А. Азамов, Б. Хайдаров, Э. Сариқов,
А. Қучқаров, У. Сағдиев

ГЕОМЕТРИЯ 7

ТАШКЕНТ
“YANGIYUL POLIGRAPH SERVICE”
2013

22.151
G35

Геометрия. 7: Жалпы орта білім беретін мектептердің 7-сыныбына арналған оқулық/А. Азамов, Б. Хайдаров, Э. Сариқов және басқ. – Ташкент: **«**Yangiyul poligraph service**»**, 2013. – 160 б.

I. Азамов, Абдулла

ББК 22.151я72

П і к і р   ж а з ғ а н д а р :

А. Я. Норманов, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Өзбекстан Ұлттық Университеті геометрия және қолданбалы математика кафедрасының меңгерушісі;
С. Х. Сайдалиева, педагогика ғылымдарының кандидаты, математика және оны оқыту методикасы кафедрасының доценті;
Б. Қ. Эшмаматов, физика-математика ғылымдарының кандидаты, Ташкент қаласы №6 мамандандырылған мектептің директоры;
М.М.Шаниязова Ташкент қаласындағы 300-мектептің математика оқытушысы

7-сыныпта геометрияның планиметрия бөлімін – жазықтықтағы геометриялық фигуралардың қасиеттерін тұрақты түрде үйренесіңдер. Мұнда сен жай геометриялық фигуралар мен олардың негізгі қасиеттері, геометриялық өлшемдер, үшбұрыштар, олардың түрлері мен қасиеттері, үшбұрыштардың теңдік белгілері, параллель түзу сызық пен олардың қасиеттері, үшбұрыштардың қабырғалары мен бұрыштары арасындағы қатынастар және салуға байланысты есептермен танысасың.

«Геометрия–7» оқулығы мазмұны жағынан аксиомалық жүйе негізіне құрылса да, теориялық материалдар еркін, қарапайым да жатық тілмен берілген. Барлық тақырып пен түсініктер әр түрлі өмірлік мысалдар арқылы көрсетілген. Әр тақырыптан соң берілген сұрақтар, дәлелдеуге, есептеуге және салуға байланысты көптеген есептер мен мысалдар сені ойлауға үйретеді, игерілген біліміңді пысықтау мен тереңдетуге көмектеседі.

Оқулық өзіне тән дизайн және сабақ материалдарының көрнекілігімен берілуімен ерекшеленеді. Ондағы суреттер мен сызбалар сабақ материалдарын тиянақты оқуыңа қызмет етеді.

«Геометрия–7» оқулығы жалпы орта білім беретін мектептердің 7-сынып оқушыларына молжалданған, оны геометрияны өз бетінше үйренемін және қайталаймын деушілер де пайдалана алады.

Республикалық мақсатты кітап қоры қаржысы есебінен жалға беру үшін басылды.

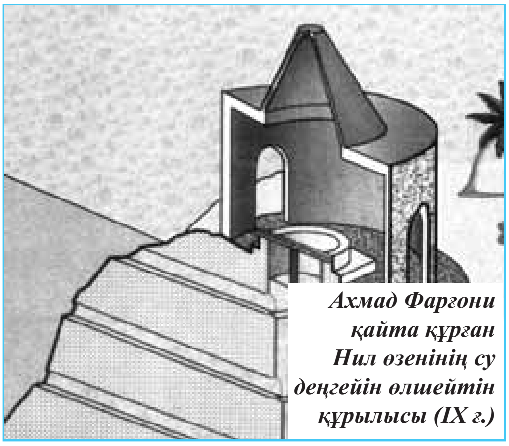
ISBN 978-9943-366-03-9

М А З М Ұ Н Ы

IV тарау. Үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштарының арасындағы қатынастар

V тарау. Салу есептері

VI тарау. Қайталау



Ахмад Фарғони қайта құрған Нил өзенінің су деңгейін өлшейтін құрылысы (IX ғ.)

I ТАРАУ

ПЛАНИМЕТРИЯ. АЛҒАШҚЫ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ МАҒЛҰМАТТАР

Бұл тарауды оқығанда төмендегі білім және іс жүзіндік дағдыны үйренесің:

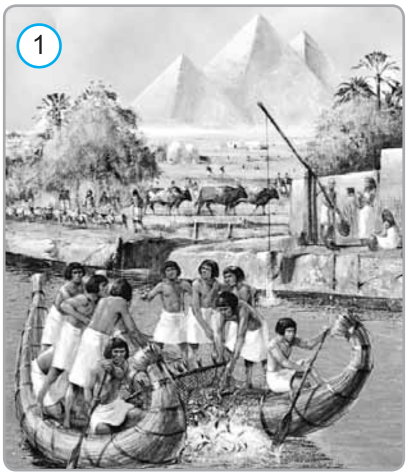
Білім:

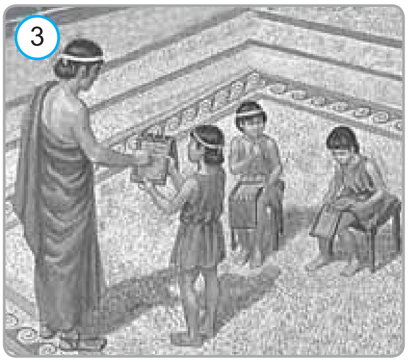
— Геометрияның тарихына байланысты негізгі мағлұматтарды білу;
— нүкте,түзу, жазықтық, сәуле, кесінді, бұрыш секілді алғашқы геометриялық түсінік алу;
— алғашқы геометриялық ұғымдардың негізгі қасиеттері;
— геометрия және планиметрияның сипаттамасы;
— шеңбер, дөңгелек және олардың элементтерінің сипаттамасы;
— сыбайлас және вертикаль бұрыштар мен олардың қасиеттерін білу;
— сипаттама, аксиома, теорема және дәлелдеме түсінігінің мәнін түсіну;
— қарсы жору арқылы дәлелдеу әдісін білу.

Іс жүзіндік дағдылар:

— Негізгі геометриялық фигураларды жазықтықта бейнелеу, тани білу, белгілеріне қарай оқу;
— кесінділерді көшіру, өзара салыстыру, олардың ұзындығын өлшей білу;
— бұрыштарды көшіріп салу, салыстыру, олардың градустық өлшемдерін табу;
— геометриялық фигураларды салу және өлшеу жұмыстарында сызғыш, циркуль, транспортир сияқты оқу құралдарын пайдалана білу.

1 Геометрия пәні мен предметі. Геометрия пәнінің міндеттері





Геометрияға байланысты алғашқы түсініктер бұдан 4-5 мың жыл бұрын ежелгі Египетте пайда болған. Сол кезде Нил өзенінің суы жыл сайын тасып, егін алаңдарын жуып кеткен. Сондықтан егіндерді қайта бөлу мен салық мөлшерін анықтау үшін бұл алаңдарды белгілеу және өлшеу жұмыстарын жүзеге асыруға тура келген (1-сурет). Ежелгі грек ғалымдары жер өлшеу әдістерін египеттіктерден үйреніп, оны геометрия деп атаған. **“***Геометрия***”** грек сөзі, “гео” — жер, “метрио” — өлшеу деген мағынаны білдіретін сөздер.

Геометрияға қатысты алғашқы мағлұматтар ежелгі Вавилонда пайда болған. Тарихшылар Пифагор теоремасы Вавилонда табылған деп санайды. Эрамызға дейінгі VII – VI ғасырларда Ежелгі Хорезмде де Египеттегі сияқты Әмударияның төменгі жағында жер өлшеу жұмыстары атқарылған.

Ежелгі Египетте геометрия керемет пирамидалар, сарайлар мен тұрғын үйлер құру да қажет болған. Гректер үшін геометрия құрылыстан басқа теңізде жүзу үшін де қажет болған (2-сурет). Осындай іс жүзіндік қажеттілік адамды әр түрлі фигураларды және олардың қасиеттерін үйренуге мәжбүрледі.

Ежелгі Грецияның 7 данышпанының бірі Милетлик Фалес геометрияның алғашқы теоремаларын дәлелдеген.

Эрамызға дейінгі IV ғасырда геометрияға байланысты үйренілген көптеген түсініктер мен олардың қасиеттері жиналып қалды. Грек ғалымы Платон геометрияда керемет бір заңдылықты байқаған: Бұрын үйренілген, дұрыстығы дәлелденген қасиеттерден логикалық ойлау, бақылау жасау арқылы жаңа қасиеттерді шығарса болады екен. Ондай жаттығулар оқушылардың пікірлеу қабілетін арттыратындықтан геометрия мектептерде негізгі пәнге айналған. Платон академиясының босағасына «Геометрияны білмейтіндер үшін бұл мектепте орын жоқ!» деген сөз жазылған екен (3-сурет).

Ежелгі грек ғалымы Евклид сол кездегі белгілі болған барлық геометриялық түсінік және қасиеттерді реттеп, «Негіздер» деген кітабында баяндаған. Бұл кітап екі мың жыл бойына мектептер үшін ең маңызды оқулық міндетін өтеді және ғылымның дамуында маңызы зор болды. Геометрияны оқыту қазір осы кітаптағы идеяларға сүйенеді.

Бұрын жасаған дерлік барлық ғалымдар геометриямен шұғылданған. Отандасымыз Мұхаммед ибн Мұса әл-Хорезми, Ахмад Фарғони, Әбу Райхан Беруни, Әбу Али ибн Сина, Омар Хаям Евклидтің «Негіздерін» терең үйреніп, бұл пәннің дамуына өз үлестерін қосқан. Шығыс мемелекеттерінде геометрия хандаса деп аталған және оған үлкен мән берілген. Бұл пікірді мухандис (инженер) сөзінің түбірі « «хандаса» екені де дәлелдеп тұр.

Бізді қоршаған әрбір предметтің қандай да бір пішіні бар. Мысалы, кірпішті алайық. 6-сыныптан саған таныс тік бұрышты параллелепипед пішінді (4-сурет). Одан басқа 8 төбесі бар – олар нүктелер, 12 қыры бар – олар кесінділер, 6 жағы бар – олар тік бұрыштар.

Нүкте, түзу, кесінді, бұрыш, квадрат, дөңгелек, куб, шар сияқты көптеген геометриялық фигуралармен сен төменгі сыныптарда танысқансың (5–7-суреттер).

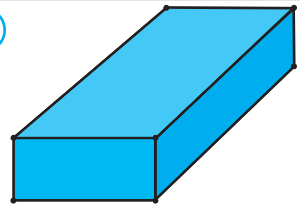
Геометрия – геометриялық фигуралар және олардың қасиеттері туралы пән.

7-суретте берілген фигуралар табиғаттағы түрлі денелердің геометриялық үлгісі. Денелерді

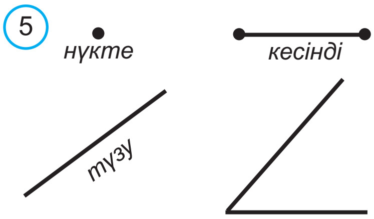
Евклид
(эрамызға дейінгі III ғасыр)

Ежелгі грек ғалымы, геометрия ғылымының қалыптасуында үлкен орын алған – «Негіздер» еңбегімен әйгілі.

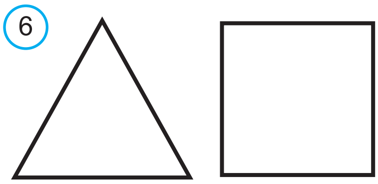
4

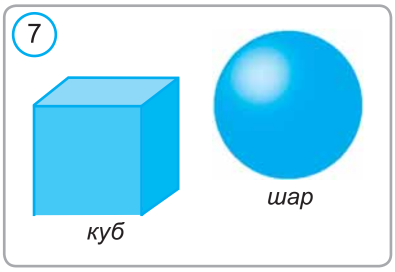


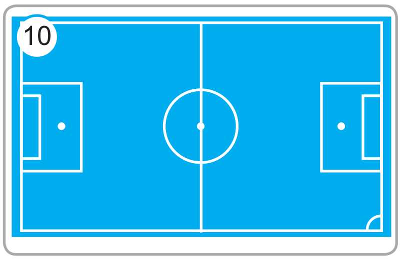
5



6







геометриялық тұрғыдан зерттегенімізде олардың тек формасын есепке аламыз.

Біз нүкте, кесінді, бұрыш, үшбұрыш секілді жазық фигураларды дəптерге сала аламыз. Куб пирамида, шар сияқты кеңістікті фигураларды болса сыза алмаймыз. Дегенмен олардың көрінісін дəптерге бейнелеуіміз мүмкін.

Планиметрия геометрияның бастауыш бөлімі, ол жазықтықтағы геометриялық фигуралардың қасиеттерін зерттейді. Кеңістіктегі фигуралардың қасиеттерін геометрияның *стереометрия* деп аталатын бөлімі зерттейді. Біз геометрияны оқып үйренуді планиметриядан бастаймыз.

✔ *Планиметрия* – геометрияның жазықтықтағы фигуралардың қасиеттерін зерттейтін бөлімі.

? *Сұрақтар, есептер жəне тапсырмалар*

1. Геометрияға қатысты алғашқы мағлұматтар қай жерде жəне қашан пайда болған?
2. Геометрия сөзінің мағынасы не жəне не үшін ол осылай аталған?
3. Геометрияға негіз салған жəне оның дамуына үлес қосқан қандай ғалымдарды білесің?
4. Самарқанттағы тарихи ескерткіштер жəне қазіргі ғимараттар (8-9-суреттер) құрылысында геометрияға қатысты білімдер қаншалықты қажет болған?
5. Геометрия нені зерттейді?
6. Планиметрия геометрияның қандай бөлімі? Стереометрия ше?
7. Айналаңдағы геометриялық фигураларды еске түсіретін предметтерге мысалдар келтір жəне оларды дəптеріңе сал.
8. 5-7-суреттерде берілген фигуралардың қайсы қасиетіне қарап топтарға бөлуге болады?

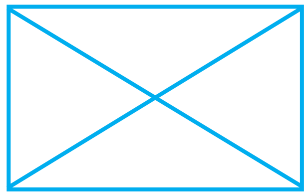
9. Планиметрия 4-7-суреттерде берілген фигуралардың қайсысының қасиеттерін зерттейді?

10. 10-суретте футбол алаңы бейнеленген. Бұл суреттен қандай геометриялық фигураларды көріп тұрсың?

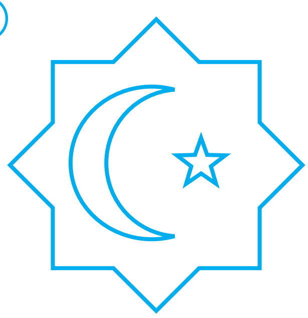
11. 11-суретте берілген фигурада неше үшбұрыш бар?

12. 12-суретте мемлекет елтаңбасының рәмізі бейнеленген. Ол қандай геометриялық фигуралардан құралған?

11



12



Тарихи үзінділер

Нилді бұғаулаған ферғаналық ғұлама

Тарихи мәліметтер бойынша елімізде туылған Ахмад әл –Фарғони 861 жылы Каир қаласына жақын жерде Нил өзенінің су деңгейін өлшейтін «Ниломер» (яғни «Нил өлшегіш») құрған (13-сурет). Ғылыми-техникалық және норма тұрғысынан аса күрделі, сондай-ақ өте сирек кездесетін геометриялық шешімді үйлестірген бұл құрылыста жүргізілген өлшеу жұмыстары ұзақ уақыт диқаншылыққа қажет болған және бүгінге дейін сақталып қалған. Ахмад әл-Фарғони "Устурлоб ясаш ҳақида рисола" еңбегінде астрономия үшін маңызды қасиет – Птоломей теоремасын дәлелдеп берген. Орта Азия және Еуропа ғылыми әдебиетінде оны Ал фраганус деп атаған. Ахмад әл-Фарғонидың құрметіне Айда табылған кратерге оның аты берілген және Каир қаласында оған ескерткіш қойылған.

13

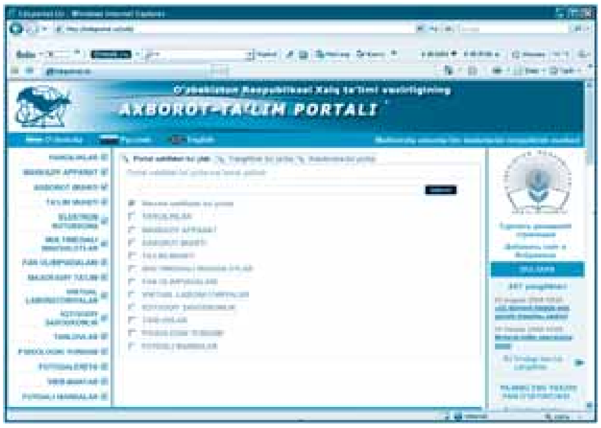
Ахмад әл-Фарғони

Шамамен 797-875 жылдары өмір сүрген.

Белгілі астроном, математик және географ.

Математикалық есептер қазынасы

Соңғы жылдары ақпарат коммуникация технологиялары өте жедел дамып және өте жедел қарқынмен білім жүйесіне еніп келеді. Бүгінде интернеттің World - Wide-Web - әлемдік ақпарат деректері орналастырылған, бұл қазынаны пайдалану әрбір жас ұрпақ үшін өте қажетті және пайдалы. Бұл Web-беттерден сен өзбек, орыс, ағылшын тағы басқа тілдерде математикаға қатысты ең соңғы жаңалықтар, электронды кітапханалар қазынасында сақталған көптеген электронды кітаптарды



таба аласың. Сонымен қатар олар арқылы түрлі теориялық материалдар, әдістемелік ұсыныстар, қисапсыз есептер, мысалдар және олардың шешімдерін, түрлі мемлекеттерде өткізіліп жатқан байқау мен олимпиадалар туралы мәліметтер мен оларда ұсынылған есептер, қызықты математикалық есептер мен олардың шешімімен танысуың мүмкін.

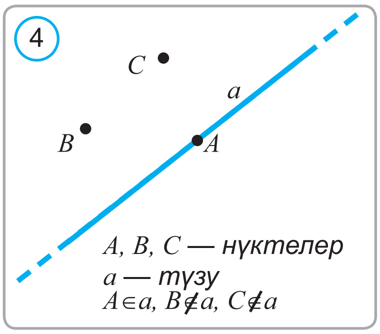
Сонымен, www.uzedu.uz, www.eduportal.uz – Халыққа білім беру министрлігінің ақпарат білім порталынан да геометрияға байланысты өзіңді қызықтырған түрлі мағлұматты алуды ұсынамыз.

Төменде тағы да бірнеше ақпарат ресурс деректерінің мекен-жайы берілген:

www.edu.uz – ақпарат білім порталы (өзбек, орыс, ағылшын тілінде);
www.pedagog.uz – білім жетілдіру мекемелерінің сайты (өзбек және орыс тілінде);
www.ixl.com/math/geometry – АҚШ математика білім порталы (ағылшын тілінде);
www.school.edu.ru – Жалпы білім порталы (орыс тілінде);
www.allbest.ru – Интерент ресурстарының электрондық кітапханасы (орыс тілінде);
www.schulen-ans-netz.de – Германия «Интернет-Мектеп» сайты;
www.studienkreis.de – Германия оқу үйірмелері сайты;
www.educasource.education.fr – Франция білім сайты;
www.educmath.inrp.fr – Франция математика білімі цифрлы ресурстары;
http://mat-game.narod.ru/ – Математикалық гимнастика. Математикалық есептер мен басқатырғыштар (орыс тілінде);
http://mathproblem.narod.ru/ – Математикалық үйірмелер, мектептер мен олимпиадалар (орыс тілінде);
http://mathtest.narod.ru/ – Математикалық тесттер (орыс тілінде);
http://www.sch57.msk.ru/collect/smogl.htm – Матем. тарихына байланысты материалдар (орыс тілінде);
http://www.exponenta.ru – Математикалық білім сайты (орыс тілінде);
http://zadachi.mccme.ru – Геометриялық есептер сайты (орыс тілінде);
http://www.math-on-line.com – Қызықты математикалық есептер (орыс тілінде).

2 Ең қарапайым геометриялық фигуралар: нүкте, түзу және жазықтық

Нүкте, түзу және *жазықтық* — геометрияның негізгі түсінігі.



Қаламды қағазға, борды тақтаға тигізгенде қалған ізді немесе аспандағы жұлдыздарды (1-сурет) қарастыратын болсақ, олар көзімізге соншама кішкентай болып көрінеді, олардың өлшемдерін есептемесе де болады. Нүкте – сондай, өлшемдерін есепке алмаса да болатын нәрселердің рәмізі. Евклид «Негіздер» деген еңбегінде нүктенің ешбір бөлігі жоқ фигура деп сипаттаған.

Шөлде тегіс тартылған темір жол рельсі (2-сурет), бағанға тартылған электр сымы, аспанға қарай бағытталған лазер нұры, кере тартылған дар сымы сияқты денелердің белгісі – түзу болады. Негізінде түзу шексіз жалғасатын фигура. Біз оны қағаз, сынып тақтасында бейнелегенде шағын ғана бөлігін сызамыз. Бірақ түзу әрқашан екі жаққа қарай шексіз жалғасады (4-сурет).

Еден, үстелдің үсті, қабырға, дәптердің парағы, тыныш көлдегі судың деңгейі (3-сурет) сияқтылардың геометриялық бейнесі *жазықтық* болады.

Нүктелер латынның бас әріптерімен $A, B, C, D, ...$, түзулер латынның кіші әріптерімен $a, b, c, d, ...$ белгіленеді және *“A нүкте”, “a түзу” сияқты оқылады (4-сурет)*.

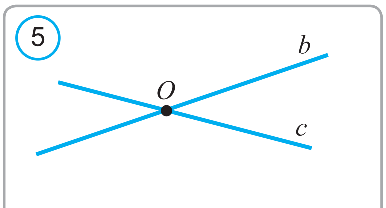
A *Жазықтықта қандай түзуді алсақ та, ол түзуге тиісті нүктелер де, оған тиісті емес нүктелер де бар болады.*

Мысалы, 4-суретте A нүкте a түзуіне тиісті, B және C нүктелер a түзуіне тиісті емес.

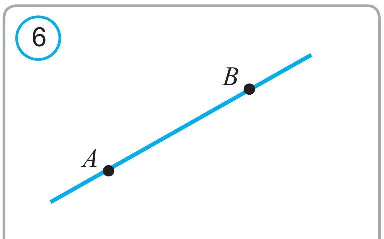
Оны қысқаша

$$A \in a \text{ және } B \notin a,\ C \notin a$$

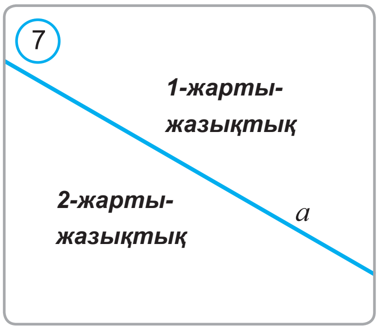
түрінде белгілейміз және “A тиісті a” және “B тиісті емес a” деп оқимыз.



O нүкте — b және c түзулерінің қиылысу нүктесі.



***AB* — түзу**



Егер O нүкте b түзуіне де, c түзуіне де тиісті болса, b және c түзулер O нүктеде қиылысады (5-сурет) және O нүкте b және c түзулерінің қиылысу нүктесі дейіледі.

6-суретте берілген түзу A және B нүктелерден өтіп жатыр.

A *Кез келген екі нүкте арқылы түзу жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады.*

Бұл сипаттамаға орай түзудің екі нүктесі көрсетілсе,бұл түзу анықталған болады. Сондықтан анықталған түзуді онда жатқан екі нүктенің көмегімен де белгілеуге болады. 6-суретте *AB түзу* берілген.

A *Кез келген түзу жазықтықты екі бөлікке: екі жарты жазықтыққа бөледі.*

Қарастырылып жатқан түзу жарты жазықтықтың екеуіне де тиісті деп қарастырамыз. Ол өзі бөлген жарты жазықтықтардың ортақ шекарасы болады. 7-суретте a түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөлгені бейнеленген.

1-есеп. a және b түзулер A нүктеде қиылысады. a түзу B нүктеден өтеді. b түзу де B нүктеден өте ме?

Шешуі. b түзу B нүктеден өте алмайды. Өйткені a және b түзуінің екеуі де A мен B нүктелерден өткен болар еді. Бұл екі нүктеден тек бір ғана түзу өткізуге болады деген сипаттамаға қайшы келеді. Сондықтан, b түзу B нүктеден өтуі мүмкін емес.

Бұл есепті шешіп, түзулердің төмендегі тағы бір сипаттамасын біліп алдық.

Қорытынды. Екі түзу тек бір нүктеде қиылысады.

2 -есеп. C нүкте AB түзуге тиісті. AB және AC түзулері әр түрлі болуы мүмкін бе?

Шешуі. AB және AC түзулердің әрқайсысы да A және C нүктелерден өтеді. Екі нүктеден тек бір ғана түзу өтетіні белгілі. Сондықтан түзулер бір-бірінің үстіне түседі, яғни әр түрлі болмайды.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

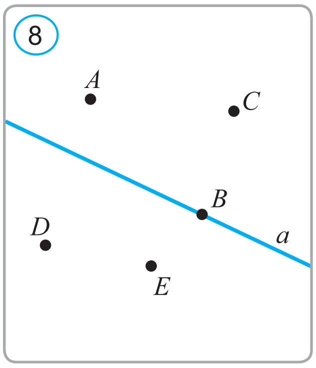
1. Нелер негізгі геометриялық фигуралар етіп қабылданған?

2. Дәптеріңе екі нүкте белгіле. Олар арқылы қолмен, сызғышты пайдаланбай түзу сызық жүргіз. Салудың дұрыстығын сызғышпен тексер. Жаттығуды қайтала.

3. a, A, AB түрінде қандай геометриялық фигуралар белгіленеді?

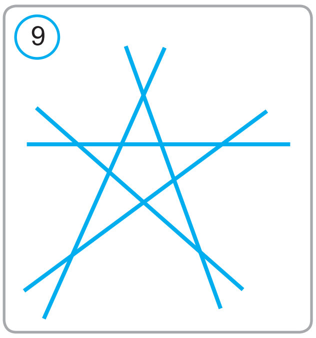
4. Төмендегі өрнектерді оқы және түсіндір: а) $A \in b$; ә) $C \notin b$; б) $C \in AB$. Осы өрнектерге сәйкес сызба сал.

5. 8-суреттен мүмкіндігінше көбірек нүкте, түзу, жазық және жартыжазықтар арасындағы қатынастарды айт және оларды енгізілген белгілермен жаз.



6. А және B нүктелер с түзуге тиісті, С нүкте болса с түзуге тиісті емес. AB және AC түзулер туралы не айтуға болады?

7. AB және AK түзулердің неше ортақ нүктесі бар?



8. Жазықта b түзу сал және онда A нүктені белгіле. b түзу басқа AB түзу өткіз. B нүкте түзуде жата ма?)

9. а) бір; ә) екі; б) үш нүктеден өтетін неше түзу өткізуге болады? Жауабыңды негіздеп бер.

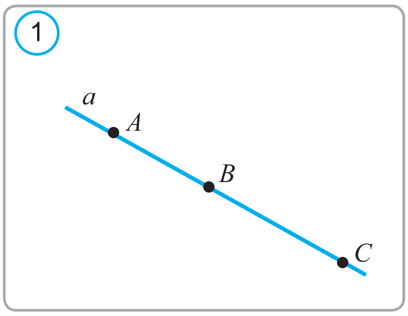
10. 9-суретте неше түзу берілген?

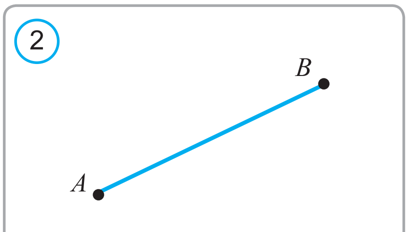
11. Кез келген үшеуі бір түзуде жатпайтын а) үш; б) төрт нүкте арқылы осы нүктелерді жұп-жұбымен тұтастыратын неше түзу өткізуге болады?

12. Төрт түзудің әр екеуі қиылысқан нүктелер белгіленді. Нүктелер саны көбімен нешеу болады? Түзулер бесеу болса ше?

13. Жазықта бес нүкте орналастыр, олардың әр екеуі арқылы түзу өткізгенде түзулер саны бесеу болсын.

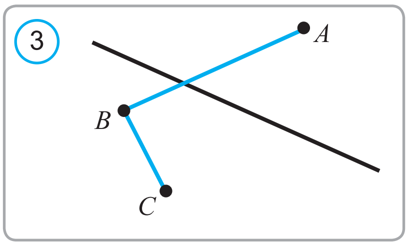
3 Кесінді және сәуле

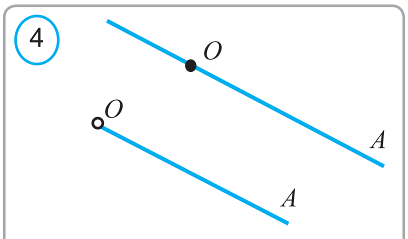




***AB* — кесінді**

***A*, *B* — кесіндінің ұштары**





***OA* — сәуле**

***O* — сәуленің ұшы**

A *Түзудегі үш нүктенің біреуі және тек қана біреуі қалған екеуінің арасында жатады.*

Егер a түзуде үш A, B, C нүктелер алынса (1-сурет), олардың біреуі — B нүкте қалған екі, яғни A және C нүктенің арасында жатады. A және B нүктелер C нүктенің бір жағында, B және C нүктелер болса A нүктенің бір жағында жатады.

✔ Кесінді деп түзудің берілген екі нүктесінің арасында жатқан барлық нүктелерінен тұратын бөлігін айтады.

2-суретте кесінді берілген A және B нүктелер кесіндінің ұштары немесе шеткі нүктелері деп аталады. Олардың арасындағы нүктелер кесіндінің ішкі нүктелері дейіледі. Кесінді өзінің шеткі нүктелерінің көмегімен "*AB кесінді*" түрінде белгіленеді. Осы кесіндіні "*BA кесінді*" түрінде де жазуға болады.

Егер екі нүкте бір жарты жазықтыққа тиісті болса, ұштары бұл нүктелерде болған кесінді жарты жазықтық шекарасын кеспейді, керісінше кеседі (3-сурет).

✔ **Сәуле** деп түзудің бір нүктесінен бір жақта жатқан барлық нүктелерінен құралған бөлігін айтады.

a түзуде жатқан O нүкте бұл түзуді (бірін-бірі толықтыратын) екі сәулеге бөледі. O нүкте бұл сәулелердің ұшы немесе бастапқы нүктесі деп аталады. Сәуленің ұшы O және бір A нүктесі арқылы "*OA сәуле*" түрінде белгіленеді (4сурет). Бұл жазуда сәуленің ұшы бірінші болып жазылады.

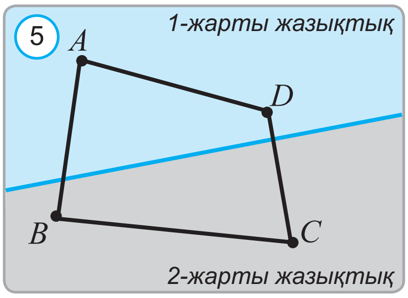
Кейбір жағдайларда OA сәулесі "O нүктеден шығатын сәуле" деп те аталады.

Сәулені жарық сәулесінің геометриялық рәмізі түрінде қарастыруға болады. «Сәуле» атауы осыдан шыққан.

Есеп. Бір түзу және онда жатпайтын A, B, C, D нүктелер берілген. AB және CD кесінділер берілген түзумен қиылысады, BC кесінді болса, қиылыспайды. AD кесінді түзу қиып өте ме (5-сурет)?

Шешуі. Түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөлетіні белгілі. A нүкте сол жарты жазықтықтардың біріншісіне тиісті болсын. AB кесінді түзумен қиылысады. Демек, B нүкте екінші жарты жазықтықта жатады. BC кесінді түзумен қиылыспайды. Демек, C нүкте екінші жарты жазықтықта жатады. CD кесінді болса түзуді қиып өтеді. Сондықтан D нүкте бірінші жарты жазықтықта, яғни A нүктемен бір жарты жазықтықта жатады. Демек, AD кесінді түзумен қиылыспайды.

5

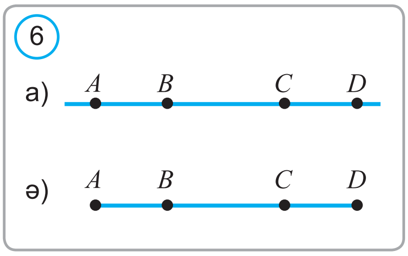


Жауап: AD кесінді түзумен қиылыспайды.

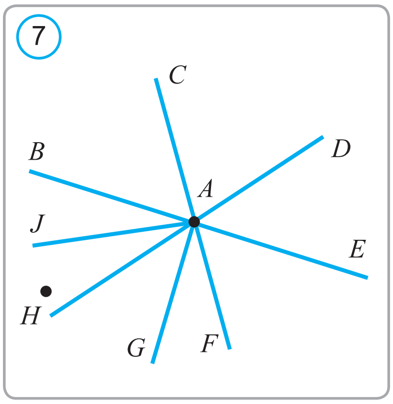
Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. 6.а-суреттегі B нүкте қайсы нүктелер арасында жатады? Қайсы нүктелер C нүктеден бір жақта жатады?
2. Кесінді және сәулеге сипаттама бер. Олар қалай белгіленеді?
3. Түзуде C және D нүктелер берілген. CD және DC кесінділер бір-бірінің үстіне түсе ме? CD және DC сәулелері ше?
4. Кесінді, сәуле және түзу бір-бірінен несімен айырмашылық жасайды?
5. а) Бір; ә) екі; б) үш; в) он; г) n нүкте түзуді неше бөлікке бөледі?
6. 6.b-суретте неше кесінді бар?
7. 7-суретте неше сәуле бар?
8. Бір түзуде жатқан 2 нүкте осы түзуде жатқан неше сәулені анықтайды? 3 нүкте ше?
9. Жазықтықта жатқан екі түзу осы жазықтықты неше бөлікке бөледі?
10. Түзу және онда жатпайтын A, B, C нүктелер берілген. AB кесінді берілген түзуді қиып өтеді, AC кесінді болса қиып өтпейді. BC кесінді осы түзуді қиып өте ме?

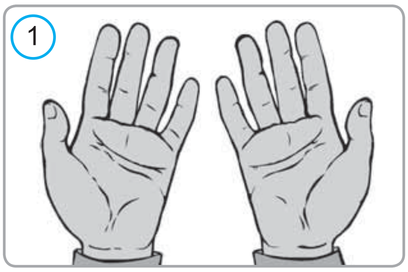
6

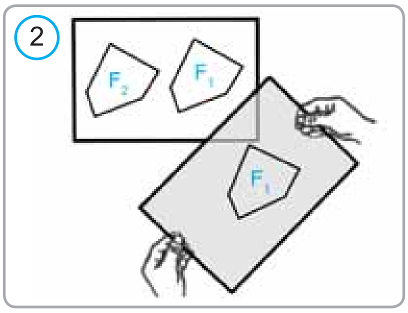


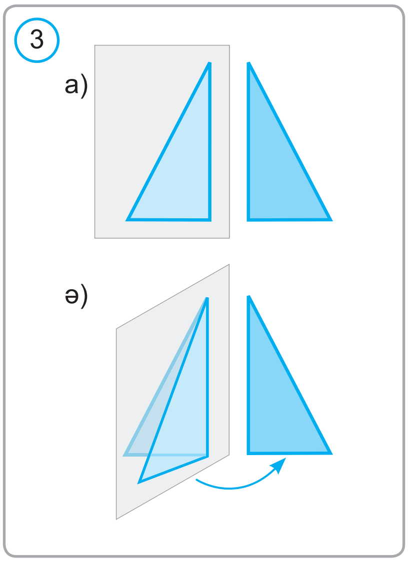
7



4 Кесінділерді салыстыру







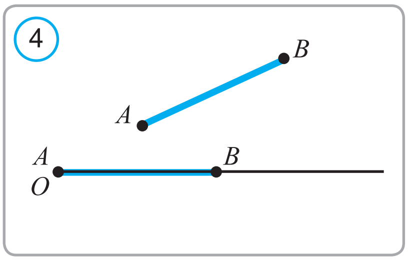
Белсенділік жаттығуы

1. Қоршаған ортадан фигурасы да, өлшемдері де бірдей нәрселерді мысалға келтір.
2. Екі дәптер парағының өлшемдері бірдей екенін қандай іс жүзіндік әдіспен анықтауға болады?
3. 1-суретте сол қол және оң қол бейнеленген. Бұл фигуралардың бірін екіншісіне бетпе-бет түсетіндей қоюға бола ма? Қалай? Оны өз қолыңмен орындап көр.

Тең фигуралар деп бірі екіншісінің үстіне бетпе-бет түсетіндей қоюға болатын фигураларды айтады.

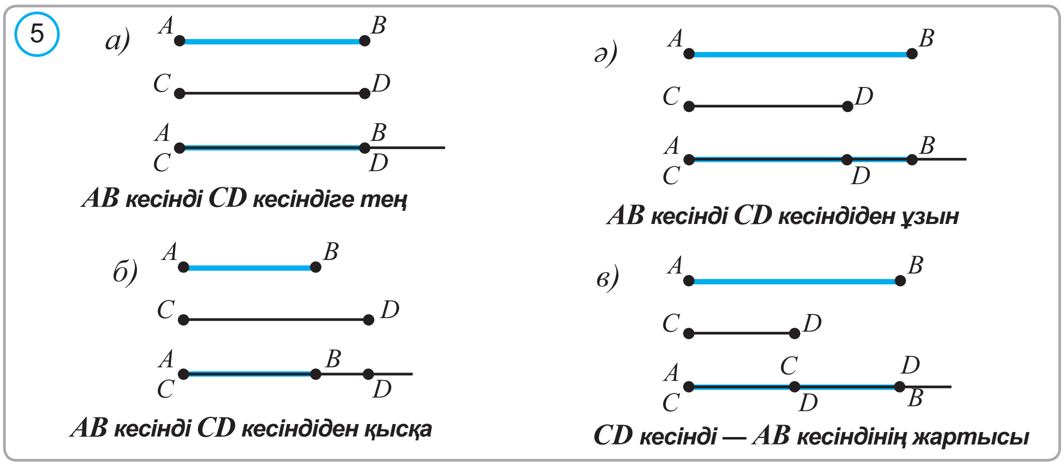
Бір геометриялық фигураны екіншісінің үстіне қою түсінігімен белсенділік жаттығуларында таныстық. Оны іс жүзінде былайша көз алдыңа елестетуге болады. Бір фигураны екіншісінің үстіне қою үшін, алдымен мөлдір пленкаға бірінші фигураның нұсқасын көшіріп үлгі аламыз. Сосын мөлдір пленканы жазықтық бойымен жылжытып, бірінші фигураның үлгісін екінші фигураның үстіне түсетіндей етіп қоюға әрекет жасаймыз (2-сурет).Егер осылай жасай алсақ, бұл фигуралар тең болады.Кейде бір фигураны екіншісінің үстіне қою үшін, алдымен фигураның үлгісі түсірілген мөлдір пленканы аударып алуға тура келеді. 3-суретте осы жағдай көрсетілген.

Ұшы O нүктедегі бір сәуле және кез келген AB кесінді берілген болсын. Бір ұшы осы сәуленің ұшы, екінші ұшы болса сәуледе жататын және AB кесіндіге тең болған кесіндіні сәуленің үстіне қоюға болады (4-сурет).Ондай кесінді біреу болып, ол берілген кесіндіні сәулеге қою дейіледі. Оны бұдан былай «кесіндіні сәулеге қою» дейміз.

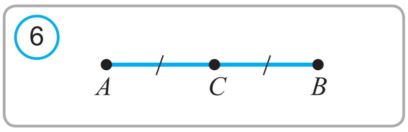


Кез келген кесіндінің үстіне оның ұшынан бастап, берілген кесіндіге тең бір ғана кесінді қоюға болады.

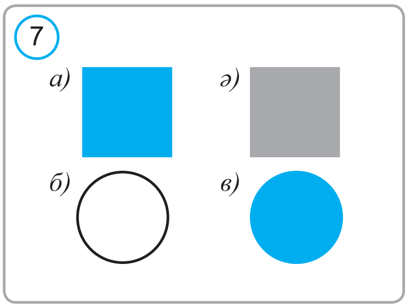
Екі кесіндіні салыстыру үшін екі кесінді де бір сәуленің үстіне қойылады. Сосын төмендегі жағдайлардың қайсысы екеніне қарай, кесінділердің өзара теңдігі немесе ұзын-қысқалығы (яғни үлкен-кішілігі) туралы қорытынды шығарылады (5-сурет):



Кесіндінің ортасы деп оны тең екі кесіндіге бөлетін нүктені айтады.



6-суретте AB кесіндінің ортасы C нүкте берілген. Фигурада тең кесінділер бірдей сандағы кішкене кесінділер мен белгіленеді.



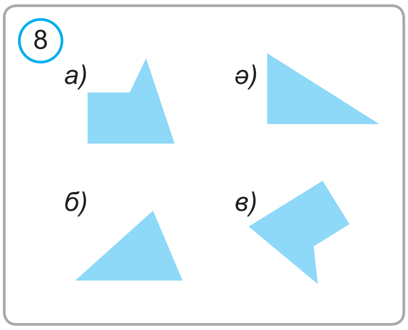
Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

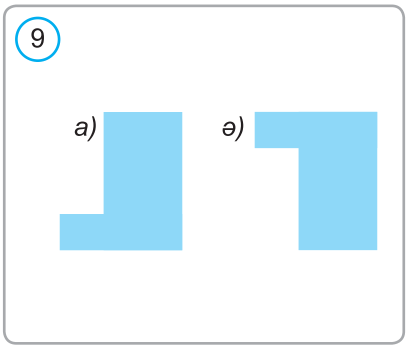
1. Қандай фигураларды өзара тең дейміз?

2. 7-суреттегі фигуралардың қайсысы өзара тең?

3. Төмендегі әріп белгілерінің қайсысы геометриялық фигура ретінде өзара тең?

a, b, g, d, i, y, n, o, p, u, q





4. 8-суреттегі фигуралардың қайсысы өзара тең?

5. Төмендегі цифр белгілерінің қайсысы геометриялық фигура ретінде өзара тең?

6. 9. a-суретте берілген фигураны қағазға өлшемдерін өзгертпей сызып, қиып ал. Оны 9. $ә$-суреттегі геометриялық фигураның үстіне қою арқылы, олардың тең емес екенін анықта.

7. 10-суреттегі фигуралардың арасынан өзара теңдерін тап.

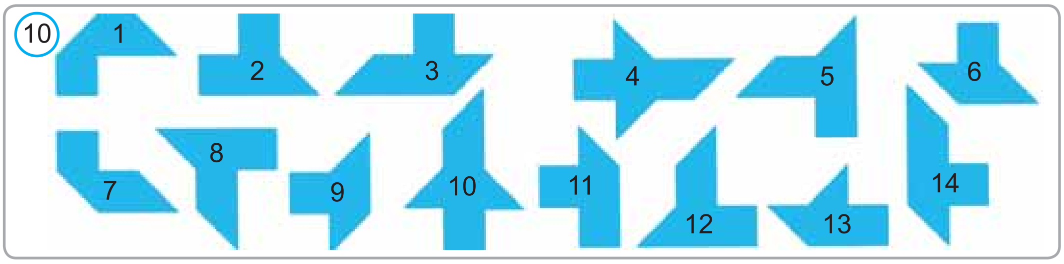
8. Қандай кесінділер өзара тең?

9. Кесінділерді қалай салыстырады?

10. Кесіндінің ортасы деген не?

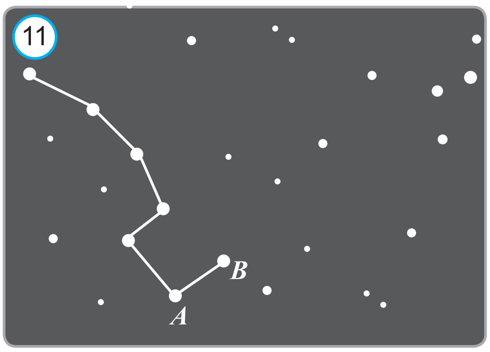
11. Түзуде A, B, C, D нүктелер берілген. Ұштары осы нүктелерде болатын неше кесінді бар? Оларды жаз?

12. Дәптеріңе бір кесінді сыз және оның ортасын көзбен шамалап тап. Нәтижені сызғышпен тексер. Жаттығуды қайтала.



Іс жүзіндік жаттығу.

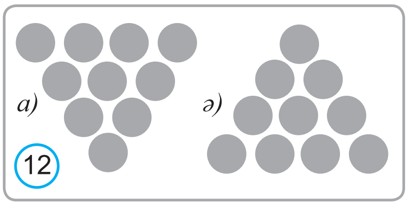
11-суретте «үлкен аю» жұлдызы бейнеленген. Егер осы жұлдыздарды кесінділермен тұтастырсақ, «шөмішке» ұқсаған фигура пайда болады.«Шөміштің» соңғы екі жұлдызы тудырған AB кесіндіні B нүктеден бастап AB сәуле бойынша 5 рет қойып шықса, Поляр жұлдызы жақындайды. Суреттен Поляр жұлдызы қай жерге орналасқанын анықта.

