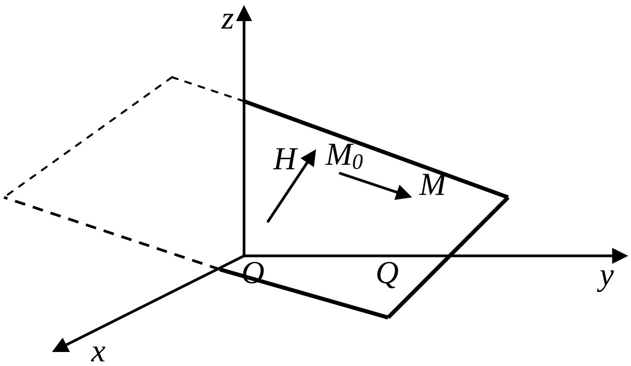
M(x, y) нуқтадан Ғ (p/2, 0) фокусгача масофага фокал радиус дейилади ва p=x+p/2 . M(x, y) нуқтадан Ғ(0, p/2) фокусгача масофа p=y + p/2 бўлади.

8-мисол. y^2=12x параболанинг фокусини ва директрисасининг тенгламасини топинг. M(3; 6) нуқтадан фокусгача бўлган масофани аниқланг.

Ечиш. Берилган тенгламани (19) тенглама билан солиштириб 2p=12, бундан p=6, p/2=3 . Шундай қилиб, фокус Ғ(3;0) нуқтада директриса тенгламаси x=-3 эканлигини топамиз. M(3; 6) нуқта учун x=3, бўлиб, фокал радиус r= 3+3=6, r=6 бўлади.

7.Фазода текислик тенгламалари.*1) *Берилган нуқтадан ўтиб, берилган векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси.

OXYZ тўғри бурчакли координатлар системасида M_0 (x_0, y_0, z_0) нуқта ва **H** =A**i** +B**j** +C**к** вектор берилган бўлсин. M_0 нуқтадан ўтувчи **H** векторга перпендикуляр Q текисликнинг фазодаги вазияти аниқ бўлади. Унинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. Q текисликда ихтиёрий M (x, y, z) нуқта оламиз (16-чизма).



16-чизма.

M_0M ва **Н** векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганда ва фақат шундагина М нуқта Q текисликда ётади. Маълумки, **M_0M** векторнинг координатлари $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(z - z_0)$ бўлади. Икки векторнинг перпендикулярлик белгисига асосан;

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (20)$$

Бу Q ***текислик тенгламаси*** бўлади.

Таъриф. Q текисликка перпендикуляр **Н** = А**i** + В**j** + С**к** векторга бу текисликнинг ***нормал*** **вектори** дейилади.

2) Текисликнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари. (20) тенгламадан $Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$ ёки $Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$ билан белгилаб

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (21)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (21) тенгламага фазода текисликнинг **умумий тенгламаси** дейилади.

Умумий тенгламанинг хусусий ҳолларини қараймиз:

1） D=0, бўлса. $Ax + By + Cz = 0$ бўлиб, текислик координатлар бошидан ўтади;

2） C=0 бўлса, $Ax + By + D = 0$ бўлиб. текислик OZ ўқига параллел; худди шундай $Ax + Cz + D = 0$, $By + Cz + D = 0$ текисликлар мос равишда ОУ ва ОХ ўқларига параллелдир;

3） 2- ҳолда D=0 бўлса текислик тенгламалари $Ax + By = 0$, $Ax + Cz = 0$, $By + Cz = 0$ бўлиб, мос равишда OZ, ОУ, ОХ координат ўқларидан ўтади;

4） B=C=0, бўлса, $Ax + D = 0$ текислик УOZ координат текислигига параллел, худди шундай $By + D = 0$, $Cz + D = 0$ текисликлар мос равишда XOZ, ХОУ координат текисликларига параллел бўлади;

5） B=C=D=0 бўлса, $Ax = 0$ бўлиб, УOZ координат текислиги билан устма-уст тушади, яъни $x=0$, *ОУZ* координат текислигининг тенгламаси бўлади. Худди шундай $y=0$ ва $z=0$, мос равишда XOZ ва ХОУ координат текисликларининг тенгламасини ифодалайди;

3). Текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси. (21) тенгламада А, В, С, D коэффициентлар ҳаммаси 0 дан фарқли бўлса, текислик координат ўқларидан OL, ON ва OP кесмалар ажратади. (17-чизма). (21) тенгламани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$Ax + By + Cz = D, \quad \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1 \quad \text{ҳамда}$$

$-D/A = a$, $-D/B = b$, $-D/C = c$ билан белгиласак

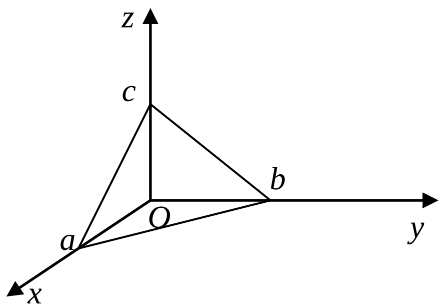
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (22)$$

тенглама келиб чиқади. Бу тенгламага фазода ***<u>текисликнинг кесмаларга нисбатан</u>*** тенгламаси дейилади.

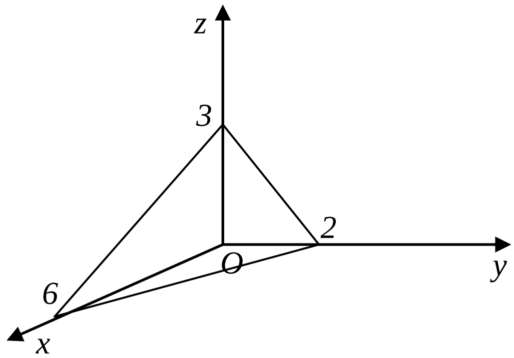
9-мисол. Текисликнинг $x +3y +2z -6=0$ умумий тенгламаси берилган, бу текисликни ясанг.