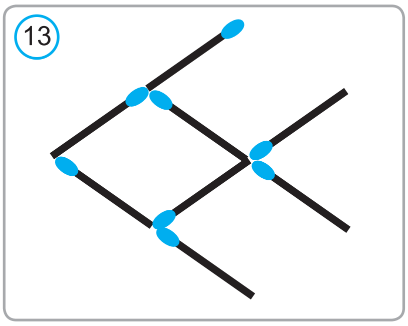


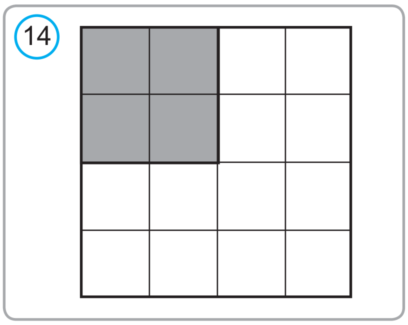
Геометриялық басқатырғыштар

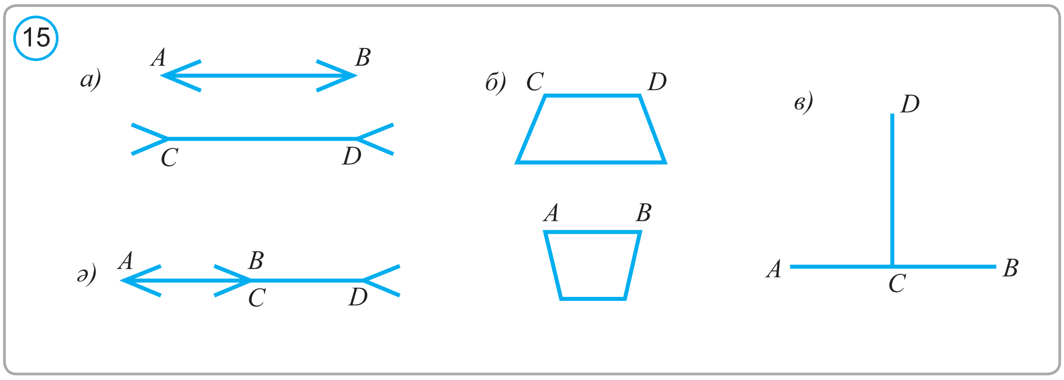
1. 10 бірдей теңге 12.*а*-суреттегідей терілген. Тек 3 теңгенің орнын өзгертіп теңгелерді 12.*ә*-суреттегі көрініске келтір.
2. 13-суреттегі 3 таяқшаның орнын ауыстырып, «балықты» кері қайтар.
3. Диқан бабаның квадрат пішінді егістік жері бар еді. Ол жерінің ширек бөлігін 14-суреттегідей етіп өзіне қалдырды. Қалған бөлігін бірдей фигурадағы тең бөліктерге бөліп, төрт баласына бөліп берді. Шал оны қалай жүзеге асырған?
4. 15-суретте бейнеленген AB және CD кесінділерді көзбен шамалап өзара салыстыр. Сосын бұл істі мөлдір пленка орында.

Қорытынды: Геометрияда өлшеу және салыстыру жұмыстарын орындау қажет: көз алдауы мүмкін!



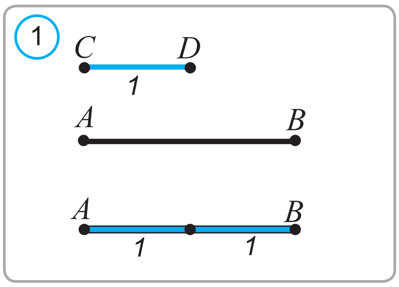


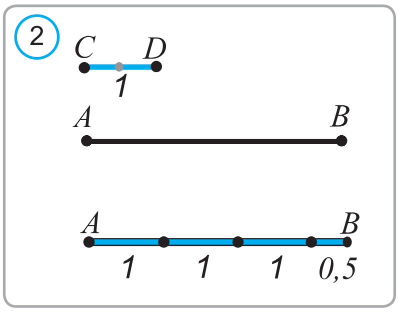




Қорытынды: Геометрияда мұқияттылық қажет: көз алдануы мүмкін!

5 Кесіндінің ұзындығы және оның қасиеттері. Кесінділерді өлшеу





Кесінділерді сәуленің үстіне қою арқылы өлшеу оншама оңай емес. Кесінділердің қайсысы ұзын немесе қысқа екенін (яғни үлкен немесе кішілігін), олардың ұзындықтарын салыстыру негізінде анықтауға да болады.

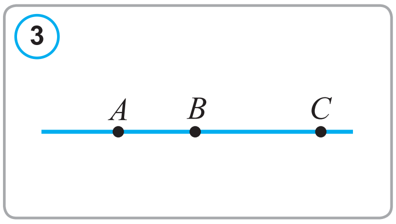
Бір кесіндіні бірлік кесінді деп алып, оның ұзындығын 1-ге тең деп қабылдаймыз. Қалған кесінділердің ұзындығын осы бірлік кесіндінің ұзындығына салыстырып анықтаймыз. Кесіндінің ұзындығы оң сан болып, ол кесіндіге бірлік кесінді және оның бөліктерін бірнеше рет орналастыру мүмкіндігін көрсетеді. 1-суреттегі CD кесіндіні бірлік кесінді деп алып, оның ұзындығын 1-ге тең десек, онда AB кесіндінің ұзындығы 2-ге тең болатыны анық. Өйткені, AB кесіндіге CD кесінді екі рет орналасады.

2-суреттегі CD кесіндіні бірлік кесінді деп алсақ, онда AB кесіндінің ұзындығы 3,5-ке тең болады. Өйткені, AB кесіндіде CD кесінді үш рет және оның жартысы орналасты.

A *Кез келген кесіндінің белгілі ұзындығы болып, ол оң санмен өрнектеледі.*

Белсенділік жаттығуы.

3-суретте берілген AB, BC және AC кесінділердің ұзындығын сызғыштың көмегімен өлше. Бұл кесінділердің ұзындықтарын қандай формуламен өзара байланыстыру мүмкіндігін анықта.



Түзуде A, B және C нүктелер берілген болып, B нүкте A және C нүктелер арасында орналасқан болса, AC кесіндінің ұзындығы AB және BC кесінді ұзындықтарының қосындысынан құралады, яғни $AC = AB + BC$ теңдік орынды болады (3-сурет). Кесінділердің ұзындығы туралы бұл қорытындыны дәлелсіз қабылдаймыз:

A *Егер түзуде B нүкте A және C нүктелер арасында орналасқан болса, AC кесіндінің ұзындығы AB және BC кесінділер ұзындығының қосындысына тең болады:*

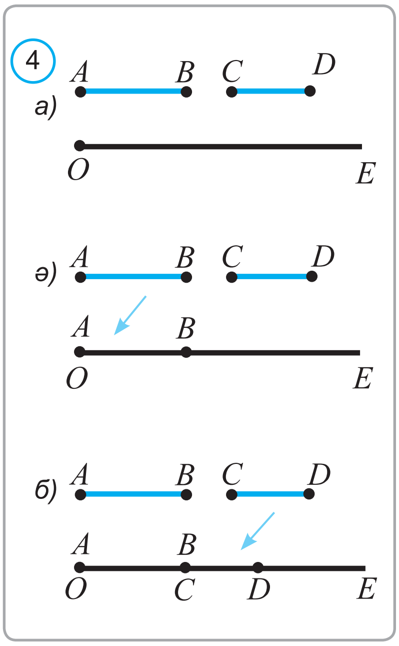
$$\boldsymbol{AC = AB + BC}.$$

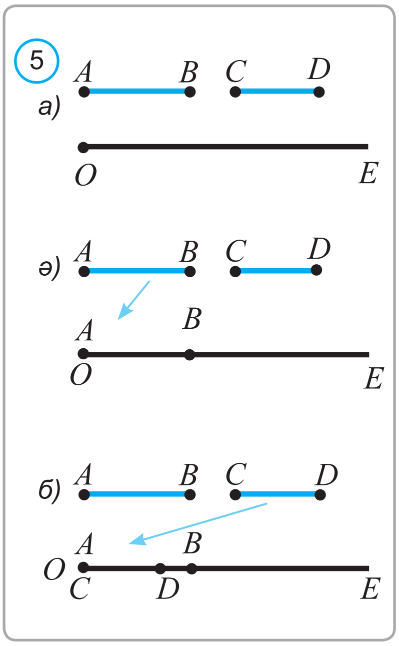
Жоғарыда берілген дәлелдеме кесінділер қосу және азайту амалдарын орындау мүмкіндігін береді. OE сәуле және CD кесінділер берілген болсын *(4.а-сурет)*. Алдымен OE сәулеге AB кесіндіні қоямыз *(4.ә-сурет)*. Сосын BE сәулеге CD кесіндіні қоямыз *(4.б-сурет)*.

Нәтижеде пайда болған AD кесінді AB және CD кесінділердің қосындысы деп аталады және бұл кесінділер үшін $AD = AB + CD$ теңдік орынды болады.

Дәл осылай кесінділерді бір-бірінен азайту амалын орындауға болады.

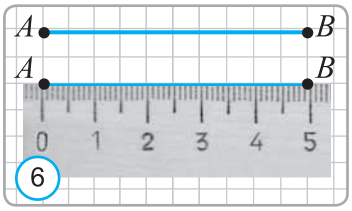
Айталық, OE сәуле, AB және CD кесінділер берілген, сондай-ақ AB >CD болсын (5.а-сурет). OE сәулеге алдымен ұзын кесінді AB-ны қоямыз (5ә-сурет). Сосын тағы да OE сәулеге CD кесіндіні қоямыз (5.б-сурет). Пайда болған DB кесінді AB және CD кесінділердің айырмасы деп аталады және $DB = AB – CD$ теңдік орынды болады.



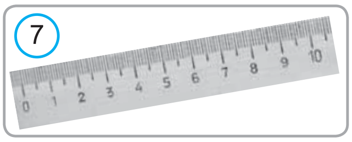


AB кесіндінің ұзындығы A және B нүктелер арасындағы *қашықтық* деп те аталады. Бірдей ұзындықтағы кесінділер өзара тең болатыны белгілі.

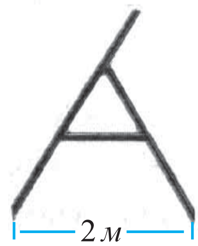
Ертеден адамдар ұзындықты өлшеуде әр түрлі ұзындық бірліктерін қолданып келген. Мысалы, Орта Азияда буын, қарыс, құлаш, шақырым секілді ұзындық бірліктері қолданылған. Түрлі өлшеу бірліктерін қолдану қолайсыздық тудырған. Сондықтан XVIII ғасырдан бастап әлем бойынша халықаралық өлшем бірлігі ретінде метр қабылданған.



6


7


8



9

Сен ұзындықтың белгісі болған метр эталонымен 6-сыныптың "Физика" оқулығында танысқансың. Онда метрге қарағанда біршама үлкен немесе кіші ұзындықтарды өлшеу үшін пайдаланылатын бірліктер де келтірілген болатын. Бұлар:

1 $км$ = 1 000 $м$; 1 $см$ = 0,01 $м$; 1 $мм$ = 0,001 $м$.

Кесінділердің ұзындығы әр түрлі аспаптармен өлшенеді. Олардың ең қарапайымы, яғни бөліну нүктелері бар сызғыш. Кесінді ұзындығының мәні таңдалған ұзындық өлшеу бірлігіне байланысты болады. Егер ұзындық бірлігі ретінде ұзындығы 1 $см$-ге тең кесіндіні алатын болсақ, 6-суретте берілген кесіндінің ұзындығы 5 $см$-ге тең болады және $AB = 5\ см$ деп жазылады. Егер ұзындық өлшеу бірлігі ретінде ұзындығы 1 миллиметрге тең кесіндіні алатын болсақ, AB = 50 $мм$ болады.

Кейбір жағдайларда кесінді ұзындығының өлшеу бірлігі көрсетілмей жазылады, Мысалы, AB = 5. Мұнда кесіндінің 5 өлшем бірлігіне тең деп түсініледі.

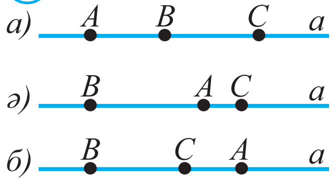
Дәптерде түрлі кесіндінің ұзындығын өлшеу үшін миллиметрлік бөліктерге бөлінген оқу сызғышын (7-сурет) пайдаланып келдік. Тақтада кесінділерді салу үшін сантиметрлік бөліктерге бөлінген мектеп сызғышын пайдаланады. Жер бетінде өлшеу жұмыстарын жүзеге асыруда ленталы өлшеу құралы – рулетканы (8-сурет), далада – дала циркулін (9-сурет) пайдаланады.

Есеп. Бір түзуде жататын A, B және C нүктелер үшін $AB = 8\ см$. $BC = 11\ см$ болса, AC кесіндінің ұзындығы неге тең?

Шешуі: Мынадай жағдайларды қарастырамыз:

1) A, B, C нүктелер a түзуінде 10.a-суретте беріл-

10



гендей тәртіппен орналасқан болсын. Кесінділер ұзындығының қасиетіне орай $AC = AB + BC = 8 + 11 = 19$ ($см$) болады.

2) 8.c-суреттегідей нүктелер a түзуде 10.b-суретте берілген тәртіппен орналасқан болсын. Онда кесінді ұзындығының қасиетіне қарай $BA + AC = BC$, немесе $AC = BC - BA = 11 - 8 = 3$ ($см$) болады.

3) C нүкте 8.c-суреттегідей B және A нүктелер арасында орналаса алмайды. Өйткені $AB < BC$.

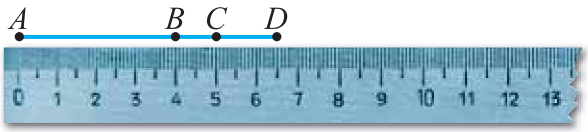
Демек, AC кесіндінің ұзындығы нүктелердің өзара орналасуына қарай 19 $см$ немесе 3 $см$-ге тең болады. Жауап: 19 $см$ немесе 3 $см$.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

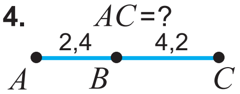
1. Кесінділер қалай өлшенеді?

2. Кесінділер ұзындығының негізгі қасиеттерін айт.

3. Төмендегі суреттерден AB, AC, AD, BC, BD, CD кесінділердің ұзындығын анықта.



4. AC=?



4. $AB = 3$, $AC = 2BC$, BC=?

5. $AB = 24$, $BC = AC + 6$, AC=?

5. Егер $B \in AC$, $AB = 7{,}2$ $см$, $AC = 2$ $дм$ болса, BC-ны тап.

8. *Егер* $M \in AB$, $N \in AB$, $AB = 5$, $AM = 2{,}2$ және $BN = 3{,}6$ болса, MN-ны тап.

9. Түзуде көзбен шамалап, а) 3 $см$; ә) 7 $см$; б) 10 $см$ болған кесіндіні ажырат. Соңғы істі қаншалықты дұрыс орындағаныңды сызғышпен тексеріп көр.

10. Түзудегі A, B, C нүктелер үшін $AB = 600$ $м$, $BC = 200$ $м$ болса, AC-ны тап.

11. Түзудегі A, B, C және D нүктелер үшін $AB = 2$, $AC = CB$, $2AD = 3BD$ болса, CD -ны тап.

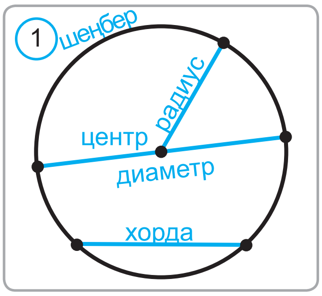
12. Сәуле және ұзындықтары $AB = 1{,}2$ $см$, $CD = 2{,}8$ $см$ кесінділер берілген. Осы кесінділерді пайдаланып сәулеге ұзындығы а) 4 $см$; ә) 1,6 $см$; б) 0,4 $см$; в) 2,6 $см$ болған кесінділерді қой.

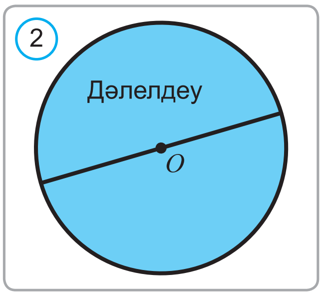
13. Егер $AB = 9$ болса, AB кесіндіде сондай C нүкте белгіле, а) $AC - BC = 1$; ә) $AC + BC = 11$; б) $AC + BC = 10$ болсын.

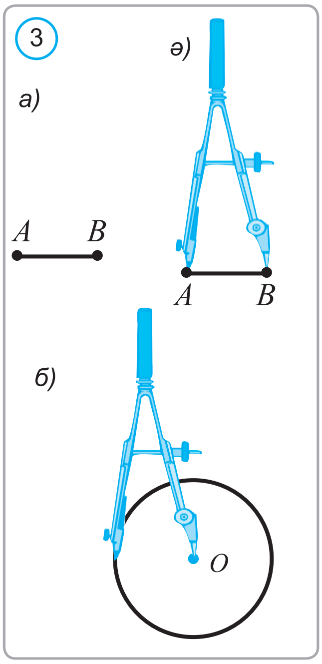
14*. AB кесінді берілген. Ұзындығы: а) $2AB$; ә) $AB:2$; б) $AB:4$; в) $0{,}75AB$ болған кесінділер сал.

15. Түзудегі A, B, C нүктелер үшін $AB = 5{,}6$ $см$, $AC = 8{,}9$ $см$ және $BC = 3{,}3$ $см$ екені белгілі. A, B, C нүктелердің қайсысы қалған екеуінің ортасында жатады?

6 Шеңбер және дөңгелек







Берілген нүктеден теңдей қашықтықта жатқан нүктелерден құралған фигура ***шеңбер*** деп аталады. Берілген нүкте шеңбердің ***центрі*** болады. Шеңбердің кез келген нүктесінен оның центріне дейінгі қашықтық шеңбердің ***радиусы*** деп аталады (1-сурет). Сондай-ақ центрді шеңбердің кез келген нүктесімен қосатын кесінді де радиус деп аталады. Шеңбердің екі нүктесін қосатын кесінді ***хорда*** деп аталады. Центрден өтетін хорда болса ***диаметр*** деп аталады. Жазықтықтың шеңбермен шекараланған бөлігі (шектеулі бөлігі) ***дөңгелек*** деп аталады.

Шеңберді циркульдің көмегімен салады. Центрі берілген O нүктеде, радиусы a кесіндіден құралған шеңберді циркульмен салу 2-суретте көрсетілген.

Есеп. Шеңбердің хордасы ортасынан өтетін диаметр хордаға перпендикуляр болатынын дәлелде.

Дәлелдеу. Айталық, AB — шеңбердің хордасы және C оның ортасы болсын *(3-сурет)*. AOB үшбұрыштың OA және OB қабырғалары шеңбер радиустары болғандықтан бұл бұрыш тең бүйірлі болады. Шартқа орай, OC — AOB тең бүйірлі үшбұрыштың медианасы. Олай болса тең бүйірлі үшбұрыш медианасының қасиетіне қарай, OC кесінді биіктік те болады.

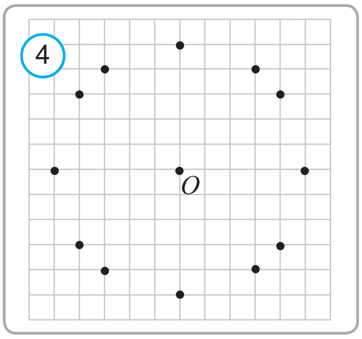
Демек, хорда ортасына жүргізілген диаметр хордаға перпендикуляр болады. ***Теорема дәлелденді.***

Шеңберді торкөз дәптерге циркульсыз қолмен салудың жолы.

1. Торкөз дәптерге 4-суретте көрсетілгендей нүктелерді белгіле.
2. Пайда болған 12 нүктені ретімен доға сияқты сызықпен тұтастырып шық.

Нәтижеде центрі O нүктеде болған шеңбердің шамамен бейнесі пайда болды. Бұл (нүктелердің орнын) әдісті есіңде сақтап қал. Ол циркуль жоқ жерде кәдеге асады.

3. O нүктеден осы 12 нүктеге дейінгі қашықтық өзара тең екенін тексеріп көр.



Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Шеңберге анықтама бер және сызбада түсіндір.
2. Шеңбердің центрі, радиусы, хордасы мен диаметрі деген не?
3. Шеңбердің қайсы хордасы ең ұзыны?
4. Циркуль қолданбастан шеңбер салудың қандай әдістері бар?
5. Неліктен арба, велосипед, автомобильдердің доңғалағы шеңбер формасында?
6. Неге құдықтың қақпағы квадрат формасында емес, дөңгелек?
7. Жан-жағында шеңберге мысал болатын 10 предметтің атын ата.
8. Шеңбердің радиусы а) 18 мм; ә) 45 см; б) 2 м 11 см болса, оның диаметрін тап.
9. Шеңбердің хордасы диаметрінен ұзын болуы мүмкін бе? Неге?
10. Дөңгелектің диаметрі: а) 10 см; ә) 7 см; б) 1 м 14 см болса, оның радиусын тап.
11. Центрі берілген түзуде жататын радиусы а) 5 см-ге; ә) 7см-ге; б) 4,6 см-ге тең шеңбер сал.
12. Төмендегі өрнектердің қайсысы центрі O нүктеде, радиусы R-ге тең а) шеңберге; ә) дөңгелекке тиісті A нүктені өрнектейді?
13. Шеңбердің радиусынан 65 см ұзын диаметрін тап.
14. Радиусы 8 м дөңгелектің ең үлкен хордасын тап.

7 Іс жүзіндік жаттығу

Белсенділік іс жүзіндік жаттығу

1. Қолыңдағы оқулықтың ұзындығы мен енін, қалыңдығын сызғышпен өлше.
2. Қолыңдағы оқулықтың әр парағының қалыңдығын қалай өлшеуге болады? Сызғыштың көмегімен кірпіштің диоганалын өлшей аласың ба?
3. Сыныптастарыңның бойын шамалап өлше және салыстыр. Ең бойы ұзын сыныптасыңды анықта.

Қарысың мен қадамыңның ұзындығын өлше және есіңде сақта. Оларды білу саған күнделікті өмірде көп қажет болады!

4. Қарысыңды сызғыштың көмегімен өлше. Сосын бірнеше предметтің өлшемдерін (партаның ені, ұзындығы, биіктігі, терезенің биіктігі мен енін, тақтаның ұзындығы мен енін өлше) қарыстап өлше және сантиметрмен өрнекте.
5. Қадамыңның ұзындығын өлше. Мектеп ғимаратының ұзындығы мен енін, спорт алаңының ұзындығы мен енін қадамдап өлше және метрмен өрнекте.
6. Өзбекстанның картасынан берілген масштаб бойынша қалалар арасындағы қашықтықтарды тап (1-сурет).

Үлгі:

Ташкент пен Бұхара қалаларының арасындағы қашықтықты тап.

Картадан сызғыштың көмегімен өлшеп, 4,07 *см* екенін табамыз. Сосын масштаб бойынша, $4{,}07 \cdot 100\ км = 407\ км$ екенін анықтаймыз. Жауап: 407 *км*.

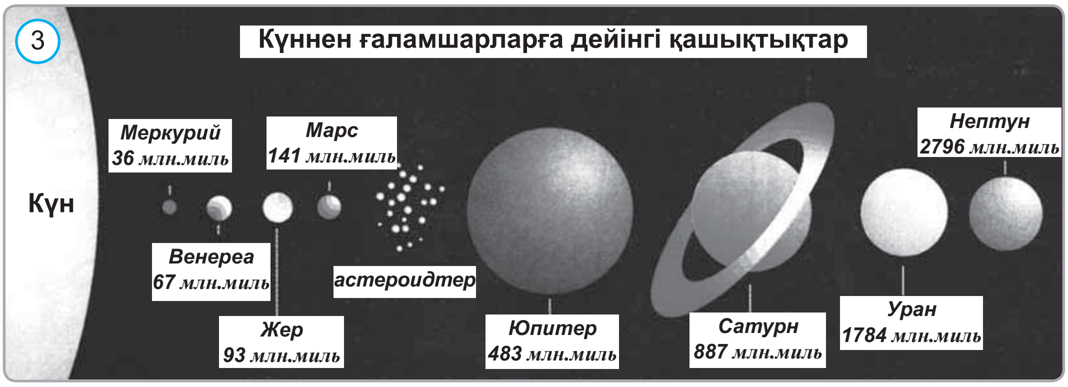
Көптеген мемлекеттерде халықаралық өлшем бірліктерінен басқа төмендегі ұзындық өлшемдері де қолданылады.

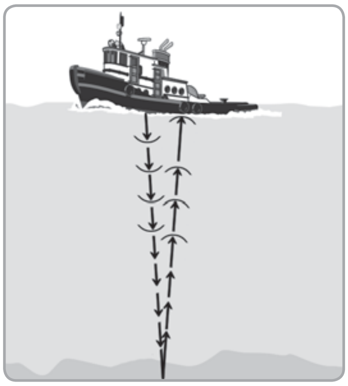
1 *дюйм* = 2,54 *см*, 1 *миль* = 1,609 *км*.

7. Теледидар мен компьютер экранының диагоналы (2сурет) дюйммен өлшенеді. Егер 1 *дюйм* 2,54 *см* болса, 15, 17 және 19 *дюймді* монитордың диагоналын сантиметрмен өрнекте.

8. 3-суретте берілген мәліметтерді пайдаланып, Жерден Күнге дейінгі және басқа ғаламшарларға дейінгі қашықтықты тап және оны километрмен өрнекте.

9. Егер бір шақырым 900 *м* екені белгілі болса, Бұхара мен Самарқант қалаларының арасындағы қашықтықты шақыриммен өрнекте.





Қызықты есеп. *Қашықтықты дауыспен өлшеу.* Теңізде жүзіп жүрген кеме үшін теңіздің тереңдігін білу өте маңызды саналады. Ол үшін теңіздің түбіне дауыс сигналы жіберіледі және дауыстың теңіз түбіне соғылып қанша уақытта қайтып келгені өлшенеді. Бұл уақыттың жартысын дауыстың судағы жылдамдығы — 1490 *м/с* ға көбейтіп теңіз түбінің тереңдігі анықталады.

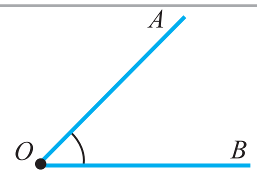
Егер бұл уақыт а) 3; б) 10,5; с) 54 секундты құраса, теңіз түбі неше метр терең?

8 Бұрыш. Бұрыштарды өлшеу. Биссектриса

> Бұрыш деп нүкте және одан шығатын екі сәуледен құралған фигураны айтады.

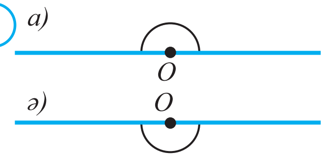
Бұрышты құрайтын сәулелер *бұрыштардың қабырғалары*, олардың ұшы *бұрыштардың төбесі* деп аталады. 1-суретте бұрыш бейнеленген. Онда *O* нүкте бұрыштың төбесі, OA және OB сәулелер болса оның қабырғалары. Бұл бұрыш "$\angle AOB$" немесе "$\angle BOA$" түрінде белгіленеді және "AOB бұрыш" немесе "BOA бұрыш" деп оқылады. Ондай жазуда бұрыштың төбесі әрқашан ортада жазылады. Сонымен қатар бұл бұрыш "$\angle O$" түрінде белгіленіп, "*O бұрыш*" деп оқылады. Сызбада бұрышты ажыратып көрсету үшін, кейде оның екі қабырғасы 1-суретте көрсетілгендей доға сияқты сызықпен тұтастырылып қойылады.

1



$\angle AOB$ — AOB *бұрыш*
O — *бұрыштың төбесі*
OA, OB *сәулелер — бұрыштардың қабырғалары*

2



$\angle O$ — *жазық бұрыш*

> Жазыңқы бұрыш деп қабырғалары бірін-бірі толықтыратын сәуледен құралған бұрышты айтады.

2-суретте жазыңқы бұрыш бейнеленген.

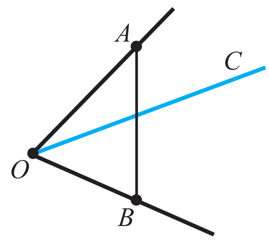
Жазыңқы бұрыштан басқа O бұрыш берілген болсын. Төбелері бұл бұрыштың қабырғаларында болған бір AB кесіндіні қарастырамыз (*3-сурет*).

Егер бұрыштың төбесінен шығатын OC сәуле (*3-сурет*) AB кесіндіні қиып өтсе, бұл сәулені *бұрыштың арасынан өтеді* деп санаймыз. Бұрыш қабырғалары арасынан өтетін сәуле оны екі бұрышқа ажыратады.

O бұрыш жазыңқы болғанда, оның төбесінен шығатын және қабырғаларынан өзгеше кез келген сәулені оның қабырғаларының арасынан өтеді дейміз.

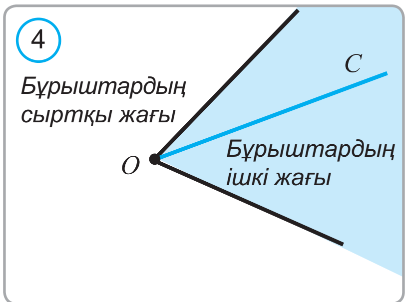
4-суретте бейнеленген O бұрыш жазықтықты екі бөлікке ажырататыны белгілі.

3



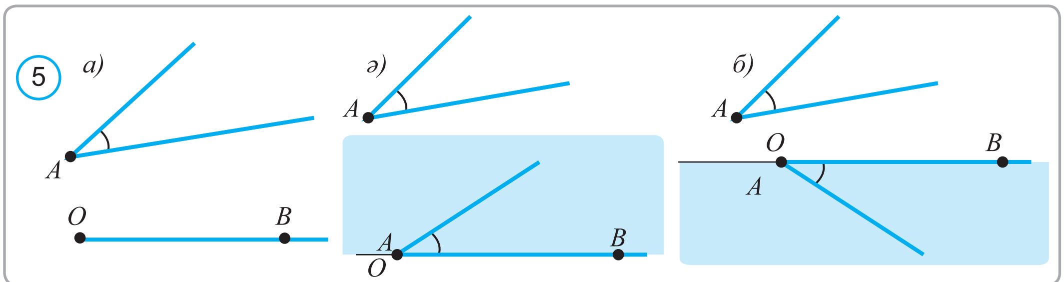
OC — *бұрыш қабырғаларының арасынан өтетін сәуле.*

4



Жазықтықтың бұрыш қабырғалары арасы-нан өтетін бірер сәуле бөлігі бұрыштың ішкі жағы деп, екіншісі бұрыштың сыртқы жағы деп аталады.

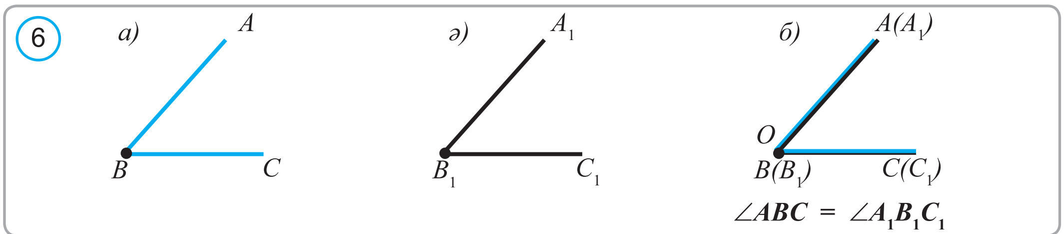
Кез келген OB сәуле және жазыңқы емес A бұрыш берілген болсын (*5.а-сурет*). O сәуле жатқан түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөлетіні белгілі, A бұрышқа тең, бір қабырғасы O сәуленің үстіне түсетін, екінші қабырғасы белгілі жарты жазықтықта жататын бұрышты бір ғана қоюға болады (*5.ә-сурет*).



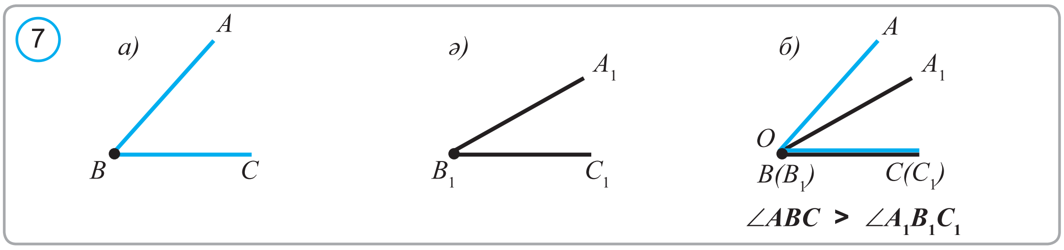
Фигурада бұрыштардың теңдігі бірдей сандағы доғалармен белгіленеді.

A *Кез келген сәуледен бастап белгілі жарты жазықтыққа берілген жазыңқы емес бұрышқа тең бір ғана бұрыш қою мүмкін.*

Екі бұрышты өзара салыстыру үшін, бұл бұрыштар бір сәуледен бастап белгілі жарты жазықтыққа қойылады. Сосын төмендегі жағдайдың қайсысы болуына қарап, бұрыштардың өзара теңдігі немесе үлкен-кішілігі туралы қорытынды шығарылады:

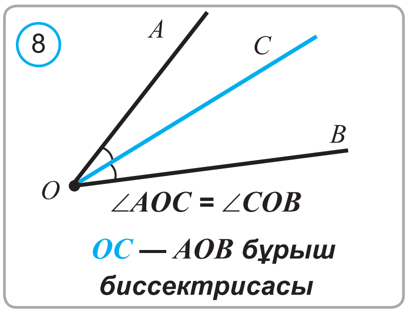


$\angle ABC$ және $\angle A_1B_1C_1$ ны O сәулеге қойғанымызда *(6.в-сурет)* BA сәуле B_1A_1 сәулемен, BC сәуле болса B_1C_1 сәуленің үстіне түсіп жатыр. Мұндай жағдайда, ABC бұрыш $A_1B_1C_1$ бұрышқа *тең* дейіледі және $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$ сияқты өрнектеледі.



7.*б*-суретте бейнеленген жағдайда, ABC бұрыш $A_1B_1C_1$ бұрыштан *үлкен* дейіледі және $\angle ABC > \angle A_1B_1C_1$ жазуымен өрнектеледі. Сондай-ақ бұл жағдайда $A_1B_1C_1$ бұрыш ABC бұрыштан *кіші* дейіледі және $\angle A_1B_1C_1 < \angle ABC$ сияқты өрнектеледі.

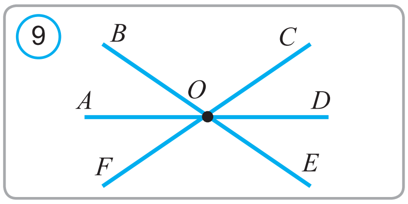
Бұрыштың биссектрисасы деп бұрышты тең екі бұрышқа бөлетін сәулені айтады.

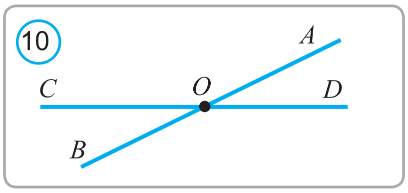


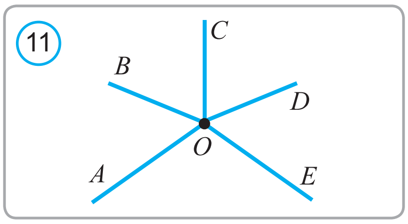
8-суретте AOB бұрыштың OC биссектрисасы бейнеленген.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

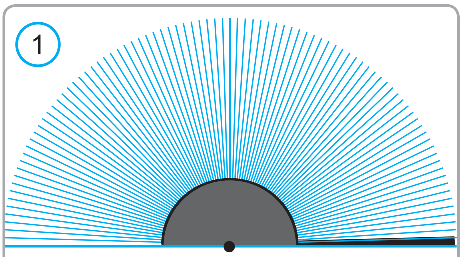
1. Бұрыш деп нені айтады және ол қалай белгіленеді?
2. Жазыңқы бұрыш деген не?
3. Бұрыш жазықтықты қандай бөліктерге бөледі?
4. 10-суретте бейнеленген бұрыштарды анықта және ата.
5. 11-суретте неше бұрыш бар? Оларды атап дәптеріңе жаз.
6. "Бұрышты сәуленің үстіне қою" дегенде нені түсінесің?
7. Бұрыштар қашан өзара тең болады?
8. Қашан бір бұрыш екіншісінен үлкен немес кіші болады?
9. Бұрыштың биссектрисасына сипаттама бер.
10. $\angle AOB$ берілген. Төмендегі теңдіктердің мәні бар ма? $\angle AOB = \angle BOA$; $\angle AOB = \angle ABO$; $\angle AOB = \angle OAB$.



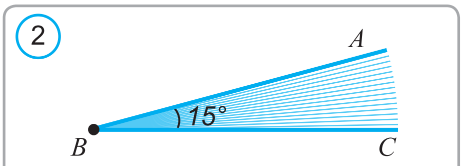


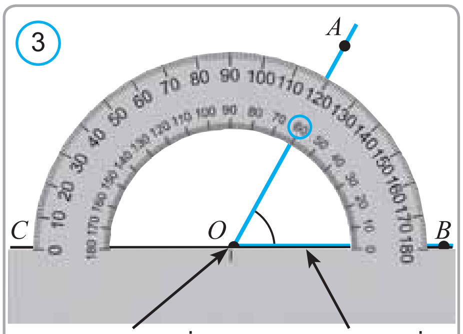


9 Бұрыштарды өлшеу. Транспортир



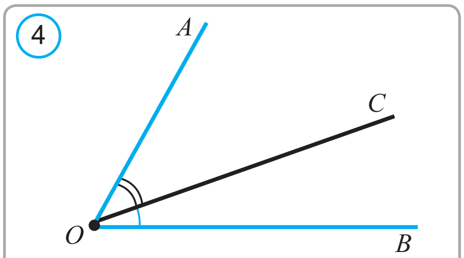
1 градустық бұрыш





транспортирдің центрі

транспортирдің негізі



$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

Жазыңқы бұрыш оның қабырғаларының арасында жататын сәулемен 180 тең бұрышқа бөлінген болсын (*1-сурет*). Бұл бұрыштардың бірін өлшем бірлігі – *бірлік бұрыш* ретінде алу қабылданған. Оның бұрыш шамасы *градус* деп аталады және 1° деп белгіленеді. Кез келген бұрыштың градус өлшемін осы бірлік негізінде анықтау мүмкін. *Бұрыштың градус өлшемі* бұрыштың ішкі жағына неше бірлік бұрыш және оның бөліктері орналасқанын көрсетеді.

2-суретте бейнеленген ABC бұрыш 15°-ға тең. Өйткені оның ішкі жағына 15 бірлік бұрыш орналасқан.

A *Әрбір бұрыштың белгілі бір градустық өлшеуіші бар болады, оның мәні оң санмен өрнектеледі. Жазыңқы бұрыштың градустық өлшеуі 180°-қа тең.*

Бұрыштардың градустық өлшеуіші транспортир деп аталатын аспаппен өлшенеді. Транспортирмен төменгі сыныптарда танысқансың. Оның шкалалы доға сияқты бөлігі сызықшалармен тең 180 тең бөлікке бөлінген, әр бір бөлек бір градусты білдіреді. 3-суретте траспортирдің көмегімен бұрышты өлшеу көрсетілген. Суреттен көріп тұрғанымыздай AOB бұрыштың шамасы 60 градусқа тең және бұл $\angle AOB = 60°$ түрінде жазылады. Бірдей градустық өлшемді бұрыштар өзара тең болады және керісінше өзара тең бұрыштардың градус өлшемдері де тең болады. Үлкен бұрыштың градус өлшемі де үлкен болады және керісінше.

Бұрыштарды өлшегенде градустың үлестері де пайдаланылады. 1°-тың 1/60 бөлігі *минут,* 1/3600 бөлігі *секунд* деп аталады және сәйкесінше "′" , "″" секілді белгіленеді. Мысалы, шамасы 45 градус 38 минут 59 секундқа тең бұрыштың өлшемі 45°38′59″ деп жазылады. $1° = 60'$, $1' = 60''$ екені айқан.

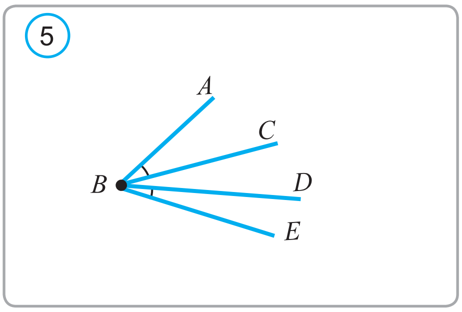
Айталық AOB бұрыш берілген болсын, оның қабырғалары арасында жататын кез келген OC сәуле оны AOC және COB бұрыштарға бөлсін *(4-сурет)*. Онда AOB бұрыштың градустық өлшемі AOC және COB бұрыштардың градустық өлшемдерінің қосындысына тең болады:

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB.$$

Бұл қасиетті былайша өрнектеуге болады:

A *Бұрыштың градустық өлшемі оның қабырғаларының арасымен өтетін кез келген сәулемен бөлінетін бөліктерінің градустық өлшемдерінің қосындысына тең болады.*

1-есеп. Егер 5-суретте $\angle ABC = \angle DBE$ болса, $\angle ABD = \angle CBE$ екенін көрсет.



Шешуі. Берілген $\angle ABC = \angle DBE$ теңдіктің әрбір қабырғасына $\angle CBD$ -ны қосамыз:

$\angle ABC + \angle CBD = \angle CBD + \angle DBE$

Бірақ, $\angle ABC + \angle CBD = \angle ABD$ va

$\angle CBD + \angle DBE = \angle CBE.$

Демек, $\angle ADD = \angle CBE.$

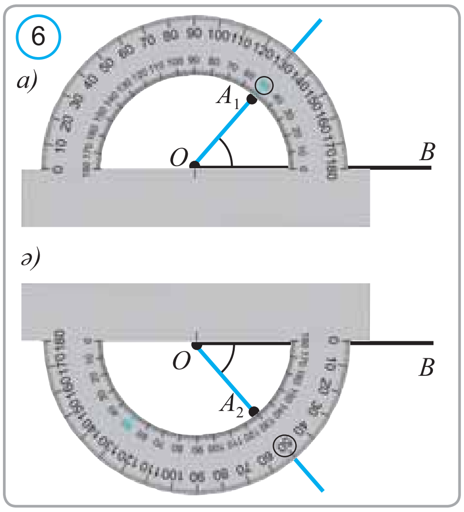
Берілген сәулеге берілген градустық өлшемді бұрыш салудың іс жүзіндік нұсқауы

1. Кез келген OB сәуле сызып алынады.
2. Транспортирдің негізін берілген OB сәуленің үстіне, центрін болса O нүктеге 3-суретте көрсетілгендей етіп қоямыз.
3. Транспортирдің шкаласынан бұрыштардың берілген градустық өлшемін көрсететін бөлігі табылады және оның турасына A нүкте қойылады.
4. O және A нүктелер арқылы сәуле өткізіледі. Нәтижеде берілген градустық өлшемді AOB бұрыш пайда болады.

Есеп. Берілген OB сәулеге 50°–тық бұрышты қой.

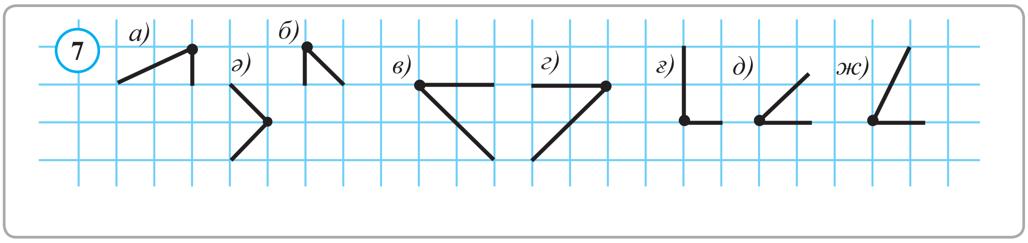
Шешуі. Транспортирдің негізін OB сәуленің үстіне, центрін болса O нүктеге қойып, оның шкаласынан 50° сәйкес келетін бөлім табылады және бұрыш жасалады. OB түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөлетіні белгілі. Демек, берілген сәуледен әрбір жазықтыққа біреуден 50°–тық бұрыш салу мүмкін.

$\angle A_1OB = \angle A_2OB = 50°$ *(5-сурет)*.

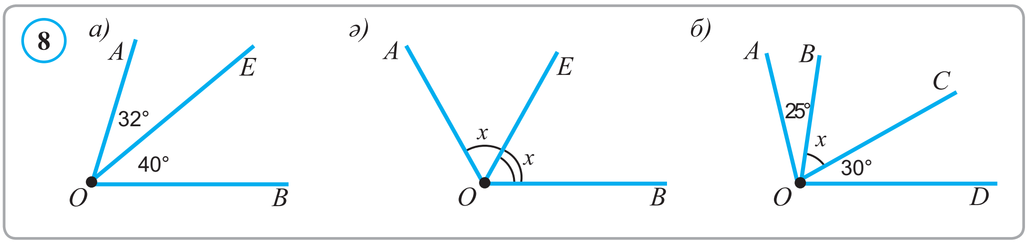


Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

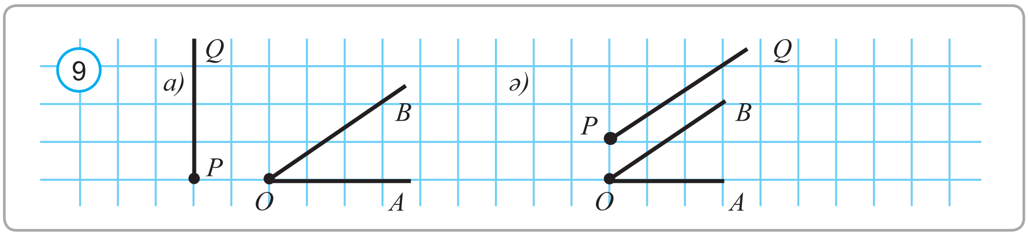
1. Жазыңқы бұрыш неше градус?
2. 1° –қа тең бұрыш дегенде қандай бұрышты түсінесің?
3. Екі бұрыштың градустық өлшемдері тең болса, олар тең бола ма?
4. Берілген градустық өлшемге ие бұрыш қалай жасалады?
5. Транспортирдің көмегімен 10°, 30°, 70°, 100° және 160° -ты бұрыш сал.



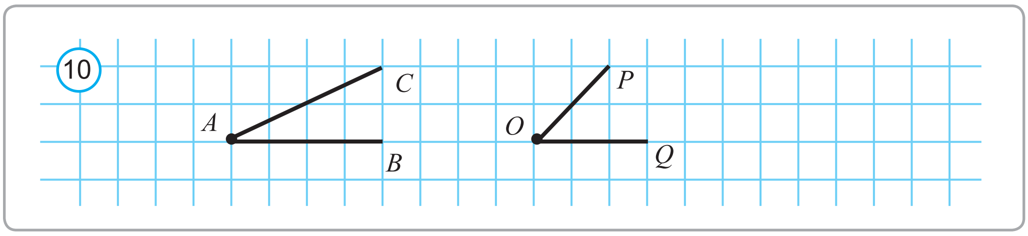
6. а) $\angle AOB = ?$ ә) $\angle AOB = 120°$, $x = ?$ б) $\angle AOD = 105°$, $x = ?$



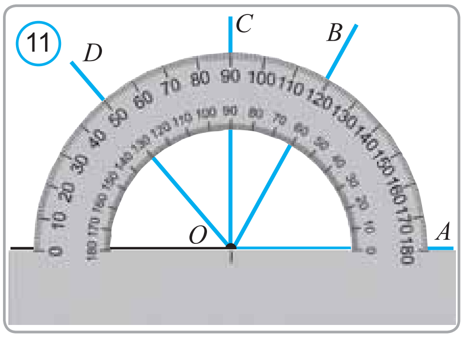
8. Берілген AB сәулеге 150° –тық OAB бұрышты қой.
9. PQ сәулеге AOB бұрыштарды қой (9-сурет).



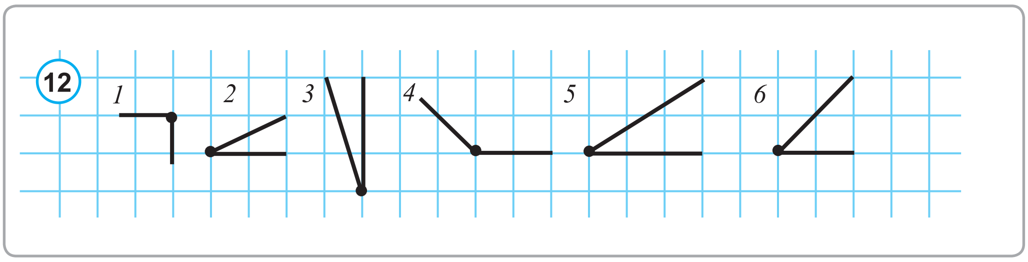
10. Ортақ қабырғасы бар 60° және 120° -тық бұрыш сал. Қандай бұрыш пайда болды?
11. 10-суретте берілген бұрыштардын қайсысы үлкен?



12. Егер а) $\angle AOE = 20°$, $\angle EOB = 40°$, $AOB = 60°$; ә) $\angle AOE = 80°$, $EOB = 120°$; б) $\angle AOE > \angle AOB$ болса, OE сәуле $\angle AOB$ қабырғалары арасынан өте ме?

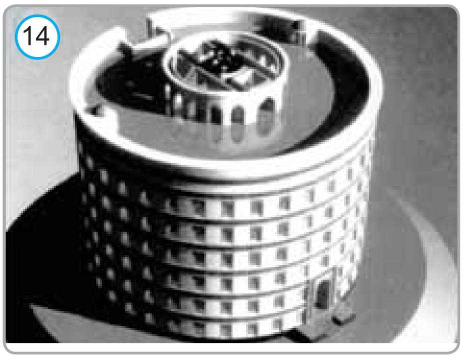


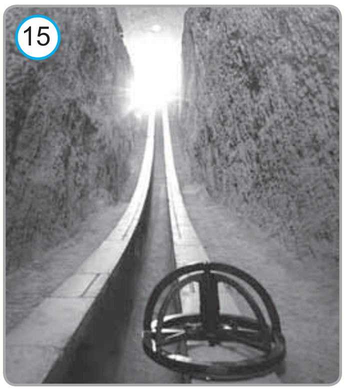
13. Дәптеріңе сәуле сыз және оған көзіңмен шамалап жай сызғыштың көмегімен және 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 120° және 150° -тық бұрыштарды қой. Сосын пайда болған бұрыштарды транспортирдің көмегімен өлше және қаншалықты дұрыс сызғанынды тексер. Жаттығуды қайтала.
14. Сағат а) 3.00; ә) 6.00 болғанда сағат және минут тілдері туғызған бұрыш неше градусқа тең болады.
15. 11-суретті пайдаланып AOB, AOC, AOD, BOC, BOD және COD бұрыштардың градустық өлшемін анықта.
16. 12-суретте берілген бұрыштар санын олардың градустық өлшемдерін өсу тәртібімен жаз.



Тарихи үзінділер

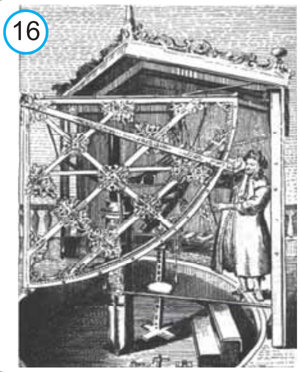
Астролобия (Астурлоб) – бұрыш өлшейтін аспап, оны Гиппар эрамызға дейінгі 180–125 жыл бұрын жасаған (7-сурет). Көрінісі өте қарапайым бұл аспаппен ондаған өлшеу жұмыстарын орындауға болады. Самарқанттағы Ұлықбек обсерваториясында да өлшеу жұмыстары жүргізілген. Бұл үлкен цилиндр фигуралы үш қабатты етіп құрылған обсерваторияда көптеген қондырғы және аспаптар болған (8-сурет). Олардың ең негізгісі өлшемі мен геометриялық шешіміне қарай баға жетпес вертикаль квадрат саналады. Оның радиусы 42 м болған. Ұлықбек бұл қондырғының көмегімен 1018 жұлдыздың ғарыштағы орнын анық



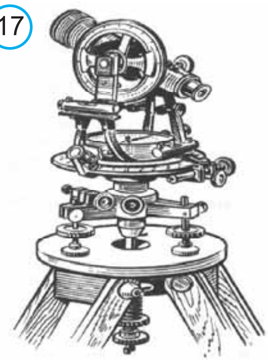


дәлдікпен өлшеп, өзінің «Зижи жадиди Курагоний» еңбегінде келтірген. 9-суретте оның жер астында сақталып, осы күнге дейін жетіп келген бөлігі бейнеленген. 10-суретте Европалық ғалымдар телескоп жасалғанға дейінгі пайдаланылған квадрат көрсетілген. Ол Ұлықбек квадратынан едәуір кіші, әрине. Қазір жер өлшеу жұмыстарында жоғары дәлдігі бар теодолит (11-сурет) деген аспап қолданылады.

16



17



10 1-бақылау жұмысы

Үлгі бақылау жұмысы екі бөлімнен құралған:

I. Теориялық бөлім. Осы күнге дейін оқыған геометриялық фигураларды сана. Оларға сипаттама бер және олардың қасиетін жаз.

II. Іс жүзіндік бөлім. Төмендегі есептерді шеш (4-есеп “өте жақсы” баға алғысы келген оқушыларға арналған):

1. Бір түзуде жататын A, B және C нүктелер үшін $AB = 9$ *см*, $AC = 12$ *см* болса, BC кесіндінің ұзындығы неге тең?

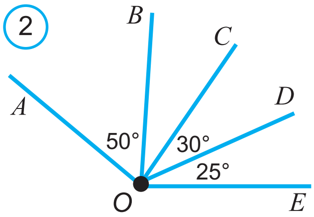
2. $AB = 48$, $AC = 3BC$, $BC = ?$ *(1-сурет)*

3. Егер 2-суретте $\angle AOE = 140°$ болса, BOC бұрыштың градустық өлшемін тап.

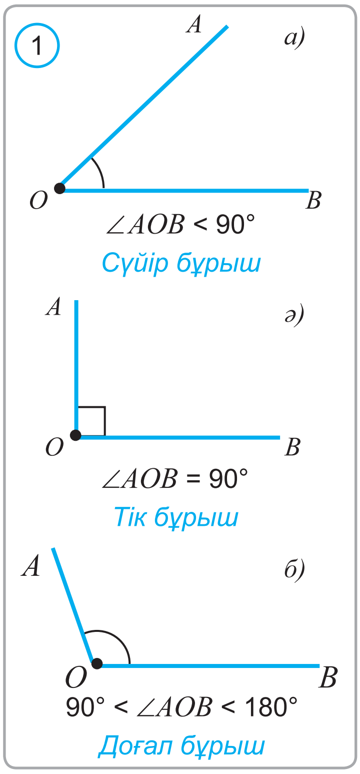
4*. Сағат 5.00 болғанда сағат және минут тілдері (стрелкалары)туғызған бұрыш неше градус болады?

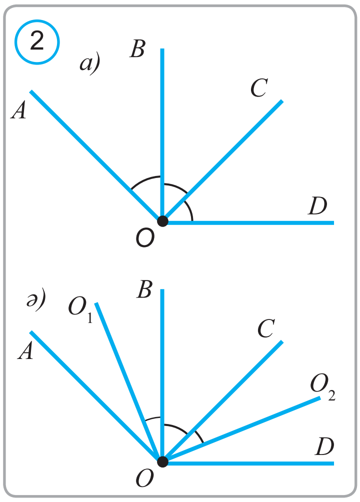
1

2



11 Бұрыштардың түрлері: тік, сүйір мен доғал бұрыштар





Алдыңғы сабақтарда айтқанымыздай, жазыңқы бұрыштың градустық өлшемі 180° –қа тең. Оны қысқаша *"Жазыңқы бұрыш 180°-қа тең"* деп те айтамыз. Бұрыштар үлкендігіне қарай түрлерге бөлінеді: Егер бұрыштың градустық өлшемі
90° -тан кіші болса (*1.а-сурет*), *сүйір бұрыш*,
90° -қа тең болса (*1.ә-сурет*), *тік бұрыш*,
90° пен 180° арасында болса (*1.б-сурет*), *доғал бұрыш* деп аталады.

Сызбада бұрыштың тік бұрыш екенін көрсету үшін 1.*ә*-суреттегідей белгіленеді.

Есеп. Егер $\angle AOD=135°$, $\angle AOB=\angle BOC=$ $=\angle COD$ болса *(2.а-сурет)*,

а) сызбада неше сүйір, доғал және тік бұрыш бар?

ә) AOB және COD бұрыштарының биссектрисаларының арасындағы бұрышты тап.

Шешуі: а) $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\alpha$ болсын. Онда бұрыштарды өлшеудің негізгі қасиетіне қарай, $\angle AOD=\alpha+\alpha+\alpha=135°$. Бұдан $\alpha=45°$. Демек, $\angle AOC=2\alpha=90°$, $\angle BOD=2\alpha=90°$. Сөйтіп сызбада 3 сүйір, 2 тік және 1 доғал бұрыш бар.

ә) OO_1 және OO_2 — сәйкес биссектрисалар болсын *(2.ә-сурет)*. $\angle AOB=\angle COD=45°$ болғандықтан, бұрыш биссектрисаларының сипаттамасына сай,

$$\angle O_1OB=\angle O_2OC=\frac{\alpha}{2}=22{,}5°.$$

Ізделініп жатқан бұрыш болса:

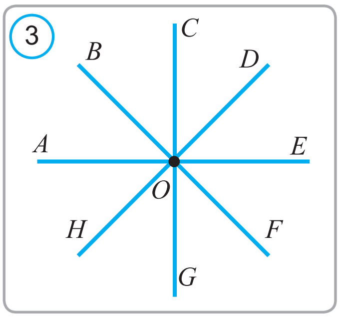
$$\angle O_1OO_2=\angle O_1OB+\angle BOC+\angle COO_2=$$
$$=\frac{\alpha}{2}+\alpha+\frac{\alpha}{2}=2\alpha=90°,$$

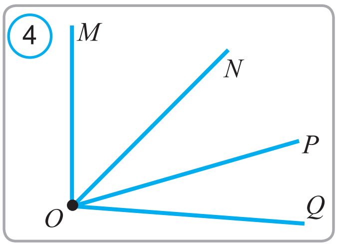
яғни O_1OO_2 — тік бұрыш.

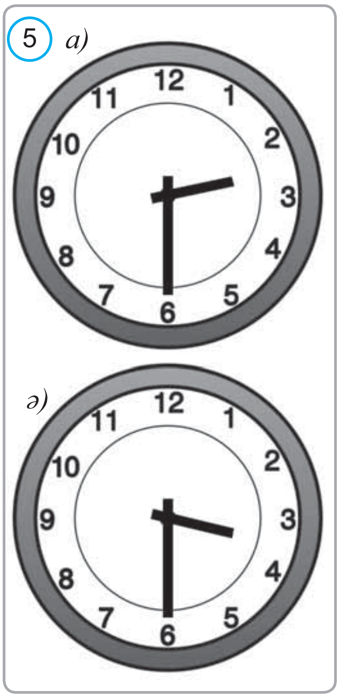
Ескерту. Әдетте бұрыштардың өлшеуі грек a алфавитінің кіші α (альфа), β (бета), γ (гамма)..... әріптерімен белгіленді.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

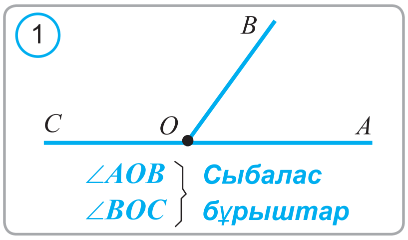
1. Қандай бұрыш тік бұрыш болады? Айналаңнан тік бұрышқа мысал келтір.
2. Сүйір және доғал бұрыштар бір-бірінен қалай ажыратылады?
3. Үш бұрыш сыз. Оларды сәйкесінше $\angle AOB$, $\angle MNL$, $\angle PQR$ белгіле. Транспортирмен оларды өлше және түрлерін анықта.
4. OA сәуле сыз. Транспортирдің көмегімен градустық өлшеуін сәйкесінше 25°, 72° және 146° болған AOB, AOC және AOD бұрыштарын сал.
5. Тік бұрыштың биссектрисасы оның қабырғаларымен қандай бұрыш жасайды?
6. 3-суретте неше: а) сүйір; ә) доғал; б) тік; в) жазыңқы бұрыш бар?
7. 4-суретте неше сүйір және неше доғал бұрыш бар?
8. Қағаз парағын бүктеп тік бұрыш жасай аламыз ба?
9. Қашан сағаттың сағат және минут тілдері тік бұрыш жасайды?
10. Сағаттың сағат тілі: а) 1 сағатта; ә) 6 сағатта; б) 2 минутта неше градусқа бұрылады?
11. Сағаттың минут тілі: а) 1 минутта; ә) 5 минутта; б) 0,5 сағатта неше градусқа бұрылады?
12*. Сағат: а) 14^{30}; ә) 15^{30} болғанда сағат және минут тілдері жасаған бұрыштарды анықта *(5-сурет)*.
13. AOB бұрыш OC, OD және OE сәулелермен тең төрт бұрышқа бөлінген. Бұл сәулелер қайсы бұрыштардың биссектрисасы болады?

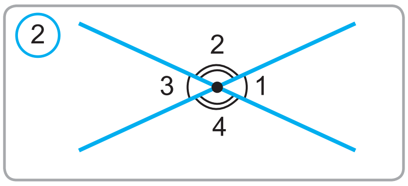


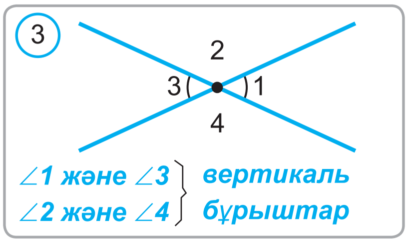


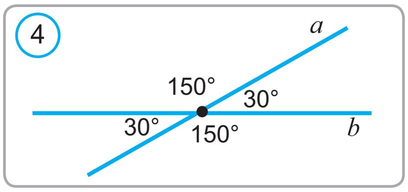


12 Сыбайлас және вертикаль бұрыштар мен олардың қасиеттері









Сыбайлас бұрыштар деп,бір қабырғасы ортақ, ал қалған қабырғалары толықтауыш жарты түзулерді құрайтын бұрыш жұбын айтады.

1-суретте AOB және BOC сыбайлас бұрыш бейнеленген. Олардың ОВ қабырғалары ортақ. Онда OC және OA сәулелер бір түзуде жатады.

Белсенділік жаттығу

а) Сыбайлас бұрыштардың қосындысы жазыңқы бұрыш болатынын көрсет.

ә) Егер сыбайлас бұрыштар өзара тең болса, олар тік бұрыш болатынын көрсет.

б) 2-суретте бейнеленген, екі түзудің қиылысуынан пайда болған $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ және $\angle 4$ бұрыштардың қайсысы өзара сыбайлас бұрыштар жұбын жасайды?

Қасиет. **Сыбайлас бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең.**

Вертикаль бұрыштар деп, екі түзудің қиылысуынан пайда болған және өзара сыбайлас болмаған бұрыштар жұбына айтады.

3-суретте $\angle 1$ және $\angle 3$ вертикаль бұрыштар. Сонымен қатар, $\angle 2$ және $\angle 4$-те вертикаль бұрыштар жұбын құрайды.

Енді вертикаль бұрыштардың төмендегі қасиеттерін дәлелдейміз.

Қасиет. **Вертикаль бұрыштар өзара тең.**

Айталық, $\angle 1$ және $\angle 3$ вертикаль бұрыштар берілген болсын *(3-сурет)*. $\angle 1 = \angle 3$ болатынын дәлелдейміз.

Дәлелдеу: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, өйткені $\angle 1$ және $\angle 2$ сыбайлас бұрыштар.

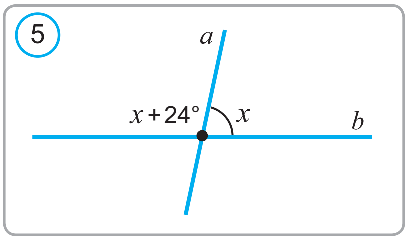
$\angle 2 + \angle 3 = 180°$, өйткені $\angle 2$ және $\angle 3$ де сыбайлас бұрыштар.

Бұл екі теңдіктен $\angle 1 + \cancel{\angle 2} = \cancel{\angle 2} + \angle 3$, яғни $\angle 1 = \angle 3$ екенін аламыз.

Қасиет дәлелденді.

Сонымен екі түзу қиылысқанда вертикаль және сыбайлас бұрыштар пайда болады. Сыбайлас бұрыштар жұбы өзара жазыңқы бұрыштарды құрайтыны белгілі. Олардың бірі 90°–тан үлкен болса, екіншісі 90° –тан кіші болады. Сыбайлас бұрыштардан кішісінің градустық өлшеуіші *түзулер арасындағы бұрыш* деп қабылданған. 4-суреттегі түзулер арасындағы бұрыш 30° –ты құрайды. Мұны басқаша "*түзулер 30°-тық бұрыш жасап қиылысады*", деп айтамыз.

Есеп. Екі түздің қиылысуынан пайда болатын бұрыштардың бірі екіншісінен 24° үлкен болса, сол бұрыштарды тап.

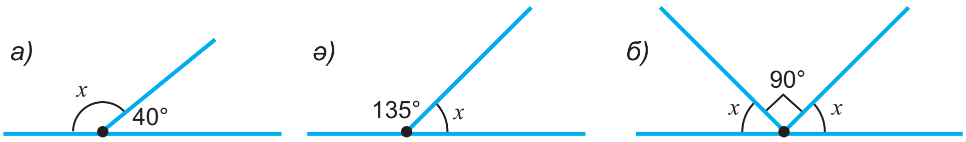


Шешуі. Екі түздің қиылысуынан пайда болған бұрыштар сыбайлас немесе вертикаль бұрыштар болады *(5-сурет)*. Вертикаль бұрыштар өзара тең болады. Демек, есеп шартында берілген бұрыштар сыбайлас бұрыштар екен. Олардың бірін (кішісін) x-пен белгілесек, екіншісі $x+24°$-ке тең болады.Сыбайлас бұрыштардың қасиетіне қарай, $x+x+24° = 180°$. Бұдан $x=78°$ және $x+24°=102°$ екенін анықтаймыз. Демек, a және b түзулер қиылысқанда 78°, 102°, 78° және 102° бұрыштар пайда болады.

Жауап: 78°, 102°, 78° және 102°.

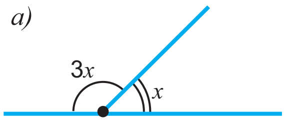
Сұрақтар мен есептер

1. Қандай бұрыштарды сыбайлас бұрыш дейміз?
2. Сыбайлас бұрыштардың қосындысы нешеге тең? Жауабыңды түсіндір.
3. Сыбайлас бұрыштар өз ара тең болуы мүмкін бе?
4. Вертикаль бұрыштар деген не? Сызбадан көрсет.
5. Вертикаль бұрыштардың негізгі қасиеттерін түсіндір.
6. 20°, 30°, 45°, 90°-тық бұрыштарға сыбайлас бұрыштарды тап.
7. Егер сыбайлас бұрыштардың бірі екіншісінен үш есе үлкен болса, оларды тап.
8. Сыбайлас бұрыштардың екеуі де: а) сүйір; ә) тік; б) доғал бұрыш бола ала ма?
9. Егер екі бұрыш тең болса, оларға сыбайлас бұрыштар да тең бола ма?
10. Белгісіз x бұрышты тап.

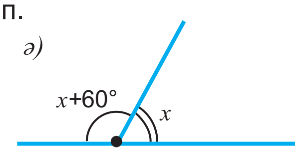


11. Белгісіз x бұрышты тап.

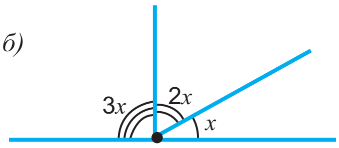
а)



ә)



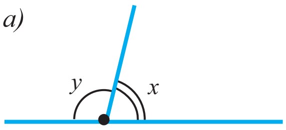
б)



12. Егер сыбайлас бұрыштардың градустық өлшеуішінің қатынасы а) 2:7; ә) 11:25; б) 1:9 болса, оларды тап.

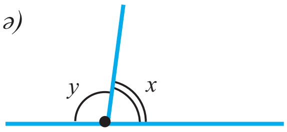
13. Фигураларға қарап есеп құрастыр және оны шеш.

а)



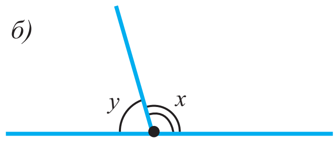
$y - x = 30°$

ә)



$x : y = 4 : 5$

б)



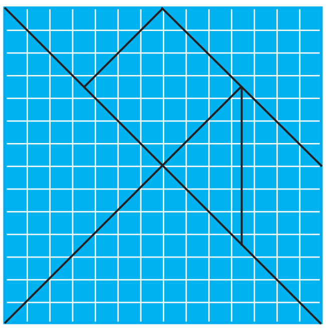
$2x = 3y$

14. Егер екі түзудің қиылысуынан пайда болған бұрыштардың бірі 40° болса, қалған бұрыштарын тап.

15. "Егер бұрыштар тең болса, олар вертикаль бұрыштар болады", — деген әрқашан дұрыс бола ма?

Геометриялық басқатырғыш

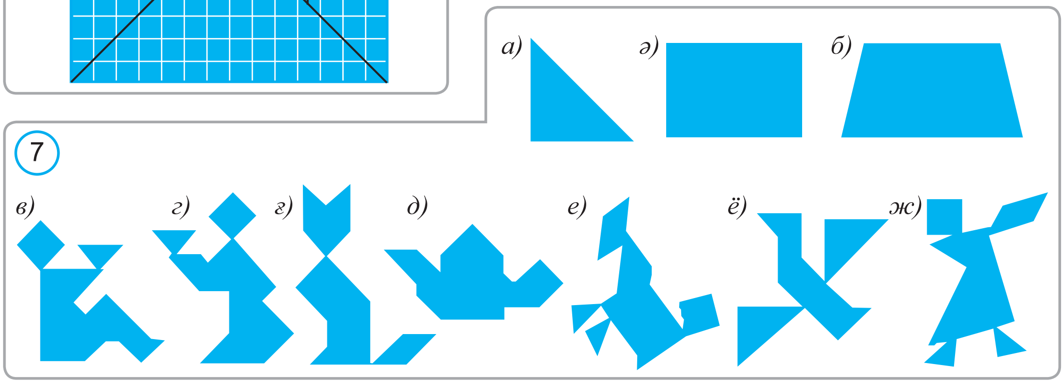
6



Танграм атты қытай ойыншығын жаса. Ол үшін 6-суретте көрсетілгендей квадратты қалың қағазға сыз және оны жеті бөлікке бөліп, қиып ал.

Сосын танграм бөліктерінің барлығын пайдаланып, 7-суреттегідей фигураларды жаса.

7



13 Геометрияны үйренудегі пікірлердің жүйелілігі және байланыстылығы

Осы күнге дейін бірнеше геометриялық фигуралар және олардың қасиеттерімен танысып келдік. Мысалы, өткен сабақта вертикаль бұрыштармен таныстық және олардың өзара тең болатынын көрдік. Есіңде болса бұл қорытындымен жай ғана таныспай, оны дәлелдедік: «Вертикаль бұрыштар тең» деген пікірдің дұрыстығын пікірлеу арқылы негіздедік. Бұл «дәлел» түсінігімен алғаш рет танысуымыз. Геометрияда бірінші болып, «дәлел» түсінігін енгізген математик – эрамызға дейінгі 625– 527 жылдары өмір сүрген Милетик грек ғалымы Фалес саналады.

Бір пікірдің дұрыстығын логикалық ойлаумен келтіріп шығару дәлел деп аталады. Теорема әдетте шарт пен қорытынды бөлімдерден құралады. Теореманың бірінші – шарт бөлігінде нелер берілгені баяндалады. Екінші – қорытынды бөлігінде нені дәлелдеу қажет екені айтылады. Мысалы, төмендегі теореманы қарастырайық:

Теорема. **Егер сыбайлас бұрыштар өзара тең болса, олардың екеуі де тік бұрыш болады.**

Бұл теореманың шарт бөлігі, «өзара сыбайлас бұрыштардың теңдігі» болса, қорытынды бөлігі «олардың тік бұрышы болады» дегенінен құралады. Теореманы дәлелдеу – оның шартын пайдаланып, осы күнге дейін белгілі мәліметтерге сүйеніп, пікір жүргізіп, қорытынды бөлігінде айтылған пікірдің дұрыстығын келтіріп шығару. Теореманың шарт және қорытынды бөлімдерін анықтап алу теореманы айқындайды, оны түсіну мен дәлелдеуді жеңілдетеді. Сондықтан теореманы дәлелдеуден бұрын оны шарт және қорытынды бөліктерге бөліп, қайта жазып алған мақсатқа сай болады. Мысалы, жоғарыда келтірілген теореманы төмендегі көріністе қайта жазып алуға болады:

Берілген: $\angle A$ және $\angle B$ сыбайлас бұрыштар, $\angle A = \angle B$ ⇒ ***Дәлелдеу керек:*** $\angle A = \angle B = 90°$

Теореманың шарты — ***Теореманың қорытындысы***

Жалпы алғанда, теореманы шарт және қорытынды бөлімдерге бөліп, төмендегі схема көрінісінде өрнектеуге болады:

Егер **А пікір орынды** болса, **В пікір орынды** болады.

Теореманың шарты — ***Теореманың қорытындысы***

Алғашқы түсінік және аксиомалар. Нүкте, түзу және жазықтық секілді түсініктер геометрияның алғашқы түсініктері саналады. Оларға сипаттама бермедік. Геометрияның алғашқы түсініктері сипаттамасыз тікелей енгізілетін түсініктер. Геометрияны бір ғимарат деп алсақ, бұл түсініктер оның іргетасы. Алғашқы түсініктер негізінде басқа жаңа фигура және түсініктер туралы түсінік беріледі, яғни олар сипатталады. Оқулықта сипаттамалар ✓ белгісімен жеке ажыратылған, өйткені олардың геометрияны оқуда маңызы зор.

Сонымен қатар осы күнге дейін нүкте, түзу және жазықтықтың өз -өзіне белгілі бірнеше қасиеттерін де дәлелдеусіз, тікелей қабылдадық. Мұндай қасиеттер *аксиомалар* деп аталады. Егер көңіл бөлген болсаң, оқулықта барлық аксиомаларды негізгі мәтіннен жеке ажыратып, **A** белгісімен берген. Осы күнге дейін танысқан аксиомаларға мысалдар келтіреміз (қалғандарын оқулықтан тауып, жазып шық):

1. Жазықтықтағы қандай түзуді алсақ та, ол түзуге тиісті нүктелер де, оған тиісті емес нүктелер де бар болады.

2. Кез келген екі нүкте арқылы түзу жүргізуге болады және ол тек біреу ғана болады.

3. Түзудегі үш нүктенің біреуі және тек қана біреуі қалған екеуінің арасында жатады.

Геометрияда түсініктер белгілі бір дәйектілік және логикалық жүйелілікпен енгізіледі. Ең алдымен геометрияның іргетасы – алғашқы түсініктер сипаттамасыз және аксиомалар дәлелдеусіз, тікелей қабылданады. Сосын бұл іргетас негізінде жаңа түсініктер сипатталады және олардың жаңа қасиеттері анықталады. Бұл қасиеттерден бірнешеуі дәлелсіз, аксиома ретінде қабылданады. Қалған қасиеттері болса теоремалар көрінісінде өрнектеледі және аксиомаларға негізделіп логикалық пікірлер құралымен дәледенеді. Пікірлеу үдерісінде дәлелденбеген қасиеттерден, тіпті олардың дұрыстығы анық көрініп тұрса да пайдалануға болмайды – бұл геометрияның логикалық құрылысына қайшы келеді.

? *Сұрақтар, есептер және тапсырмалар*

1. Сипаттама деген ен? Қандай түсініктер сипаттамасыз қабылданады?
2. Теорема деген не? Оның қандай бөлімдері бар?
3. Теоремалар қалай дәлеленеді? Дәлел дегенде нені түсінесің?
4. Аксиома деген не?
5. Егер фигураның қасиеті сызбада анық көрініп тұрған болса, бұл қасиетті дәлелдеместен қабылдаса бола ма?
6. Төменде келтірілген пікірлердің қайсылары дәлелдеусіз қабылданған:
1) кез келген екі нүкте арқылы тек бір түзу өткізуге болады;
2) жазыңқы бұрыш тік бұрыштан екі есе үлкен;

3) сыбайлас бұрыштардың қосындысы 180° -қа тең;
4) әрбір бұрыштың биссектрисасы бар;
5) әрбір кесіндінің тек бір ғана ортасы болады;
6) әрбір оң сан үшін ұзындығы сол санға тең кесінді бар?

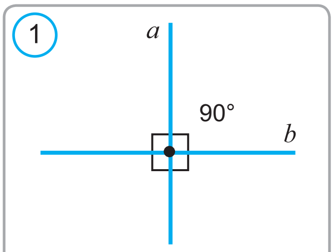
7. Осы пікірді дәлелдеусіз қабылдаса бола ма: "Түзуде жататын A, B, C, D нүктелер үшін $AB=CD$ болса, AD және BC кесінділердің ортасы бетпе-бет түседі".

8. Оқулықтан алдыңғы сабақта өткен тақырыптарға қатысты дәлелденген қасиеттерді тап.

14 Перпендикуляр түзулер

Белсенділік жаттығулар

Екі түзу қиылысқанда пайда болған бұрыштардың біреуі тік бұрыш болса (*1-сурет*), қалған бұрыштар туралы не айтуға болады?



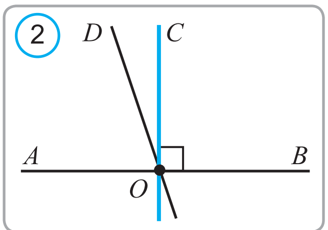
$a \perp b$ – a түзу b түзуге перпендикуляр.

Тік (90° -тық) бұрыш жасап қиылысатын түзулер перпендикуляр түзулер деп аталады.

1-суретте бір-біріне перпендикуляр a және b түзулер бейнеленген. Бұл түзулердің перпендикулярлығы арнайы белгімен $a \perp b$ түрінде жазылады және "a түзуі b түзуге перпендикуляр" деп оқылады. Перпендикуляр түзулер қиылысқанда төрт тік бұрыш пайда болады.

Перпендикуляр түзулерде жатқан кесінділер (сәулелер) де бір-біріне перпендикуляр дейіледі.

Теорема. **Түзудің әрбір нүктесі арқылы оған жалғыз ғана перпендикуляр түзу жүргізуге болады.**

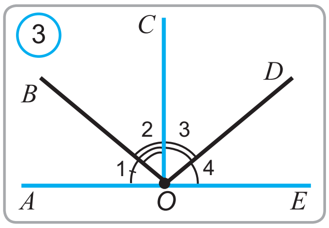


Дәлелдеу. Айталық, AB түзу және ондағы O нүкте берілген болсын (*2-сурет*), OB сәулеге төбесі O нүктедегі 90° –тық COB бұрыш қоюға болатыны белгілі. Онда CO түзу AB түзуге перпендикуляр түзу болады.

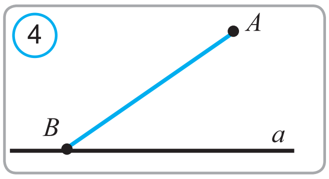
Енді осы түзудің біреу екенін дәлелдейік. Кері жоримыз, яғни O нүктеден өтетін, берілген AB түзуге перпендикуляр тағы бір DO түзу бар болсын. Онда, DOB және COB бұрыштарының әрқайсысы 90° -тық болып, OB сәулеге қойылған бұрыштар болады. Бірақ, OB сәулеге белгілі градус өлшеуіші бар бір ғана бұрыш қою мүмкіндігі туралы аксиомаға сай олай болуы мүмкін емес.

Демек, AB түзуге O нүктеден тек бір ғана перпендикуляр түзу жүргізу мүмкін екен. ***Теорема дәлелденді.***

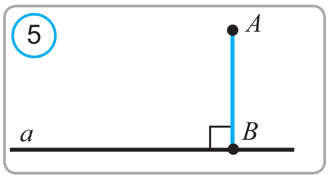
Есеп. Егер 3-суретте $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$ болса, $CO \perp AE$ болатынын көрсет.



Шешуі: Айталық $\angle 1 = \angle 4 = \alpha$, $\angle 2 = \angle 3 = \beta$ болсын. Бұрыштарды өлшеу қасиетіне орай $\angle AOE = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + + \angle 4 = \alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\alpha + 2\beta = 180°$, $2(\alpha + \beta) = 180°$, яғни $\alpha + \beta = 90°$ болады. Онда, $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = \alpha + \beta = 90°$ болғандықтан, $CO \perp AE$ болады.



a түзу және онда жатпайтын A нүкте берілген болсын. A нүктені a түзудің бір B нүктесімен тұтастырамыз (*4-сурет*). Пайда болған AB кесінді (аума) тұрақсыз деп аталады. B нүкте тұрақсыздың негізі деп аталады.

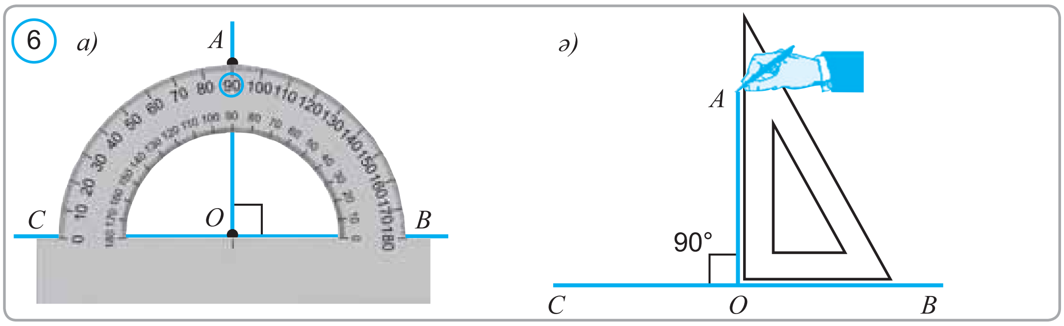


Егер *AB кесінді a түзуге перпендикуляр болса*, онда AB кесінді *A нүктеден a түзуге түсірілген перпендикуляр деп аталады*. 5-суретте A нүктеден a түзуге түсірілген перпендикуляр бейнеленген. B нүкте ауманың (перпендикулярдың) негізі деп аталады.

Түзуге перпендикуляр өткізудің іс жүзіндік нұсқауы

1-тәсіл. Транспортирдің көмегімен *(6.а-сурет).*

2-тәсіл. Тік бұрышты сызғыштың көмегімен *(6.ә-сурет).*



Геометриялық зерттеулер

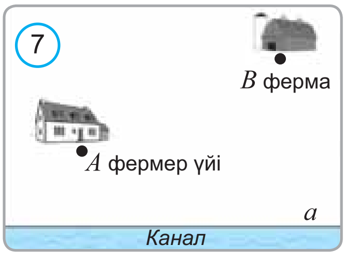
Бір түзу сыз. Онда жатпайтын нүктеден түзуге перпендикуляр және бірнеше аума өткіз. Перпендикуляр және ауманың ұзындықтарын өлше және өзара салыстыр. Қайсы кесіндінің ұзындығы ең кіші болады? Жауабыңды гипотеза ретінде өрнекте. Бұл гипотезаның дұрыстығын дәлелдеусіз қабылдаса бола ма немесе сөзсіз дәлелдеу керек пе?

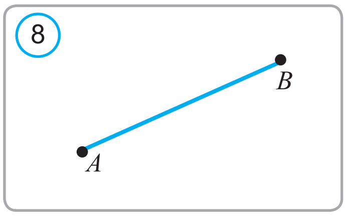
Жаттығу. Диқан фермерлік шаруашылығының кар-тасы 7-суретте берілген.

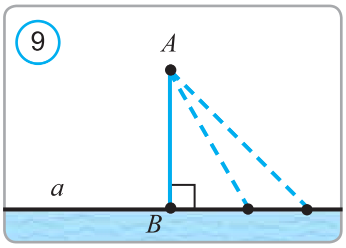
1. Фермер үйінен фермаға баратын жол құрмақшы. Оған жолды қайсы сызықпен құруға кеңес бересің? Неге? Сызбада бұл жолды сызып көрсет.
2. Фермер фермасынан каналға апаратын жол құрмақшы. Оған жолды қайсы сызық бойынша құруға кеңес бересің? Неге? Сызбада бұл жолды сызып көрсет.

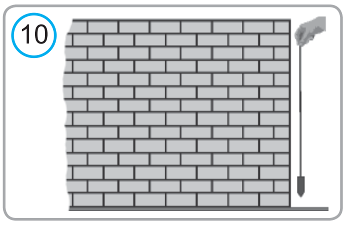
8-суретте бейнеленген A және B нүктелерді тұтастыратын ең қысқа “жол”, бұл AB кесінділер. Сондықтан төменгі сыныптарда AB кесіндінің ұзындығын A және B нүктелер арасындағы қашықтық деп қабылдаған едік. Соған ұқсас, A нүктеден a түзуге дейінгі қашықтық деп, A нүктеден a түзуге түсірілген AB перпендикулярдың ұзындығын қабылдаймыз. Бұл қашықтық A нүктеден a түзуге түсірілген барлық аумалар ұзындығынан кіші болады (*9-сурет*). Бұл пікірдің дәлеліне кейін тоқталамыз.

Құрылыста қабырғалар мен бағандардың тік екені (еденге салыстырғанда перпендикулярлығы) отвес деген аспаппен тексеріледі *(10-сурет)*.

7


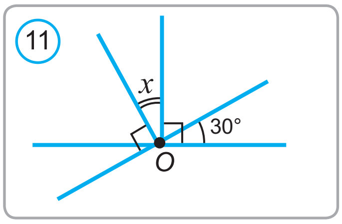
8


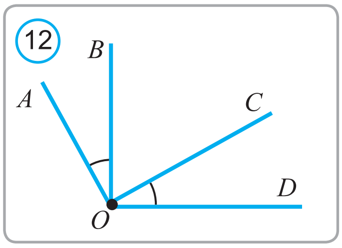
9


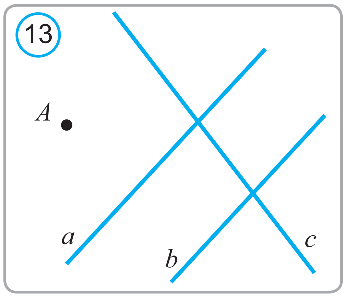
10


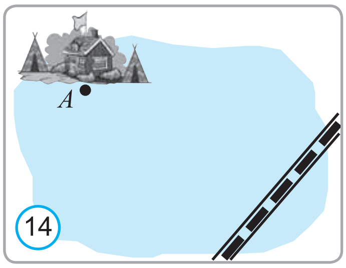
Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Қашан түзулер перпендикуляр болады? Жауабыңды сызбадан түсіндір.
2. Берілген түзуде жататын нүктеден оған неше перпендикуляр түзу өткізуге болады? Жауабыңды түсіндір.









3. Түзуге жүргізілген перпендикуляр деп нені айтады?

4. Берілген нүктеден түзуге жүргізілген аума деген не?

5. Берілген A нүктеден түзуге неше аума жүргізуге болады?

6. Сызғыш және бұрыштықтың көмегімен берілген түзуге онда жататын нүктеден перпендикуляр түсір.

7. a түзуде A, B, C нүктелерді белгіле және транспортирдің көмегімен бұл нүктелердің әрқайсысы арқылы a түзуге перпендикуляр түзу өткіз.

8. Тік бұрышқа вертикаль бұрыш неше градус?

9. a түзу A бұрыштың қабырғаларын B және C нүктелерде қиып өтеді. AB және AC түзулер a түзуге перпендикуляр бола ма?

10. Екі түзудің қиылысуының нәтижесінде 4 тең бұрыш пайда болды. Бұл түзулер перпендикуляр бола ма?

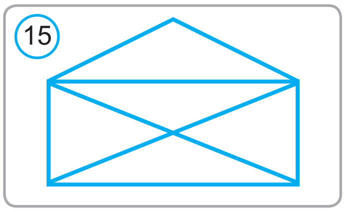
11. 11-суреттегі белгісіз бұрыш x -ті тап.

12. 12-суретте егер $OB \perp OD$ және $OA \perp OC$ болса, $\angle AOB = \angle COD$ болатынын көрсет.

13. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық деген не?

14. Бұрыштықтың көмегімен A нүктеден a, b және c түзулеріне дейінгі қашықтықты тап *(13-сурет)*.

15. Транспортир және жай сызғыштың көмегімен 14-суретте бейнеленген лагерьден темір жолға дейінгі ең қысқа қашықтықты анықта Масштаб: 1 : 10 000.



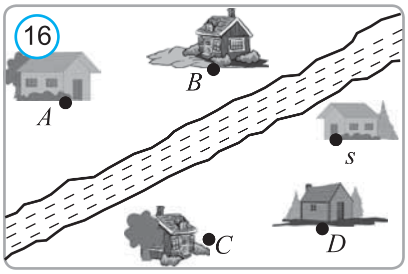
Геометриялық басқатырғыштар

1. а) 10; ә) 11 бірдей таяқшадан 3 тең квадрат құр.

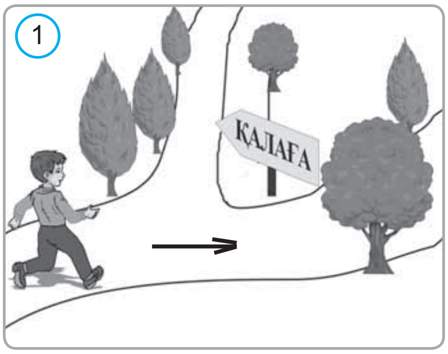
2. 12 бірдей таяқшадан, оларды сындырмастан, а) 4; ә) 6 тең квадрат жасай аласың ба?

3. 15-суретте көрсетілген қаламды қағаздан көтерместен және кесіндінің үстінен екі рет жүргізбестен сызып көр.

4. Өзен жағалауында бес ауыл болып, олардың үшеуі өзеннің бір жағында, қалған екеуі өзеннің екінші жағында орналасқан *(16-сурет)*. Егер әрбір ауыл қалған ауылдармен тікелей жолдармен байланысқан болса, бұл жолдардың нешеуі өзенді кесіп өтеді?