Ечиш. Тенгламани (22) кўринишдаги тенгламага келтирсак,

$x+ 3y +2z=6$, $x/6 + y/2 + z/3=1$ бўлади.



17-чизма



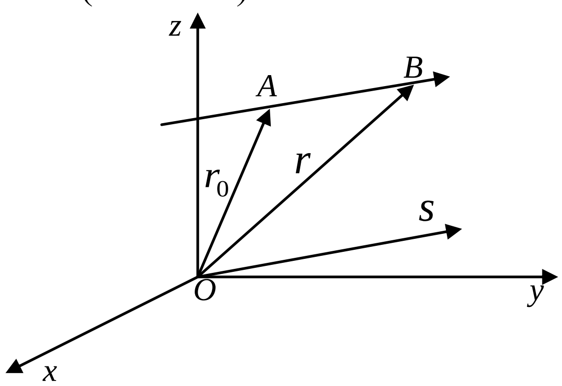
18-чизма

Охирги тенгламадан маълумки, текислик координат ўқларидан мос равишда 6, 2, 3 кесмалар ажратади. Бу кесмаларнинг охиридан текисликни ўтказамиз (18-чизма).

8. Фазода тўғри чизиқ ва унинг тенгламалари.

1).Фазода берилган нуқтадан ўтувчи ва йўналтирувчи векторга эга бўлган тўғри чизиқ векторли тенгламаси.

Фазода тўғри чизиқнинг ҳолати у ўтадиган бирор A (x_1, y_1, z_1) нуқта ва тўғри чизиқ параллел бўлган **s**=m**i**+n**j**+p**к** йўналтирувчи векторнинг берилиши билан тўла аниқланади. Унинг тенгламасини ёзиш учун унда ихтиёрий B(x, y, z) нуқта оламиз (19-чизма).



19-чизма.

Маълумки, **OB=OA+AB** бўлиб, **AB** вектор **s** векторга коллинеар, яъни **AB**=t**s**, t - скаляр параметр. **OA** = $\mathbf{r}_0$, **OB=r** десак,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s} \qquad (23)$$

бўлади. (23) тенглама ***<u>фазода тўғри чизиқнинг векторли тенгламаси</u>*** дейилади.

2). Фазода тўғри чизиқнинг параметрик ва каноник тенгламалари.

$\mathbf{r}=xi+yj+z\mathbf{к}$, $r_0 = x_1 i + y_1 j + z_1\mathbf{к}$, $\mathbf{s} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{к}$ бўлганлиги учун (23) тенгламадан векторларнинг тенглигига асосан

$$\begin{cases} x = x_1 + tm \\ y = y_1 + tn \\ z = z_1 + tp \end{cases} \qquad (24)$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бунга ***<u>тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси</u>*** дейилади, бунда t **- параметр**.

(24) тенгламадан t параметрни йўқосак

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \qquad (25)$$

тенглама келиб чиқади. (25) тенгламага тўғри чизиқнинг ***<u>каноник тенгламаси</u>*** дейилади.

3). Тўғри чизиқнинг умумий ва проекцияларга нисбатан тенгламаси.

Фазода тўғри чизиқни икки текисликнинг кесимидан иборат деб ҳам қараш мумкин. Шунинг учун тўғри чизиқни аналитик ҳолда қуйидаги система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ , \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (26)$$

орқали ҳам ифодалаш мумкин. Бунга тўғри чизиқнинг ***<u>умумий тенгламаси</u>*** дейилади. (26) тенгламада A_1, B_1, C_1 коэффициентлар мос равишда A_2, B_2, C_2 коэффициентларга пропорционал бўлмаса, у тўғри чизиқни ифодалайди.

(26) системадан биринчи y номаълумни, кейин x номаълумни йўқотсак

$$\begin{cases} x = x_1 + mz, \\ y = y_1 + nz \end{cases} \qquad (27)$$

системаси ҳосил бўлади. Бундаги биринчи тенглама ОУ ўққа параллел бўлган текислик, иккинчиси ОХ ўққа параллел бўлган текислик бўлиб, берилган тўғри чизиқни XOZ ва УOZ координат текисликларига проексиялайди. (27) системага тўғри чизиқнинг ***<u>проекцияларга</u>*** нисбатан тенгламаси дейилади.

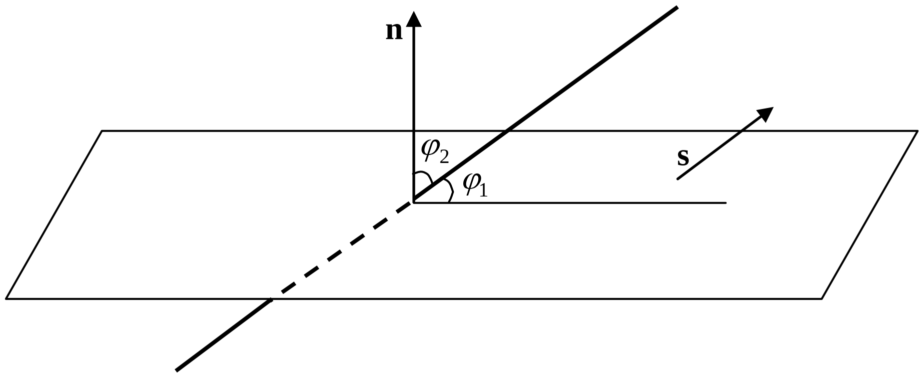
$M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (28)$$

бўлади.

4). Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак.

Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак деб, тўғри чизиқнинг текисликдаги проекцияси билан тўғри чизиқ орасидаги қўшни бурчаклардан бири олинади(20-чизма).



20-чизма.

Тўғри чизиқ

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

каноник тенгламаси,

текислик,

$$Ax + By + Cz + D=0$$

умумий тенгламаси билан берилган бўлсин. φ_1 бурчакни топиш учун тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори **s**(m, n, p) билан текисликнинг нормал вектори орасидаги φ_2 бурчакни ҳисоблаймиз.

$$\cos\varphi_2 = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

φ_1 бурчак φ_2 бурчакни $\pi/2$ гача тўлдиради. Демак,

$$\cos\varphi_2 = \cos(\pi/2 - \varphi_1) = \sin\varphi_1.$$

Шундай қилиб,

$$\sin\varphi_1 = \frac{\left| Am + Bn + Cp \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (28)$$

10-мисол. A(5, 1, -4) ва B(6, 1, -3) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ билан $2x - 2y + z - 3 = 0$ текислик орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. A B нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори сифатида **s**=AB(1,0,1) ни оламиз. Текисликнинг нормал вектори **n**(2, -2, 1) бўлганлиги учун (28) формулага асосан:

$$\sin\varphi = \frac{\left| 2\cdot 1 + 0\cdot(-2) + 11 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\varphi = \sqrt{2}/2, \quad \varphi = 45^0.$$

3. Амалий қисм.

Ишнинг мақсади ва назарий қисм тушунчалари кетма-кетлиги ўрганилгандан кейин ҳарбир талаба ўз топшириқларини бажаришга киришади. Бу топшириқларни бажариш учун намунавий мисоллар кўрсатамиз.

1 – мисол. ABC учбурчакнинг учлари $A(7;6)$, $B(1;2)$ ва $C(-11;3)$ берилган:

1) С учидан ўтказилган CD медиана тенгламасини ва узунлигини;

2) А учидан ўтказилган AE баландлик тенгламасини тузинг ва шу баландлик узунлигини;

3) учбурчакнинг ички C бурчагини топинг.

Ечиш. 1) Маълумки C учидан ўтказилган медиана учбурчакнинг AB томонини тенг иккига бўлади, шунинг учун AB томонининг ўртаси бўлган D нуқта координатларини топамиз. Кесмани λ нисбатда бўлувчи нуқтанинг координатларини топиш формуласида $\lambda = 1$ бўлиб,

$x_1 = \dfrac{7+1\cdot 1}{1+1} = 4,\quad y_1 = \dfrac{6+1\cdot 2}{1+1} = 4;$ бўлади. Демак, AB кесмани

тенг иккига бўлувчи нуқта $D(4;4)$ бўлади.

Энди $C(-11;3)$ ва $D(4;4)$ берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасига асосан:

$$\frac{x+11}{4+11} = \frac{y-3}{4-3},\quad \frac{x+11}{15} = \frac{y-3}{1},\ 15(y-3) = x+11,\ x-15y+56=0$$

бўлади, бу CD медиана тенгламасидир.

CD медиана узунлигини топиш учун, берилган икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласидан фойдаланиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$CD = \sqrt{(4+11)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{225+1} = \sqrt{226},\quad CD = \sqrt{226}$$

узунлик бирлиги(у.б).

2) $A(7;6)$ учидан BC томонга ўтказилган AE баландлик тенгламасини топиш учун, олдин $A(7;6)$ нуқтадан ўқитувчи

тўғричизиқлар дастасининг тенгламасини тузамиз: бу берилган битта нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасига асосан.

$$y-6=\kappa(x-7)$$

бўлади.

Энди шу тўғри чизиқлар дастасидан шундайини танлаймизки, у BC томонга парпендикуляр бўлсин. Бунинг учун олдин $B(1;2)$ ва $C(-11;3)$ берилган нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ, бурчак коэффицентини топамиз:

$$\frac{x+11}{1+11}=\frac{y-3}{2-3}, \qquad \frac{x+11}{12}=\frac{y-3}{-1}$$

$$12(y-3)=-(x+11), \quad y-3=-\frac{1}{12}(x+11)$$

$$y=-\frac{1}{12}x-\frac{11}{12}+3, \quad y=-\frac{1}{12}x+\frac{25}{12};$$

Демак, B ва C нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ бурчак коэффициенти $\kappa_1=-\frac{1}{12}$ бўлади.

A нуқтадан ўтказилган баландлик BC томонга перпендикуляр бўлганлиги учун, икки тўғри чизиқ перпендикулярлик $\kappa=-\frac{1}{\kappa_1}$ шартига асосан:

$$\kappa=-\frac{1}{\left(-\frac{1}{12}\right)}=12$$

бўлади. Демак, AE баландлик тенгламаси $y-6=12(x-7)$ ёки $12x-y-78=0$ бўлади. AE баландлик узунлигини топиш учун берилган $A(x_0,y_0)$ нуқтадан берилган $Ax+By+C=0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топиш,

$d = \left| \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$ формуласидан фойдаланиб, ушбуни ҳосил қиламиз :

$$AE = \left| \frac{7 + 12 \cdot 6 - 25}{+\sqrt{1+144}} \right| = \frac{79 - 25}{\sqrt{145}} = \frac{54}{\sqrt{145}}; \quad AE = \frac{54}{\sqrt{145}};$$

3) учбурчакнинг C бурчаги AC ва BC томонлари орасидаги бурчак бўлганлиги учун, уни тенгламалари берилган икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак каби топиш мумкин. Бунинг учун, AC ва BC томонлар тенгламаларини аниқлашимиз лозим. BC томон тенгламасини юқорида (2-ҳолда) топдик. Берилган $A(7;6)$ ва $C(-11,3)$ нуқталардан ўтувчи AC тўғри чизиқ тенгламаси.

$$\frac{x-7}{-11-7} = \frac{y-6}{3-6}; \quad -3(x-7) = -18(y-6), \; y - 6 = \frac{1}{6}(x-7), \quad y = \frac{1}{6}x + \frac{29}{6}$$

бўлади. Шундай қилиб,

$$y = -\frac{1}{12}x + \frac{25}{12} \quad \text{ва} \quad y = \frac{1}{6}x + \frac{29}{6}$$

тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топамиз:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{12}, \qquad \kappa_2 = \frac{1}{6}$$

бўлиб,

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{12}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{12}\right) \cdot 6} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}; \quad tg < c = \frac{1}{2}; < C = arctg\,\frac{1}{2}$$

бўлади.