15 Кері жору арқылы дәлелдеу әдісі



13-сабақта келтірілген теоремадағы түзудің біреу екенін дәлелдеуде қолданылатын әдіс “Кері жору арқылы дәлелдеу әдісі” деп аталады. Бұл әдіс төмендегі қарапайым логикалық есепке негізделген. Айталық, жолда кетіп бара жатқанда жолдың екіге ажыраған бөлігіне кездесесің (*1-сурет*). Бұл жолдардың тек біреуі баратын жеріңе, қалаға алып баратынын білесің. Жол көрсететін тақтайшаға бірінші жол мекеніңе алып баратыны көрсетілген. Сен бұл жазуға сенбей екінші жолмен жүрдің. Жүріп-жүріп басқа жерге, таныс емес ауылға барып қалдың. Ондайда алдымен ойыңа қандай пікір келеді? Әрине, “Тақтайдағы жазу дұрыс екен!” деген пікір келеді (*2-сурет*).

Кері жору арқылы дәлелдеу әдісінде де осындай болады. Теорема шартын құраған тұжырым орынды деп алынады. Онда бірін-бірі жоққа шығаратын екі тұжырымның (жолдың) тек біреуі орынды болуы мүмкін:

1-жағдай. Теореманың қорытындысында келтірілген тұжырым дұрыс.

2-жағдай. Теореманың қорытындысында келтірлген тұжырым дұрыс емес.

Теорема қорытындысына кері тұжырым – екінші “жол” таңдалады. Егер бұл “жолдағы” логикалық пікірлердің дұрыстығы алдын анықталған (немесе қабылданған) бір қасиетке қайшы қорытындыға алып келсе, бұл таңдалған «жолдың» дұрыс емес екенін білдіреді. Бұл болса, өз кезегінде бірінші «жол» дұрыс екенін, яғни теорема шартында келтірілген тұжырым орынды болғанда оның қорытындысында келтірілген тұжырым да орынды болатынын көрсетеді. Сондықтан теорема дәлелденген болады.

Кері жору арқылы дәлелдеу әдісін қолданып теоремаларды дәлелдеуде төмендегілерге көңіл бөлу керек: а) дәлелдеуді талап еткен тұжырымға кері тұжырымды дұрыс жасау; ә) ойлаған тұжырым және басқа белгілі қасиеттер негізінде дұрыс қорытынды шығару; б) пікірлеу барысында алдын белгілі болған қасиеттерге қайшы нәтижені анықтау.

Белсенділік жаттығу

Төменде берілген тұжырымға кері тұжырым жаса:

а) CD кесінді a түзуді кесіп өтеді;

ә) A және B нүктелер a түзудің бір жағында жатады;

б) CD кесіндінің ұзындығы 15-ке тең;

в) AOB бұрыш тік бұрыш емес;

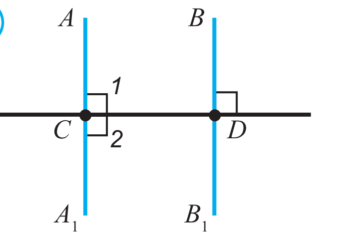
г) $\angle ABC > \angle MNL$;

д) AB аума AC перпендикулярдан ұзын.

Теорема. **Бір түзуге перпендикуляр болған екі түзу өзара қиылыспайды.**

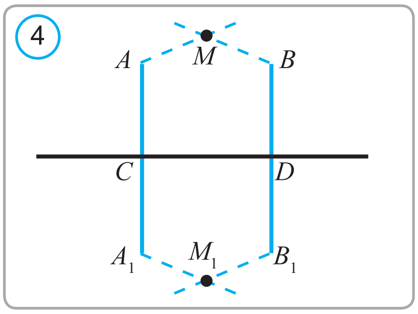
AA_1, BB_1 және CD түзулер, $AA_1 \perp CD$ және $BB_1 \perp CD$ (3- *сурет*) ⇨ AA_1 және BB_1 түзулер өзара қиылыспайды

3



Дәлелдеу. Ойша 3-суретті CD түзу бойымен бүктеп, жоғары жарты жазықтықты төменгі жарты жазықтықпен бетпе –бет қоямыз. 1 және 2 бұрыштар тең болғандықтан CA сәуле CA_1 сәулемен бетпе –бет түседі. Соған ұқсас DB сәуле DB_1 сәулемен бетпе-бет түседі.

Берілген теореманы дәлелдеу үшін кері жору арқылы дәлелдеу» әдісін пайдаланамыз. Жоримыз, теореманың шарты орындалған болса да оның қорытындысы орынды болмасын, яғни AA_1 және BB_1 түзулері қандай да бір M нүктеде қиылыссын *(4-сурет)*. Онда, жоғары жарты жазықтық төменгі жарты жазықтыққа бетпе-бет қойғанда M нүкте AA_1 және BB_1 түзулерде жататын, төменгі жарты жазықтықтағы M_1 нүктемен бетпе-бет түседі. Нәтижеде, M және M_1 нүктелерден екі AA_1 және BB_1 түзу өтіп қалады. Бірақ бұл кез келген екі нүктеден тек бір ғана түзу өтеді деген аксиомаға қайшы. Демек, біздің тұжырымымыз дұрыс емес: AA_1 және BB_1 түзулер өзара қиылысуы мүмкін емес. ***Теорема дәлелденді.***



Нәтиже. Түзуде жатпаған нүктеден осы түзуге перпендикуляр етіп біреуден артық түзу өткізуге болмайды.

Бұл қорытындыны өз бетіңше дәлелдеуге әрекет жаса.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

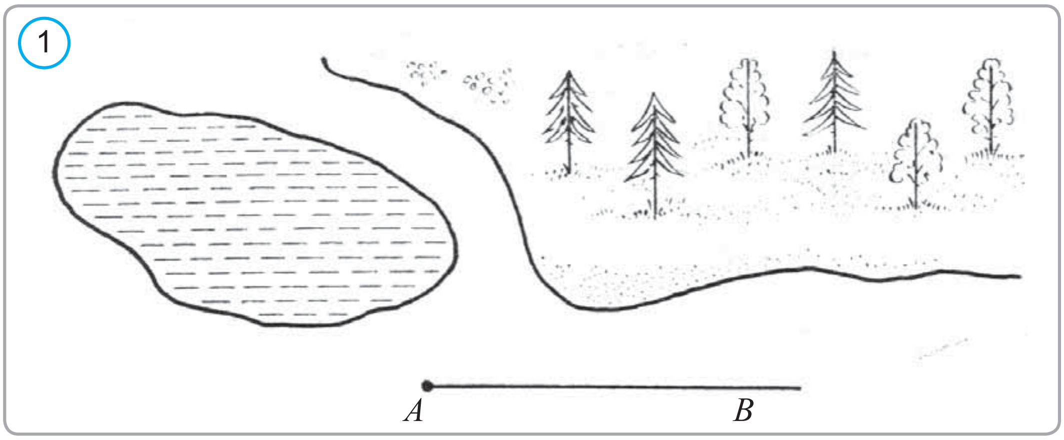
1. Кері жору арқылы дәлелдеу әдісі қандай ережеге негізделген?
2. A, B, C нүктелер бір түзуде жатса және: а) $AB = 3{,}6$; $BC = 5{,}4$; $AC = 9$; ә) $AB = 2{,}4$; $BC = 4{,}2$; $AC = 1{,}8$ болса, C нүктенің A және B нүктелер арасында жатпайтынын дәлелде. Бұл нүктелерден қайсысы қалған екеуінің арасында жатады?
3. Жазықтықта үш A, B, C нүкте берілеген: $AB = 2{,}6$, $AC = 8{,}3$, $BC = 6{,}7$. Бұл нүктелердің бір түзуде жатпайтынын дәлелде.
4. Сыбайлас бұрыштар биссектрисасының арасындағы бұрышты тап.
5. Вертикаль бұрыштар теңдігін кері жору әдісімен дәлелде.
6. Вертикаль бұрыштардың биссектрисалары бір түзуде жататынын дәлелде.
7. Егер $\angle AOB = 58°$, $\angle BOC = 17°$ және $\angle AOC = 41°$ болса, OA, OB және OC сәуленің қай бірі қалған екеуінің арасында жатады.
8. Екі түзудің қиылысуынан пайда болған бұрыштардың екеуінің қосындысы 120°. Сол бұрыштарды тап.
9. Екі түзудің қиылысуынан пайда болған бұрыштардың екеуінің айырмасы 120°. Сол бұрыштарды тап.
10. Екі түзудің қиылысуынан пайда болған екі бұрыштың қосындысы 180°-қа тең. емес. Бұл бұрыштардың вертикаль бұрыштар екенін дәлелде.

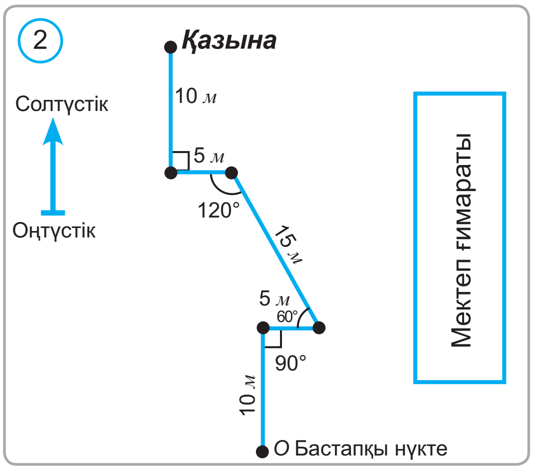
16 Іс жүзіндік жаттығу

1. Қазынаны тап.

1-суретте карта және AB сәуле бейнеленген. Бұл сәулеге көл орналасқан жарты жазықтықта жататын 60° -тық бұрышты қой. Жасалған бұрыштың AB-дан қарсы жағына қарай 60 *м* жүр. C нүктеге келесің. CA сәулеге тағы да сол көл орналасқан жарты жазықтықта жататын 120°-тық бұрыш қой. Бұл бұрыштың CA сәуледен қарсы жағына қарай 120 *м* жүр. Сол жерде, биік қарағайдың астына қазына көмілген.

Картаның масштабы: 1 : 2000. Картаны дәптеріңе сызып ал. Қазына жасырылған нүктені тап.





2. Ашық ауадағы жарыс.

Жарысқа екі немесе одан көп топ қатысса болады. Әр топқа рулетка мен үлкен транспортирді пайдалануға рұқсат беріледі.

Сынып топтарға бөлініп, мектеп алаңының түрлі бұрышында жұмыс істейді. “Қазына” (мысалы, түтікше, конверттегі хат, ...) алдын ала алаңның бір жеріне жасырып қойылады. Қазынаға апаратын карталарды да оқытушы алдын ала түзеді және топтарға таратады

(Картаның үлгісі 2-суретте көрсетілген). Топтар өз картасына қарап қазынаны табуға кіріседі. Қайсы топ бірінші болып картада көрсетілген сынық сызық бойлап барлық нүктелерді анықтап, қазынаны тапса, сол топ жеңімпаз деп табылады.

Тапсырма. Үйіңнен мектепке келетін жолдың 2-суреттегі сияқты картасын құрастыр. Шамалап бұл жолдың ұзындығын анықта.

17 Біліміңді сынап көр

1. Сөйлемдерді мағынасына қарай толықтыр:

1. Нүкте және төбелері сол нүктеде болған .... құралған фигура бұрыш деп аталады.
2. Жазықтықта екі нүкте арқылы .... түзу жүргізу мүмкін.
3. Жазыңқы бұрыштың градустық өлшеуіші .... тең.
4. Екі түзу тек .... қиылысады.
5. Бұрыштардың төбесінен шығып, оны .... бұрыш биссектрисасы деп атайды.
6. Түзудің бір нүктесінен бір жақта жатқан нүктелерден құралған бөлігі .... деп аталады.
7. Табаны ортақ, қалған екі қабырғасы түзу түзетін бұрыштар .... деп аталады.
8. Түзу жазықтықты .... бөледі.
9. Вертикаль бұрыштардың биссектрисалары .... тудырады.
10. Кесіндіні тең .... осы кесіндінің ортасы деп аталады.
11. Егер сыбайлас бұрыштар ...., олар түзу бұрыш болады.
12. Тең кесінділердің .... тең болады.

2. Төменде берілген сөйлемдерде қате болса тауып, оны түзетіңдер:

1. Қосындысы 180°-қа тең бұрыштар сыбайлас бұрыштар болады.
2. Жазықтықтағы кез келген екі түзудің тек бір ортақ нүктесі болады.
3. Бұрыштың ұшынан өтіп, оны тең екіге бөлетін түзу бұрыштың биссектрисасы деп аталады.
4. Кез келген нүкте арқылы екі түзу өткізу мүмкін.
5. Екі қабырғасы да сәуледе жататын бұрыш жазыңқы бұрыш деп аталады.
6. Жазықтықтағы екі түзу оны екі жарты жазықтыққа бөледі.
7. Екі түзудің қиылысуынан пайда болатын бұрыштарды вертикаль бұрыштар дейді.
8. Кесіндіні екіге бөлетін нүкте кесіндінің ортасы деп аталады.

9. Берілген сәуленің басына тек бір тік бұрыш қоюға болады.
10. Жазықтықтағы кез келген A, B, C нүктелер үшін $AB + BC = AC$ теңдік орынды.
11. Вертикаль бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең.

3. Берілген қасиеті бар геометриялық фигураларды оң бағандағы сәйкес қатарға жаз:

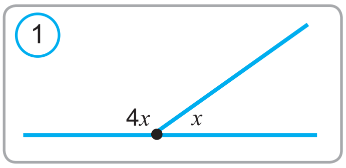
1.	Қосындысы 180° -қа тең	
2.	Қабырғалары сәуледен құралған	
3.	Шамасы 180° -қа тең	
4.	Белгілі ұзындыққа ие	
5.	Кесіндіні тең екіге бөледі	
6.	Дәлелдеусіз тау деп қабылданған сөйлем	
7.	Бұрышты тең екіге бөледі	
8.	Түзулер қиылысқанда пайда болады	
9.	Дұрыстығын дәлелдеу қажет	
10.	Өлшемге ие емес	

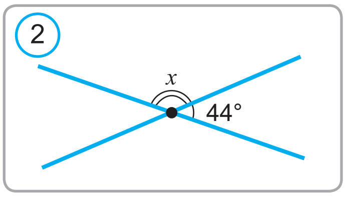
4. Бірінші бағанда берілген геометриялық түсінікке екінші бағаннан тиісті қасиет немесе пікірдің сәйкес келетінін қой:

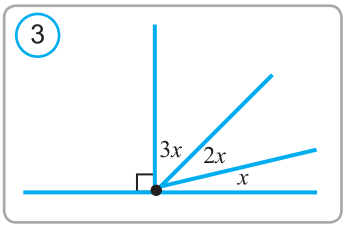
Геометриялық түсінік	*Қасиет немесе пікір*
1. Нүкте	А. “Геометрия” сөзінің мағынасы
2. Түзу	Ә. Қосындысы 180°-қа тең
3. Жер өлшегіш	Б. Өзара тең бұрыштар
4. Кесінді	В. Түзудегі нүкте және одан бір жақта жатқан нүктелер
5. Сәуле	Г. 180°
6. Кесіндінің ұзындығы	Ғ. Ортақ ұшы бар екі сәуле
7. Тең фигуралар	Д. Ұзындығын өлшеп болмайды
8. Жарты жазықтық	Е. Тік бұрыштың 1/90 бөлігі
9. Планиметрия	Ж. Дәлелдеусіз қабылданған тұжырым
10. Бұрыш	З. Дәлелдеу қажет тұжырым
11. 1 градус	И. Түзудің екі нүктесі және олар арасындағы нүктелер
12. Жазыңқы бұрыштың градустық өлшеуіші	К. Жазықтықтағы геометриялық фигуралардың қасиеттерін үйренеді
13. Вертикаль бұрыштар	Л. Бұрышты тең екіге бөледі
14. Сыбайлас бұрыштар	М. Жазықтықтың түзу бөлген бөлігінің бірі
15. Теорема	Н. Бөлімдері жоқ
16. Аксиома	О. Оң сан
17. Биссектриса	П. Бетпе-бет түсетіндей етіп қою мүмкін

5. Тесттер (берілген жауаптардың ішінен ең дұрыс жауабын анықта):

1. Тұжырымдаусыз қабылданған негізгі геометриялық түсініктерді көрсет: а) жазықтық; ә) нүкте; б) кесінді; в) сәуле; г) түзу; ғ) жарты жазықтық.
А) а; ә; с Ә) ә; с; е Б) а; ә; с; е В) а; ә; е.
2. Екі сыбайлас бұрыштың айырмасы 24 °-қа тең болса, олардың кішісін тап:
А) 72°; Ә) 76°; Б) 78°; В) 82°.
3. Геометрия ғылым ретінде қай мемлекетте қалыптасқан?
А) Ежелгі Египет; Ә) Бобил; Б) Греция; В) Қытай.
4. Екі түзудің қиылысуынан пайда болған бұрыштардың үшеуінің қосындысы 200°-қа тең. Бұрыштардың кішісін тап:
А) 20°; Ә) 40°; Б) 60°; В) 80°.
5. Кез келген үшеуі бір түзуде жатпайтын 4 нүкте берілген. Осы нүктелердің әрбір жұбы арқылы түзулер өткізілді. Олардың санын тап.
А) 1; Ә) 4; Б) 5; В) 6.
6. Бұрыш биссектрисасы оның қабырғаларымен 60°-тық бұрыш жасайды. Берілген бұрышқа сыбайлас бұрышты тап:
А) 30°; Ә) 60°; Б) 90°; В) 120°.
7. AB кесіндіні 2 түзу кесіп өтсе, көбімен AB неше кесінді пайда болады?
А) 3; Ә) 4; Б) 5; В) 6.
8. Сағат 4 болғанда сағат және минут тілдері арасындағы бұрыш неше градус болады?
А) 60°; Ә) 75°; Б) 105°; В) 120°.
9. $AB = 6,\ C \in AB,\ AC = 3BC,\ BC = ?$
А) 1; Ә) 1,5; Б) 2; В) 3.
10. Сағаттың сағат тілі 30 минутта неше градусқа бұрылады?
А) 180°; Ә) 15°; Б) 60°; В) 30°.
11. $AB = 18,\ C \in AB,\ AC - BC = 4,\ BC = ?$
А) 7; Ә) 8; Б) 10; В) 11.
12. Вертикаль бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең. Сол бұрыштарды тап:
А) 60° және 120°; Ә) 45° және 135°;
Б) 90° және 90°; В) 45° және 45°.
13. Үш түзу жазықтықты ең көбімен неше бөлікке бөледі?
А) 4; Ә) 5; Б) 6; В) 7.
14. 1-суреттегі x = ?
А) 30°; Ә) 36°; Б) 45°; В) 60°.
15. 2-суреттегі x =?
А) 136°; Ә) 72°; Б) 56°; В) 96°.
16. 3-суреттегі x = ?
А) 15°; Ә) 30 °; Б) 45°; В) 60°.







17. Төмендегі тұжырымдардың дұрысын тап:
   А) Жазықтықта берілген нүктеден тек бір ғана түзу өткізу мүмкін.
   Ә) Түзудің бір нүктесінен бір жақта жатқан нүктелерден құралған бөлігін сәуле дейді.
   Б) Түзудің екі нүктесі арасында жатқан нүктелерден құралған бөлігі кесінді деп аталады.
   В) Кез келген сәулеге тек бір бұрыш қоюға болады.
18. Мына тұжырымдардың дұрысын тап.
   А) Сыбайлас бұрыштар жазыңқы бұрыш болады.
   Ә) Егер $AB = 5$ *см*, $BC = 6$ *см* болса, $AC = 11$ *см* болады.
   Б) Егер бұрыштар тең болса, олар вертикаль бұрыштар болады.
   В) Егер екі бұрыш тең болса, оларға сыбайлас бұрыштар да тең болады.

6. Есептер

1. Транспортирдің көмегімен жалпы 10°, 20°, 40°, 60°, 90°, 130°, 170°-тық бұрыштарды сал.

2. Жазыңқы бұрыштардың биссектрисасы оның қабырғаларымен қандай бұрыш жасайды?

3. Бұрыштардың биссектрисасы оның қабырғаларымен 30° –тық бұрыш жасаса, бұрыштың өзі неше градус?

4. Бұрыштардың биссектрисасы оның қабырғаларымен доғал бұрыш жасауы мүмкін бе?

5. $\angle AOB=50°$, $\angle BOC=80°$ болса, AOB және BOC бұрыштарының биссектрисалары арасындағы бұрыштарды тап. Есептің неше шешімі бар?

6. 15° -тық бұрышқа 10 есе үлкейтетін лупамен қарасақ неше градустық бұрыш көрінеді?

7. а) 90°; ә) 60°; б) 50°; в) 20° бұрыштардың биссектрисасын транспортирдің көмегімен сал.

8. $\angle AOB=120°$ болған бұрыштың OK биссектрисасын транспортирдің көмегімен сал. Сосын пайда болған AOK және KOB бұрыштарының биссектрисаларын сал және бұл биссектрисалар арасындағы бұрышты тап.

9. Егер $AB = 1{,}8$ *м*, $AC = 1{,}3$ *м* және $BC = 3$ *м* болса, A, B және C нүктелер бір түзуде жата ма?

10. A, B және C нүктелер бір түзуде жатады. Егер $AB = 2{,}7$ *м*, $AC = 3{,}2$ *м* болса, BC кесіндінің ұзындығын тап. Есептің неше шешімі бар?

11. Ұзындығы 15 *м* AB кесіндіде C нүкте берілген. Егер:
   а) AC кесінді BC кесіндіден 3 *м* ұзын,
   ә) C нүкте AB кесіндінің ортасы болса,

б) AC және BC кесінділердің ұзындықтары 2:3 қатынасындай болса, AC және BC кесінділердің ұзындықтарын тап.

12. A, B, C, D нүктелер бір түзуде жатады. Егер B нүкте AC кесіндінің, C нүкте болса BD кесіндінің ортасы болса, $AB = BC = CD$ екенін көрсет.

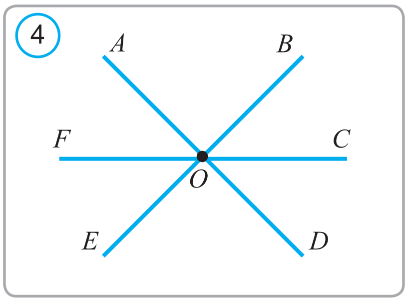
13. Үшеуі де бір түзуде жатпайтын: а) 6; ә) 7; б) 10 нүкте арқылы неше түзу өткізуге болады?

14. OA және OB сәулелер қашан бетпе-бет түседі?

15. AB сәуледе C нүкте, BA сәуледе D нүкте солай алынған, AC = 0,7 және BD = 2,1. Егер AB = 1,5 болса, CD -ны тап.

16. 4-суретте неше вертикаль бұрыштар жұбы бейнеленген?

17*. Егер сағаттың сағат және минут тілі арасындағы бұрыш 45° болып, минут тілі 6-да тұрған болса, сағат қай уақытты көрсеткен болады?



18. Түзуде онда жатпайтын O нүктеден OA аума және OB перпендикуляр өткізілген. Олардың ұзындықтарының қосындысы 13, айырмасы 1-ге тең болса, O нүктеден түзуге дейінгі қашықтықты тап.

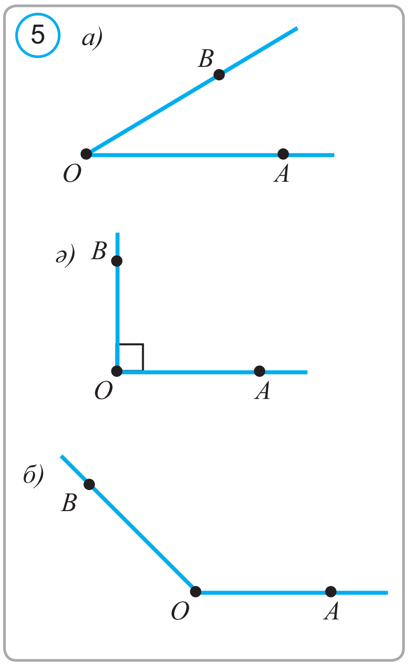
19. AOB және BOC сыбайлас бұрыштар екені белгілі. Егер:

а) AOB бұрыш BOC бұрыштан 40° үлкен;

ә) AOB бұрыш BOC бұрыштан 4 есе кіші;

б) $\angle AOB = \angle BOC + 44°$;

в) $\angle AOB = 5 \cdot \angle BOC$ болса, бұл бұрыштарды тап.



20. Екі түзудің қиылысуынан төрт бұрыш пайда болды. Олардың екеуінің градустық өлшеуіштерінің қосындысы 100°-қа тең болса, бұл төрт бұрыштың градустық өлшеуіштерін тап.

21. A, B және C нүктелер жазықтықта сондай орналасқан, а) $AC + CB = AB$; ә) $AB + AC = BC$. Қайсы нүкте қалған екеуінің арасында жатады?

22. 5-суреттегі бұрыштардың қабырғаларына A және B нүктелер арқылы перпендикуляр түзулер өткіз. Бұл түзулердің қиылысу нүктесінде қандай бұрыштар пайда болады?

18 2-бақылау жұмысы

Үлгі бақылау жұмысы екі бөлімнен құралған, бірінші бөлімінде 49-50 – беттердегі тестердің бесеуі енгізілген. Екінші бөлімінде төменде келтірілген есептерге ұқсас 3 есеп беріледі (4-есеп «үздік» баға алғысы келетін оқушыларға қосымша түрінде беріледі):

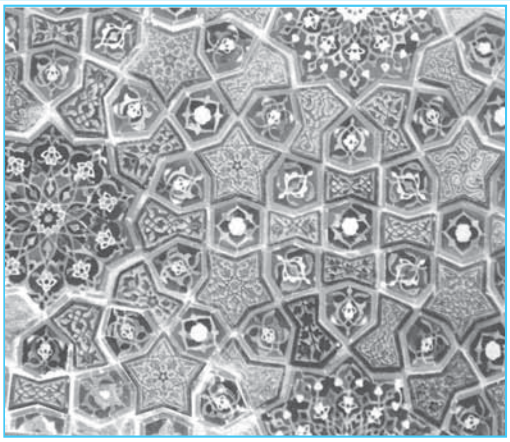
1. MN және KL түзулердің қиылысуынан пайда болған MOL және KON вертикаль бұрыштардың қосындысы 148° -қа тең. MOK бұрышты тап.
2. Сыбайлас бұрыштарының айырмасы 60°-қа тең. Бұл бұрыштардың кішісін тап.
3. Бұрыш биссектрисасы осы бұрыштың қабырғаларымен 66° -тық бұрыш жасайды. Бұл бұрышқа сыбайлас бұрышты тап.

4*. Сыбайлас бұрыштардың биссектрисалары тік бұрыш жасап қиылысатынын дәлелде.

Қызыққан оқушыларға арналады.

1. «Геометрия – 7» электрондық оқулығының тиісті тарауымен танысып шық. Бұл тарауға енгізілген тақырыптарға қатысты интерактивті анимация қосымшаларына берілген тапсырмаларды орындап, тест тапсырмаларын шешіп біліміңді сынап көр.

2. Сонымен қатар, 10-бетте берілген интернет ресурстарынан осы тарауға тиісті материалдарды тап және оқып шық.



II ТАРАУ

ҮШБҰРЫШТАР

Бұл тарауды оқығаннан кейін төмендегі білім және іс жүзіндік дағдыларды біліп аласың:

Білімдер:

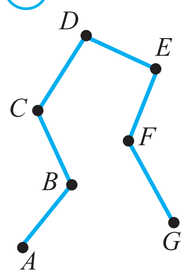
— Сынық сызық және оның түрлері;
— көпбұрыштың сипаттамасы;
— үшбұрыш және оның негізгі элементтері, осы элементтер бойынша үшбұрышты
— түрлерге ажырату;
— үшбұрыштың медианасы, биссектрисасы және биіктітігінің сипаттамасы;
— үшбұрыштар теңдігінің ТВТбелгілері;
— теңбүйірлі үшбұрыштың қасиеттері;
— үшбұрыштар теңдігінің ВТВ белгілері;
— үшбұрыштар теңдігінің ТТТ белгілері;
— теңқабырғалы үшбұрыштың қасиеті;
кесінді орта перпендикулярының қасиеті.

Дағдылар:

— Үшбұрыштар теңдігінің белгілері бойынша тең үшбұрыштарды анықтай білу;
— алған біліміңді есеп шығаруда және іс жүзінде қолдана білу;
— геометрияның өзіндік ерекшелігі мен тартымдылығын сезіну.

19 Сынық сызық. Көпбұрыш

1



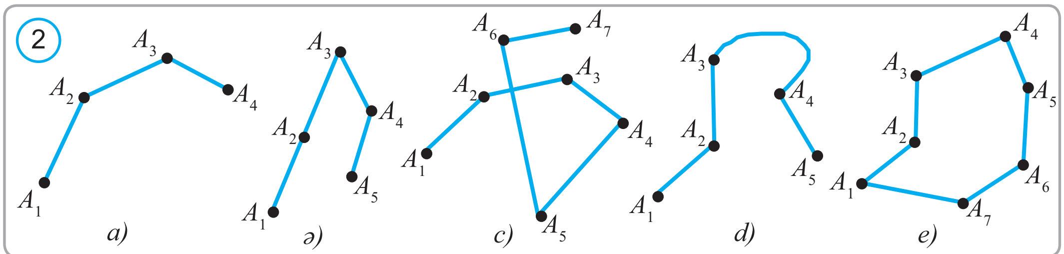
$ABCDEFG$ — **сынық сызық**;
A, B, C, D, E, F, G — **сынық сызықтың ұштары**;
AB, BC, CD, DE, EF, FG — **сынық сызықтың буындары**.

Жүйелі келген екі бір түзуде жатпаған A_1A_2, A_2A_3,..., $A_{n-1}A_n$ кесінділерден құралған фигураны сынық сызық дейді.

A_1, A_2,..., A_n нүктелер сынық сызықтың *ұштары*, A_1A_2, A_2A_3,..., $A_{n-1}A_n$ кесінділер болса сынық сызықтың *буындары* немесе *қабырғалары* деп аталады. 1-суретте $ABCDEFG$ — сынық сызық бейнеленген.

Бастапқы және соңғы ұштары бір-бірінің үстіне түсетін сынық сызықты – *тұйық сынық сызық* деп айтамыз.

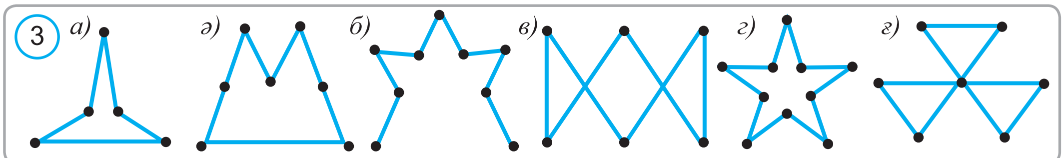
Жаттығу. 2-суретте бейнеленген сызықтардың сынық сызық болатынын немесе болмайтынын анықта және түсіндір.



Өзін өзі қиып өтпейтін сынық сызық **көпбұрыш** деп аталады.

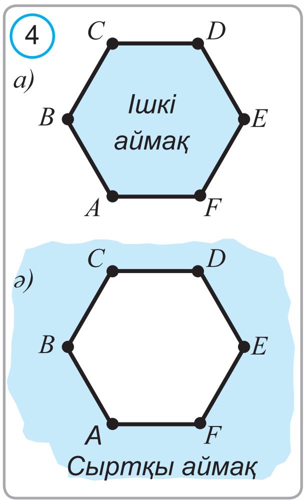
Белсенділік жаттығу.

Көпбұрыштардың сипаттамасынан шығатын қасиеттерді сана және 3-суреттегі фигуралардың көпбұрыш болатынын немесе болмайтынын анықта және түсіндір.



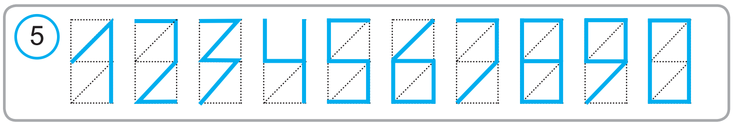
Қабырғаларының санына қарап, көпбұрыштар үшбұрыш, төртбұрыш, бесбұрыш, алтыбұрыш, жалпы n бұрыш деп аталады. Сен кейбір көпбұрыштармен төменгі сыныптарда танысқансың.

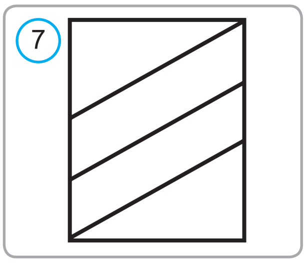
Кез келген көпбұрыш жазықтықты екі аймаққа бөледі. Көпбұрышпен шекараланған шеті аймақ – көпбұрыштың *ішкі аймағы* деп, екінші – шексіз аймақ көпбұрыштың *сыртқы аймағы* деп аталады. 4-суретте $ABCDEF$ алтыбұрыштың ішкі *(а-сурет)* және сыртқы (*б-сурет*) аймағы бояп көрсетілген.

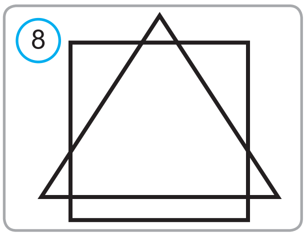


Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

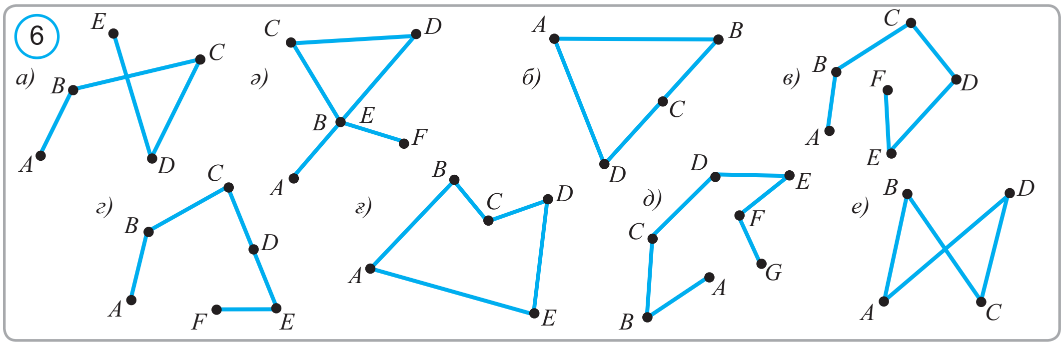
1. Сынық сызық деген не?
2. Сынық сызық сал, оны белгіле және оның ұштары мен буындарын сызбада көрсет.
3. Тұйық сынық сызықтарға мысалдар келтір.
4. Сынып бөлмесінде, мектепте, үйде сынық сызықты еске түсіретін заттарға мысалдар тап.
5. Көпбұрыш деген не? Мысал келтір.
6. 5-суретте бейнеленген цифрлар қандай сызықтарды өрнектейді?

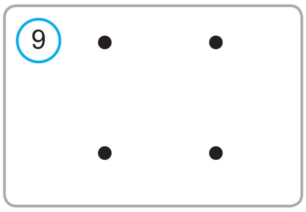


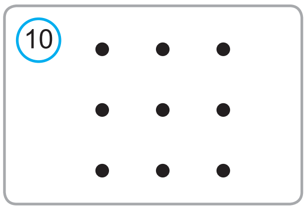




7. 6-суретте бейнеленген фигуралардың қайсысы а) сынық сызық; ә) тұйық сынық сызық; б) көпбұрыш болатынын анықта.




9


10

8. Әр екі сыбайлас буыны перпендикуляр болған бес буынды сынық сызық сыз. Ондай сынық сызық неше жабық болуы мүмкін?

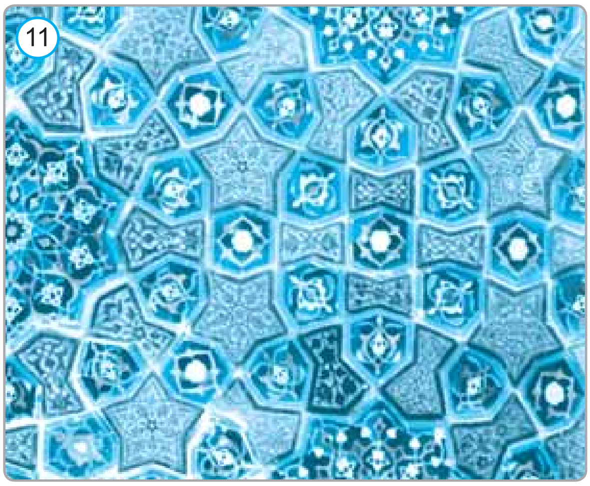
Геометриялық басқатырғыштар

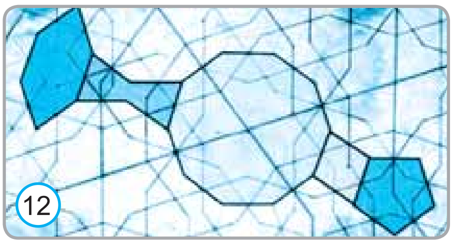
1. 7-суретте неше төртбұрыш бар?
2. 8-суретте көрсетілген фигураны қаламды қағаздан үзбей және бір сызықтың үстінен қайта жүргізбестен сыз.
3. Қабырғалары 9-суретте берілген төрт нүктеден өтетін үшбұрыш сыз.
4. 10-суретте бейнеленген 9 нүктенің барлығынан өтетін, буындарының саны 4 болған сынық сызық сыза аласың ба?

Тарихи үзінділер

Хандаса ілімінде өз дәуірінен бес ғасыр озып кеткен сәулеткер шеберлер.

2007 жылғы ақпан айында Америкада басылған орта ғасыр сәулеткерлігі туралы мақала ғылыми шу-шуға себепші болды. 2005 жылы Самарқанттағы Абдуллахан медресесінің күмбезіндегі нақыштарды көрген Гарвард университетінің аспиранты Питер Лу таңданғанынан жағасын ұстады. Оның көз алдында 1970 жылдары құрылған деп саналған, Пенроуз нақыштары деп аталған күрделі геометриялық фигуралар тұрған еді. Бұдан шығатын қорытынды, біздің сәулеткер бабаларымыз ой мен ақылда өз дәуірінен бес ғасыр озып кетіп, ғылымға жақында ғана енгізілген күрделі геометриялық фигураларды біліп қана қоймай, оларды өздерінің шығармашылық істеріне пайдаланған екен. Шындығында солай болып шықты. 11-суретте сәулеткерлік ескерткішіндегі нақыш бейнеленген. 12-сурет орта ғасыр қолжазбаларынан алынған, онда осы нақыш негізін құрайтын көпбұрыштар бейнеленген.


11


12

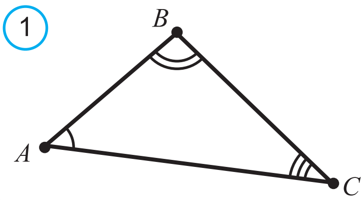
20 Үшбұрыш. Үшбұрыштардың түрлері

Бір түзуде жатпайтын үш нүктені белгілейміз. Оларды өзара кесінділермен тұтастырып шықсақ, *үшбұрыш* пайда болады *(1-сурет)*.Белгіленген үш нүкте үшбұрыштың төбесі, оларды тұтастыратын кесінділер үшбұрыштың қабырғалары дейіледі. Әдетте, "үшбұрыш" сөзінің орнына Δ белгісі қолданылады. "ΔABC" жазуы "үшбұрыш ABC" немесе "ABC үшбұрыш" деп оқылады. $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ — үшбұрыштың *бұрыштары* дейіледі. Оларды кейде анықтық үшін *ішкі бұрыштар* деп те айтады *(1-сурет)*.

Үшбұрыштың бұрыштарын $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ түрінде де белгілеуге болады. Үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштары оның негізгі элементтері деп аталады. Үшбұрыштың үш қабырғасы ұзындықтарының қосындысын оның *периметрі* дейді. Ол P әрпімен белгіленеді. Сонымен,

BAC бұрыш үшбұрыштың AB және AC қабырғалары арасында жататын бұрышы, AB және AC қабырғалар BAC бұрышқа жабысқан, BC қабырға BAC бұрыш қарсысында жатыр деген сияқты тіркестер қолданылады.

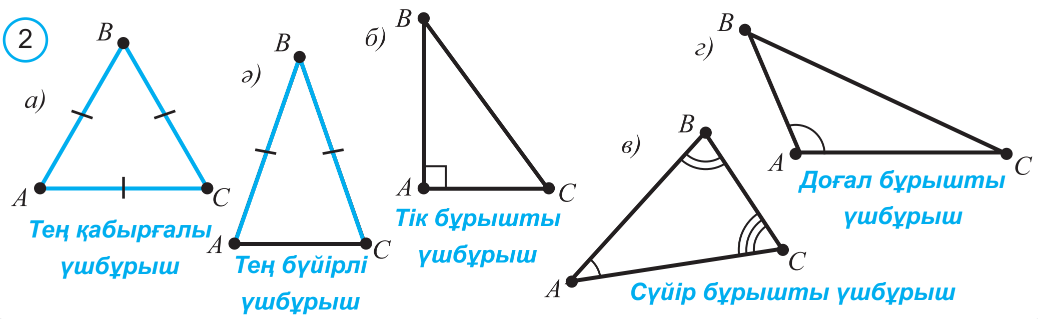
1

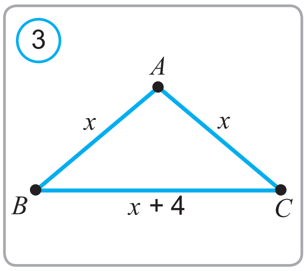


ΔABC — ABC үшбұрыш
A, B, C нүктелер — үшбұрыштардың төбелері
AB, BC, AC кесінділер — үшбұрыштардың қабырғалары
$\angle A, \angle B, \angle C$ — үшбұрыштардың бұрыштары
$P = AB + BC + AC$ — үшбұрыштардың периметрі

Қабырғалары мен бұрыштарына қарай үшбұрыштар төмендегі түрлерге бөлінеді:
үш қабырғасы өзара тең болса, *тең қабырғалы үшбұрыш (2.а-сурет)*,
бүйір қабырғалары тең болса, *тең бүйірлі үшбұрыш (2.ә-сурет)*,
бір бұрышы тік болса, *тік бұрышты үшбұрыш (2.б-сурет)*,
барлық бұрыштары сүйір болса, *сүйір бұрышты үшбұрыш (2.в-сурет)*,
бір бұрышы доғал болса, *доғал бұрышты үшбұрыш (2.г-сурет)*

2





Есеп. Периметрі 28 $см$ -ге тең болған тең бүйірлі үшбұрыштың табаны жан қабырғасынан 4 $см$ ұзын. Осы үшбұрыштың қабырғаларын тап.

Шешуі: ABC үшбұрышының жан қабырғасын x деп белгілесек, табаны $x+4$ болады *(3-сурет)*. Онда есеп шартына орай, $P = x + x + x + 4 = 3x + 4 = 28$, $x = 8$. Демек, $AB = AC = 8$ $см$; $BC = 12$ $см$. Жауап: 8 $см$; 8 $см$; 12 $см$.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Қандай фигура үшбұрыш деп аталады?

2. *PQR* үшбұрышта

а) $\angle P$ қарсысында қайсы қабырға жатады?

ә) PQ жаққа қайсы бұрыштар жанасқан?

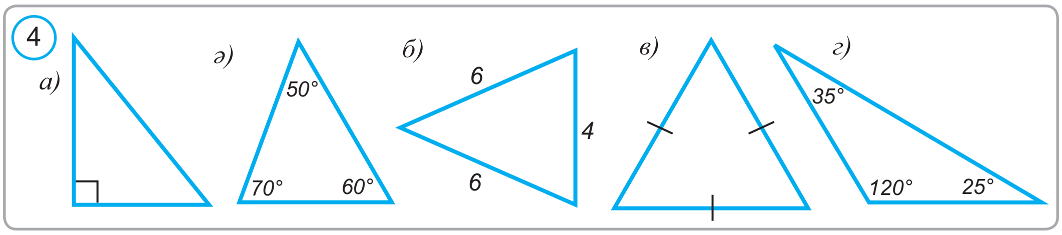
б) PQ және QR қабырғалар арасында қайсы бұрыш орналасқан?

в) PR қабырға қайсы бұрыштың қарсысында жатады?

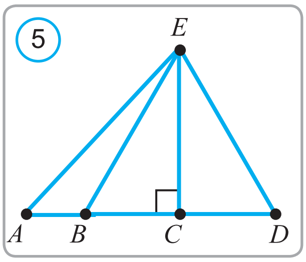
Бұл сұрақтарға фигураға қарамай жауап беруге әрекет жаса.

3. Үшбұрыштардың қандай түрлері бар? Әрбір үшбұрыш түріне біреуден үшбұрыш сал. Оларды белгіле. Үшбұрыш түрлерінің сипаттамасын, олардың қасиеттерін өрнекте.

4. 4-суреттегі үшбұрыштардың түрлерін анықта.



5. Көзбен шамалап, үш қабырғасы тең үшбұрыш жаса. Сосын қабырғаларын өлшеп, тексеріп көр.



6. Тең қабырғалы үшбұрыш сыз, бұрыштарын өлше және қорытынды шығар.

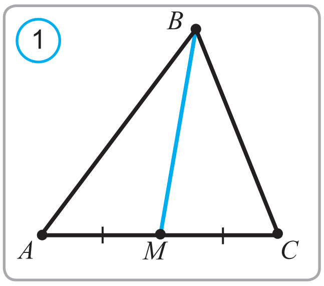
7. 5-суретте бір төбесі: а) A нүктеде; ә) B нүктеде; б) C нүктеде болатын неше үшбұрыш бар?