2-мисол. Иккинчи тартибли чизиқлар қуйидаги тенгламалар билан берилган:

1) $16x^2+25y^2-32x-100y-284=0;$

2) $4x^2-9y^2-36x-26y-36=0;$

3) $y^2+5x+6y-1=0.$

Уларни каноник кўринишга келтиринг ва уларнинг шаклини ясанг.

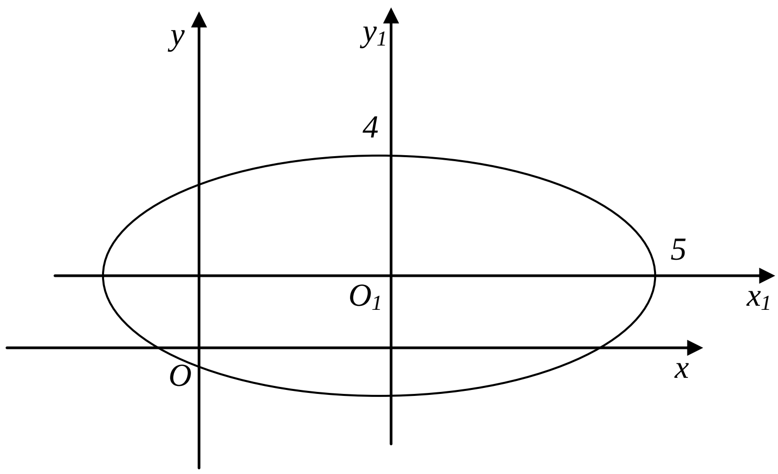
1) $16x^2+25y^2-32x-100y-284=0;$ иккинчи тартибли чизиқ тенгламасида ушбу шакл алмаштиришларни бажарамиз:

$$16(x^2-2x)+25(y^2-4y)-284=0\ ;\ 16(x^2-2x+1-1)+25$$
$$(y^2-4y+4-4)-284=0;\ 16(x-1)^2-16+25(y-2)^2-100$$
$$-284=0$$
$$16(x-1)^2+25(y-2)^2=400,\quad \frac{16(x-1)^2}{400}+\frac{25(y-2)^2}{400}=1;$$
$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1.$$

Охирги тенгламада $x-1=x_1,\ \ y-2=y_1$ алмаштиришни бажариб,

$$\frac{x_1^2}{25}+\frac{y_1^2}{16}=1,\quad a=5,\ \ в=4$$

бўлган эллипснинг каноник тенгламасини ҳосил қиламиз. Бу эллипснинг шаклини $X_1O_1Y_1$ координат системасида ясаймиз(1-чизма).



1-ч и з м а

2) $4x^2-9y^2-36x-36y-36=0$ тенгламада ҳам ушбу шакл алмаштиришларни бажарамиз:

$$4x^2-36x-9y^2-36y-36=0,\quad 4\left(x^2-9x\right)-9\left(y^2+4y\right)-36=0,$$

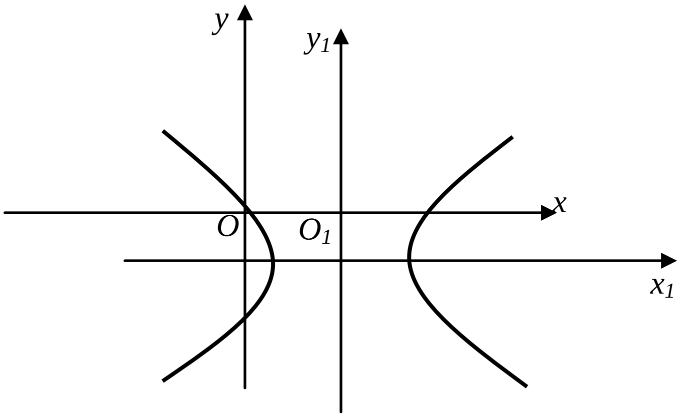
$$4(x^2-9x+4{,}5^2-4{,}5^2)-9(y^2+4y+2^2-2^2)-36=0,$$

$$4\left(x-4{,}5\right)^2-9\left(y+2\right)^2=18,\quad \frac{4\left(x-4{,}5\right)^2}{18}-\frac{9\left(y+2\right)^2}{18}=1,$$

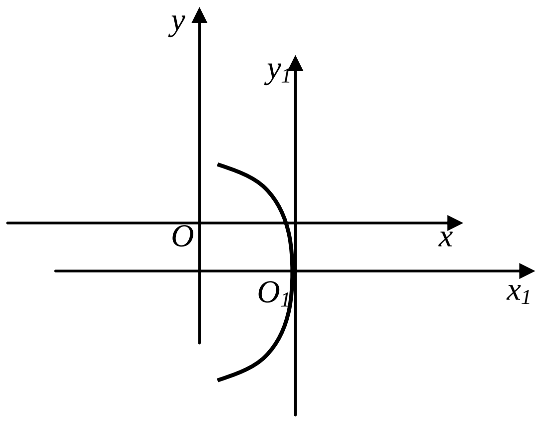
$$\frac{\left(x-4{,}5\right)^2}{4{,}5}-\frac{\left(y+2\right)^2}{2}=1.$$

Охирги тенгламада $x-4{,}5=x_1,\quad y+2=y_1$ алмаштириш олиб $\dfrac{x_1^2}{4{,}5}-\dfrac{y_1^2}{2}=1\quad a=\sqrt{4{,}5,}\quad в=\sqrt{2}$ га тенг

бўлган, x_1 ва y_1 га нисбатан симметрик гиперболанинг каноник тенгламасини ҳосил қилдик. Бу гиперболани $X_1O_1Y_1$ координат системасида шаклини ясаймиз.



2-ч и з м а.



3-чизма.