8. 5-суретте үшбұрыштың қандай түрлерін көріп тұрсың? Оларды түрлері бойынша дәптеріңе жаз.

9. Бір үшбұрыш сыз және оны белгіле. Сызғыштың көмегімен қабырғаларын өлше және үшбұрыштың периметрін тап.

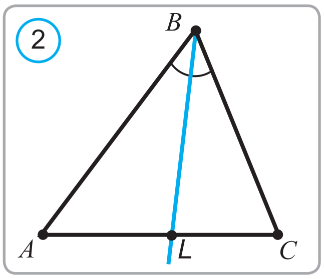
21 Үшбұрыштардың негізгі элементтері: медиана, биіктік және биссектриса

ABC үшбұрыштың B төбесін оның қарсысында жататын AC қабырғасының ортасы M нүктемен қосамыз *(1-сурет)* пайда болған BM кесінді ABC үшбұрыштың медианасы деп аталады. Бұл медиана B төбесінен шыққан немесе AC қабырғаға түскен дейіледі.



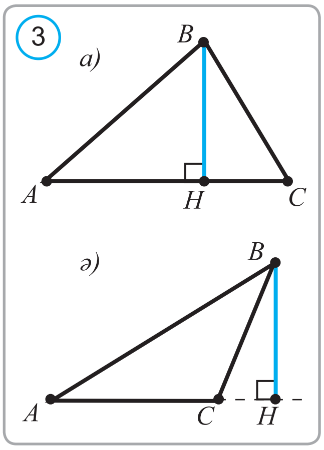
> Үшбұрыштың төбесі мен қарсы жатқан қабырғаның ортасымен қосатын кесінді медиана деп аталады.

ABC үшбұрыш B бұрышының биссектрисасын жүргіземіз *(2-сурет)*. Оның AC қабырғасымен қиылысқан нүктесін L -мен белгілейміз. Пайда болған BL кесінді ABC үшбұрышының *биссектрисасы* деп аталады.



> Үшбұрыш бұрышының биссектрисасының осы төбені қарсы жатқан қабырғадағы нүктемен қосатын кесіндіні биссектриса деп атайды.

ABC үшбұрыштың B төбесінен AC қабырғада жатқан түзуге перпендикуляр түсіреміз *(3-сурет)*. Перпендикулярдың негізін H-пен белгілейміз. Пайда болған BH кесінді ABC үшбұрышының биіктігі деп аталады.



> Үшбұрыштың төбесінен қарсы жатқан қабырғасына жүргізілген перпендикуляр үшбұрыштың биіктігі деп аталады.

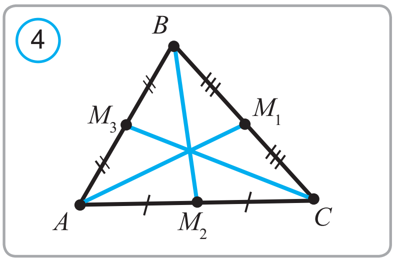
Үшбұрыштың үш төбесі болғандықтан әрбір бұрыштың үштен медианасы, биіктігі, биссектрисасы болады.

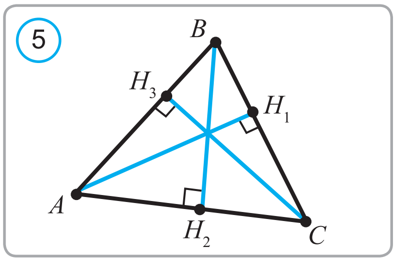
4-суреттегі AM_1, BM_2 және CM_3 кесінділер — ABC үшбұрыш медианалары.

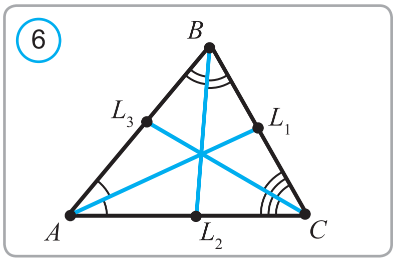
5-суреттегі AL_1, BL_2 және CL_3 кесінділер — ABC үшбұрыш биссектрисалары.

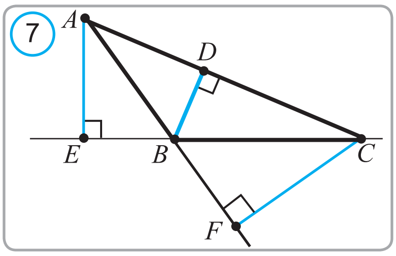
6-суреттегі AH_1, BH_2 және CH_3 кесінділер — ABC үшбұрыш биіктіктері.

Бұл маңызды түсініктердің қасиеттерімен кейінгі сабақтарда танысамыз.









Геометриялық зерттеулер

1. Кез келген үшбұрыш сал. Оның медианаларын өткіз *(4-сурет)*. Нені байқадың? Тәжірибені тағы екі үшбұрыш үшін орындап, анықталған қасиетті тұжырым түрінде өрнекте.
2. Кез келген үшбұрыш сал. Оның барлық биіктіктерін жүргіз *(5-сурет)*. Нені байқадың? Тәжірибені тағы екі үшбұрыш үшін орындап, анықталған қасиеттерді тұжырым түрінде өрнекте.
3. Кез келген үшбұрыш сал. Оның барлық биссектрисаларын жүргіз *(6-сурет)*. Нені байқадың? Тәжірибені тағы екі үшбұрыш үшін орындап, анықталған қасиеттерді тұжырым түрінде өрнекте.

Тәжірибе негізінде анықталған қасиеттерді теорема деп санасақ бола ма? Неге?

Жаттығу. Доғал бұрышты үшбұрыштың биіктігін жүргіз.

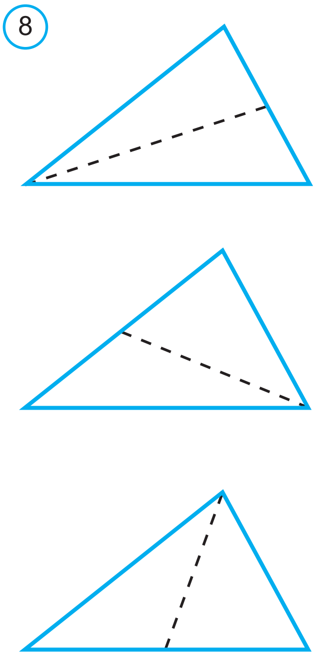
Орындау: Үшбұрыштың, соның ішінде доғал бұрышты үшбұрыштың да үш биіктігі бар. Доғал бұрышты ABC үшбұрышты қарастырамыз *(7-сурет)*. Доғал бұрышының төбесінен түсірілген BD биіктік үшбұрыштың ішінде жатады. Сүйір бұрышы A төбесінен биіктік түсіру үшін, осы бұрыштың қарсысындағы BC қабырғаны жалғастырамыз және BC қабырғада A нүктеден AE перпендикуляр түсіреміз. Пайда болған AE кесінді ABC үшбұрышының A төбесінен түсірілген биіктігі болады. Дәл осылай, AB қабырғаға CF биіктік түсіру мүмкін.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Үшбұрыштың медианасы деген не? үшбұрыштың неше мединасы бар? Сызбада салып көрсет.

2. Үшбұрыштың биіктігі деген не? Үшбұрыштың неше биіктігі бар? Сызбада салып көрсет.
3. Үшбұрыштың биссектрисасы деген не? Үшбұрыштың неше биссектрисасы бар? Сызбада салып көрсет.
4. Бұрыш биссектрисасы мен үшбұрыш биссектрисасының арасындағы ұқсастық пен айырмашылықты айт?
5. *(Іс жүзіндік жаттығу)*. Үш бірей үшбұрышты түрлі медианалар бойлап қи *(8-сурет)*. Пайда болған 6 үшбұрыштан бір үшбұрыш жаса.
6. Үшбұрыштың қайсы элементтері әрқашан үшбұрыштың ішінде жатады?
7*. Қайсы үшбұрышта үш биіктігі де үшбұрыштың бір төбесінде қиылысады?
8*. Үшбұрыштың биіктігі оның үш қабырғасынан да кіші болуы мүмкін бе?
9. Периметрі 36-ға тең үшбұрыштың биіктігі оны периметрлері 18 және 24-ке тең үшбұрыштарға бөледі. Берілген үшбұрыштың биіктігін тап.
10. Периметрі 36-ға тең үшбұрыштың биссектрисасы оны периметрлері 24 және 30-ға тең үшбұрыштарға бөледі. Берілген үшбұрыштың биссектрисасын тап.
11. ABC үшбұрышты $AB = BC$ және BD медианасы 4 *см*. Егер ABD үшбұрыштың медианасы 12 *см* болса, ABC үшбұрыштың периметрін тап.

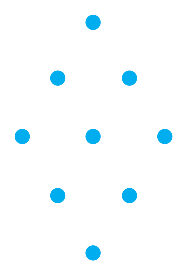
8



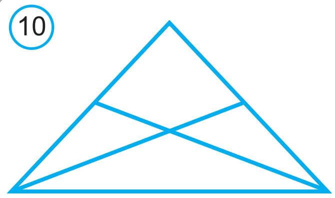
Геометриялық басқатырғыштар

1. Бес бір түрлі таяқшадан 2 үшбұрыш жаса.
2. Тоғыз бірдей таяқшадан 5 үшбұрыш жаса.
3. Төбелері 9-суретте көрсетілген нүктелерде жататын неше тең бүйірлі үшбұрыш сызуға болады?
4. 10-суретте неше үшбұрыш бар?

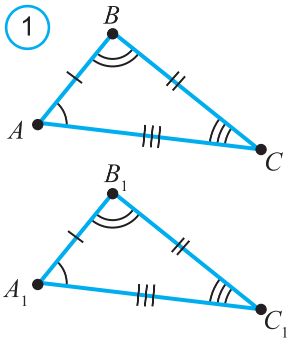
9



10



22 Үшбұрыштар теңдігінің бірінші (ҚБҚ) белгісі



$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$,

$AC = A_1C_1$

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$,

$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$,

$\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$

Геометриялық фигуралардың теңдігі сипаттамасына қарай, егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы басқа бұрыштың сәйкес екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышқа тең болса, онда мұндай бұрыштар тең болады.1-суретте ABC және $A_1B_1C_1$ — үшбұрыштар бейнеленген. Олардан кез келген біреуін екіншісіне беттестіруге болады. Онда бір үшбұрыштың төбесі және үш қабырғасы сәйкесінше екінші үшбұрыштың үш төбесі және үш қабырғасымен дәл келеді. Мұнда үшбұрыштардың бұрыштары да беттесетіні анық.

ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштардың теңдігі

$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

түрінде өрнектеледі. Сызбада тең бұрыштар бірдей доғалармен, тең қабырғалар бірдей сызықшалармен 1-суретте бейнеленгендей ажыратып көрсетілген.

Белсенділік сұрақтары.

Үшбұрыш пішінді екі жер алаңының өзара теңдігін іс жүзінде қалай тексереміз? Оларды бір-бірінің үстіне қоюға болмайды?

Екі үшбұрыштың өзара тең немесе тең емес екенін анықтау үшін бір-бірінің үстіне қою шарт па? Олай істемесе болады. Оны үшбұрыштың кейбір элементтерін салыстырып шешуге болады екен. “Үшбұрыштың теңдік белгілер” деп аталған теоремалар осы жайлы.

Бұл теоремалардың “белгі” деп аталуының себебі, олардың көмегімен үшбұрыштардың тең немесе тең емес екені жайлы шешім шығаруға болады.

Жалпы айтқанда, геометрияда “белгі” – фигураның бір қасиетін анықтауға көмектесетін шарттар туралы теоремадан құралады.

ABC үшбұрыш берілген болсын. Оған тең басқа үшбұрышты төмендегі әдіспен жасаймыз. A бұрышты өлшейміз және жазықтықтың басқа бір жеріне оған тең A_1 бұрыш саламыз. A_1 бұрыштың қабырғаларына сәйкес $A_1B_1 = AB$ және $A_1C_1 = AC$ кесінділерді қоямыз. B_1 және C_1 нүктелерді қосамыз. Нәтижеде, ABC үшбұрыш пен екі қабырғасы және олардың арасындағы бір бұрышы тең $A_1B_1C_1$ үшбұрышы пайда болды. Сонда $A_1B_1C_1$ үшбұрыш ABC үшбұрышқа тең болады.

Төмендегі теорема осыны дәлелдейді. Ол "Екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша үшбұрыштардың теңдігі туралы теорема" деп аталады. Біз оны қысқаша үшбұрыштар теңдігінің "ҚБҚ белгісі" дейміз. *(ҚБҚ жазуы, "қабырға", "бұрыш", "қабырға" сөздерінің бас әріптерінен құралған)*.

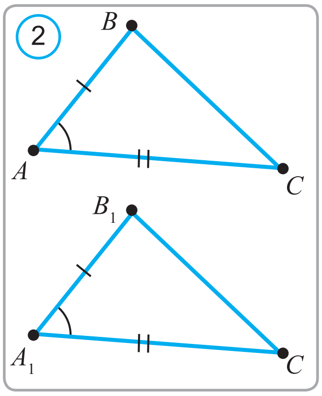
Теорема. ***(Үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісі)*. Егер бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышы екінші үшбұрыштың екі қабырғасы мен олардың арасындағы бұрышына сәйкесінше тең болса, онда мұндай бұрыштар тең болады.** *(2-сурет)*

$\Delta ABC \quad \Delta A_1B_1C_1$
$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ \angle A = \angle A_1$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

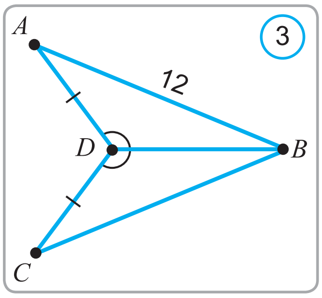
Дәлелдеу. $\angle A = \angle A_1$ болғандықтан, ABC үшбұрышты $A_1B_1C_1$ үшбұрышқа солай қою керек, онда A төбесі A_1 төбесіне, AB және AC қабырғалары сәйкесінше, A_1B_1 және A_1C_1 сәулелердің үстіне түседі. $AB = A_1B_1$ және $AC = A_1C_1$ болғандықтан, AB қабырға A_1B_1 қабырғамен, AC қабырға A_1C_1 қабырғамен беттеседі. Сондай-ақ, B нүкте B_1 нүктемен, C нүкте C_1 нүктемен беттеседі. Сонымен, B_1C_1 және BC қабырғалар да беттеседі. Нәтижеде, ABC үшбұрыштың үш төбесі, $A_1B_1C_1$ үшбұрыштың үш төбесімен беттеседі.

Демек, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштар өзара тең.

Теорема дәлелденді.

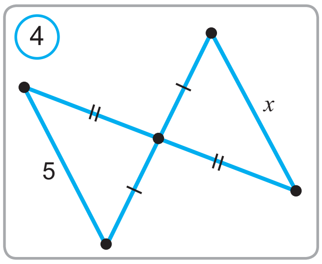


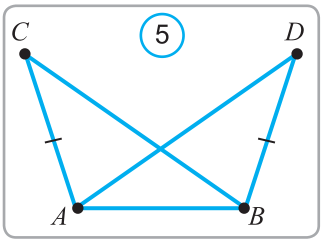
Есеп. 3-суретте берілген мәліметтер бойынша BC кесідіні тап.

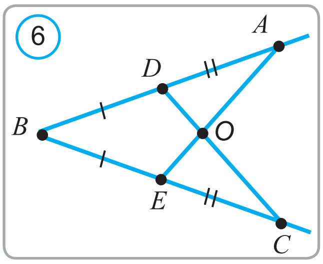


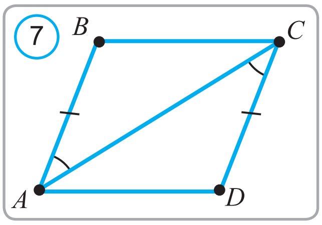
Шешуі: ADB және CDB үшбұрыштарды қарастырамыз. $AD = DC$, $\angle ADB = \angle CDB$, BD — бұл үшбұрыштар үшін ортақ қабырға. Демек, үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне орай, $\Delta ADB = \Delta CDB$, сонымен, $CB = AB = 12$ екені белгілі болады.

Жауап: 12.



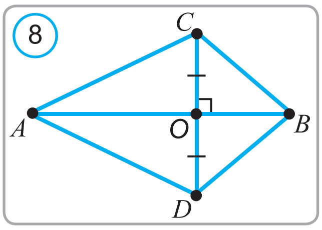


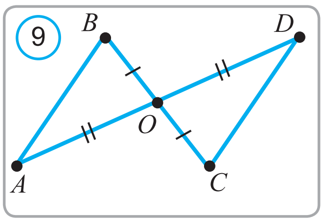


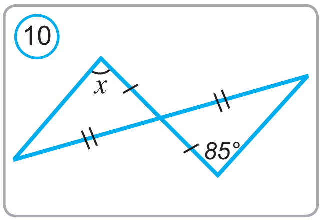


Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Қандай үшбұрыштар тең дейіледі?
2. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ теңдік үшбұрыштардың қайсы элементтерінің теңдігін білдіреді?
3. 4-суреттен белгісіз кесінді x-ті тап.
4. ҚБҚ белгісіне қарай үшбұрыштар теңдігі қандай элементтер бойынша анықталады?
5. Үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгілерін түсіндір.
6. Егер 5-суретте $\angle CAB = \angle ABD$ болса, $AD = BC$ екенін көрсет.
7. 6-суретте $\angle BAC = \angle BCO$ екенін көрсет.
8. 7-суретте $\Delta ABC = \Delta CDA$ екенін көрсет.
9. 8-суретте $\Delta ABC = \Delta ABD$ болатынын дәлелде.
10. AD және BC кесінділер O нүктеде қиылысады және бұл нүктеде тең екіге бөлінеді *(9-сурет)*.
    а) $\Delta AOB = \Delta DOC$ екенін;
    ә) $BD = AC$ екені;
    б) $\Delta ABD = \Delta DCA$ екенін дәлелде.
    в) Егер AOB үшбұрышта $\angle A = 35°$ болса $\angle B = 62°$ болса, DOC үшбұрыштың D және C бұрыштарын тап.
11. 10-суреттегі белгісіз x-ті тап.
12. Бір үшбұрыш периметрі екінші үшбұрыштың периметрінен үлкен. Осы үшбұрыштар тең болуы мүмкін бе?
13. ABC үшбұрыштың AB қабырғасына D нүкте, $A_1B_1C_1$ үшбұрыштың A_1B_1 қабырғасында D_1 нүкте алынған. $\Delta ADC = \Delta A_1D_1C_1$ және $BD = B_1D_1$ теңдіктер белгілі. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштар теңдігін дәлелде.

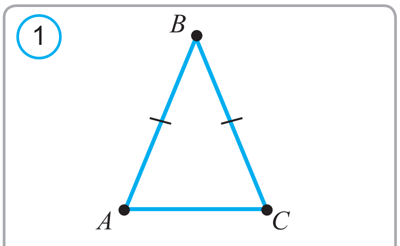






23 Теңбүйірлі үшбұрыштың қасиеті

Екі қабырғасы тең үшбұрышты *тең бүйірлі үшбұрыш* деп атаған едік. Табанына қарсы жатқан ұшы теңбүйірлі үшбұрыштың төбесі деп аталады.



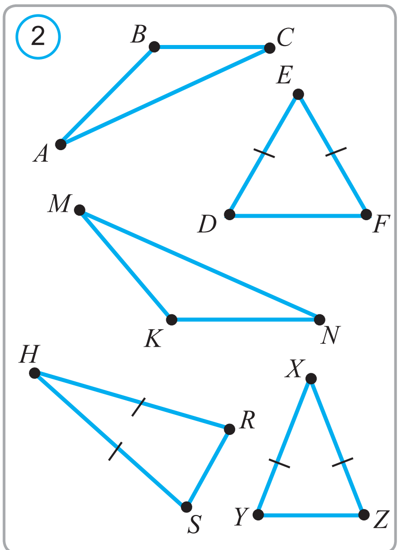
ABC — **тең бүйірлі үшбұрыш**

AB, BC — **бүйір қабырғалары**

AC — **табаны**

Белсенділік жаттығуы

2-суреттегі үшбұрыштардың қайсысы тең бүйірлі? Олардың табаны мен бүйір қабырғаларын айт.



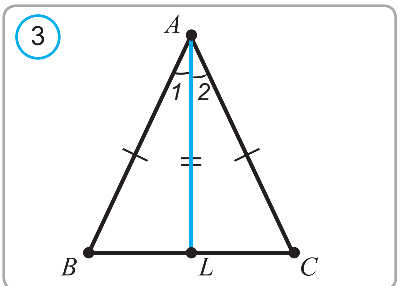
Геометриялық зерттеу

Кез келген тең бүйірлі үшбұрыш сал. Оның табанындағы бұрыштарды өлше және оларды салыстыр. Тәжірибені 1–3 басқа тең бүйірлі үшбұрыштар үшін қайтала және өз тұжырымыңды дәлел ретінде өрнекте. Тәжірибенің нәтижесінде табылған бұл қасиетті барлық тең бүйірлі үшбұрыштар үшін орынды деуге бола ма?

Теорема. **Тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштары тең.**

$\Delta ABC,\ AB = AC$ ⇒ $\angle B = \angle C$

Дәлелдеу. Айталық, AL — ABC үшбұрыштың биссектрисасы болсын *(3-сурет)*. ABL және ACL үшбұрыштарды қарастырамыз. Біріншіден, AL қабырға ортақ, екіншіден теорема шарты бойынша $AB = AC$ (ΔABC — тең бүйірлі). Үшіншіден, $\angle 1 = \angle 2$, өйткені AL — биссектриса.



Демек, үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне қарай, $\Delta ABL = \Delta ACL$ болады.

Ондай болса, $\angle B = \angle C$.

Теорема дәлелденді.

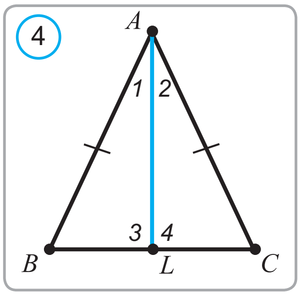
Геометриялық зерттеу

Тең бүйірлі үшбұрыш сал. Оның төбесінен биссектриса түсір. Биссектриса түскен нүкте табанды бөлген бөлектердің ұзындығын өлшеп салыстыр. Бұдан қандай қорытынды шығады? Сосын биссектриса мен табанда пайда болған бұрыштарды транспортирде өлше және салыстыр. Бұдан қандай қорытынды шығады? Бұл қорытындыларды дәлел ретінде өрнекте. Тәжірибе нәтижесіде табылған бұл қасиеттерді барлық тең бүйірлі үшбұрыштар үшін орынды деп айту мүмкін бе?

Теорема. **Тең бүйірлі үшбұрыштың табанына жүргізілген медианасы оның биссектрисасы да, биіктігі де болып табылады** (*4-сурет*).

ΔABC, $AB = AC$, AL – биссектриса. ⇒ AL – медиана және биіктік

Дәлелдеу. AL кесінді ABC үшбұрыштың биссектрисасы болса, жоғарыда дәлелденген теорема бойынша $\Delta ABL = \Delta ACL$ болады. Үшбұрыштар теңдігінен $BL = LC$ және $\angle 3 = \angle 4$ екенін табамыз.



Демек, L нүкте BC қабырғаның ортасы, AL болса ABC үшбұрыштың медианасы екен.

$\angle 3$ және $\angle 4$ өзара тең және сыбайлас бұрыштар болғандықтан, олар тік бұрыштар.

Демек, AL кесінді ABC үшбұрыштың биіктігі де болады екен.

Теорема дәлелденді.

Қорытынды. Сонымен тең бүйірлі үшбұрыштың төбесінен түсірілген биссектрисасы, медианасы және биіктігі беттеседі екен.

Жаттығу.

1. Тең бүйірлі үшбұрыштың биссекртисалары, медианалар мен биіктіктері туралы не айтуға болады?

Есеп. Тең бүйірлі ABC үшбұрыштың бүйір қабырғаларына AD және CF медианалар түсірілген. $\Delta ADC = \Delta CFA$ және $\Delta ADB = \Delta CFB$ екенін дәлелде *(5-сурет)*.

ΔABC, $AB = BC$, AD және CF — медианалар ⇒ $\Delta ADC = \Delta CFA$; $\Delta ADB = \Delta CFB$

Дәлелдеу. $AB = BC$ болғандықтан, бұл қабырғалардан AD және CF медианалар бөлген кесінділер өзара тең болады:

$$AF = FB = BD = CD. \qquad (1)$$

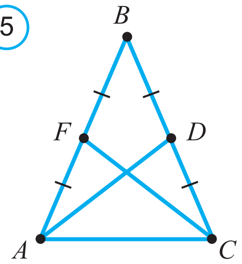
ә) ADC және CFA үшбұрыштарда

1. $\angle ACD = \angle FAC$, өйткені ΔABC — тең бүйірлі;
2. AC қабырға ортақ;
3. $AF = CD$ — (1) теңдігіне орай.

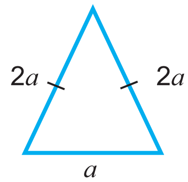
Демек, үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне қарай $\Delta ADC = \Delta CFA$.

ә) $\Delta ADB = \Delta CFB$ екенін өз бетіңше дәлелде.

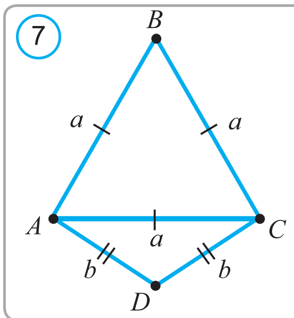
5



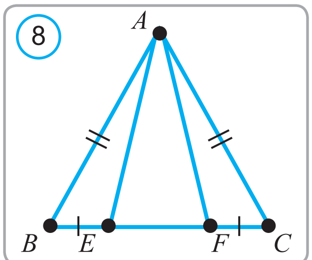
6



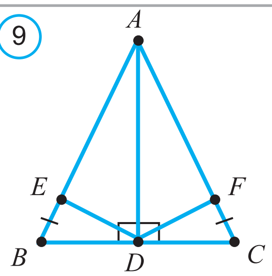
7



8



9



Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Қандай үшбұрыштарды тең бүйірлі дейміз?

2. Тең бүйірлі үшбұрыштың қайсы бұрыштары тең болады?

3. 5-суретте $P = 50$ *см* болса, $a = ?$

4. 6-суретте $P_{ABC} = 36$ және $P_{ADC} = 28$ болса, $a = ?$, $b = ?$

5. Тең бүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғаларына жүргізілген медианалары тең болатынын дәлелде.

6. 7-суретте $AB = AC$, $BE = FC$. а) $\Delta ABE = \Delta ACF$; ә) $AE = AF$; с) $\Delta ABF = \Delta ACE$ екенін дәлелде.

7. 8-суретте $AB = AC$, $BE = CF$. а) $\Delta AED = \Delta AFD$; ә) $\Delta BED = \Delta CFD$ теңдіктерді дәлелде.

8. Тең бүйірлі үшбұрыштың барлық бұрыштары тең екенін дәлелде.

9. Екі тең бүйірлі үшбұрыштардың табаны мен осы табанына жүргізілген биіктіктеріне сәйкес тең болса, бұл бұрыштар тең болатынын дәлелде.

10. Тең бүйірлі үшбұрыштың табаны қабырғасынан 3 *см* үлкен, бірақ бүйір қабырғаларының қосындысынан 5 *см* кіші. Үшбұрыштардың қабырғаларын тап.

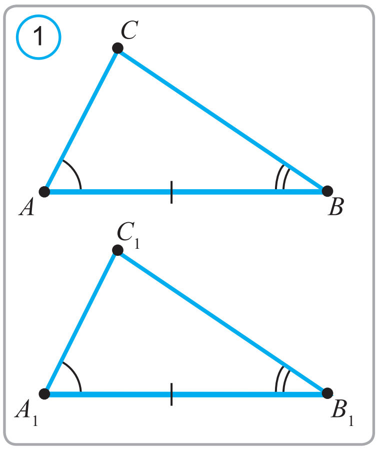
11. Тең бүйірлі үшбұрыш қабырғаларының орталары тұтастырылса, тең бүйірлі үшбұрыш пайда болатынын дәлелде.

24 Үшбұрыштар теңдігінің екінші (БҚБ) белгісі

Енді үшбұрыштардың бір қабырғасы және оған іргелес бұрышы бойынша теңдік белгілерін қарастырамыз. Бұдан былай “үшбұрыштар теңдігінің **БҚБ** белгісі” дейміз.

Теорема. ***(Үшбұрыштар теңдігінің БҚБ белгісі).*** **Егер бір үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған іргелес бұрыштары сәйкесінше екінші үшбұрыштың бір қабырғасы мен оған іргелес бұрыштарына тең болса, онда мұндай бұрыштар тең болады.**

ΔABC және $\Delta A_1B_1C_1$,
$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ ⇒ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

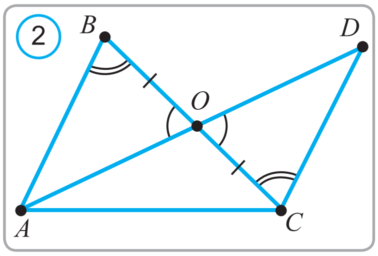


Дәлелдеу. ABC үшбұрышын $A_1B_1C_1$ үшбұрышының үстіне солай қояйық, A төбесі A_1 төбесімен AB қабырғасы A_1B_1 қабырғасымен беттессін және C мен C_1 төбелер A_1B_1 түзудің бір жағында жатсын.

Олай болса, $\angle A = \angle A_1$ болғандықтан, AC қабырға A_1C_1 сәуледе жатады, $\angle B = \angle B_1$ болғандықтан, BC қабырға B_1C_1 сәуледе жатады. Сондықтан С нүкте AC және BC сәулелердің ортақ нүктесі ретінде A_1C_1 және B_1C_1 сәулелерінің екеуінен де өтеді. Онда, C нүкте A_1C_1 және B_1C_1 сәулелерінің ортақ нүктесі — C_1 мен беттеседі. Нәтижеде, AC және A_1C_1, BC және B_1C_1 қабырғалар да беттеседі. Демек, ABC және $A_1B_1C_1$ бұрыштар дәл беттеседі, бұл олар тең дегені.

Теорема дәлелденді.

Есеп. 2-суретте берілгендерді пайдаланып, $\Delta AOB = \Delta DOC$ екенін дәлелде.



Шешуі: $\angle AOB$ және $\angle DOC$ — вертикаль бұрыштар болғандықтан өзара тең болады. Демек,

$$BO = OC,\ \angle ABO = \angle DCO,\ \angle AOB = \angle DOC$$

және үшбұрыштар теңдігінің БҚБ белгісіне қарай, $\Delta AOB = \Delta DOC$.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Үшбұрыштардың теңдігі БҚБ белгісі бойынша қайсы элементтерді салыстыру арқылы анықталады?

2. Үшбұрыштар теңдігінің БҚБ белгісін түсіндір.

3. 3-суретте $\Delta ABD = \Delta ACD$ екенін дәлелде.

4. 4-суреттегі белгісіз x-ты тап.

5. 5-суретте AC кесінді BAC және BCD бұрыштарының биссектрисасы болса, $\Delta ABC = \Delta ADC$ екенін дәлелде.

6. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ және $\angle B = \angle B_1$ екені белгілі. AB және A_1B_1 қабырғаларға сәйкесінше D және D_1 нүктелер $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$ болатындай етіп алынған. Олай болса $\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$ екенін дәлелде.

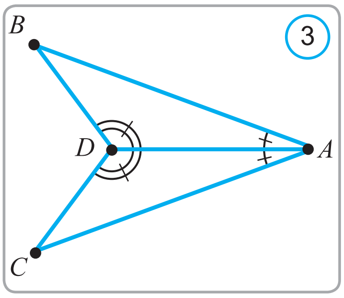
7. AB және CD кесінділер O нүктеде қиылысады. Егер $BO = CO$ және $\angle ACO = \angle DBO$ болса, ACO және DBO үшбұрыштар тең екенін дәлелде.

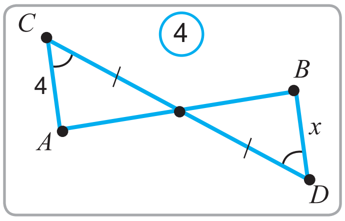
8. Егер ABC үшбұрышта $AB = AC$, BE және CD — биссектриса болса, $BE = CD$ екенін дәлелде *(6-сурет)*.

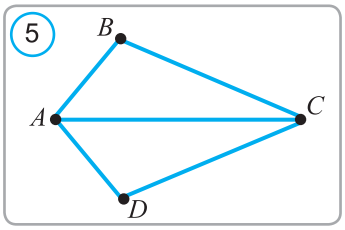
9. $\Delta OAC = \Delta ODB$ болатынын дәлелде *(7-сурет)*.

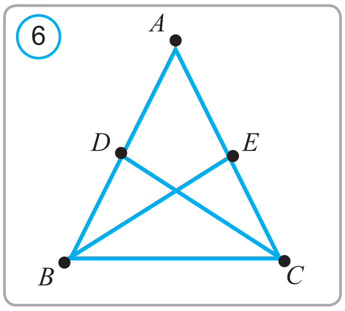
10. ABC және ADC үшбұрыштар тең. B және D нүктелер AC түзуінің түрлі жағында жатады. ABD және BCD үшбұрыштардың тең бүйірлі екенін дәлелде.

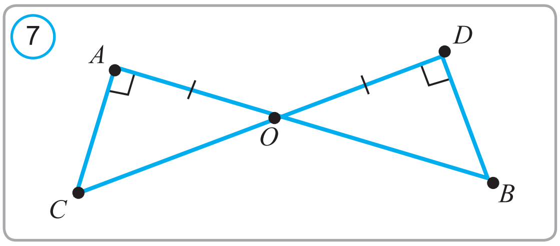
11. 8-суреттегі мәліметтер негізінде AC және BD кесінділерді тап.

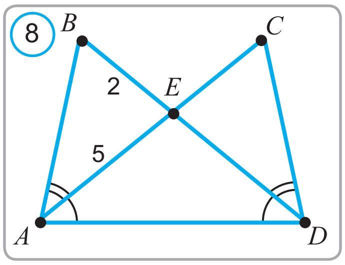








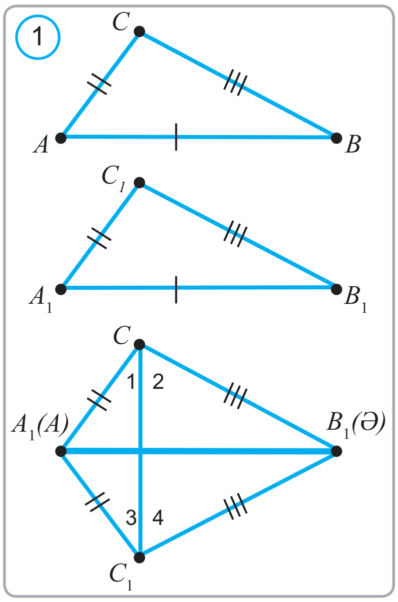




25 Үшбұрыштар теңдігінің үшінші (ҚҚҚ) белгісі

Енді үшбұрыштардың үш қабырғасы бойынша теңдік белгісімен танысамыз. Бұдан былай оны “үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісі” дейміз.

Теорема. ***(Үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісі).*** **Егер бір үшбұрыштың үш қабырғасы екінші үшбұрыштың сәйкес үш қабырғасына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады.**



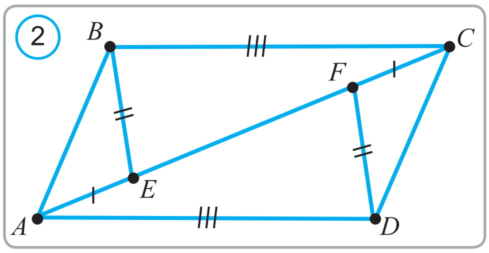
Берілген: ΔABC және $\Delta A_1B_1C_1$; $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Дәлелдеу. Айталық, ABC үшбұрыштың ең үлкен қабырғасы AB болсын. ABC үшбұрышты қойғанда, AB төбелер A_1B_1 қабырғамен беттебет түссін де C және C_1 төбелер A_1B_1 түзуінің әр жағында жатсын *(1-сурет)*. Олай болса, $AC = A_1C_1$ және $BC = = B_1C_1$ болғандықтан A_1C_1C және B_1C_1C үшбұрыштар тең бүйірлі болады. Тең бүйірлі үшбұрыштардың қасиетіне орай, $\angle 1 = \angle 3$ және $\angle 2 = \angle 4$ болады. Сондықтан, $\angle ACB = \angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$ болады.

Демек, ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда: $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ және $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$. Үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне қарай, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. ***Теорема дәлелденді.***

Жаттығу. Егер екі үшбұрыштың үш қабырғасы да сәйкесінше тең болса, онда олардың бұрыштары да сәйкесінше өзара тең болады.



Есеп. 2-суретте берілгендерді пайдаланып, а) $\Delta AFD = \Delta CEB$;
ә) $\Delta AEB = \Delta CFD$ екенін дәлелде.

Дәлелдеу: 2-суретте берілгендерге қарай $AE = FC$, $BE = FD$ және $AD = BC$.

а) $AF = AE + EF$ болғандықтан $EC = EF + FC = EF + AE = AF$. Демек, ΔAFD және ΔCEB

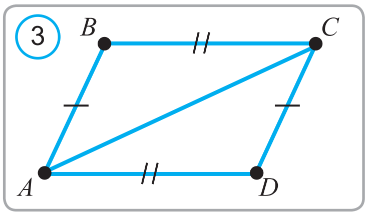
сәйкес қабырғалары өзара тең және үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісіне орай $\Delta AFD = \Delta CEB$.

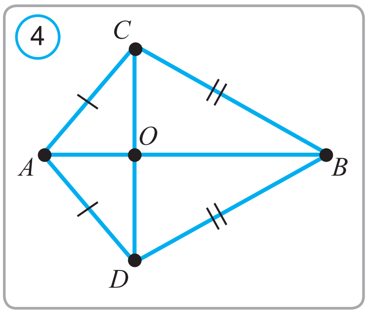
ә) $\Delta AFD = \Delta CEB$ болғандықтан $\angle BEF = \angle EFD$. Олай болса, сыбайлас бұрыштар болғандықтан $\angle AEB = \angle CFD$.

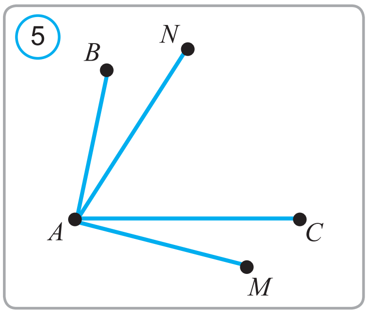
AEB және CFD үшбұрыштарда:

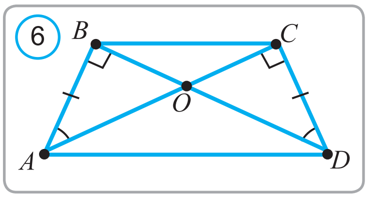
1. $AE = FC$;
2. $BE = FD$;
3. $AEB = CFD$.

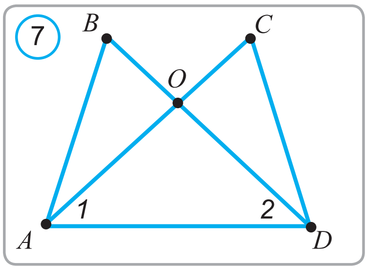
Демек, үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне қарай, $\Delta AEB = \Delta CFD$ болады.











Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. ҚҚҚ белгісінде үшбұрыштар теңдігі қандай элементтер бойынша салыстырылып анықталады?

2. Үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгілерін түсіндір.

3. 3-суретте берілгендерге қарай $\Delta ABC = \Delta CDA$ екенін дәлелде.

4. 4-суретте: а) $\Delta ABC = \Delta ABD$; ә) $\Delta BOC = \Delta BOD$; б) $\Delta AOC = \Delta AOD$; в) $AB \perp CD$ екенін дәлелде.

5. ABC және ABD — табаны AB болған тең бүйірлі үшбұрыштар болса, $\Delta ACD = \Delta BCD$ екенін дәлелде.

6. Егер 5-суретте $BA = AM$, $AC = AN$, $\angle BAC = \angle NAM$ болса, төбелері A, B, C, M және N нүктелерде болған барлық үшбұрыштар жұбын анықта.

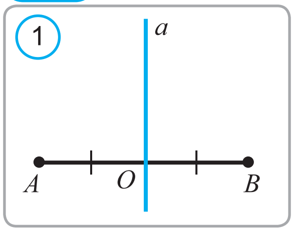
7. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда $AB = A_1B_1$ және $BC = B_1C_1$ болып, олардың периметрлері тең болса, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ екенін көрсет.

8.* AB және CD кесінділер қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінеді. $\Delta ACD = \Delta BDC$ екенін дәлелде.

9. 6-суретте неше тең үшбұрыштар жұбы бар екенін анықта.

10*. Егер 7-суретте: а) $\angle 1 = \angle 2$, $AC = BD$; ә) $\angle 1 = \angle 2$, $BO = OC$, $AB = CD$ болса, $\Delta ABD = \Delta ACD$ екенін көрсет.

26 Кесіндінің орта перпендикулярының қасиеті

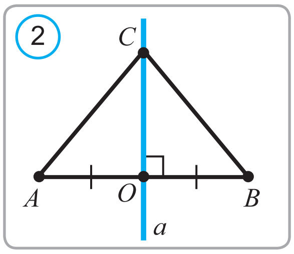


Енді үшбұрыштар теңдік белгісінің теоремаларды дәлелдеуде қолданылуын үйренеміз.

AB кесінді берілген болсын. Оның ортасы болған O нүктеден AB кесіндіге перпендикуляр a түзу жүргіземіз *(1-сурет)*. Бұл түзу AB кесіндінің *орта перпендикуляры* деп аталады.

Теорема. **Кесіндінің орта перпендикулярының кез келген нүктесі кесіндінің ұштарынан теңдей қашықтықта жатады.**

AB кесінді, C — AB кесінді орта перпендикулярының кез келген нүктесі *(2-сурет)*. ⇒ $AC = BC$



Дәлелдеу. ACO және BCO үшбұрыштарында *(2-сурет)*:

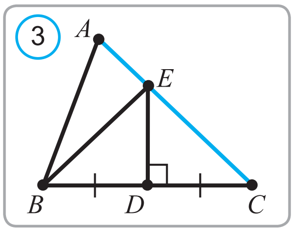
1. OC — ортақ қабырға;
2. $AO=BO$ — шартқа қарай;
3. $\angle AOC=\angle BOC=90°$ — шартқа қарай.

Демек, үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне сәйкес

$$\Delta AOC=\Delta BOC. \text{ Сөйтіп, } AC=BC.$$

Теорема дәлелденді.

Есеп. ABC үшбұрыштың BC қабырғасына түсірілген орта перпендикуляр AC қабырғасын E нүктеде қиып өтеді. Егер BE = 6 *см*, AC = 8,4 *см* болса, AE және CE кесіндіні тап.



Шешуі: ABC үшбұрыш BC қабырғаның орта перпендикуляры DE болсын *(3-сурет)*. Кесінді орта перпендикулярының қасиетіне сәйкес, $CE = BE$ = 6 *см*.

$AE+EC=AC$ болғандықтан,

$$AE=AC-EC = 8{,}4-6 = 2{,}4 \text{ (см)}.$$

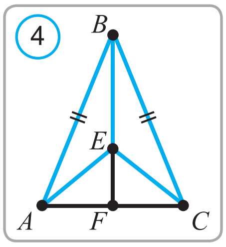
Жауап: AE = 2,4 *см*, CE = 6 *см*.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Кесіндінің орта перпендикуляры деген не?

2. Кесіндінің орта перпендикулярының қасиетін түсіндір.

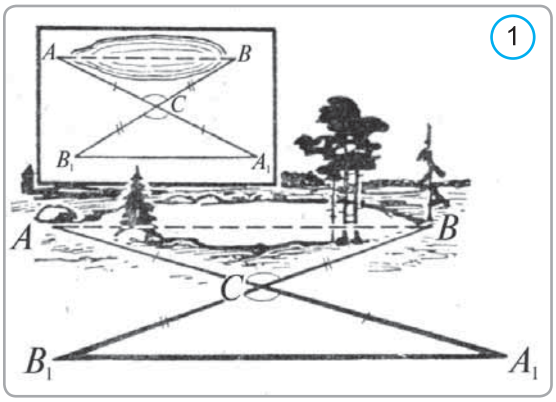
3. Бір үшбұрыш сыз және оның әр қабырғасына орта перпендикуляр жүргіз. Нені байқадың? Сызбаңды сыныптасыңның сызбасымен салыстыр және анықтаған қасиетті тұжырым ретінде өрнекте.
4. Қандай үшбұрышта бұрыштың қабырғасына түсірілген орта перпендикуляр осы қабырғаға жүргізілген биіктікпен беттеседі?
5. ABC үшбұрыштың BC қабырғасына жүргізілген орта перпендикуляр AC қабырғаны D нүктеде қиып өтеді. Егер BD = 7,2 *см*, AD = 3,2 *см* болса, AC неге тең?
6. ABC және ABD тең бүйірлі үшбұрыштың AB табаны ортақ. CD түзу AB кесіндінің орта перпендикуляры болатынын дәлелде.
7*. ABC тең бүйірлі үшбұрыштың AB қабырғасына өткізілген орта перпендикуляр BC қабырғаны D нүктеде қиып өтеді. Егер ADC үшбұрыштың периметрі 24 *см* –ге тең және AB = 16 *см* болса, AC табанын тап.
8*. Үшбұрыштың қабырғаларына жүргізілген орта перпендикулярлар бір нүктеде қиылысатынын дәлелде.
9. Тең бүйірлі ABC үшбұрыштың табанына жүргізілген BF биссектрисада E нүкте алынған (*4-сурет*). $\Delta ABE = \Delta CBE$ теңдікті ҚҚҚ белгіні: а) пайдаланып; ә) пайдаланбай дәлелде.



27 Іс жүзіндік жаттығу

Көлдің кеңдігін өлше.

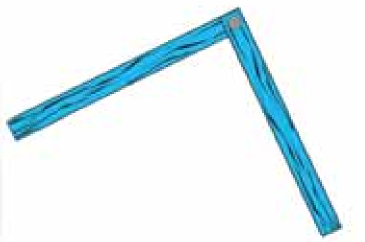
Айталық, A және B нүктелер көлдің шеткі нүктелері болсын *(1-сурет)*. Олай болса, AB кесіндіні тікелей өлшеуге болмайтыны анық. Құрлықта қандай салу жұмыстарын атқарып бұл қашықтықты өлшеуге болады?



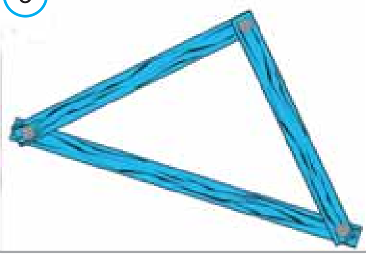
Шешуі: Жерде сондай С нүктені таңдаймыз, CA және CB кесінділер арқылы A және B нүктеге баруға болатын C нүктені таңдаймыз және кез келген ABC үшбұрыш саламыз. AC және BC қабырғаларын жалғастырып, $A_1C = AC$ және $B_1C = BC$ кесінділерді қосамыз. A_1 және B_1 нүктелерді тұтастырамыз. Нәтижеде, үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне сәйкес $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ болады. Сөйтіп, $AB = A_1B_1$ екені келіп шығады.

Демек, салынған A_1B_1 кесіндінің ұзындығын өлше, AB кесіндінің де ұзындығын тапқан боламыз.

2

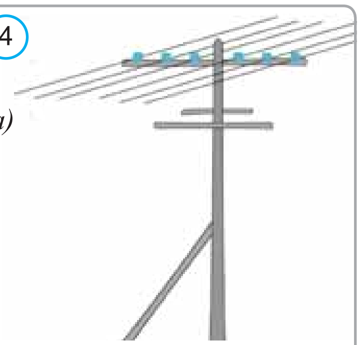


3



4

а)



ә)

Үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісіне негізделіп үшбұрыштың "қатты" (берік) фигура екенін негізде.

Екі ағаш тақтайшаның (рейканың) ұшын бір-біріне 2-суретте көрсетілгендей етіп шегемен біріктіреміз. Пайда болған фигура берік болмайды, өйткені оның еркін ұштарын түрлі жаққа бұрып, қабырғалары арасындағы бұрышты қалағанша өзгертуге болады.

Енді бұл рейкалардың еркін ұшына үшінші рейканы 3-суретте көрсетілгендей етіп, шегемен қағып, біріктіреміз. Пайда болған үшбұрыш берік болады. Өйткені қанша ұрынсақ та оның қабырғаларын бұрып, бұрыштарды өзгерте алмаймыз.

1. Бұның дұрыстығы қайсы теоремадан шығады?

2. Үшбұрыштың берік фигура екенін тұрмыста қай жерде пайдаланылатынын 4-сурет арқылы айтып бер.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Үшбұрыш – «қатты фигура» дегенде нені түсінесің?
2. Үшбұрыштың беріктігі қайсы теореманың көмегімен түсіндіріледі?
3. Үшбұрыштардың беріктігі қай жерлерде қолданылады? (*4-сурет*)
4. $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ екені белгілі. ABC және $A_1C_1B_1$ үшбұрыштарда $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ және $\angle C_1 = 90°$. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштардың қалған бұрыштарын тап.
5. ABC және DEF тең бүйірлі үшбұрыштар тең. ABC үшбұрышта $AC = BC$ және $AB = 2$ $см$. Егер $DE = 4$ $см$ болса, әрбір үшбұрыштың периметрін тап.

28 Біліміңді сынап көр

1. Бос жерлерді мағынасына қарай дұрыс сөздермен толтыр.

1. Егер үшбұрыштың екі қабырғасы тең болса, онда .... болады.
2. Тең бүйірлі үшбұрыштың .... оның медианасы да, биіктігі де болады.
3. Тұйық сынық сызықтан құралған фигура .... деп аталады.
4. Барлық қабырғалары өзара тең болған үшбұрыштардың .... тең болады.
5. .... үшбұрыштардың медианалары, биссектрисалары мен биіктіктері өзара тең.
6. .... табанына еншілес бұрыштары тең.
7. Тең бүйірлі үшбұрыш .... үшбұрыш та болады.

2. Төмендегі сөйлемдердегі қатені тап және түзет.

1. Тең бүйірлі үшбұрыштың бұрыштары тең.
2. Егер екі үшбұрыштың бұрыштары сәйкесінше тең болса, бұл бұрыштар тең болады.
3. Тең бүйірлі үшбұрыштың медианасы оның биссектрисасы мен биіктігі де болады.
4. Үшбұрыштың бұрышынан шығып, осы бұрышты тең екіге бөлетін сәулені үшбұрыштың биссектрисасы дейді.
5. Медиана – үшбұрыштың қабырғасын тең екіге бөлетін сызық.

6.* Егер екі үшбұрыштың бір қабырғасы мен екі бұрышы сәйкесінше тең болса, бұл үшбұрштар тең болады.

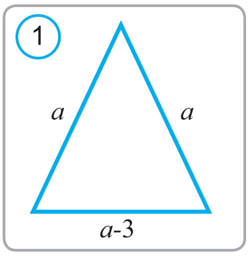
7. Бір үшбұрыштың екі қабырғасы мен бір бұрышы, екінші үшбұрыштың екі қабырғасы мен бір бұрышына сәйкесінше тең болса, бұл бұрыштар тең болады.

3. Берілген қасиетке ие геометриялық фигураның атын оң бағандағы сәйкес қатарға жаз.

1.	Барлық медианалары тең.	
2.	Үшбұрыштардың бір төбесі мен осы төбесінің қарсысындағы қабырғаның ортасын қосатын кесінді.	
3.	Үшбұрыштардың бір төбесінен осы төбесінің қарсысындағы қабырғаға жүргізілген перпендикуляр.	
4.	Үшбұрыштар қабырғаларының қосындысы.	
5.	Тұйық сынық сызық.	

4. Бірінші бағанда берілген геометриялық ұғымға екінші бағандағы тиісті қасиет немесе түсінікті тауып қой.

	Геометриялық ұғым	Түсінік немесе қасиет
1.	Сынық сызық	A. Бір бұрышы тік бұрыш
2.	Көпбұрыш	B. Үшбұрыштың төбесін осы төбесіне қарсы қабырғасының ортасымен қосады
3.	Үшбұрыштың периметрі	C. Екі қабырғасы тең
4.	Сүйір бұрышты үшбұрыш	D. Өзді өзі қиылыспайтын жабық сынық сызық
5.	Теңбүйірлі үшбұрыш	E. Қатарлас келген екеуі бір түзуде жатпаған $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n$ кесінділерден құралған
6.	Тікбұрышты үшбұрыш	F. Үш қабырғасының қосындысы
7.	Үшбұрыштың медианасы	G. Барлық бұрыштары сүйір
8.	Үшбұрыштың биссектрисасы	H. Үшбұрыш бұрышы биссектрисасының үшбұрыштың ішкі жағында жатқан бөлігі
9.	Үшбұрыштың биіктігі	I. Үшбұрыштың төбесінен осы төбесінің қарсысындағы қабырғасы жатқан түзуге түсірілген перпендикуляр
10.	Кесіндінің орта перпендикуляры	J. Кесіндінің ортасына түсірілген перпендикуляр



4. Тест.

1. Тең бүйірлі үшбұрыштың екі қабырғасы 6 және 3-ке тең. Оның үшінші қабырғасын тап.

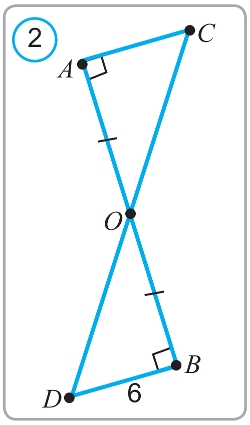
   А) 5; Ә) 8; Б) 11; В) 9.

2. P = 36, a = ? *(1-сурет)*

   А) 11; Ә) 12; Б) 13; В) 18.

3. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 48, бүйір қабырғасы 18-ге тең. Оның табанын тап.

   А) 18; Ә) 12; Б) 16; В) 18.



4. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 48-ге тең. Оның қабырғаларының бірі 12-ге тең болса, қалған қабырғаларын тап.

   А) 12; 12 Ә) 16; 16 Б) 18; 24 В) 18; 18.

5. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 36-ға, қабырғаларының бірі 16-ға тең. Үшбұрыштың қалған екі қабырғасының ұзындығын тап.

   А) 16 және 4; Ә) 10 және 10;
   Б) 10 және 10 немесе 16 және 4; В) Ондай үшбұрыш жоқ.

6. AC=? *(2-сурет)*

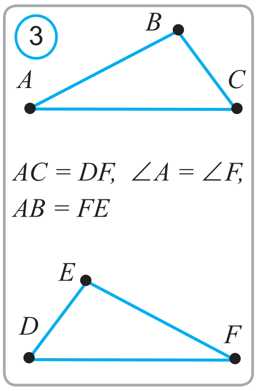
   А) 6; Ә) 8; Б) 12; В) 10,5.

7. Үшбұрыштың неше медианасы бар?

   А) Біреу; Ә) Екі; Б) Үш; В) Алты.

8. Үшбұрыштың биссектрисасы қандай фигура?

   А) Кесінді; Ә) Сәуле; Б) Түзу; В) Нүкте.



9. Үшбұрыштың қайсы элементі оның сыртында жатуы мүмкін?

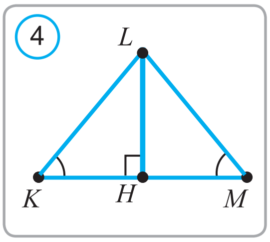
   А) Мединасы; Ә)Биіктігі ;
   Б) Биссектрисасы ; В) Диагоналы.

10. «Егер үшбұрыштың екі бұрышы тең болса, бұл бұрыш теңбүйірлі үшбұрыш болады» дегенді қалай атаймыз?

    А) Сипаттама; Ә) Қасиет;
    Б) Белгі; В) Аксиома.

11. 3-суретте берілген ABC және DEF үшбұрыштар тең бола ма?

    А) Иә; Ә) Жоқ.



12. 4-суреттегі қайсы үшбұрыштар өзара тең?

    А) $\Delta KLM = \Delta LMH$; Ә) $\Delta KLH = \Delta MLH$;
    Б) $\Delta KLM = \Delta KLH$; В) Ешқайсысы.

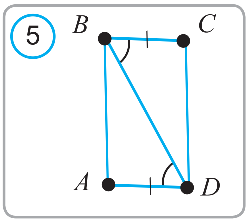
13. 5-суреттегі ABD және CDB үшбұрыштар қайсы белгісі бойынша тең?

А) Үшбұрыштар теңдігінің ТВТ белгісі бойынша;

Ә) Үшбұрыштар теңдігінің ВТВ белгісі бойынша;

Б) Үшбұрыштар теңдігінің ТТТ белгісі бойынша;

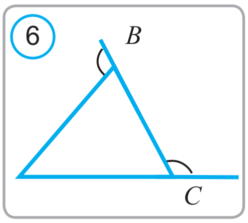
В) Бұл бұрыштар тең емес.



14. 6-суретке қарап үшбұрыштың түрлерін анықта.

А) Теңқабырғалы; Ә) Теңбүйірлі;

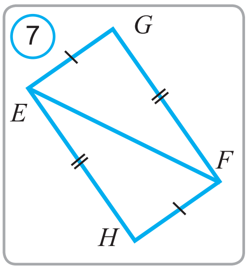
Б) Доғал бұрыш; В) Ешнәрсе айтуға болмайды.



15. 7-суреттегі мағлұматтар бойынша төмендегі теңдіктерден дұрыс емесін тап.

А) $\angle GEF = \angle HFE$; Ә) $\angle EGF = \angle FHE$;

Б) $\angle EHF = \angle FEG$; В) $\angle EFH = \angle GEF$.

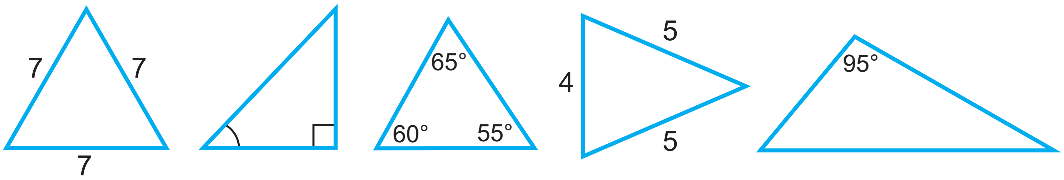


16. Периметрі 12 см үшбұрыштың биіктігі оны периметрі 7 см және 9 см үшбұрыштарға ажыратады. Биіктікті тап.

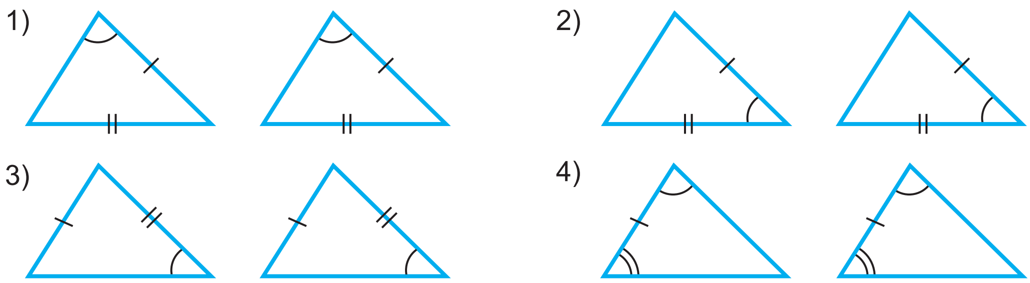
А) 2см; Ә) 3см; Б) 1см; В) 4 см.

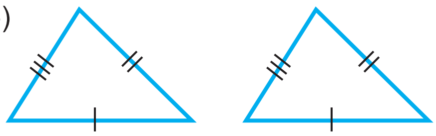
5. Есептер.

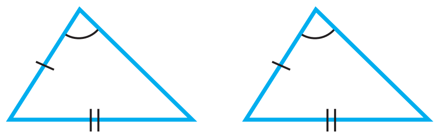
1. Суретте берілген мәліметтер негізінде бұрыштардың түрлерін анықта.



2. Төменде берілген үшбұрыштар жұбынан қайсысы өзара тең болады? Қайсы белгі бойынша?



5) 

6) 

3. 3-суреттегі $\Delta ACD = \Delta ABF$ екенін дәлелде.

4. Егер 4-суретте $\angle CAB = \angle ABD$ болса, $AD = BC$ екенін көрсет.

5. 5-суретте $\Delta ABD = \Delta BCD$ болатынын дәлелде.

6. 6-суретте $\Delta ABC = \Delta ADC$ болатынын дәлелде.

7. Егер ΔABC және ΔPQR $AB = PQ$, $AC = PR$ және $BC = QR$ болса, ΔABC және ΔPQR тең бола ма?

8. Егер 7-суретте $AB = AC, BE = CF$ болса, а) $\Delta AED = \Delta AFD$; ә) $\Delta BED = \Delta CFD$ екенін дәлелде.

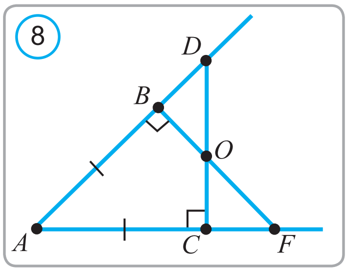
9. 8-суретте $\Delta ABC = \Delta EFD$ болатынын дәлелде.

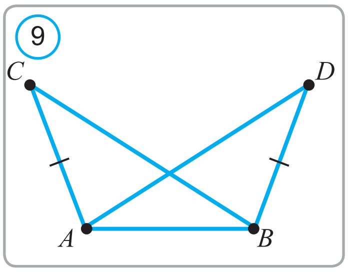
10. 9-суретте $AD = CE$ екенін дәлелде.

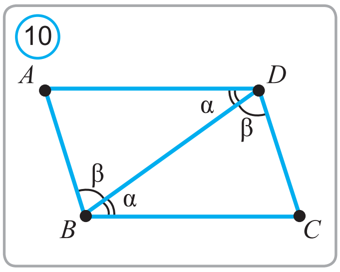
11. 10-суреттегі мәліметтер бойынша x-ты тап.

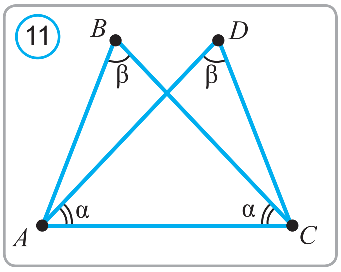
12. AE және BD кесінділер C нүктеде қиылысады. Егер $DC = DE$, $AB = BC$ және $\angle BAC = 48°$ болса, $\angle CED$ ны тап.

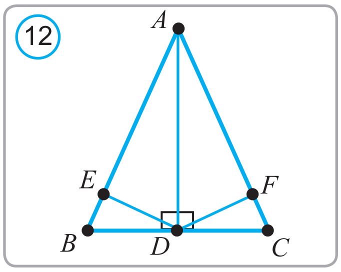
13. ABC үшбұрыштың ішінде D нүкте алынған. Егер $AC = AB$, $CD = BD$ және $\angle BDA = 120°$ болса, $\angle ADC$ ны тап.

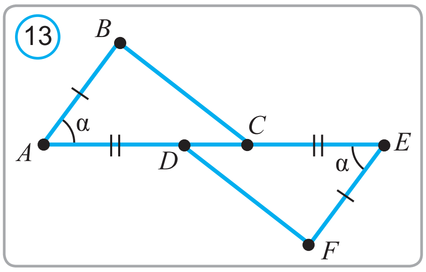


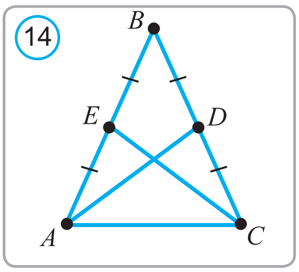


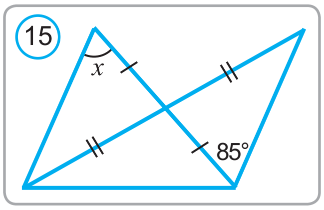




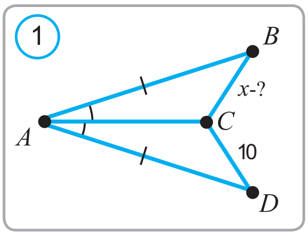








29 3-бақылау жұмысының үлгісі



Бақылау жұмысы екі бөлімнен құралған:

I. 81-83-беттегі тест сұрақтарына ұқсас 5 тест;

II. Төмендегі есептерге ұқсас 3 есеп (4-есеп "үздік" баға алғысы келген оқушыларға қосымша).

1. 1-суретте берілген мәліметтер бойынша белгісіз кесіндіні тап.
2. AB және CD кесінділер O нүктеде қиылысады. Егер $\angle CAB=\angle ABD$ және $AO=BO$ болса, $\angle ACO=\angle BDO$ екенін дәлелде.
3. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 18,4 *м*-ге тең, табаны бүйір қабырғасынан 3,6 *м*-ге қысқа. Осы үшбұрыштың қабырғаларын тап.
4*. Үшбұрыштар теңдігін екі қабырғасы мен осы қабырғаларының біріне жүргізілген медианасы бойынша дәлелде.

Қызыққан оқушыларға арналады.

1. "Геометрия – 7" электронды оқулығының тиісті тарауымен танысып шық. Бұл тарауда келтірілген тақырыптарға қатысты интерактивті анимация қосымшаларына берілген тапсырмаларды орындап, тест тапсырмаларын шешіп өз біліміңді сынап көр.

2. Сонымен қатар 10-бетте келтірілген интернет ресурстарынан осы тарауға тиісті материалдарды тап және үйрен.

III ТАРАУ

ПАРАЛЛЕЛЬ ТҮЗУ СЫЗЫҚТАР

Бұл тарауды оқып төмендегі білім мен іс жүзіндік дағдыларды біліп аласың:

Білім:

— Параллель түзу сызықтардың сипатамасы және қасиеті;
— екі түзуді қиюшымен қиғанда пайда болатын бұрыштардың сипаттамасы және оларды сызбада ажырата білу;
— екі түзудің параллельдік белгілері;
— берілген теоремаға кері теореманы өрнектей білу.

Дағдылар:

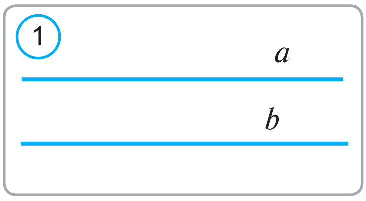
— Үшбұрышты және жай сызғышпен параллель түзу сала білу;
— екі түзуді қиюшымен қиғанда пайда болатын бұрыштарды сызбада көрсете білу.

30 Түзулердің параллельдігі

Белсенділік жаттығу.

Егер екі түзу бір түзуге перпендикуляр болса, олар өзара қиылысуы мүмкін бе? Жауабыңды түсіндір.

Бір жазықтықтағы екі түзу қиылыспайтын болса, олар параллель түзулер деп аталады.



1-суретте параллель түзулер бейнеленген. a және b түзулерінің параллельдігі $a||b$ түрінде жазылады немесе қысқаша "*a түзуі b түзуге параллель*" деп оқылады.

Параллель түзулерде жатқан кесінділер (сәулелер) параллель кесінділер (сәулелер) дейіледі. Параллель кесінділерді өмірде көп кездестіргенсіңдер. Мысалы, темір жол рельсі, тік төртбұрыш пішінді үстелдің қарама-қарсы қырлары, торкөз дәптердегі горизонталь немесе вертикаль сызықтар т,б.

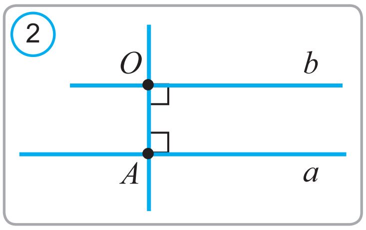
Сонымен, анықтама бойынша түзулер параллель болуы үшін

— олар бір жазықтықта жатуы;

— ортақ нүктесі болмауы, яғни қиылыспауы керек.

14-тақырыпта дәлелденген теореманы енді былайша өрнектеуге болады:

Теорема. **Бір түзуге перпендикуляр болған екі түзу өзара параллель.**

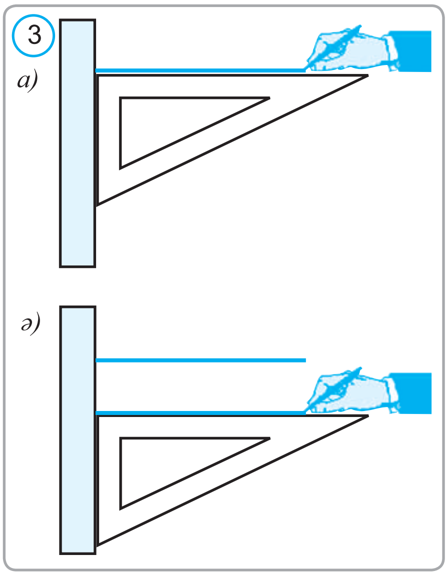


Жаттығу. a түзуге тиісті болмаған O нүктеден оған параллель түзу өткізу мүмкін екенін көрсет.

Шешуі: O нүктеден a түзуге перпендикуляр OA түзу өткіземіз *(2-сурет)*. Сосын O нүктеден OA түзуге перпендикуляр b түзуін өткіземіз. Нәтижеде, $a \perp OA$ және $OA \perp b$, яғни OA түзуге перпендикуляр болған екі a және b түзулерді аламыз.Онда жоғарыдағы теорема бойынша, a және b түзулер өзара параллель болады, яғни, b ізделінген түзу.

Параллель түзулерді іс жүзінде жай және үшбұрышты сызғыштардың көмегімен 3-суретте көрсетілгендей салуға болады. Бұл әдістің дұрыстығын негіздеп бер.

Түзуге онда жатпайтын нүктеден неше параллель түзу өткізу мүмкін? *Параллельдік аксиомасы* деп аталған төмендегі тұжырым бұл сұраққа жауап береді.



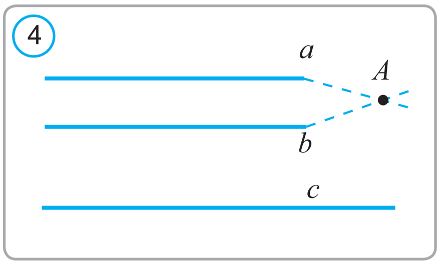
Жазықтықтағы түзуге онда жатпайтын нүктеден тек бір ғана параллель түзу жүргізуге болады.

Бұл тұжырым аксиома ретінде дәлелдеусіз қабылданады.

Теорема. **Бір түзуге параллель екі түзу өзара да параллель болады.**

a, b және c түзулер, $a \| c$, $b \| c$. ⇒ $a \| b$

Дәлелдеу. $a \| c$ және $b \| c$ болса да a және b түзулер параллель болмасын деп тұжырымдайық. Онда олар бірер A нүктеде қиылысады *(4-сурет)* және A нүктеден c түзуге екі a және b параллель түзу өткізілген болып қалады. Бұл болса параллельдік аксиомасына қайшы. Демек, тұжырымымыз дұрыс емес — a және b түзулер өзара параллель екен. ***Теорема дәлелденді.***



Геометриялық зерттеу

45°-қа тең болған ABC үшбұрыш сал. Бұрыштың ішінен бастап оның BA қабырғасына төрт бір-біріне тең кесінділерді ретімен қой және кесінділердің ұштары арқылы бұрыштың BC қабырғасын қиып өтетін параллель түзу жүргіз. Сосын BC қабырғада пайда болған кесінділердің ұзындығын өзара салыстыр. Бұл кесінділер туралы қандай қорытынды жасадың? Нәтижені басқа шамалардағы бұрыштар үшін тексеріп көр.

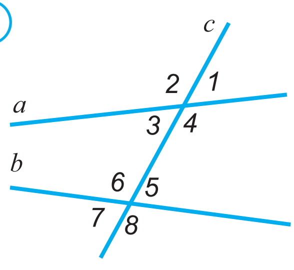
Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Түзулер қашан параллель болады?
2. Берілген түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге параллель болған неше түзу өткізу мүмкін?
3. Екі кесінді қашан параллель болады?
4. Сынып бөлмесіне көңіл аудар және параллель кесінділерді анықта.
5. Үшінші түзуге параллель болған екі түзу өзара параллель болатынын көрсет.
6. Түзу салып онда A, B және C нүктелерді белгіле. Сызғыш және үшбұрышты сызғыштың көмегімен A нүктеден, B нүктеден және C нүктеден өтетін және бір-біріне параллель болған түзулер өткіз.
7. Қиылыспайтын екі кесіндіні параллель кесінділер деуге бола ма? Қиылыспайтын екі сәулені ше?
8. Қашан кесінді мен сәуле параллель болады?
9. Тік төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары өзара параллель екенін көрсет.
10. Егер түзу параллель түзулердің бірін қиып өтсе, екіншісін де қиып өте ме? Жауабыңды негізде.
11. Параққа екі түзу сал. Егер парақ осы сызықтың бойымен қиылса неше бөлек пайда болады.

31 Екі түзудің мен қиюшыдан жасалған бұрыштар

Жазықтықта берілген екі a және b түзу үшінші c түзумен қиылғанда, 8 бұрыш пайда болады. Оларды 1-суретте көрсетілгендей цифрлармен белгілейік. Бұл бұрыштардың төмендегі жұбын жеке атпен атаймыз:

1



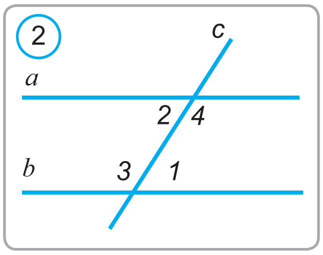
$\angle 3$ және $\angle 5$ $\angle 4$ және $\angle 6$	**айқыш бұрыштар**
$\angle 4$ және $\angle 5$ $\angle 3$ және $\angle 6$	**тұстас бұрыштар**
$\angle 1$ және $\angle 5$ $\angle 2$ және $\angle 6$ $\angle 3$ және $\angle 7$ $\angle 4$ және $\angle 8$	**сәйкес бұрыштар**

Бұл бұрыштардың төмендегі қасиеттерін қарастырамыз:

1-қасиет. **Егер екі түзу қиюшымен қиылғанда пайда болған бір жұп айқыш бұрыштар өзара тең болса, екінші жұп айқыш бұрыштар да өзара тең болады.**

a, b түзулер және c қиюшы:
$\angle 1 = \angle 2$ (*2-сурет*)

$\Rightarrow$ $\angle 3 = \angle 4$



Дәлелдеу. $\angle 2$ және $\angle 4$ сыбайлас бұрыштар болғандықтан:
$\angle 2 + \angle 4 = 180$. Бұдан $\angle 4 = 180 - \angle 2$.
$\angle 1$ және $\angle 3$ да сыбайлас бұрыштар болғандықтан:
$\angle 1 + \angle 3 = 180$. Бұдан $\angle 3 = 180 - \angle 1$.

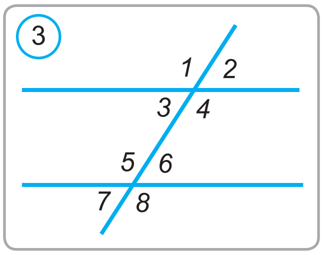
Шартқа орай $\angle 1 = \angle 2$ екенін ескерсек:
$\angle 3 = 180 - \angle 1 = 180 - \angle 2 = \angle 4$.

Демек, $\angle 3 = \angle 4$. ***Қасиет дәлелденді.***

2-қасиет. **Егер тұстас бұрыштар тең болса, сәйкес бұрыштар қосындысы 180°-қа тең болады.**

Дәлелдеу. Тұстас бұрыштардың бір жұбы, мысалы $\angle 2 = \angle 6$ болсын (*3-сурет*). $\angle 6 + \angle 4 = 180°$ екенін дәлелдейміз. $\angle 2$ және $\angle 4$ сыбайлас бұрыштар болғандықтан $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ болады. Олай болса, $\angle 2 = \angle 6$ болғандықтан $\angle 6 + \angle 4 = 180°$ екені келіп шығады.

Басқа бір қабырғалы бұрыштардың қосындысы да 180°–қа тең екені осылайша дәлелденеді.



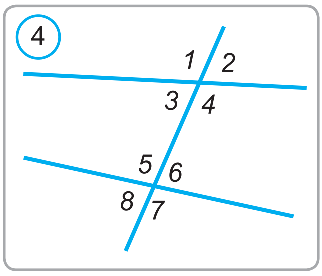
3-қасиет. **Егер айқыш бұрыштар өзара тең болса, онда тұстас бұрыштар да өзара тең болады.**

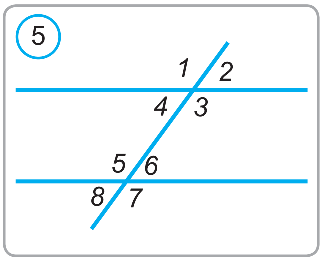
Дәлелдеу. Тең айқыш бұрыштар $\angle 3$ және $\angle 6$ болсын (*3-сурет*). Олай болса, $\angle 3$ және $\angle 2$ вертикаль бұрыштар болғандықтан $\angle 3 = \angle 2$ болады. Демек, тұстас бұрыштар $\angle 6$ және $\angle 2$ тең екен. Басқа тұстас бұрыштар жұбы теңдігі де осылайша дәлелденеді.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Кез келген екі түзу сал. Оларды үшінші түзу – қиюшымен қи. Бір қабырғалы, айқыш және тұстас бұрыштарды сызбадан көрсет.

2. 4-суреттегі бұрыштардың қайсысы вертикаль және қайсысы сыбайлас бұрыш болады?

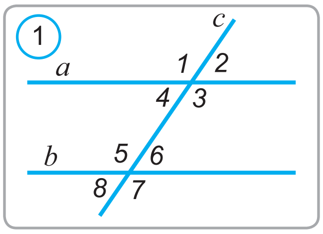




3. Егер 5-суретте $\angle 2 = \angle 6 = 63°$ болса, қалған бұрыштарды тап.
4. Егер екі түзуді үшінші түзу қиғанда пайда болатын бұрыштардың бірі 82° және біреуі 110° болса, қалған бұрыштарын тап.
5. 5-суреттегі $\angle 3 = \angle 5$ болса, $\angle 4 = \angle 6$ бола ма? Егер $\angle 1 = \angle 7$ болса, $\angle 2 = \angle 8$, $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$ теңдіктер орындала ма? Жауабыңды негіздеп бер.
6. Сәйкес бұрыштар өзара тең болуы мүмкін бе?
7.* Айқыш бұрыштар тең болса, сәйкес бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең екенін көрсет. Тұстас бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең болса, айқыш бұрыштар өзара тең бола ма?
8.* Егер екі түзуді қиюшымен қиғанда пайда болатын бір жұп сәйкес бұрыштар өзара тең болса, екінші жұп сәйкес бұрыштар да тең болатынын дәлелде.

32 Екі түзудің параллельдік белгілері

Белсенділік жаттығу.



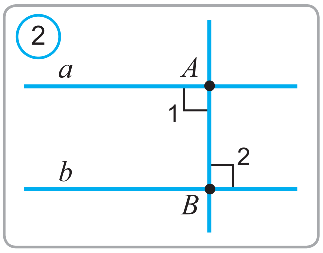
1-суретте a және b параллель түзулер мен c қиюшы берілген. Төмендегі тапсырмаларды орында және сұрақтарға жауап бер.

1. Барлық айқыш бұрыштар жұбын жаз және оларды транспортирмен өлше. Әрбір жұп айқыш бұрыштардың градустық өлшеуі туралы не айтуға болады?
2. Барлық тұстас бұрыштар жұбын жаз және оларды транспортирмен өлше. Әрбір жұп тұстас бұрыштардың градустық өлшеуінің қосындысы туралы не айтуға болады?
3. Барлық сәйкес бұрыштар жұбын жаз және оларды транспортирмен өлше. Әрбір жұп сәйкес бұрыштардың градустық өлшеуі туралы не айтуға болады?
4. Жоғарыда анықталған сипаттамалар барлық уақытта орынды бола бере ме?

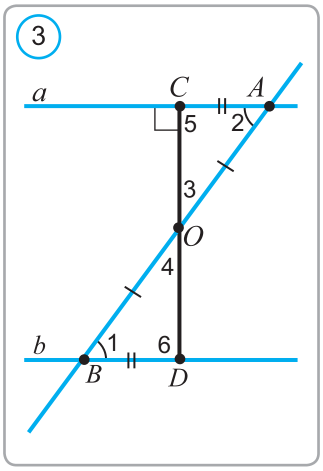
Екі түзудің параллельдігін қандай әдістермен анықтауға болады? Төмендегі, екі түзудің параллельдік белгісі деп аталған теоремалар осы сұраққа жауап береді.

Теорема. **Егер екі түзуді қиюшымен қиғанда пайда болған айқыш бұрыштар тең болса, онда бұл екі түзу параллель болады.**

Дәлелдеу. 1) Бұрын $\angle 1$ және $\angle 2$ тік бұрыш болған жайды қарастырамыз (2сурет): Мұнда AB түзу a және b түзуге перпендикуляр болады. Онда a және b түзулер бір түзуге перпендикуляр болған екі түзу туралы теоремаға сәйкес өзара параллель болады (87-бетке қара).



2) Енді $\angle 1$ және $\angle 2$ тік бұрыш болмаған жайды қарастырамыз: AB кесінді ортасы $(AO = BO)$ O нүктеден a түзуге OC перпендикуляр жүргіземіз *(3-сурет)*. b түзуге B нүктеден ұзындығы AC -ға тең BD кесінді қоямыз. AOC және BOD үшбұрыштарын қарастырамыз:



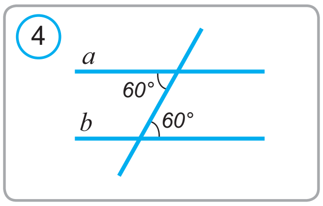
оларда

1. салуға байланысты: $AC = BD$;
2. салуға байланысты: $AO = BO$;
3. шарт бойынша: $\angle 1 = \angle 2$.

Олай болса үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісіне орай $\Delta AOC = \Delta BOD$ болады. Сонымен, $\angle 3 = \angle 4$ және $\angle 5 = \angle 6$ болады.

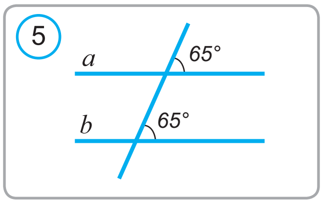
$\angle 3 = \angle 4$ екенінен D нүкте CO сәуленің жалғасында жататын, яғни C, O және D нүктелер бір түзуде жататыны келіп шығады.

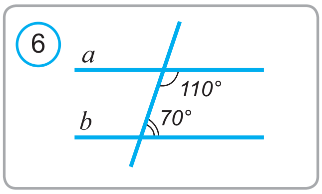
$\angle 5 = \angle 6$ екенінен, $\angle 6$ және $\angle 5$ сияқты тік бұрыш екені келіп шығады. Сөйтіп, a және b түзулер бір CD түзуге перпендикуляр екен. Демек, олар өзара параллель болады. ***Теорема дәлелденді.***

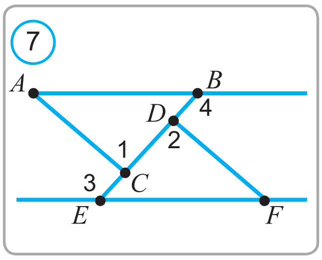


Есеп. Егер 1-суретте $\angle 2 = 55°$ және $\angle 5 = 125°$ болса, a және b түзулер өзара параллель бола ма?

Шешуі: $\angle 2$ және $\angle 4$ вертикаль бұрыштар болғандықтан $\angle 4 = \angle 2 = 55°$. $\angle 5$ және $\angle 6$ сыбайлас болғандықтан $\angle 6 = 180° — \angle 5 = 180° - 125° = 55°$. Нәтижеде, айқыш бұрыштар өзара тең екенін анықтаймыз: $\angle 4 = \angle 6$. Демек, жоғарыда дәлелденген екі түзудің параллельдік белгісіне қарай a және b түзулер параллель болады. ***Жауап:*** Иә.



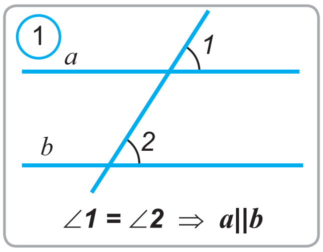




Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

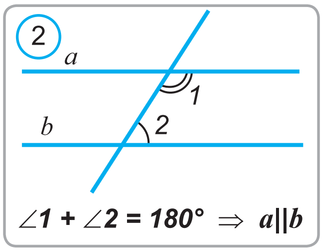
1. Екі түзудің параллельдік белгісін түсіндір.
2. 4-суретте $a||b$ болатынын көрсет.
3. 5-суретте $a||b$ болатынын көрсет.
4. 6-суретте $a||b$ болатынын көрсет.
5. Егер 1-суретте: а) $\angle 1=132°$, $\angle 8=48°$ ә) $\angle 2=36°$, $\angle 5=144°$ б) $\angle 3=113°$, $\angle 6=77°$ в) $\angle 1+\angle 7=180°$ болса, $a||b$ бола ма?
6. Егер: 7-суретте: а) $\angle 3=\angle 4$, $BD=CE$, $AB=EF$; ә) $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, $BD=CE$; б) $AB=EF$, $BD=EC$, $AC=FD$ болса, $\Delta ABC=\Delta EFD$ екенін көрсет.
7. a түзу және онда жатпайтын K нүкте берілген. K нүкте арқылы төрт түзу өткізілді. Бұл түзулердің нешеуі a түзуімен қиылысады.

33 Екі түзудің параллельдік белгісі (жалғасы)



Теоремадан тікелей шығатын қасиетті нәтиже деп атайды. Алдыңғы тақырыпта дәлелденген теоремадан және 38-тақырыпта дәлелденген 2-3 қасиеттерден мынадай нәтижелер шығады.

1-нәтиже. ***Егер екі түзуді қиюшы қиып өткенде сәйкес бұрыштар тең болса, онда бұл екі түзу параллель болады*** *(1-сурет).*



2-нәтиже. ***Егер екі түзуді қиюшы қиып өткенде тұстас бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең болса, онда түзулер параллель болады*** *(2-сурет).*

Есеп. 3-суреттегі түзулердің қайсылары параллель?

Шешуі: Вертикаль бұрыштар теңдігінен, $\angle 1 = 105°$, $\angle 2 = 125°$, $\angle 3 = 115°$. a және b түзулер параллель емес, өйткені $\angle 1 + 65° = 105° + 65° \neq 180°$.

$a||d$ болады, өйткені, $\angle 1 + 75° = 105° + 75° = 180°$ (2-нәтижеге қара).

Дәл осылай $b \| e$ болады, өйткені $65° + \angle 3 = 65° + 105° = 180°$.

a, c және e түзулер өзара параллель емес, өйткені олардың сәйкес бұрыштары тең емес (1-нәтижеге қара).

Дәл осылай b және d түзулер де параллель емес, өйткені сәйкес бұрыштар тең емес: $65° \neq 75°$.

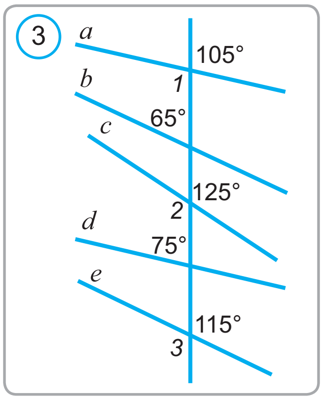
Жауап: $a \| d$, $b \| e$.

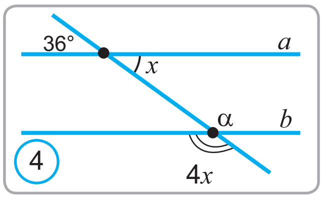
Есеп. 4-суреттегі $a \| b$ бола ма?

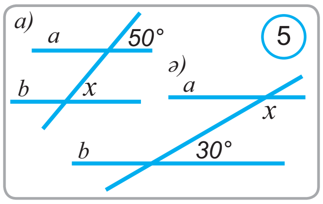
Шешуі: Вертикаль бұрыштардың қасиетіне орай $x = 36°$. Онда $\alpha = 4x = 4 \cdot 36° = 144°$ болады. Тұстас бұрыштардың қосындысы $x + \alpha = 36° + 144° = 180°$. Демек, 2-нәтиже бойынша $a \| b$ болады.

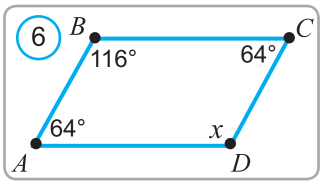
Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

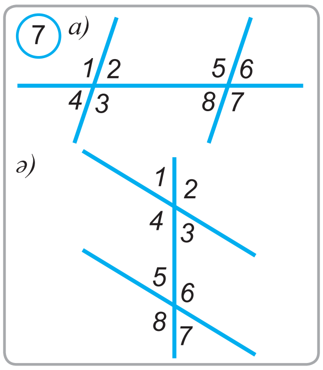
1. Екі түзудің параллельдік белгілерін айт.
2. 5-суреттегі a және b түзулер параллель болуы үшін белгісіз бұрыш неше градус болуы керек?
3. 6-суреттегі белгісіз бұрышты тап.
4. Егер 7-суретте а) $\angle 1 = \angle 5 = 105°$; ә) $\angle 3 = 60°$, $\angle 8 = 120°$ болса, қалған бұрыштарды тап.
5. 8-суреттегі төртбұрыштың қайсы қабырғалары параллель болады?
6. Екі түзудің қиюшы қиып өткенде пайда болатын бұрыштарының бірі 32°, оған сәйкес бұрыш болса 33°-қа тең болса, бұл түзулер параллель бола ма?
7. a және b параллель түзулердің c түзумен қиылысуынан пайда болған айқыш бұрыштардың биссектрисалары параллель екенін көрсет (*9-сурет*).

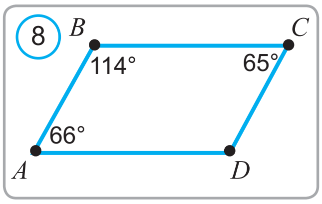


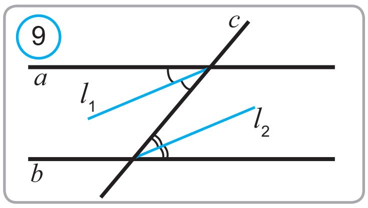












34 Кері теорема

Егер теореманың шарты мен қорытындылардың орнын ауыстырса, жаңа сөйлем (яғни тұжырым) пайда болады. Егер бұл сөйлем де дұрыс болса (яғни ол дәлелденсе), ол берілген теоремаға кері теорема деп аталады.