3) $y^2+5x+6y-1=0$ тенгламада қуйидаги шакл алмаштиришларни бажарамиз:

$$y^2+6y+9-9=-5x+1,$$

$$\left(y+3\right)^2=-5x+10,$$

$$\left(y^2+3\right)^2=-5\left(x-2\right).$$

Охирги тенгламада $y+3=y_1,\quad x-2=x_1$ белгилашни киритиб

$$y_1^2 = -5x_1$$

тенгламани оламиз. Бу $X_1O_1Y_1$ координат текислигида $2p = -5$ бўлган парабола каноник тенгламасидир. Бу параболанинг $X_1O_1Y_1$ координат текислигидаги шаклини ясаймиз(3-чизма).

3-мисол. Фазода $A(-7;-8;10)$, $B(-3;6;3)$ ва $C(-3;\ 0;\ 6)$ нуқталар берилган. Берилган учта нуқталардан ўтувчи текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламасини ёзинг ва уни ясанг.

Ечиш. Берилган учта нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасига асосан:

$$\begin{vmatrix} x+7 & y+8 & z-10 \\ -3+7 & 6+8 & 3-10 \\ -3+7 & 0+8 & 6-10 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ёки} \quad \begin{vmatrix} x+7 & y+8 & z-10 \\ 4 & 14 & -7 \\ 4 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

бўлади, бундан учинчи тартибли детерминантни ҳисобласак:

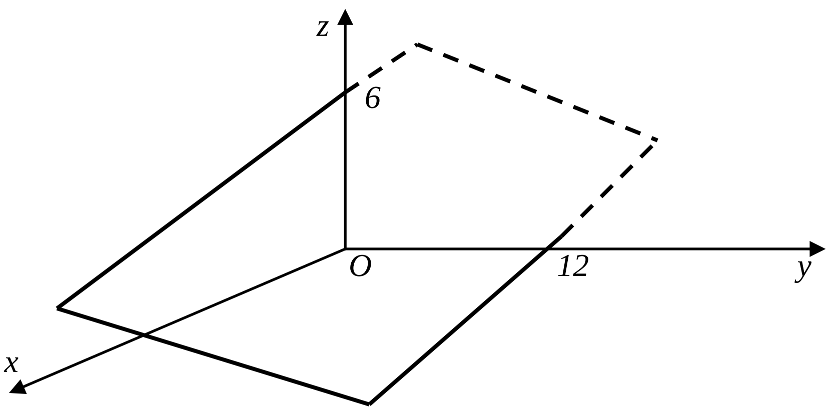
$$\begin{vmatrix} x+7 & y+8 & z-10 \\ 4 & 14 & -7 \\ 4 & 8 & -4 \end{vmatrix} = -56(x+7) - 28(y+8) + 32(z-10) -$$

$$-56(z-10) + 16(y+8) + 56(x+7) - 12(y+8) - 24(z-10)$$

бўлиб, $-12(y+8) - 24(z-10) = 0$ ёки $y + 2z - 12 = 0$ бўлади. Бу охирги тенгламадан

$$y + 2z = 12, \quad \frac{y}{12} + \frac{2z}{12} = 1 \quad \text{ёки} \quad \frac{y}{12} + \frac{z}{6} = 1$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу OY ва OZ ўқларидан мос равишда 12 ва 6 бирлик кесмалар ажратиб, OX ўқига параллел бўлган текисликдир. Бу текисликни OXYZ координатлар текислигида ясаш мумкин(4-чизма).



4-чизма.

4- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизиқнинг проекцияларга нисбатан ва каноник тенгламаларини ёзинг.
Ечиш.

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 2z + 6 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$$

чизиқли тенгламалар системасида олдин у номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 1- тенгламани 3га кўпайтириб 2- тенглама билан ҳадма-ҳад қўшамиз, бу ҳолда

$$11x - 0 + 4z - 6 = 0 \quad 11x = -4z + 6 \text{ ёки } x = -\frac{4}{11}z + \frac{6}{11}.$$

бўлади. Энди, берилган тенгламалар системасидан x номаълумни йўқотамиз, бунинг учун 1- тенгламани 2 га, 2- тенгламани (-3) га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгламаларни ҳадма-ҳад қўшамиз, бу ҳолда

$$0 - 11y + 10z - 26 = 0, \quad -11y = -10z + 26$$

бўлиб, ёки

$$y = \frac{10}{11}z - \frac{26}{11}.$$

бўлади. Шундай қилиб, ушбу тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{11}z + \frac{6}{11} \\ y = \frac{10}{11}z - \frac{26}{11} \end{cases}.$$

Бу тенгламалар системаси берилган тўғри чизиқнинг проекцияларга нисбатан тенгламаси бўлади.

Охирги системадан

$$\begin{cases} x-\dfrac{6}{11}=-\dfrac{4}{11}z \\ y+\dfrac{26}{11}=\dfrac{10}{11}z, \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} \dfrac{x-\frac{6}{11}}{-\frac{4}{11}}=z \\ \dfrac{y+\frac{26}{11}}{\frac{10}{11}}=z \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \dfrac{x-\frac{6}{11}}{-\frac{4}{11}}=\dfrac{y+\frac{26}{11}}{\frac{10}{11}}=\dfrac{z-0}{1}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Охирги тенглик берилган тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси бўлади.

5 – мисол.