Дұрыс теорема: ***Егер*** **А тұжырым орынды** ***болса,*** **В тұжырым орынды** ***болады.***

Қысқаша: $A \Rightarrow B$

Кері теорема: ***Егер*** **В тұжырым орынды** ***болса,*** **А тұжырым орынды** ***болады.***

Қысқаша: $B \Rightarrow A$

Мысал. "Егер үшбұрыш тең бүйірлі болса, оның табанындағы бұрыштары тең болады" — деген теоремаға кері теорема мынадай болады: "***Егер үшбұрыштың екі бұрышы тең болса, ол тең бүйірлі үшбұрыш болады***".

1-жаттығу. Жоғарыда келтірілген кері теорема "үшбұрыштың тең бүйірлі болатын белгісі", деп аталады. Оның дұрыстығын өз бетіңше дәлелде.

Әрқашан берілген дұрыс теоремаға кері теорема болған тұжырым орынды бола бермейтінін айтқан жөн.

Мысалы, "Егер бұрыштар вертикаль болса, олар тең болады", деген теоремаға кері "Егер бұрыштар тең болса, олар вертикаль болады" деген тұжырым дұрыс емес.

2-жаттығу.

1. "Егер жаңбыр жауса, аспанда бұлт болады", деген тұжырымға кері тұжырым жаса. Сол кері тұжырымның әрқашан дұрыс болатынын, болмайтынын түсіндір.

2. Төмендегі дұрыс теоремаларға кері теоремаларды жаз. Әрбір кері теоремада дәлелденген тұжырымның дұрыс не дұрыс емес екенін тексер.

1) Бір түзуге перпендикуляр болған екі түзу өзара қиылыспайды.

2) Егер екі үшбұрыш тең болса, олардың сәйкес қабырғалары тең болады.

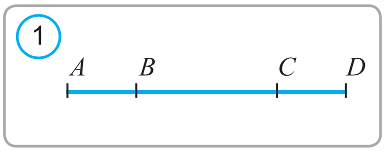
3) Егер сыбайлас бұрыштар өзара тең болса, олар тік бұрыш болады.

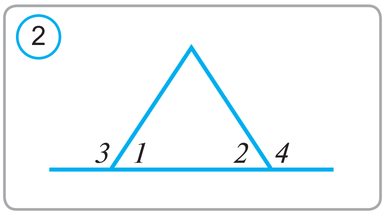
4) Бір түзуге параллель болған екі түзу параллель болады.

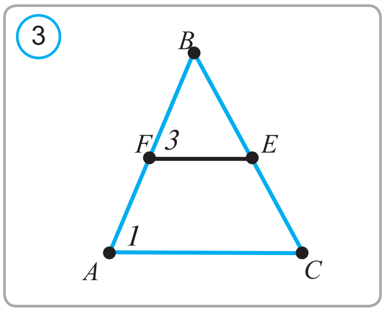
? *Сұрақтар, есептер және тапсырмалар*

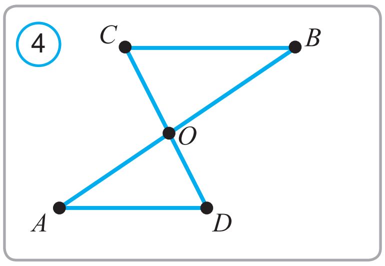
1. Кері теорема мен дұрыс теореманың қандай айырмашылығы бар?

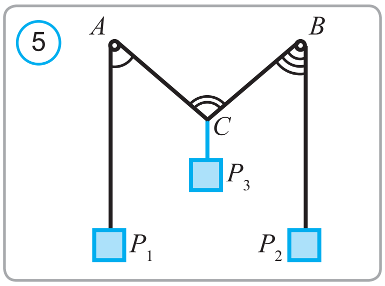
2. Теоремаға кері теорема әрқашан дұрыс бола ма?
3. Теореманы дәлелдеп, оған кері теореманы дәлелдеусіз қабылдауға бола ма?
4. Кері теоремаға кері теорема қалай аталады.
5. Төмендегі теоремалардың шарты мен қорытындысын жаз. Бұл теоремаларға кері теоремаларды өрнекте және олардың дұрыстығын тексер:
   1) Егер 2-суретте $AC = BD$ болса, $AB = CD$ болады.
   2) Егер 3-суретте $\angle 1 = \angle 2$ болса, $\angle 3 = \angle 4$ болады.
   3) Егер 4-суретте $EF || AC$ болса, $\angle 1 = \angle 3$.
   4) Егер 5-суретте $AO = OB$ және $CO = OD$ болса, $\Delta AOD = \Delta BOC$ болады.
6. A және B нүктелерде бекітілген блоктар арқылы өткен жіпке P_1 және P_2 денелер ілінсін *(6-сурет)*. P_3 дене осы жіптің C нүктесіне ілінген болып, P_1 және P_2 денелерді тепе-теңдікте ұстап тұр. $AP_1 || BP_2 || CP_3$ екені белгілі болса, $\angle ACB = \angle A + \angle B$ болатынын дәлелде.
7. Төмендегі теоремаларға кері теоремаларды өрнекте және олардың дұрыстығын тексер:
   1) Екі түзуді қиюшымен қиылысуынан пайда болған сәйкес бұрыштар тең болса, онда бұл түзулер параллель болады.
   2) Үшінші түзуге параллель болған екі түзу параллель болады.
   3) Тең бүйірлі үшбұрыштың барлық бұрыштары өзара тең болады.
8. Үшбұрыштардың теңдік белгісіне кері теоремаларды айт. Бұл кері теоремалар дұрыс па?







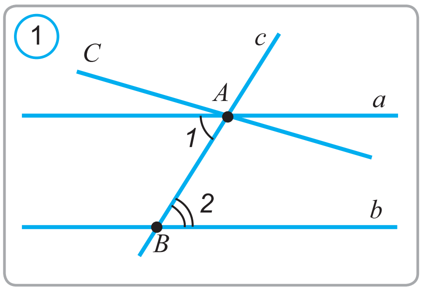




35 Екі апараллель түзу мен қиюшыдан жасалған бұрыштар

Төменде түзудің параллельдік белгілеріне кері теоремаларға тоқталамыз.

1-теорема. **Екі параллель түзу мен қиюшы қиғанда пайда болған айқыш бұрыштар өзара тең болады.**



$a \parallel b$, c – қиюшы (*1-сурет*) ⇨ $\angle 1 = \angle 2$

Дәлелдеу. Кері жоримыз: $\angle 1 \neq \angle 2$ болсын. AB сәулеге $\angle 2$ -ге тең болған CAB бұрыш қоямыз ($\angle CAB = \angle 2$). Олай болса, CA және b түзулерді AB қиюшымен қиғанда, бір–біріне тең (салу бойынша) айқыш $\angle CAB$ және $\angle 2$ бұрыштарды аламыз.

Демек, CA және b түзулер өзара параллель. Сөйтіп, A нүктеден b түзуге параллель болған екі (CA және a) түзуге ие боламыз.

Бұл болса параллельдік аксиомаға қайшы келеді. Демек, тұжырым дұрыс емес, $\angle 1 = \angle 2$ екен. ***Теорема дәлелденді.***

Нәтиже. **Егер түзу параллель түзулердің біріне перпендикуляр болса, екіншісіне де перпендикуляр болады.**

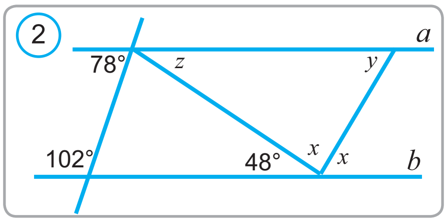
Нәтиже ретінде келтірілген тұжырымның дұрыс екенін өз бетіңше тексеріп көр.

2-теорема. **Екі параллель түзуді қиюшы қиып өткенде пайда болған сәйкес бұрыштар өзара тең болады.**

3-теорема. **Екі параллель түзуді қиюшы қиып өткенде пайда болған тұстас бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең болады.**

Теореманы өз бетіңше дәлелдеуге әрекет жаса.

Есеп. 2-есептегі белгісіз бұрышты тап.

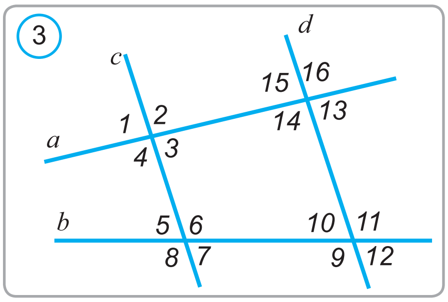


Шешуі: Тұстас бұрыштар қосындысы $78° + 102° = 180°$ болғандықтан $a \parallel b$ болады. Демек, 1-теорема бойынша $z = 48°$ және $x = y$ болады. $x + x + 48° = 180°$ болғандықтан (тұйық бұрыштар шамасы), $x = 66°$. Демек, $y = 66°$.

Жауап: $x = 66°$; $y = 66°$; $z = 48°$.

Есеп. 3-суретте $a \nparallel b$, $c \parallel d$. Төмендегі теңдіктердің қайсысы дұрыс?

1) $\angle 1 = \angle 15$; 2) $\angle 3 = \angle 13$; 3) $\angle 4 = \angle 16$; 4) $\angle 4 = \angle 8$; 5) $\angle 1 = \angle 12$;
6) $\angle 7 = \angle 10$; 7) $\angle 8 = \angle 16$; 8) $\angle 8 = \angle 11$; 9) $\angle 4 + \angle 13 = 180°$;
10) $\angle 6 + \angle 14 = 180°$; 11) $\angle 7 + \angle 12 = 180°$; 12) $\angle 8 + \angle 9 = 180°$



Шешуі: 3) $\angle 4 = \angle 2$ *(вертикаль бұрыштардың қасиетіне орай)*, $\angle 2$ және $\angle 16$ – сәйкес бұрыштар болғандықтан $\angle 2 = \angle 16$. Демек, $\angle 4 = \angle 16$ теңдік дұрыс.

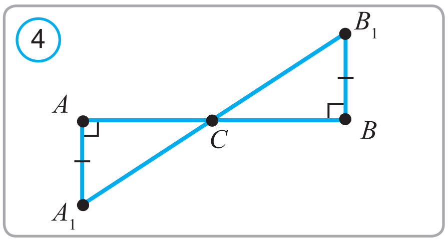
5) $\angle 12 = \angle 7$ *(сәйкес бұрыштар қасиетіне орай)* және $\angle 7 = \angle 5$ *(вертикаль бұрыштар)*. $\angle 5$ және $\angle 1$ сәйкес бұрыштар. $a \nparallel b$, сондықтан $\angle 1 \neq \angle 5 = \angle 7 = \angle 12$, яғни $\angle 1 = \angle 12$ теңдік дұрыс емес.

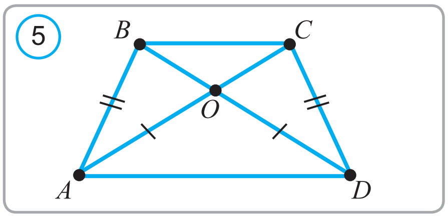
9) $\angle 4 = \angle 2$, $\angle 13 = \angle 15$ *(вертикаль бұрыштар)*, $c \parallel d$, $\angle 2$ және $\angle 15$ – тұстас бұрыштар болғандықтан, $\angle 2 + \angle 15 = 180°$. Демек, $\angle 4 + \angle 13 = 180°$ теңдік дұрыс.

11) $c \parallel d$ болғандықтан $\angle 7 = \angle 10$ *(айқыш-бұрыштар қасиетіне орай)* және $\angle 10 = \angle 12$ *(вертикаль бұрыштар)*. Демек, $\angle 7 = \angle 12$.

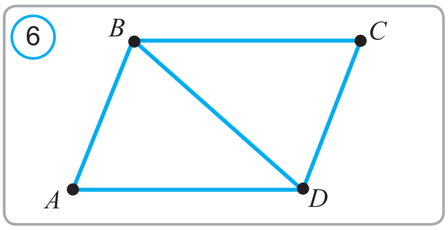
Сондықтан $\angle 7 + \angle 12 = 180°$ теңдік тек $\angle 7 = \angle 12 = 90°$ болғанда ғана орынды болады.

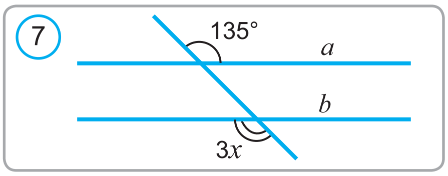
Қалған теңдіктерді осылайша өз бетіңше тексеріп көр.





Сұрақтар, есептер және тапсырмалар





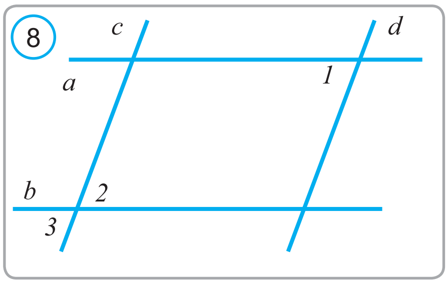
1. 4-суретте $AC = CB$ екенін көрсет.
2. Берілген кесінділердің ортасын табуда 1-есепті қалай пайдалануға болады
3. 5-суретте $BC \parallel AD$, $AO = OD$ екені белгілі. а) $BO = OC$; ә) $AC = BD$; б) $\Delta AOB = \Delta COD$; в) $\Delta ABD = \Delta ACD$ теңдіктерін дәлелде.
4. 6-суретте $BC \parallel AD$ және $AB \parallel CD$ болса, $\Delta ABD = \Delta CBD$ екенін дәлелде.
5. 7-суретте $a \parallel b$ болса, $x = ?$

6. ABC және $A_1B_1C_1$ сүйір бұрыштар берілген. Егер $AB \| A_1B_1$ және $BC \| B_1C_1$ болса, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ болатынын дәлелде.

7*. Сәйке қабырғалары параллель түзуде жатқан бұрыштардың бірі сүйір, екіншісі доғал бұрыш. Осы бұрыштардың қосындысы 180° болатынын дәлелде.

Eslatma. Ескерту. 6-7-есептерде берілген теоремалар – сәйкес қабырғалары параллель бұрыштардың қасиеті дейіледі.

8. Егер 8-суретте $a \| b$, $c \| d$ және $\angle 1 = 55°$ болса, $\angle 2$ және $\angle 3$ тап.



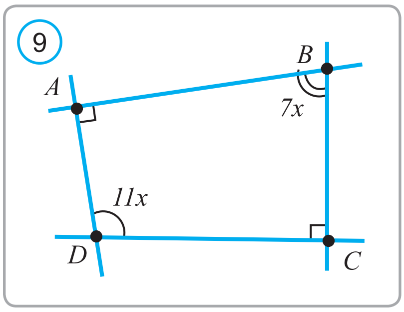
9. Сәйкес қабырғалары параллель түзуде жатқан бұрыштардың айырмасы 40°–қа тең. Сол бұрыштарды тап.

10*. ABC және $A_1B_1C_1$ сүйір бұрыштар берілген. Егер $AB \perp A_1B_1$ және $BC \perp B_1C_1$ болса, ABC = = $A_1B_1C_1$ болатынын дәлелде.

11*. Сәйкес қабырғалары параллель түзуде жатқан бұрыштардың бірі сүйір, екіншісі доғал. Бұл бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең болатынын дәлелде.

Eslatma. 10-11 есептерде берілген теоремалар – сәйкес қабырғалары өзара перпедикуляр дейіледі.

12. 9-сызбадағы ABC және ADC бұрыштардың сәйкес қабырғалары перпендикуляр. Белгісіз бұрышты тап.



36 Біліміңді сынап көр

1. Бос қалдырылған жерге логикалық дұрыс келетін сөзді жаз.

1. Түзуде жататын нүкте арқылы оған перпендикуляр болған .... өткізу мүмкін.
2. Егер екі түзуді қиюшымен қиғанда пайда болған .... тең болса, бұл түзулер параллель болады.
3. Жазықтықтағы екі түзу .... , олар параллель түзулер дейіледі.
4. Екі параллель түзудің бірін қиып өткен түзу ....
5. Түзуде жатпайтын нүкте арқылы оған параллель болған .... түзу өтеді.
6. Түзудің кез келген нүктесі арқылы .... тек бір ғана түзу өткізу мүмкін.
7. Тік бұрышпен қиылысқан түзулер .... деп аталады.
8. Бір түзуге .... екі түзу өзара параллель.
9. Егер екі түзуді қиюшымен қиғанда пайда болатын тұстас бұрыштар .... түзулер параллель болады.
10. Параллель түзулерді қиюшымен қиғанда пайда болған сәйкес ....

2. Төмендегі сөйлемдерде қате болса, қатесін тап және оны дұрыста.

1. Түзудің тек бір ғана нүктесінен оған перпендикуляр түзу өткізу мүмкін.
2. Берілген түзуде жатпайтын тек бір ғана нүктеден осы түзуге перпендикуляр жүргізу мүмкін.
3. AB және AK параллель түзулердің біріне перпендикуляр болған түзу екіншісіне де перпендикуляр болады.
4. Екі түзуді қиюшымен қиғанда пайда болған айқыш бұрыштары тең болады.
5. Егер екі кесінді қиылыспаса олар параллель кесінділер деп аталады.
6. Сәйкес қабырғалары параллель болған бұрыштар тең болады.
7. Егер $a\perp b$, $b\perp c$ болса, $a\perp c$ болады.
8. Сәйкес қабырғалары перпендикуляр болған бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең.
9. Егер екі түзуді қиюшымен қиғанда пайда болған тұстас бұрыштар тең болса, түзулер параллель болады.
10. Перпендикуляр түзулерге параллель болған түзулер де өзара параллель болады.
11. Егер $a||b$, $b||c$ болса, $a||c$ болады.

3. Кестеде берілген қасиеттер мен тұжырымдарға сәйкес болатын геометриялық түсініктерді ата.

1.	Ортақ нүктеге ие емес түзулер	
2.	Тік бұрышпен қиылысады	
3.	Нүктеден түзуге тек біреу ғана түсіру мүмкін	
4.	Нүктеден түзуге қалағанынша түсіруге болады	
5.	Шарт пен қорытынды бөлімі ауысқан	
6.	Екі түзуді қиюшымен қиғанда пайда болатын бұрыштар	

4. Бірінші бағанда берілген геометриялық түсінікке екінші бағандағы тиісті қасиетті немесе тұжырымды сәйкес қой.

Геометриялық түсінік	*Қасиеттер, тұжырымдар*
1. Параллель түзулер 2. Перпендикуляр түзулер 3. Қиюшы екі түзуді қиғанда 4. Айқыш бұрыштар 5. Кері теорема 6. Тұстас бұрыштар	А. Әрқашанда дұрыс емес. Ә. Қиылыспайды. Б. Қиылысқанда тік бұрыштар пайда болады. В. Айқыш, сәйкес және тұстас бұрыштар пайда болады. Г. Бір жарты жазықтықта жатады. Ғ. Тең болса, түзулер параллель болады.

5. Тесттер.

1. Берілген түзуде жатпайтын нүкте арқылы оған параллель болған түзу өткізуге бола ма?

   А) 1; Ә) 2; Б) 4; В) қалағанша.

2. Егер $a||b$, $b\perp c$, $c\perp d$ болса, төмендегі жауаптардың қайсысы дұрыс?

   А) $a\perp d$, $b\perp d$ Ә) $a\perp c$, $b||d$
   Б) $a||c$, $a\perp d$ В) $a\perp c$, $a\perp d$, $b\perp d$.

3. Жазықтықта берілген түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге неше перпендикуляр түзу өткізу мүмкін?

А) 1; Ә) 2; Б) 4; В) қалағанша.

4. 1-суретте $a \| b$ болса, x=?

А) 100°; Ә) 110°; Б) 130°; В) 140°.

5. 2-суретте $a \| b$ болса, x=?

А) 30°; Ә) 45°; Б) 60°; В) 36°.

6. x=? *(3-сурет)*

А) 96°; Ә) 108°; Б) 112°; В) 78°.

7. 4-суретте $a \| b$ және $\alpha - \beta = 70°$ болса, α=?

А) 30°; Ә) 125°; Б) 75°; В) 36°.

8. Екі түзу үшінші түзумен қиылысқанда неше тең доғал бұрыш жасауға болады?

А) 3; Ә) 8; Б) 6; В) 4.

9. Екі түзу үшінші түзумен қиылысқанда пайда болған бұрыштардың бірі 97о-қа тең. Пайда болған бұрыштардың ең кішісін тап.

А) 97°; Ә) 83°; Б) 77°; В) 7°.

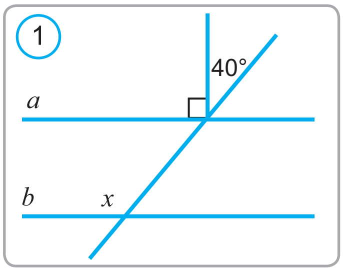
10. Екі түзу үшінші түзумен қиылысқанда көбімен неше тең сүйір бұрыш жасауға болады?

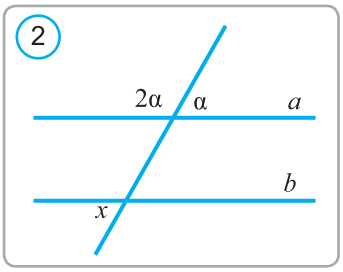
А) 3; Ә) 4; Б) 6; В) 5.

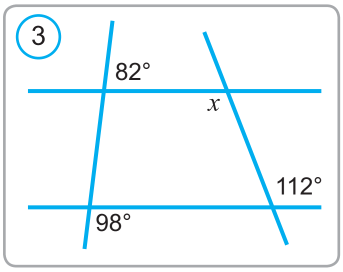
11. Екі түзу үшінші түзумен қиылысқанда көбімен неше тік бұрыш жасауға болады?

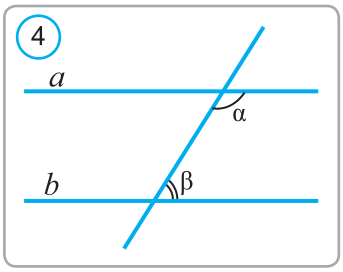
А) 2; Ә) 6; Б) 8; В) 5.

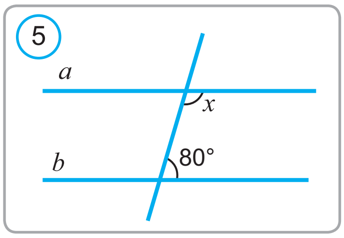
12. Екі түзу үшінші түзумен қиылысқанда пайда болған үш ішкі бұрыштың қосындысы 290°-қа тең. Төртінші бұрышты тап.

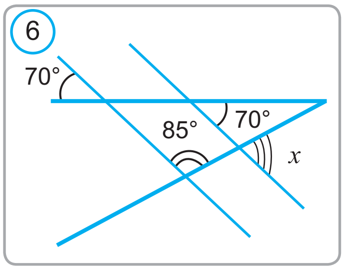


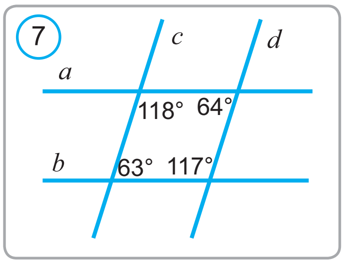


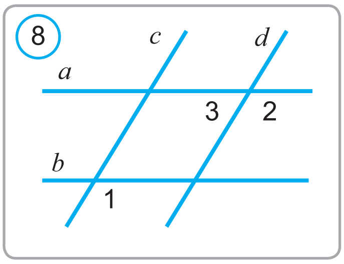


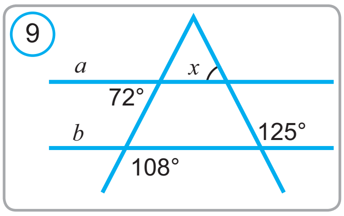












А) 145; Ә) 110;
Б) 36; В) 70.

13. 5-сурете $a||b$ болса, x-ты тап.
А) 100; Ә) 80;
Б) 110; В 90.

14. 6-суреттегі x бұрышты тап.
А) 105°; Ә) 95°;
Б) 85°; В) 75°.

15. 7-суретте қайсы түзулер өзара параллель болады?
А) $a||b$; Ә) $a||c$; Б) $c||b$; В) $c||d$.

16. 8-суретте $a||b$, $c||d$ $\angle 1=122°$ болса, $\angle 2$ va $\angle 3$ –ны тап.
А) $\angle 2 = 122°$, $\angle 3 = 58°$;
Ә) $\angle 2 = 130°$, $\angle 3 = 58°$;
Б) $\angle 2 = 122°$, $\angle 3 = 68°$;
В) $\angle 2 = 130°$, $\angle 3 = 50°$.

6. Есептер.

1. 1-суретте сәйкес қабырғалары перпендикуляр бұрыштарды анықта және өзара тең болатынын көрсет.
2. Егер 2-суретте $\angle 4 + \angle 5 = 180°$ болса, $a||b$.
3.* 10-суретте $\angle 2 = \angle 6$ болса, $a||b$ бола ма?
4. 10 суретте $\angle 1 + \angle 5 = 118°$ болса, қалған бұрыштарды тап.
5. 10 суретте $\angle 2 = 71°$ және $\angle 7 = 119°$ болса, $a||b$ бола ма?
6.* 11-суреттегі белгісіз бұрышты тап.

7. Екі түзуді үшінші түзу қиғанда пайда болатын бұрыштардың бірі 47°-қа тең. Онда сәйкес бұрыш неше градус болғанда бұл екі түзу параллель болады?

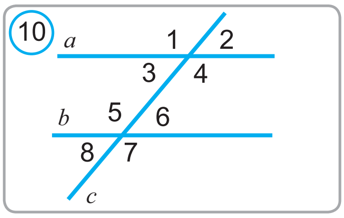
8. Екі параллель түзуді қиюшымен қиғанда пайда болатын айқыш бұрыштардың қосындысы 84о. Қалған бұрыштарды тап.

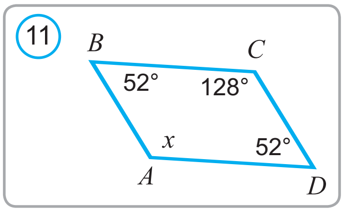
9. Екі параллель түзуді қиюшымен қиғанда пайда болатын бұрыштардың бірі екіншісінен 8 есе үлкен. Пайда болған барлық бұрыштарды тап.

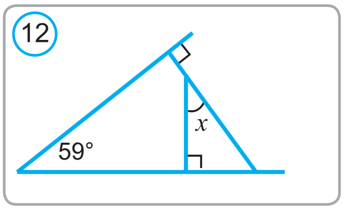
10. Екі параллель түзуді қиюшымен қиғанда пайда болатын сыбайлас бұрыштардың айырмасы 30°. Бұл бұрыштарды тап.

11. 12-суреттегі белгісіз бұрышты тап.

12. Сәйкес қабырғалары параллель түзуде жатқан бұрыштардың айырмасы 36°-қа тең. Бұл бұрыштарды тап.







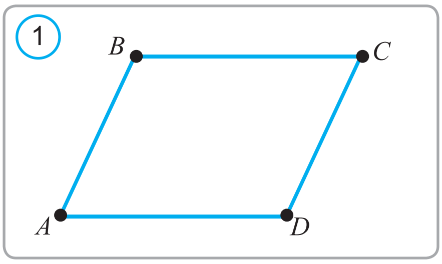
37 4-бақылау жұмысы

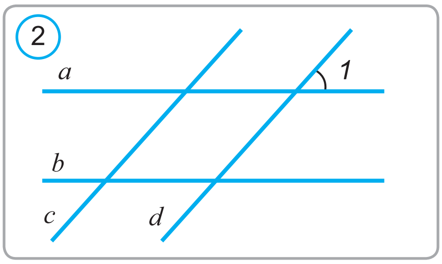
Үлгі бақылау жұмысы екі бөлімнен құралған:

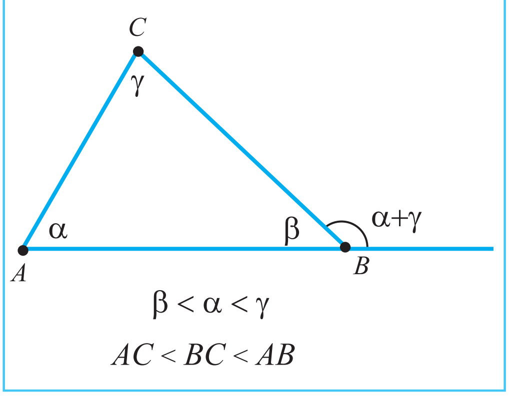
I. 101–103-беттегі тесттерге ұқсас 5 тест;

II. Төмендегі есептерге ұқсас 3 есеп (4-есеп қабілетті оқушыларға арналады).

1. Екі параллель түзуді қиюшымен қиғанда пайда болатын бұрыштардың бірі 34°-қа тең. Қалған бұрыштарды тап.
2. Егер 1-суретте $BC||AD$ және $AB||CD$ болса, $AB=CD$ екенін дәлелде.
3. Егер 2-суретте $a||b$, $c||d$ және $\angle 1=48°$ болса, қалған бұрыштарды тап.
4. ABC үшбұрыштың A төбесінен өткізілген биссектриса BC қабырғаны D нүктеде қиып өтеді. D нүктеден өткізілген түзу AC қабырғаны E нүктеде қиып өтеді. Егер $AE=DE$ болса, $DE||AB$ екенін дәлелде.







IV ТАРАУ

ҮШБҰРЫШТЫҢ ҚАБЫРҒАЛАРЫ МЕН БҰРЫШТАРЫ АРАСЫНДҒЫ ҚАТЫНАСТАР

Бұл тарауды оқығанда тқмендегі білім және дағдыларды біліп аласың:

Білімдер:

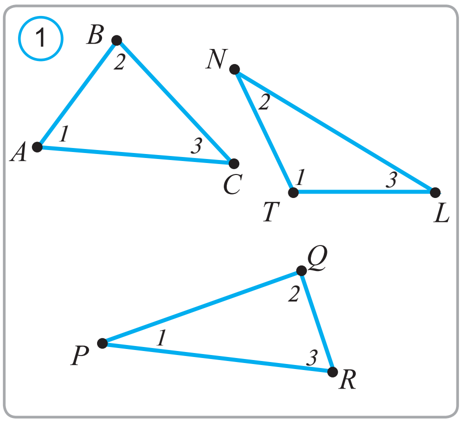
— Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы туралы теорема және оны дәлелдеу;
— үшбұрыштың сыртқы бұрышы және оның қасиеті;
— тік бұрышты үшбұрыштың қасиеттері;
— тік бұрышты үшбұрыштың теңдік қасиеттері;
— бұрыш биссектрисасының қасиеті;
— үшбұрыш бұрыштары мен қабырғаларыарасындағы қатынасты өрнектейтін теоремалар;
— үшбұрыштың теңсіздігі.

Дағдылар:

— Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысын іс жүзінде таба білу;
— алған теориялық білімді, қасиеттерді есеп шығаруда және жұмыстар орындағанда қолдана білу.

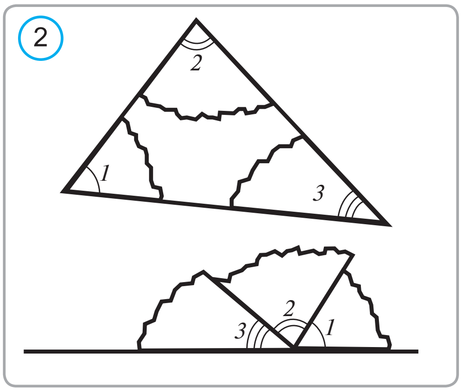
38 Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы туралы теорема

Белсенділік жаттығу.



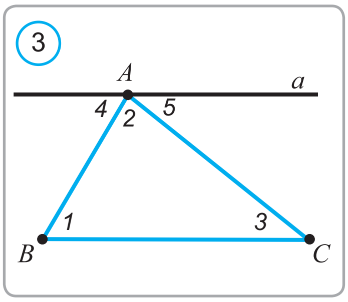
1. Төмендегі суретте берілген ABC үшбұрышының үш бұрышын да транспортирдің көмегімен өлше және олардың қосындысын есепте. Осы жұмысты MNL және PQR үшбұрыштар үшін де орынды. Нәтижелер негізінде кестені толтыр. Қандай қасиетті анықтадың? Оны бір тұжырыммен өрнекте.

Үшбұрыштар	$\angle$1	$\angle$2	$\angle$3	$\angle$1+$\angle$2+$\angle$3
ΔABC				
ΔMNK				
ΔPQR				



2. Бір парақ қағазға кез келген ABC үшбұрышын сал және бұрыштарын 1, 2 және 3 цифрларымен белгіле. Оның бұрыштарын 1-суретте көрсетілгендей етіп, жыртып ал да қатар қой. Бұдан қандай қорытынды шығаруға болады?

Енді геометрияның ең маңызды теоремаларының бірі – үшбұрыш бұрыштарының қосындысы туралы теореманы дәлелдейміз.



Теорема. **Үшбұрыш бұрыштарының қосындысы 180° -қа тең.**

ΔABC ⇨ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

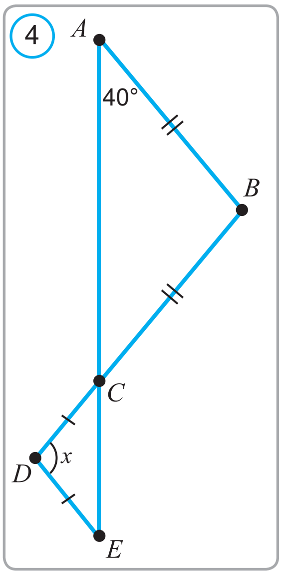
Дәлелдеу. A бұрыштан BC қабырғаға параллель a түзу жүргіземіз *(3-сурет)*.

$\angle 1 = \angle 4$, өйткені бұл бұрыштар, a және BC параллель түзулерді AB қиюшымен қиғанда пайда болатын айқыш бұрыштар.

$\angle 3 = \angle 5$, өйткені бұл бұрыштар, a және BC параллель түзулерді AC қиюшымен қиғанда пайда болатын айқыш бұрыштар.

$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$, өйткені бұл бұрыштардың ортақ төбесі бар және тұйық бұрышты құрайды. Пайда болған бұл үш теңдіктен,

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, яғни $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ екенін табамыз. ***Теорема дәлелденді.***



1-есеп. 4-суретте берілген мәліметтерді пайдаланып белгісіз бұрыш x-ты тап.

Шешуі: ΔABC — тең бүйірлі үшбұрыш болғандықтан, $\angle ACB = \angle A = 40°$. Вертикаль бұрыштардың қасиеті бойынша, $\angle DCE = \angle ACB = 40°$. Шарт бойынша ΔCED да тең бүйірлі. Сондықтан, $\angle DCE = \angle DEC = 40°$.

Демек, үшбұрыш бұрыштарының қосындысы туралы теоремаға орай, ΔCDE: $40° + 40° + x = 180°$, немесе $x = 100°$.

Жауап: 100°.

2-есеп. Үшбұрыш бұрыштары 2:3:7 сияқты қатынаста болса, олардың градустық өлшеуін тап.

Шешуі: Шарт бойынша, үшбұрыш бұрыштарын $2x$, $3x$ және $7x$ деп белгілейміз. Олай болса үшбұрыштарының қосындысы туралы теорема бойынша $2x + 3x + 7x = 180°$ теңдігін аламыз. Одан $x = 15°$ екенін аламыз.

Демек, үшбұрыш бұрыштарының градустық өлшемі 30°, 45° және 105°-ға тең.

Жауап: 30°, 45°, 105°.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Үшбұрыш бұрыштарының қосындысы туралы теореманы айт және суретпен өрнекте.

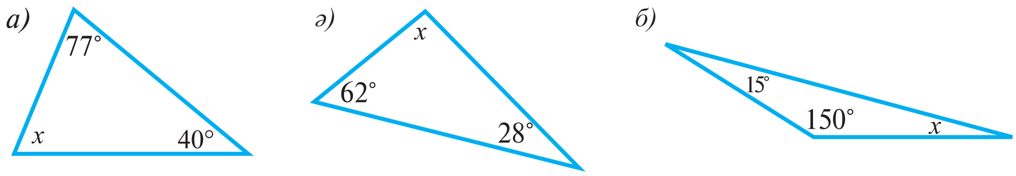
2. Үшбұрыштың неше бұрышы тік болуы мүмкін?

3. Үшбұрыштың неше бұрышы доғал болуы мүмкін?

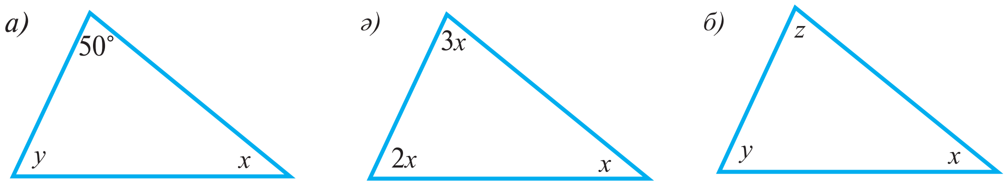
4. Бұрыштары: а) 5°, 55°, 120°; ә) 46°, 150°, 4°; б) 100°, 20°, 50° болған үшбұрыш бар ма?

5. Егер үшбұрыштың екі бұрышы: а) 60° және 40°; ә) 70° және 85°; б) 90° және 45°; в) 105° және 30° болса, оның үшінші бұрышын тап.

6. Белгісіз бұрышты тап.

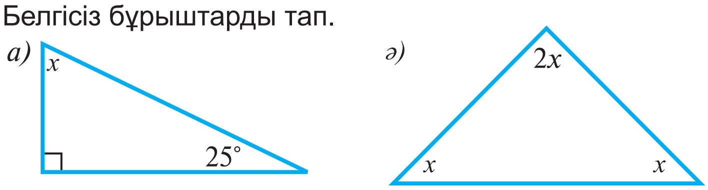


7. Белгісіз бұрыштарды тап.

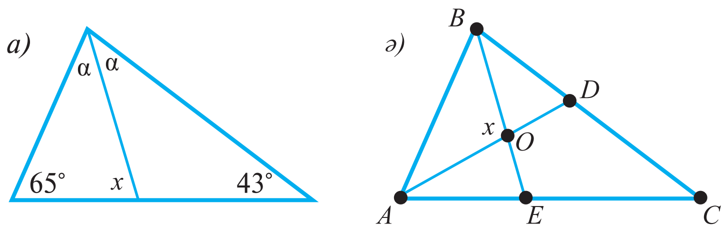


$x : y = 8 : 5$ $\qquad$ $x : y : z = 5 : 6 : 7$

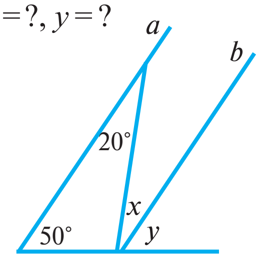
8. Белгісіз бұрыштарды тап.



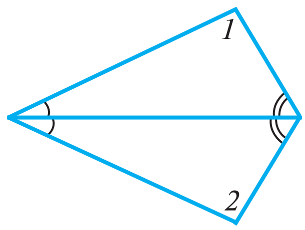
9. а) x=?; ә) AD және BE – биссектрисалар, $\angle BAC$=64°, $\angle ABC$=96°, x=?



10. $a \| b$, $x=?$, $y=?$



11. ∠1=∠2 екенін тап.



12*. Үшбұрыш бұрыштары α, β, γ үшін $\alpha=(\beta+\gamma)/2$ болса, α-ны тап.

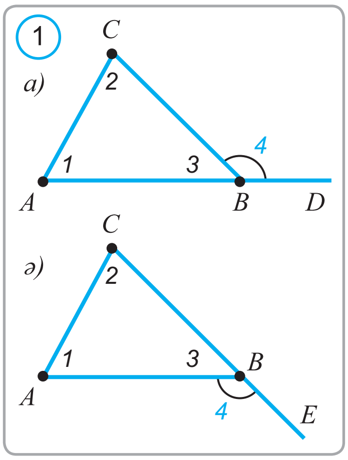
13. Тең қабырғалы үшбұрыш бұрыштарын тап.

14. Тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыш бұрыштарын тап.

15. Егер тең бүйірлі үшбұрыш бұрыштарының бірі а) 50°; ә) 60°; б) 105° болса, оның бұрыштарын тап.

39 Үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының қасиеті

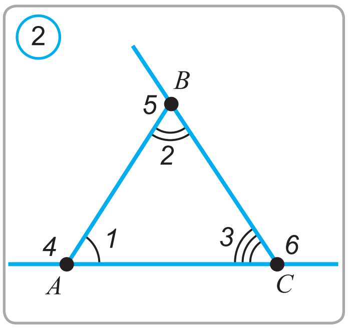
Үшбұрыштың ішкі бұрышына сыбайлас бұрыш үшбұрыштардың сыртқы бұрышы деп аталады.



1-суретте ABC үшбұрышының B бұрышына сыртқы бұрыш болған CBD және ABE бұрыштар бейнеленген. Бұл бұрыштар вертикаль болғандықтан өзара тең болатыны анық. Қалған A және C бұрыштарды тап.

Үшбұрыштың берілген төбедегі бұрыштарын оның сыртқы бұрыштарымен шатастырмас үшін ішкі бұрыштар деп те айтамыз.

Геометриялық зерттеу.



2-суреттегі ABC үшбұрыштың барлық ішкі және сыртқы бұрыштарын транспортирмен өлше және төмендегі бұрыштар (әрбір сыртқы бұрыш және оған сыбайлас болмаған ішкі бұрыштар қосындысының) бірліктерін өзара салыстыр:

а) $\angle 4$ және $\angle 2 + \angle 3$

ә) $\angle 5$ және $\angle 1 + \angle 3$

б) $\angle 6$ және $\angle 1 + \angle 2$

Салыстырудың нәтижесінде қандай қорытынды жасадың? Оны тұжырым ретінде өрнекте.

Теорема. **Үшбұрыштың сыртқы бұрышы онымен сыбайлас емес екі ішкі бұрыштың қосындысына тең.**

ΔABC, $\angle 4$ – сыртқы бұрыш (1-сурет) ⇨ ***Дәлелдеу керек:*** *$\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$*

Дәлелдеу. 1-суретке қарайық. Онда сыбайлас бұрыштардың қасиетіне орай $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

Үшбұрыш бұрыштарының қосындысы туралы теорема бойынша $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Бұл екі теңдіктен,

$\angle 1 + \angle 2 + \cancel{\angle 3} = \cancel{\angle 3} + \angle 4$, яғни $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ теңдікті аламыз.

Теорема дәлелденді.

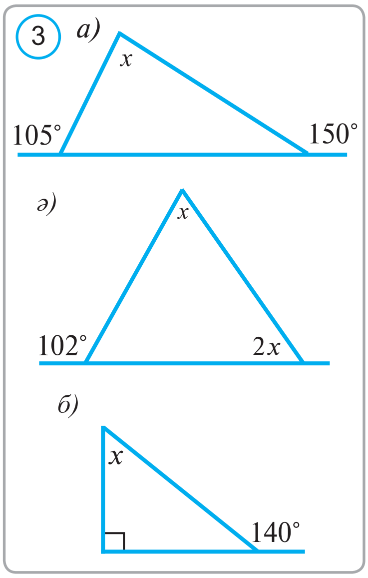
Бұл теоремадан төмендегі нәтиже шығады.

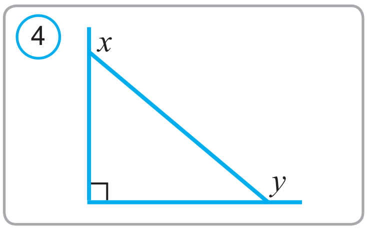
Нәтиже. ***Үшбұрыштың сыртқы бұрышы онымен сыбайлас емес кез келген ішкі бұрыштан үлкен болады.***

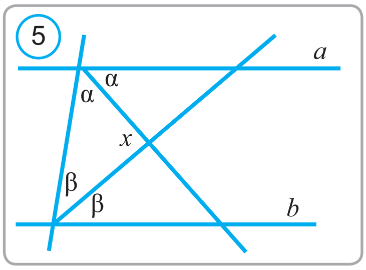
Оның дұрыс екенін өз бетіңше тексер.

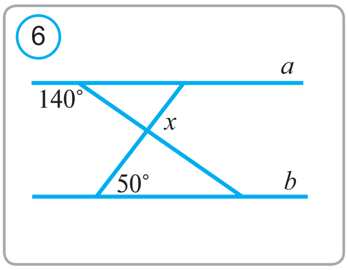
Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

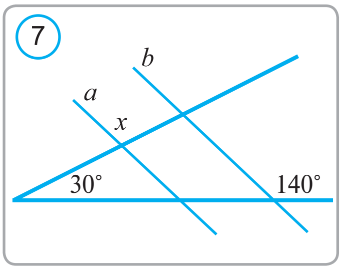
1. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы деген не?
2. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы туралы теореманы түсіндір.
3. Үшбұрыштардың екі сыртқы бұрышы 120° және 135° болса, ішкі бұрыштарын тап.
4. Үшбұрыштың екі бұрышының бірі 30°-қа, сыртқы бұрыштарының бірі 60-қа тең. Үшбұрыштың қалған екі бұрышын тап.
5. 3-суреттегі белгісіз бұрышты тап.
6. 4-суретте $x + y$ = ?
7. Егер 5-суретте $a||b$ болса, x-ты тап
8. Егер 6-суретте $a||b$ болса, x-ты тап
9. Егер 7-суретте $a||b$ болса, x-ты тап
10. Егер 8-суретте $a||b$ болса, x-ты тап
11. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы доғал болуы мүмкін бе?
12.* Үшбұрыш сыртқы бұрыштарының қосындысын есепте.