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-3}$$

тўғри чизиқнинг ва

$$x+3y-5z-21=0$$

текисликнинг кесишиш нуқтасини ва улар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. Тўғри чизиқ ва текислик кесишиш нуқтасини топиш учун уларнинг тенгламаларини биргаликда ечамиз, яъни

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-3} \\ x+3y-5z-21=0 \end{cases}$$

Биринчи тенгликлардан қўйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{z+1}{-3}, \quad x-3=\frac{2}{3}(z+1), \quad x=\frac{2}{3}z+\frac{11}{3};$$

$$\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-3}, \quad y+2=-\frac{2}{3}(z+1), \quad y=-\frac{2}{3}z-\frac{8}{3}$$

x ва y лар қийматини текислик тенгламасига бевосита қўйсак:

$$\frac{2}{3}z+\frac{11}{3}+3\left(-\frac{2}{3}z-\frac{8}{3}\right)-5z-21=0, \quad \frac{2}{3}z+\frac{11}{3}-2z-8-5z-21=0,$$

$$-\frac{19}{3}z-\frac{76}{3}=0, \quad -19z=76, \quad z=-4, \quad x=\frac{2}{3}(-4)+\frac{11}{3} \ , x=1,$$

$$y=-\frac{2}{3}(-4)-\frac{8}{3}=0, \quad y=0$$

ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, берилган тўғри чизиқ ва текисликнинг кесишиш нуқтаси $A(1;0;-4)$ бўлади.

Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчакни топиш учун

$$\sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

формуладан фойдаланамиз.

$$\sin\varphi=\frac{1\cdot(-2)+3\cdot 2-5\cdot(-3)}{\sqrt{1+3^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{19}{\sqrt{35}\sqrt{17}}=\frac{19}{\sqrt{695}}\approx 0{,}76$$

$$\sin\varphi\approx 0{,}76, \quad \varphi=\arcsin(0{,}76).$$

2- лаборатория иши вариантлари

Вариант №	1,2,3,4,5-топшириқлар рақамлари					Вариант №	1,2,3,4,5-топшириқлар рақамлари					Вариант №	1,2,3,4,5-топшириқлар рақмлари				
1	1	1	1	1	1	20	20	20	20	20	20	39	13	21	15	19	17
2	2	2	2	2	2	21	21	21	21	21	21	40	14	12	16	20	18
3	3	3	3	3	3	22	22	22	22	22	22	41	15	14	17	21	19
4	4	4	4	4	4	23	23	23	23	23	23	42	16	15	18	22	20
5	5	5	5	5	5	24	24	24	24	24	24	43	17	16	19	23	21
6	6	6	6	6	6	25	25	25	25	25	25	44	18	11	20	24	22
7	7	7	7	7	7	26	26	26	26	26	26	45	19	10	21	25	23
8	8	8	8	8	8	27	1	26	3	7	5	46	20	9	22	26	24
9	9	9	9	9	9	28	2	25	4	8	6	47	21	8	23	1	25
10	10	10	10	10	10	29	3	24	5	9	7	48	22	7	24	2	26
11	11	11	11	11	11	30	4	23	6	10	8	49	23	6	25	3	1
12	12	12	12	12	12	31	5	22	7	11	9	50	24	5	26	4	2
13	13	13	13	13	13	32	6	23	8	12	10	51	25	4	7	5	3
14	14	14	14	14	14	33	7	24	9	13	11	52	26	3	8	6	4
15	15	15	15	15	15	34	8	19	10	14	12	53	1	2	9	7	5
16	16	16	16	16	16	35	9	18	11	15	13	54	2	1	10	8	6
17	17	17	17	17	17	36	10	17	12	16	14	55	1	2	3	4	5
18	18	18	18/	18	18	37	11	16	13	17	15	56	6	7	8	9	10
19	19	19	19	19	19	38	12	15	14	18	16	57	11	12	13	14	15

2 – лаборатория иши топшириқлари

1–топшириқлар. ABC учбарчакнинг учлари A, B, C, берилган:
1) C учидан ўтказилган CD медиана тенгламаси ва узунлигини;
2) A учидан ўтказилган AE баландлик тенгламасини тузинг ва шу баландлик узунлигини;
3) учбурчакнинг ички C бурчагини топинг.

1. $A(-6;5)$, $B(6;0)$, $C(9;4)$. 2. $A(4;11)$, $B(-1;-1)$, $C(7;\ 5)$.

3. $A(7;11)$, $B(2;-1)$, $C(10;5)$. 4. $A(6;13)$, $B(1;1)$, $C(9;7)$.

5. $A(4;14)$, $B(-1;2)$, $C(7;8)$. 6. $A(6;10)$, $B(1;-2)$, $C(9;\ 4)$.

7. $A(4;13)$, $B(-1;1)$, $C(7;7)$. 8. $A(6;11)$, $B(1;-1)$, $C(9;\ 5)$.

9. $A(4;10)$, $B(-1;-2)$, $C(7;4)$. 10. $A(6;14)$, $B(1;2)$, $C(9;8)$.

11. $A(4;1)$, $B(0;-2)$, $C(-5;10)$. 12. $A(-7;3)$, $B(5;-2)$, $C(8;\ 2)$.

13. $A(5;-1)$, $B(1;-4)$, $C(-4;8)$. 14. $A(-14;6)$, $B(-2;1)$, $C(1;5)$.

15. $A(6;0)$, $B(2;-3)$, $C(-3;9)$. 16. $A(-9;2)$, $B(3;-3)$, $C(6;1)$.

17. $A(7;-4)$, $B(3;-7)$, $C(-2;5)$. 18. $A(-8;4)$, $B(4;-1)$, $C(7;3)$.

19. $A(3;-3)$, $B(-1;-6)$, $C(-6;6)$. 20. $A(-6;5)$, $B(6;0)$, $C(9;4)$.

21. $A(-1;7)$, $B(3;4)$, $C(15;9)$. 22. $A(20;2)$, $B(14;-6)$, $C(26;-1)$.

23. $A(1;0)$, $B(5;-3)$, $C(17;2)$. 24. $A(8;7)$, $B(2;-1)$, $C(-10;4)$.

25. $A(-2;-1)$, $B(2;4)$, $C(14;1)$. 26. $A(14;10)$, $B(8;2)$, $C(-4;7)$.

2 – топшириқлар. Ушбу берилган иккинчи тартибли чизиқлар тенгламаларини каноник кўринишга келтиринг ва уларнинг шаклини ясанг.

1.
1) $9x^2+16y^2-54x+2y-47=0$; 2) $5x^2-6y^2+20x+12y-16=0$;
3) $x^2+3y+10x+19=0$.

2.
1) $x^2+4y^2-4x-8y+4=0$, 2) $8x^2-2y^2-32x+10y-13=0$;
3) $y^2-3x+10y+16=0$.

3.
1) $9x^2+4y^2+18x-24y+9=0$; 2) $16x^2-9y^2-64x+18y-62=0$
3) $x^2+4y+10x-3=0$;

4.
1) $9x^2-5y^2-18x+30y+36=0$; 2) $4x^2-5y^2+24x-10y+11=0$
3) $y^2+3x+10y+28=0$.

5.
1) $8x^2+9y^2-16x-36y-28=0$; 2) $3x^2-4y^2-12x+16y-16=0$;
3) $x^2+4y-4x+24=0$.

6.

1) $5x^2+8y^2+30x-16y+13=0;$ 2) $6x^2-5y^2+12x+20y-44=0;$

3) $y^2+5x+8y+1=0.$

7.

1) $25x^2+9y^2-100x+36y-89=0;$ 2) $5x^2-3y^2+20x-24y-43=0;$

3) $x^2-4y+2x+9=0.$

8.

1) $4x^2+9y^2-24x+36y+36=0;$ 2) $16x^2-25y^2-32x+100y-484=0;$

3) $y^2+6x-8y+22=0.$

9.

1) $5x^2+6y^2+20x-12y-4=0;$ 2) $9x^2-16y^2-54x-32y-79=0;$

3) $x^2-4y-6x+1=0.$

10.

1) $4x^2+y^2+16x+12=0;$ 2) $3x^2-5y^2+6x+20y-32=0;$

3) $x^2+6x+5y-6=0.$

11.

1) $5x^2+6y^2+30x-12y+21=0;$ 2) $4x^2-2y^2-8x-4y+6=0;$

3) $y^2-2x+6y+17=0.$

12.

1) $16^2+9y^2+96x-18y+9=0;$ 2) $16x^2-9y^2-160x-36y+220=0;$

3) $x^2-4x+5y+14=0.$

13.

1) $4x^2+5y^2-24x+70y+181=0;$ 2) $4x^2-16y^2-72x-64y+196=0;$

3) $y^2-6x+2y-11=0.$

14.

1) $3x^2+2y^2-6x-12y+15=0;$ 2) $4x^2-9y^2-16x-18y-29=0;$

3) $x^2-8x-3y+19=0.$

15.

1) $2x^2+3y^2-4x+6y-7=0$; 2) $2x^2-y^2+4x+4y-10=0$;

3) $y^2-5x+6y+4=0$.

16.

1) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$; 2) $4x^2-25y^2-24x-100y-164=0$;

3) $x^2-6x+5y-6=0$.

17.

1) $6x^2+5y^2+12x-20y-4=0$; 2) $25x^2-9y^2-100x-36y-161=0$;

3) $y^2-3x-2y+7=0$.

18.

1) $5x^2+3y^2+20x+24y+53=0$; 2) $5x^2-8y^2+30x+16y-3=0$;

3) $x^2-7y+12x+50=0$.

19.

1) $3x^2+4y^2-12x-16y+16=0$; 2) $8x^2-9y^2-16x+36y-100=0$;

3) $y^2-4x+4y+8=0$.

20.

1) $4x^2+5y^2+24x+10y+21=0$; 2) $9x^2-5y^2-36x-30y-54=0$;

3) $x^2-3y-14x+31=0$.

21.

1) $16x^2+9y^2-64x-18y-71=0$; 2) $9x^2-4y^2+18x+24y-63=0$;

3) $y^2+2x-6y+11=0$.

22.

1) $4x^2+2y^2-16x+4y+10=0$; 2) $5x^2-6y^2+30x+12y+9=0$;

3) $x^2+10x-4y+33=0$.

23.

1) $3x^2+5y^2+6x-20y+8=0$; 2) $4x^2-y^2+16x+12=0$;

3) $y^2+3x+10y+46=0$.

24.

1) $x^2+2y^2+6x-4y+9=0$; 2) $x^2-4y^2-2x+16y-19=0$;

3) $x^2-4x+2y-2=0$.

25.

1) $x^2+4y^2+16y+12=0$; 2) $2x^2-3y^2-12x-18y-15=0$;

3) $y^2+8x+10y+9=0$.

26.

1) $6x^2+5y^2-10y-25=0$; 2) $5x^2-6y^2-5x-25=0$;

3) $x^2+8x-9y-29=0$.

3- топшириқлар. Фазода A, B, ва C нуқталар берилган. Берилган учта нуқталардан ўтувчи текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламасини ёзинг ва уни ясанг.

1. $A(-5;4;-3)$, $B(5;-12)$ $C(2;1;-4)$ 2. $A(0;3;4), B(1;0;3), C(2;-1;5)$.

3. $A(-16;20;-2)$, $B(-4;1;3)$ $C(2;3;0)$ 4. $A(2;-1;1), B(3;7;-2), C(-3;6;3)$.

5. $A(8;-10;2)$, $B(-3;3;-1)$ $C(0;-6;5)$ 6. $A(7;2;-3), B(4;1;1), C(2;4;2)$.

7. $A(5;-4;5)$, $B(1;0;-1)$ $C(2;2;2)$ 8. $A(8;1;-12), B(-8;5;-10), C(0;-3;2)$.

9. $A(8;1;10)$, $B(-1;-2;-5)$ $C(-2;5;3)$ 10. $A(8;1;-3), B(2;-3;-7), C(-2;5;3)$.

11. $A(7;3;5)$, $B(5;-3;2)$ $C(10;2;4)$ 12. $A(-8;-6;-3), B(4;2;1), C(0;5;2)$.

13. $A(7;-3;14)$, $B(-6;0;5)$ $C(1;2;1)$ 14. $A(5;5;-6), B(-4;-8;4), C(1;7;-1)$.

15. $A(7;-8;-1)$, $B(-3;-6;-2)$ $C(2;-3;-5)$ 16. $A(16;-8;-13), B(6;2;5), C(-3;0;3)$.

17. $A(7;3;-5)$, $B(1;2;3)$ $C(-1;-2;1)$ 18. $A(8;3;2), B(4;-2;4), C(3;1;-1)$.

19. $A(8;-4;-5)$, $B(7;3;6)$ $C(-2;1;4)$ 20. $A(6;-7;-3), B(1;2;3), C(1;3;2)$.

21. $A(-12;7;-1)$, $B(0;-1;-5)$ $C(-4;5;1)$ 22. $A(-5;-6;1), B(-2;1;2), C(0;-1;4)$.

23. $A(-1;0;-7)$, $B(4;-5;3)$ $C(-2;1;-9)$ 24. $A(2;4;-2), B(-1;1;2), C(3;0;-2)$.

25. $A(4;-1;2)$, $B(-1;1;0)$ $C(2;-4;1)$ 26. $A(-9;-2;3), B(6;-1;-2), C(1;0;1)$.

4-топшириқлар. Ушбу фазода берилган тўғри чизиқнинг проекцияларга нисбатан ва каноник тенгламаларини ёзинг.

1. $\begin{cases} x+5y+2z-5=0 \\ 2x-5y+z+6=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y-2z-2=0 \\ 6x-y-4z-3=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x-5y-z+5=0 \\ x+5y-2z+3=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y+z+2=0 \\ 7x+y+z-5=0. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 6x-7y-z-2=0 \\ x+7y-z+8=0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x-y-3z-2=0 \\ 3x-y-2z-1=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+7y-4z-5=0, \\ 2x-7y+2z+8=0. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x-y+z+6=0 \\ 3x+y+2z-4=0 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ 6x+y-4z+8=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x+y+z+2=0 \\ 2x-y-3z+4=0. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x-2y-z+4=0 \\ 6x+2y+3z+4=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2x-y-3z-8=0 \\ 2x-5y+2z-4=0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x+3y+2z-6=0. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x-2y+z+4=0 \\ 2x+2y+z-4=0. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 5x+y-3z+4=0 \\ 5x-3y-z+8=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x-y+2z+2=0 \\ x-3y-z+4=0. \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 3x+4y-2z+1=0 \\ x-4y-2z+3=0. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x-4y+3z+4=0 \\ x+4y+z-6=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x+5y+2z+11=0 \\ 3x-y-2z+7=0. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 2x-4y+3z+4=0 \\ x+4y+z-6=0. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 3x+y-z-6=0 \\ 2x-3y+z-8=0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x+3y-2z+6=0 \\ 3x+3y+z-1=0. \end{cases}$ 23 $\begin{cases} x-3y+z+3=0 \\ 2x-3y-2z+6=0 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x-3y+z+2=0 \\ 5x+3y+2z-4=0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x+5y-z+11=0 \\ 8x-5y-3z-1=0. \end{cases}$ 26 $\begin{cases} x+3y+2z+14=0 \\ 5x+3y-2z-4=0 \end{cases}$ 27. $\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x+y+z+11=0 \end{cases}$

5-топшириқлар. Ушбу, фазода берилган тўғри чизиқ ва текисликнинг кесишиш нуқтасини ҳамда улар орасидаги бурчакни топинг.

1. $\frac{x+4}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$; $\qquad 3x-y+2z+23=0.$

2. $\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{1}$; $\qquad 3x-2y+z-8=0.$

3. $\frac{x-1}{5}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+1}{4}$; $\qquad 5x+2y+z-15=0.$

4. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+4}{4}=\frac{z-1}{-1}$; $\qquad 7x+3y+z-25=0.$

5. $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{3}$; $\qquad 4x-y+3z+6=0.$

6. $\frac{x+5}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{6}$; $\qquad 5x-2y+3z-3=0.$

7. $\frac{x+8}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$; $\qquad 6x-y-4z-3=0.$

8. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-5}{-1}$; $\qquad 5x-7y-3z+11=0.$

9. $\frac{x+5}{12}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z-1}{8}$; $\qquad 3x-2y-z-6=0.$

10. $\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{2}$; $\qquad 7x+4y+3z-16=0.$

11. $\frac{x-3}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{1}$; $\qquad 3x+4y-5z+20=0.$

12. $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{2}$; $\qquad 7x-3y+2z-28=0.$

13. $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z-3}{-1}$; $\quad 4x-y+7z-19=0.$

14. $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$; $\quad 5x-3y+z-36=0.$

15. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+3}{1}$; $\quad 4x-y+5z+3=0.$

16. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$; $\quad x-2y-z+2=0.$

17. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$; $\quad x-2y-4z+11=0.$

18. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$; $\quad 5x-2y-z-13=0.$

19. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$; $\quad x+2y-2z+25=0.$

20. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$; $\quad 2x-7y-3z-21=0.$

21. $\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$; $\quad 4x+9y+5z=0.$

22. $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$; $\quad 3x+7y+z+11=0.$

23. $\dfrac{x+4}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-5}{-2}$; $\quad 4x-5y+2z+24=0.$

24. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$; $\quad 4x+2y-3z+8=0.$

25. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$; $\quad 5x+3y-2z+7=0.$

26. $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{2}$; $\qquad 4x-2y+z-19=0.$

Фойдаланилган адабиётлар

[1]. Соатов Ё.У. Олий математика. 3-жилд. –Т.: Ўзбекистон. 1996. -637 б.

[2]. Бегматов А.Б., Якубов М.Я. Иқтисодчилар учун математика. Маърузалар матни. Самарқанд, СамКХИ.2003. 300 б.

[3]. Курош А. Г. Олий алгебра курси. –Т.: Ўқитувчи. 1976. 461б.

[4]. Азизходжаева Н.Н. Педагогические технологии и педагогические мастерство. Учеб. пособие.-Т.: Творческий дом им. Чулпана. 2005. -200с.

М У Н Д А Р И Ж А