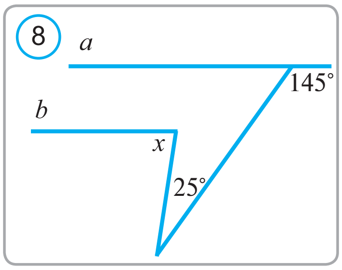












40 Есептер шығару

Есеп. Төртбұрыш бұрыштарының қосындысы 360°-қа тең екенін дәлелде.

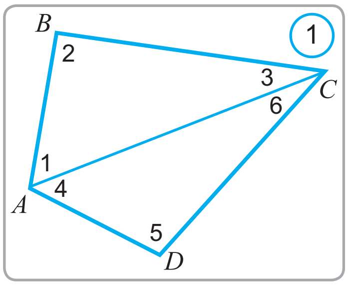
Шешуі: Кез келген $ABCD$ төртбұрыш саламыз. A және C нүктелерді тұтастырып, оны екі үшбұрышқа бөлеміз. ABC және ADC үшбұрыштар ішкі бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең (*1-сурет*):

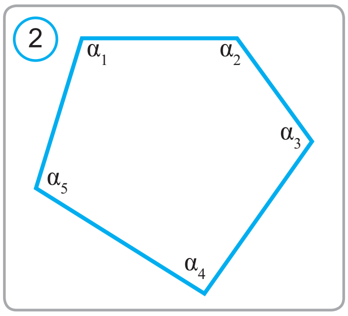
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$.

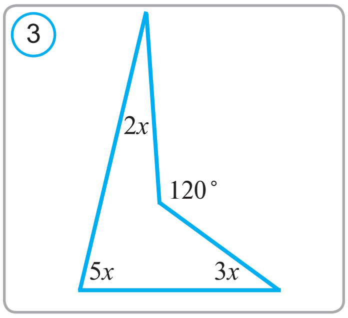
$\angle A = \angle 1 + \angle 4$ және $\angle C = \angle 3 + \angle 6$ болғандықтан

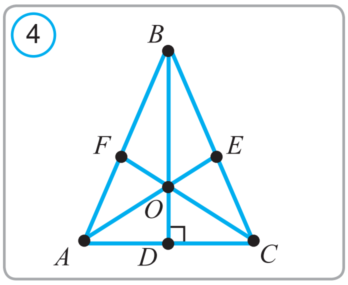
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = (\angle 1 + \angle 4) + \angle 2 + (\angle 3 + \angle 6) + \angle 5 =$

$= (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) = 180° + 180° = 360°$.









Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Үшбұрыштың екі бұрышының өлшемдері 5:9, үшінші бұрышы осы бұрыштарының кішісінен 10° кіші. Үшбұрыштың бұрыштарын тап.

2. Үшбұрыштың 108°-тық сыртқы бұрышына сыбайлас емес екі бұрышының қатынасы 5:4. Осы ішкі бұрыштарды тап.

3. Үшбұрыштың екі қабырғасы үшінші қабырғасына перпендикуляр болуы мүмкін бе?

4. Үшбұрыштың доғал бұрыштары: а) 1; ә) 2; б) 3 болуы мүмкін бе?

5. Үшбұрыштың ішкі және сыртқы бұрыштары тең болуы мүмкін бе?

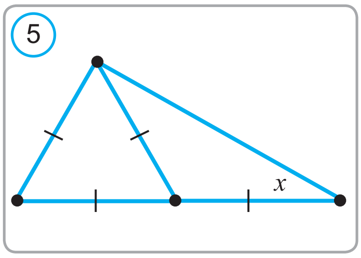
6. 2-суретте бейнеленген бесбұрыш бұрыштарының қосындысын тап.

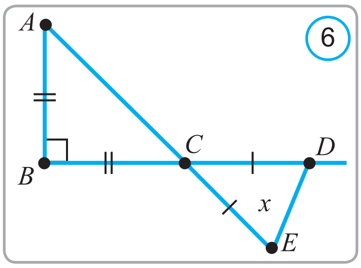
7. 3-суреттегі белгісіз бұрышты тап.

8. Екі бұрышы тең үшбұрышты тең бүйірлі екенін көрсет.

9. Тең бүйірлі үшбұрыштардың бір бұрышы: а) 120°; ә) 70°-қа тең болса, оның қалған бұрыштарын тап.

10. Тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштарының бірі а) 15°; ә) 75° болса, қалған бұрыштары неге тең?





11. Екі үшбұрыштың сәйкес қабырғалары параллель болса, оларға сәйкес келген бұрыштар тең болатын дәлелде.

12. Егер 4-суретте $AB=BC$, $\angle ABC=50°$, AE және FC — биссектрисалар болса, AOB және EOC бұрыштарын тап.

13. 5-суреттегі белгісіз x бұрышты тап.

14. 6-суреттегі белгісіз x бұрышты тап.

15. Екі үшбұрыштың сәйкес қабырғалары перпендикуляр болса, олардың сәйкес бұрыштары тең бола ма? Жауабыңды негіздеп бер.

16. Бір бұрышты тек бір түзу бойымен қиып екі тік бұрышты үшбұрыш жасау мүмкін бе.

41 Тік бұрышты үшбұрыштардың қасиеттері

Тік бұрышты үшбұрыштың бір бұрышы тік (90°) қалған екі бұрышы сүйір бұрыш болады. Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышының қарсысындағы қабырғасы гипотенуза, қалған екі қабырғасы катет деп аталады. Енді тік бұрышты үшбұрыштың кейбір қасиеттерін қарастырамыз.

1-қасиет. **Тік бұрышты үшбұрыштың екі бұрышының қосындысы 90° -қа тең.**

Шынында да, үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180° -қа тең, ал тік бұрышы болса 90° -қа тең. Сондықтан оның қалған екі сүйір бұрыштарының қосындысы 90° -қа тең болады.

1-есеп. Тік бұрышты үшбұрыштың 30° -тық бұрышының қарсысындағы катеті гипотенузаның жартысына тең.

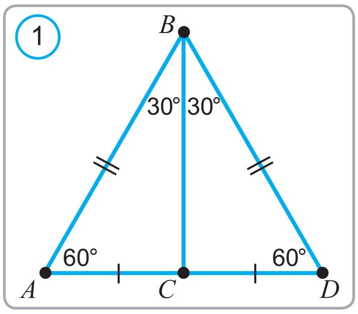
Айталық, 1-суретте бейнеленген ABC тік бұрышты үшбұрыш берілген болып, онда $\angle ACB=90°$ және $\angle ABC=30°$-қа тең болсын. Олай болса $\angle BAC=60°$ болады. $AC=\dfrac{AB}{2}$ екенін табамыз.

Берілген үшбұрышқа тең BCD үшбұрышты 1-суретте көрсетілгендей саламыз. Сонда барлық бұрыштары 60°-қа тең үшбұрышты аламыз. Демек ABD үшбұрышқа ие боламыз. ABD үшбұрыш тең бүйірлі. Сондықтан, $AB = AD$ болады. Бірақ,

$$AD = AC + CD = 2AC.$$

Сонымен, $AB = 2AC$, яғни $AC = \frac{AB}{2}$.

Қасиет дәлелденді.

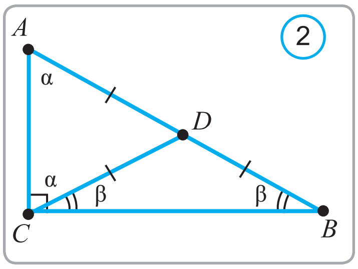


2-қасиет. **Тік бұрышты үшбұрыштың катеті гипотенузаның жартысына тең болса, онда осы катетке қарсы жатқан бұрыш 30°-қа тең болады.**

Бұл қасиет 2-қасиетке кері, оны өз бетіңше дәлелде.

2-есеп. ABC тік бұрышты үшбұрышта C тік бұрыш және $AB=12$ және $CD=DB$ болса, CD-ны тап *(2-сурет)*.

Шешуі: CDB — тең бүйірлі үшбұрыш, өйткені $CD=DB$ *(2-сурет)*. Демек, $\angle B=\beta$ десек, $\angle A+\angle B=90°$ болғандықтан $\angle A+\beta=90°$. Бірақ, $\alpha+\beta=90°$ болғандықтан, $\angle A=\alpha$. Демек, ADC — тең бүйірлі үшбұрыш. Сондықтан $AD=CD=DB$, яғни D нүкте AB кесіндінің ортасы.



Демек, $CD = \frac{AB}{2} = 6$. ***Жауап:*** $CD = 6$

Бұл есепті шешу барысында $AD=DB$ және $AD = CD$ теңдіктері пайда болды. Олар тік бұрышты үшбұрыштың төмендегі қасиетін білдіреді.

3-қасиет. **Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасына түсірілген медианасы гипотенузаның жартысына тең.**

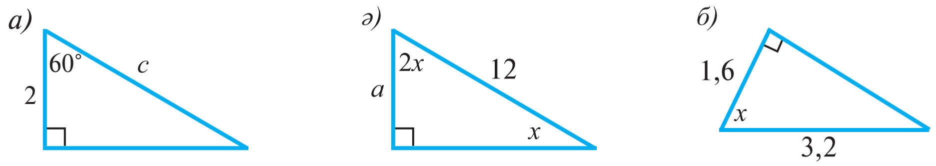
Бұл маңызды қасиетті 8-сыныпта тағы да қарастырамыз.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

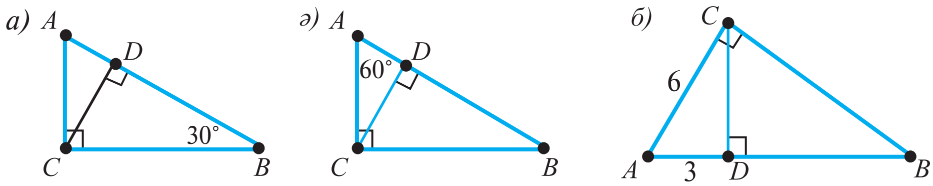
1. Тік бұрышты үшбұрыштың қабырғалары қалай аталады?
2. Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының қосындысы нешеге тең?
3. Тік бұрышты үшбұрыштардың бұрыштарының бірі доғал болуы мүмкін бе?
4. Тік бұрышты үшбұрыштың неше биіктігі бар?
5. 30°-ты бұрыштың қарсысындағы катет пен гипотенуза арасында қандай байланыс бар?

6. Тең бүйірлі тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасына түсірілген биіктік гипотенузаның жартысына тең екенін көрсет.

7. а) $c=?$ ә) $a=?$ б) $x=?$



8. а) $AB=20$, $AD=?$ ә) $AB=18$, $BD=?$ б) $BD=?$



9. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасына жүргізілген медианасы 8 *см*. Егер үшбұрыштың бір бұрышы 60°-қа тең болса, бұл бұрышқа жанасқан қабырғаларды тап.

Геометриядағы нақтылық пен қысқалылық

Нақты математикалық тұжырым толық және сонымен қатар қысқа, артықша сөздерсіз болуы шарт екені белгілі.

1. Төмендегі сөйлемдердегі артықша сөздерді анықтап көр.

а) Тік бұрышты үшбұрыштың екі сүйір бұрышының қосындысы 90°-қа тең.

ә) Егер тік бұрышты үшбұрыштың катеті гипотенузаның жартысына тең болса, оның қарсысында жататын тік бұрыш 30°-қа тең болады.

2. Тиісті түсініктерді пайдаланып, төмендегі сөйлемдерді ықшамда.

а) Ең үлкен қабырғалы көпбұрыш;

ә) шеңбер центрінен өтетін хорда;

б) табаны бүйір қабырғасына тең болған тең бүйірлі үшбұрыш.

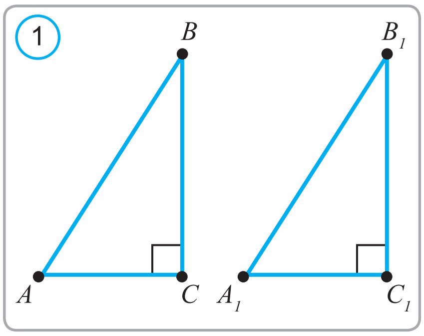
42 Тік бұрышты үшбұрыштардың теңдік белгілері

Жаттығу. ABC және $A_1B_1C_1$ тік бұрышты үшбұрыштар берілген. Бұл үшбұрыштардың бір бұрышы тік болғандықтан, бұл бұрыштар өзара әрқашан тең. Сондықтан тік бұрышты үшбұрыштар үшін үшбұрыштың теңдік белгілері едәуір ықшамдалады.

Тік бұрышты үшбұрыштар үшін екі катеті бойынша (КК белгі), катет және сүйір бұрышы бойынша (КБ) белгісі, гипотенузасы мен сүйір бұрышы бойынша (ГБ белгісі) және гипотенуза мен каттет бойынша (ГК) сияқты белгілерін қарастырамыз:

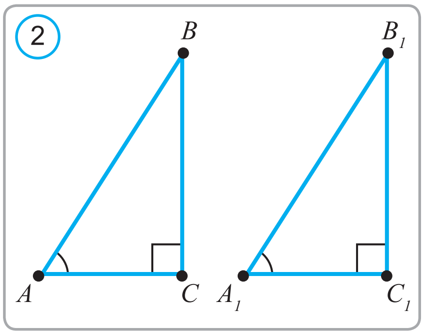
Теорема. КК белгі. **Тік бұрышты үшбұрыштың катеті мен оған іргелес жатқан сүйір бұрышы басқасының бір катеті мен іргелес жатқан сүйір бұрышына тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады** *(1-сурет)*.

Бұл белгі үшбұрыштар теңдігінің ҚБҚ белгісінен тікелей келіп шығады.



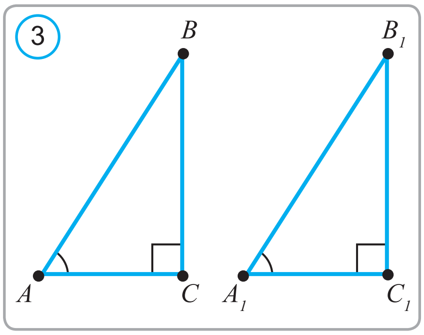
Теорема. КБ белгісі. **Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен сүйір бұршы басқасының гипотенузасы мен сәйкес сүйір бұрышы тең болса, онда мұндай үшбұрыштар тең болады** *(2-сурет)*.

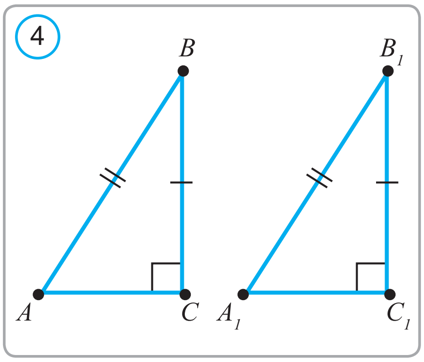
Бұл белгі үшбұрыштар теңдігінің БҚБ белгісінен тікелей келіп шығады.

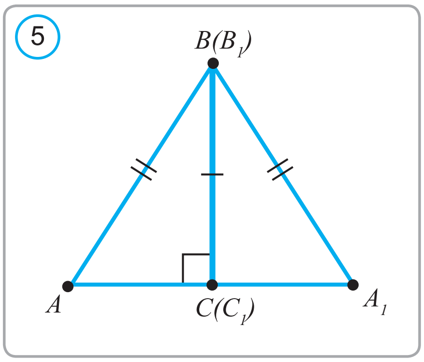


Теорема. ГБ белгісі. **тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы және бір сүйір бұрышы, екінші тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы және бір сүйір бұрышына тең болса, бұл үшбұрыштар өзара тең болады** *(3-сурет)*.

Бұл белгі үшбұрыштар теңдігінің БҚБ белгісінен тікелей келіп шығады.







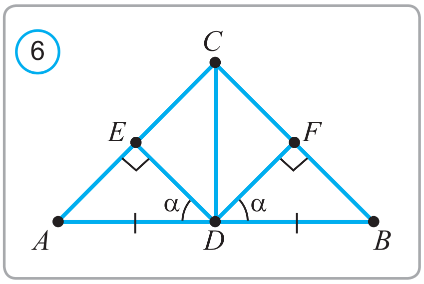
Теорема. ГК белгісі. **Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен катеті басқасының сәйкес гипотенузасы мен катетіне тең болса, онда мұндай бұрыштар тең болады** *(4-сурет)*.

Бұл белгі дәлелденуі керек. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштар берілген *(4-сурет)* және оларда $\angle C = 90°$, $\angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ болсын. Олай болса $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ екенін көрсетеміз.

Дәлелдеу. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштардың екіден қабырғалары өзара тең: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Егер ABC және $A_1B_1C_1$ бұрыштарының теңдігін көрсетсек, ҚБҚ белгісі бойынша үшбұрыштар өзара тең болады.

Ол үшін, $A_1B_1C_1$ үшбұрышты ABC үшбұрышымен, BC және B_1C_1 катеттермен беттесетіндей етіп қоямыз *(5-сурет)*. Олай болса, $\angle C$ және $\angle C_1$ тік бұрыш болғандықтан CA және C_1A_1 сәулелер жазыңқы бұрышты құрайды, яғни A, C, C_1 және A_1 нүктелер бір түзуде жатады. Нәтижеде, ABA_1 тең бүйірлі үшбұрыш болады. Бірақ тең бүйірлі үшбұрышта табанына жүргізілген биіктік биссектрисасы да болады (71-беттегі теорема қорытындысы бойынша). Демек, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. ***ГК белгісі дәлелденді.***

Есеп. 6-суретте берілген мәліметтерге қарап ABC — тең бүйірлі үшбұрыш екенін дәлелде.

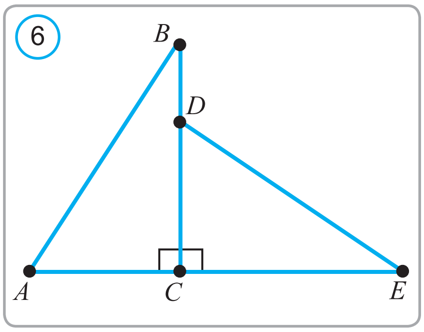


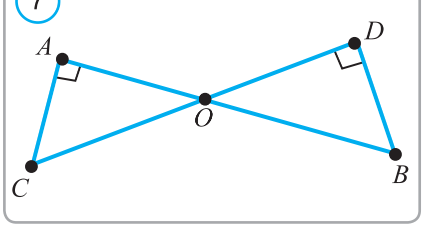
Шешуі: $\Delta AED = \Delta BFD$, өйткені олардың гипотенузалары мен сүйір бұрыштары тең. CED және CFD — тік бұрышты үшбұрыштар, $ED = FD$ және CD гипотенузасы ортақ болғандықтан, тік бұрышты үшбұрыштар теңдігінің ГК белгісі бойынша $\Delta CED = \Delta CFD$.

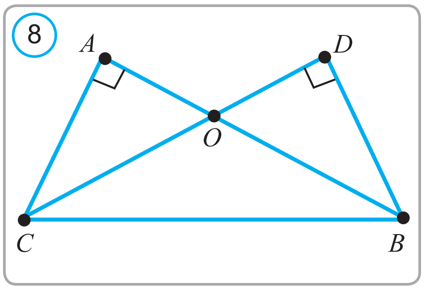
Демек, $\Delta ADC = \Delta BDC$, яғни $AC = BC$ және ABC — тең бүйірлі үшбұрыш.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Тік бұрышты үшбұрыштар теңдігінің белгілерін айт және түсіндір.
2. Тік бұрышты үшбұрыштардың катеті мен бір бұрышы сәйесінше тең болса, бұл үшбұрыштар тең бола ма?
3. Егер 6-суретте:
   а) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$;
   ә) $BC = DE$, $AB = CE$;
   б) $AC = CD$, $BC = CE$;
   в) $AB = DE$
   болса, ACB және DCE үшбұрыштар тең бола ма?
4. Егер 7-суретте: а) $OC = OB$; ә) $AC = BD$; б) $AO = OD$; в) $AC = OD$; г) $\angle OCA = \angle OBD$ болса, OAC және ODB үшбұрыштар тең бола ма?
5. Тік бұрышты ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда A және A_1 тік бұрыштар, BD және BD_1 -лер биссектрисалар және $\angle B = \angle B_1$, $BD = B_1D_1$ болса, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ екенін дәлелде.
6. Егер 8-суретте:
   а) $AC = BD$;
   ә) $OA = OD$;
   б) $\angle OCB = \angle OBC$;
   в) $BC = OD$;
   г) $\angle ACB = \angle DBC$ болса,
   BAC және CDB үшбұрыштар тең бола ма?
7. ABC үшбұрышта BD биіктік жүргізілген. Егер $AD = DC$ болса, ABC үшбұрыштың тең бүйірлі екенін дәлелде.
8. Сүйір бұрышты ABC үшбұрышта AA_1 және CC_1 биіктіктер тең. $\angle BAC = \angle BCA$ екенін дәлелде.

6


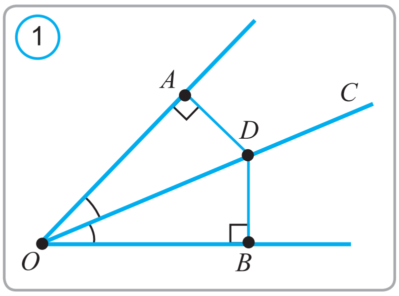
7


8


43 Бұрыш биссектрисасының қасиеті

Есіңде болса, нүктеден түзуге дейінгі қашықтық деп нүктеден түзуге жүргізілген перпендикулярды айтады.

Теорема. **Бұрыш биссектрисасының кез келген нүктесінен бұрыш қабырғасына дейінгі қашықтықтар өзара тең.**



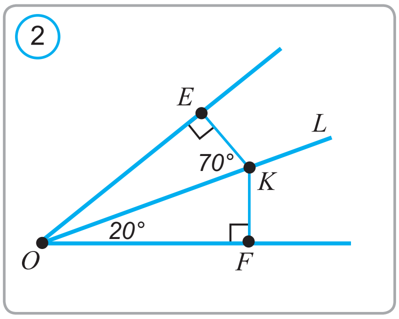
Дәлелдеу. Айталық, O бұрыш және оның биссектрисасы OC берілген болсын *(1-сурет)*. OC биссектрисада кез келген D нүкте аламыз және берілген бұрыш қабырғаларына DA және DB перпендикуляр жүргіземіз.

OAD және OBD тік бұрышты үшбұрыштарда:

1. $\angle AOD = \angle BOD$ — шартына орай;
2. OD — ортақ гипотенуза.

Тік бұрышты үшбұрыштар теңдігінің ГБ белгісі бойынша, $\Delta OAD = \Delta OBD$. Сонымен, $DA = DB$.

Теорема дәлелденді.



Есеп. EOF бұрыштың OL биссектрисасында K нүкте алынған (*2-сурет*). Егер $EK \perp OE$, $KF \perp OF$, $\angle OKE = 70°$ және $\angle KOF = 20°$ болса, а) EOK және OKF бұрыштарды; ә) EOF және EKF бұрыштарды тап.

Шешуі: а) Жоғарыда көрсетілгендей $\Delta EOK = \Delta FOK$. Сондықтан $\angle EOK = \angle FOK = 20°$ және $\angle OKF = \angle OKE = 70°$.

ә) $\angle EOF = 2 \cdot \angle KOF = 40°$,

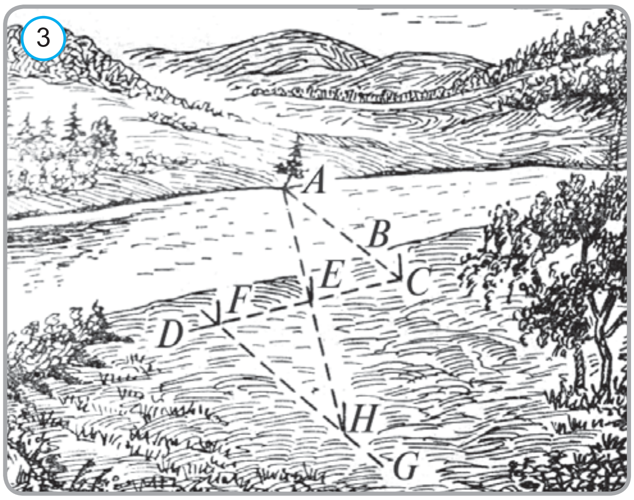
$\angle FKE = \angle FKO + \angle OKE = 70° + 70° = 140°$.

Жауап: а) 20° және 70°; ә) 40° және 140°.

Іс жүзіндік жаттығу

Тік бұрышты үшбұрыштар теңдігінің белгілерін пайдаланып, 3-суретте бейнеленген өзеннің енін анықтау үшін орындалған салу жұмыстарын түсіндір және өзеннің енін табу әдісін баянда.

3

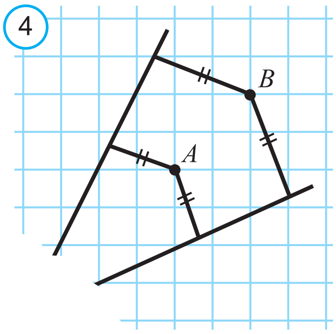


Сұрақтар, есептер және тапсымалар

1. Бұрыш биссектрисасының кез келген нүктесі оның қабырғаларынан теңдей қашықтағанын дәлелде.
2. Бұрыш AOB биссектрисасында алынған нүктеден OA сәулеге дейінгі қашықтық 7 *см* болса, осы нүктеден OB сәулеге дейінгі қашықтықты тап.
3. O бұрыш және оның биссектрисасында C нүкте берілген. Егер $\angle O = 60°$ және OC = 14 *см* болса, C нүктеден бұрыш қабырғасына дейінгі қашықтықты тап.
4. AOB бұрыш ішінде N нүкте алынған. Егер $AN=BN$, $OA \perp AN$ және $OB \perp BN$ болса, N нүкте AOB бұрыш биссектрисасында жататынын дәлелде.

5*. 4-суретте торкөз қағазға сызылған бұрыштың бір бөлігі бейнелеген.Қағаздың бұрыш төбесі орналасқан бөлігі жыртылып қалған. A және B сәулелер бұрыш қабырғаларынан тең қашықтағаны белгілі. Бұрыш биссектрисасын қалай салуға болады?

4



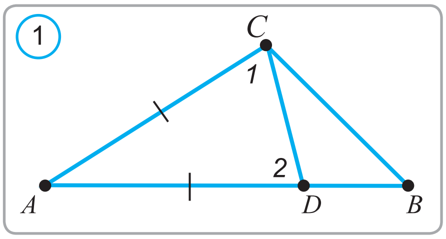
6*. Үшбұрыштардың екі биссектрисасы қиылысқан нүкте үшбұрыштың үш қабырғасынан теңдей қашықтағанын дәлелде.

7. Тең бүйірлі ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарының AC және A_1C_1 табандары мен табандарына жүргізілген BD және B_1D_1 биіктіктері тең. $ABC = A_1B_1C_1$ теңдігін дәлелде.

44 Үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштарының арасындағы қатыстар

Теорема. **Үшбұрыштың үлкен қабырғасына қарсы үлкен бұрыш жатады.**

$\Delta ABC,\ AB>AC$ *(1-сурет)* ⇨ $\angle C > \angle B$



Дәлелдеу. AB сәулеге AC қабырғаға тең AD кесінді қоямыз. $AB> AD$ болғандықтан, D нүкте AB кесіндіге тиісті болады. Демек, CD сәуле C бұрыштың ішкі аймағында жатады және C бұрышты екі бұрышқа бөледі. Соған қарай, $\angle C>\angle 1$.

ACD үшбұрышты тең бүйірлі етіп салғанымыз үшін, $\angle 1 = \angle 2$. $\angle 2$ — CBD үшбұрыштың сыртқы бұрышы болғандықтан, $\angle 2>\angle B$.

Бұл жеке көрсетілген үш қатынастан,

$\angle C > \angle 1 = \angle 2 > \angle B$, яғни $\angle C > \angle B$ екенін аламыз.

Теорема дәлелденді.

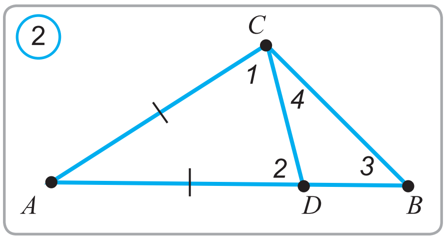
Сонымен бұл теорема кері теорема үшін де орынды.

Кері теорема. **Үшбұрыштың үлкен бұрышына қарсы үлкен бұрыш жатады.**

Бұл теореманың дәлелдеуін өз бетіңше орында.

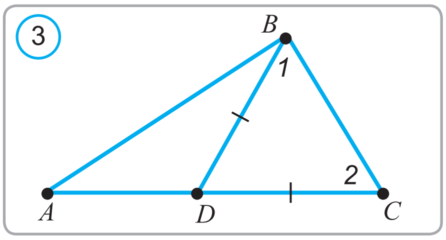
Салдар. ***Тең бүйірлі үшбұрышқа тең қабырғалардың қарсысында тең бұрыштар жатады.***

Оның дұрыстығын бұрын дәлелдеген едік.



1-есеп. 2-суретте берілген мәліметтерден пайдаланып, $\angle 1>\angle 3$ екенін дәлелде.

Шешуі: $\angle 2>\angle 3$ екені белгілі, өйткені, $\angle 2$ — BDC үшбұрыштың сыртқы бұрышы болып, сыртқы бұрыш қасиетіне орай, $\angle 2=\angle 3+\angle 4$ және $\angle 4>0$. ACD — тең бүйірлі үшбұрыш болғандықтан $\angle 1=\angle 2$. Демек, $\angle 1>\angle 3$ болады.



2-есеп. 3-суретте берілгендерді пайдаланып, $AB<AC$ екенін көрсет.

Шешуі: BDC — тең бүйірлі үшбұрыш (өйткені $BD=DC$), демек, $\angle 1=\angle 2$ болады. $\angle 1<\angle ABC$ болғандықтан $\angle 2<\angle ABC$. Үлкен бұрыштың қарсысында үлкен қабырға жатқандықтан $AB<AC$ болады.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Үшбұрыштың үлкен қабырғасына қарсы үлкен бұрыш және керісінше үлкен бұрыш қарсысында үлкен қабырға жататынын дәлелде.

2. ABC үшбұрышта $AB=12$ *см*, $BC=10$ *см*, $CA=7$ *см* болса, үшбұрыштың ең үлкен және ең кіші бұрыштары қайсы.

3. ABC үшбұрышында а) $AB<BC<AC$; ә) $AB=AC<BC$ болса, үшбұрыштың бұрыштарын салыстыр. A бұрыш доғал болуы мүмкін бе?

4. Тең бүйірлі үшбұрыштың ішіндегі бұрышы 62° бұрыш болса, оның қайсы қабырғасы үлкен болады? 58° болса ше?

5. Үшбұрыштардың доғал бұрышына қарсы кіші қабырға жатуы мүмкін бе?

6. ABC үшбұрышта а) $\angle A>\angle B>\angle C$; ә) $\angle A=\angle B<\angle C$ болса, үшбұрыштарды салыстыр.

7. Үшбұрыштың үлкен бұрышы 60°-тан кіші болуы мүмкін бе? Үшбұрыштың кіші бұрышы 60°-тан үлкен болуы мүмкін бе?

8. Тең қабырғалы екі үшбұрыштың екі биссектрисасы қиылысқанда пайда болатын бұрыштарды тап.

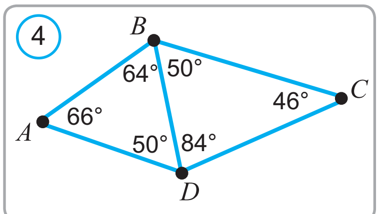
9*. ABC үшбұрышта $AB>BC$ және $\angle A=60°$ болса, B бұрыш қандай мәндерді қабылдайды.

10.* Үшбұрыштың α, β және γ бұрыштары үшін $\alpha<\beta+\gamma$, $\beta<\alpha+\gamma$, $\gamma<\alpha+\beta$ қатынастар орынды болса, бұл қандай үшбұрыш болады?

11.* 4-суреттен ең үлкен және ең кіші кесінділерді көрсет. Жауабыңды түсіндір.

12. Тең бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы үлкен бе катеті ме?

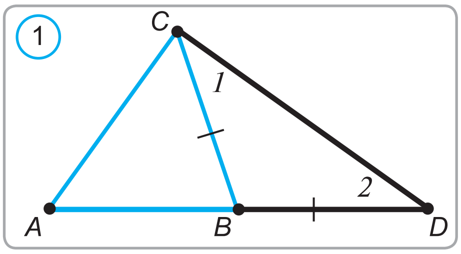
4



45 Үшбұрыштар теңсіздігі

Үшбұрыштың әрбір қабырғасы басқа екі қабырғасының қосындысынан кіші болады.

ΔABC *(1-сурет)* ⇨ $AC < AB + BC$



Дәлелдеу. AB түзуде BC кесіндіге тең BD кесінді саламыз және C және D нүктелерді қосамыз *(1-сурет)*. Нәтижеде, BCD тең бүйірлі үшбұрыш пайда болады. Одан, $\angle 1 = \angle 2$, өйткені $BC = BD$. Фигурадан белгілі болуынша,

$$\angle ACD > \angle 1.$$

Олай болса, $\angle ACD > \angle 2$ өйткені $\angle 1 = \angle 2$,

Бұл бұрыштар ACD үшбұрыштарға тиісті. Енді үлкен бұрыштың қарсысында үлкен қабырға жататынын есепке алсақ, $AC < AD$ теңсіздікті аламыз.

Олай болса, $AC < AB + BD$ өйткені $AD = AB + BD$. Одан $BD = BC$ екенін есепке алсақ, $AC < AB + BC$ ны аламыз.

Теорема дәлелденді.

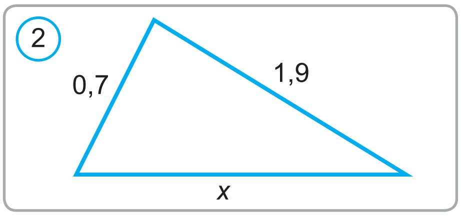
Бұл теоремадан төмендегі нәтиже шығады.

Нәтиже. **Бір түзуде жатпайтын кез келген үш A, B және C нүкте үшін $AC < AB + BC$, $AB < AC + BC$ және $BC < AB + AC$ теңсіздіктер орынды деп аталады.**

Бұл теңсіздіктердің әр бірі **үшбұрыш теңсіздігі** деп аталады.

Есеп. Үшбұрыштың екі қабырғасы 0,7 және 1,9. Егер үшінші қабырға бүтін сан екені белгілі болса, соны тап *(2-сурет)*.

Шешуі: Берілген үшбұрыштың екі қабырғасы белгілі: 0,7 және 1,9. Үшінші қабырғаны үшбұрыш теңсіздігін пайдаланып табамыз:



$x + 0,7 > 1,9$, немесе $x > 1,2$

$1,9 + 0,7 > x$, немесе $x < 2,6$.

Бұл екі теңсіздіктен $1,2 < x < 2,6$ ала-мыз.

x – бүтін сан, тек $x=2$ мән бұл қос теңсіздікті қанағаттандырады. Демек, үшбұрыштың белгілі қабырғасы 2-ге тең. **Жауап:** 2

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Үшбұрыш теңсіздігінің мазмұнын түсіндір?

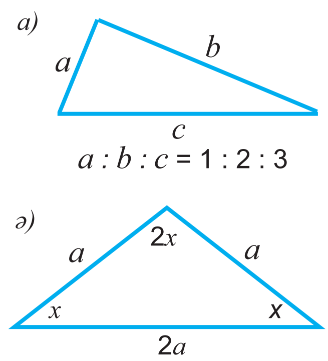
2. Үшбұрыш теңсіздігі қандай мәселелерді шешуде қолданылады?

3. Ұзындықтары 1 *м*, 2 *м* және 3 *м* болған кесінділерден үшбұрыш салуға бола ма?

4. Қабырғалары: а) 2; 3; 4; ә) 2; 2; 4; б) 3,6; 1,8; 5; в) 56; 38; 19 болған үшбұрыш бар ма?

5. Тең бүйірлі үшбұрыш қабырғалары: а) 7 және 3; ә) 10 және 5; б) 8 және 5 болса, үшінші қабырғаларын тап.

3



6. Есептің берілуі дұрыс па (*3-сурет*)?

7. Үшбұрыштың кез келген қабырғасы оның қалған екі қабырғасының айырмасынан үлкен болатынын дәлелде.

8. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 25 *см*, бір қабырғасы екінші қабырғасынан 4 *см* артық және сыртқы бұрышының бірі сүйір болса, үшбұрыштың қабырғаларын тап.

9.* Ұзындықтары 2; 3; 4; 5 және 6-ға тең кесінділер неше түрлі үшбұрыш салу мүмкін?

10. Жазықтықта үш A, B, C нүктелер үшін $AB+BC \geq AC$ теңсіздік орындалса, AB, BC және AC кесінділер қандай геометриялық фигураны өрнектейді?

11.* Үшбұрыш медианасы үшбұрыштың жарты периметрінен (периметрдің жартысынан) кіші екенін есепте.

12. Шеңбердің ең үлкен хордасы оның диаметрі болатынын дәлелде.

46 Біліміңді сынап көр

1. Бос жерлерді мағынасына қарай дұрыс сөздермен толтыр.

1. Үшбұрыштың ішкі бұрышына .... үшбұрыштың сыртқы бұрышы деп аталады.
2. Үшбұрыш .... 180°-қа тең.
3. Екі бұрыштың қосындысы 90°-қа тең болған үшбұрыш .... болады.
4. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы оған еншілес емес .... ға тең.
5. Егер үшбұрыштың бір бұрышы доғал болса, қалған екі ....
6. Тік бұрышты үшбұрыштың бұрыштары .... бола алмайды.
7. Үшбұрыштың әрбір қабырғасы қалған қабырғаларының қосындысынан ....

8. Екі түзу бұрышты үшбұрыштың гипотенузасы мен .... тең болса, бұл үшбұрыштар тең болады.
9. Тік бұрышты үшбұрыштардың катеттері тең болса, ол .... болады.
10. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузасына түсірілген .... осы гипотенузаның жартысына тең.
11. Тік бұрышты үшбұрыштың катеті .... болса, ол 30°-тық бұрыш қарсысында жатады.
12. Бұрыш қабырғаларынан тең қашықтықтағы нүкте осы бұрыштың .... жатады.

2. Төмендегі сөйлемдерде қате болса, оны тап және түзет.

1. Тік бұрышты үшбұрыштардың гипотенузасы мен бір бұрышы тең болса, бұл үшбұрыштар тең болады.
2. Үшбұрыштың ішкі және сыртқы бұрыштары қосындысы 180°-қа тең.
3. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы, екі ішкі бұрыштарының қосындысына тең.
4. Үшбұрыштың үлкен қабырғасына қарсы кіші бұрыш, үлкен бұрышына қарсы кіші қабырға жата ма.
5. Үшбұрыштың әрбір қабырғасы қалған қабырғаларының айырмасынан кіші.
6. Тік бұрышты үшбұрыштың тек бір ғана биіктігі бар.
7. Тік бұрышты үшбұрыштың катеті гипотенузаның жартысына тең.
8. Тік бұрышты үшбұрыштың биіктігі гипотенузаның жартысына тең.
9. Тік бұрышты үшбұрыштың гипотенузалары тең болса, бұл үшбұрыштар да тең болады.
10. Үшбұрыштардың ішкі бұрышы қалған екі бұрышының қосындысынан әрқашан кіші болады.
11. Үшбұрыштың сыртқы бұрыштары әрқашан доғал бұрыш болады.

3. Кестеде берілген қасиеттер мен тұжырымдарға сәйкес келетін геометриялық түсініктерді тап.

1.	Ішкі бұрыштарының қосындысы 180° -қа тең	
2.	Сүйір бұрыштарының қосындысы 90° -қа тең	
3.	Қабырғалары кесінділерден құралған	
4.	Үшбұрыштар қабырғаларының арасындағы қатыстар	
5.	Гипотенузаның жартысына тең	
6.	Үш биіктігі бір төбеде қиылысады	
7.	Катеттен әрқашан кіші	
8.	Нүктелері бұрыш қабырғаларынан тең қашықтықта	

4. Тест

1. Егер үшбұрыштың бұрыштары 2 : 3 : 4 қатынаста болса, оның бұрыштарын тап.

   А) 20°, 30°, 40°; Ә) 40°, 60°, 80°;

   Б) 36°, 54°, 90°; В) 18°, 27°, 36°.

2. Егер үшбұрыштың бұрыштары .... қатынаста болса, оның түрін анықта.

   А) Сүйір бұрышты; Ә) Доғал бұрышты;

   Б) Тік бұрышты; В) Анықтауға болмайды.

3. Егер үшбұрыштың бір сыртқы бұрышы сүйір болса, оның түрін анықта.

   А) Сүйір бұрышты; Ә) Доғал бұрышты;

   Б) Тік бұрышты; В) Анықтауға болмайды.

4. Егер үшбұрыштың бір бұрышы қалған екі бұрышының қосындысынан үлкен болса, оның түрін анықта.

   А) Сүйір бұрышты; Ә) Доғал бұрышты;

   Б) Тік бұрышты; В) Анықтауға болмайды.

5. Қайсы үшбұрыштың биіктіктері оның төбесінде қиылысады?

   А) Теңбүйірлі үшбұрыш; Ә) Теңқабырғалы үшбұрыш;

   Б) Тік бұрышты үшбұрыш; В) Ондай бұрыштар жоқ.

6. АВС үшбұрышта А төбесіндегі сыртқы бұрыш 120°-қа тең, С төбесіндегі ішкі бұрыш 80°-қа тең. В төбесіндегі сыртқы бұрышты тап.

   А) 120°; Ә) 140°; Б) 160°; В) 40°.

7. Үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының бірі 120°-қа , осы бұрышқа сыбайлас емес ішкі бұрыштардың айырмасы 30°-қа тең. Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының үлкенін тап.

   А) 70°; Ә) 75°; Б) 85°; В) 90°.

8. Үшбұрыштың екі бұрышы мәнінің қатынасы 1:2. Үшінші бұрышы осы бұрыштардың кішісінен 40о үлкен. Үшбұрыштың үлкен бұрышын тап.

   А) 105°; Ә) 75°; Б) 80°; В 90°.

9. Теңбүйірлі үшбұрыштың периметрі 48°-қа тең. Оның қабырғаларының бірі 12-ге тең болса, қалған қабырғаларын тап.

   А) 18; 12 Ә) 16; 16 Б) 18; 24 В) 18; 18.

10. Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан биссектриса және биіктік түсіріліп, олардың арасындағы бұрыш 24о-қа тең. Үшбұрыштың кіші бұрышын тап.

А) 21°; Ә) 24°; Б) 36°; В) 16°.

11. 1-суреттегі $\angle A$ тап.

А) 10°; Ә) 20°; Б) 60°; В)100°.

12. Ұзындықтары 3, 5, 7 және 11-ге тең кесінділерден неше әртүрлі қабырғалы үшбұрыш салуға болады?

А) 2 Ә) 3 Б) 5 В) 6.

13. 2-суреттегі $x + y$-ті тап.

А) 90°; Ә) 180°;

Б) 270°; В) анықтауға болмайды.

14. 3-суреттегі $\angle BCA$ тап.

А) 90°; Ә) 96°; Б) 144°; В) 84°.

15. 4-суреттегі $a \| b$ болса, x-ті тап.

А) 35°; Ә) 45°; Б) 25°; В) 20°.

16. 5-суреттегі x-ті тап.

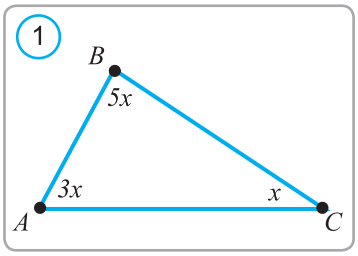
А) 60°; Ә) 55°; Б) 65°; В) 70°.

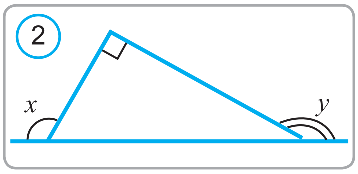
17. 6-суреттегі x-ті тап.

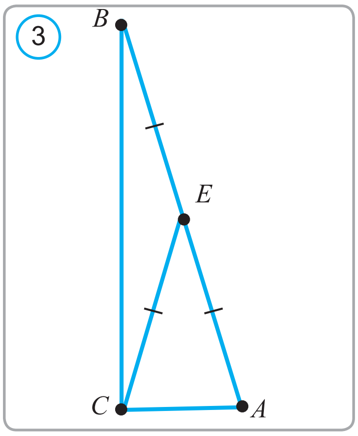
А) 30°; Ә) 45°; Б) 15°; В) 75°;

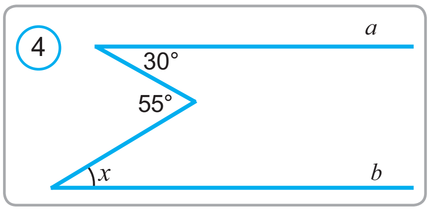
18. Ұзындығы 2 см, 3 см, 4 см және 5 см кесінділерден неше үшбұрыш салуға болады?

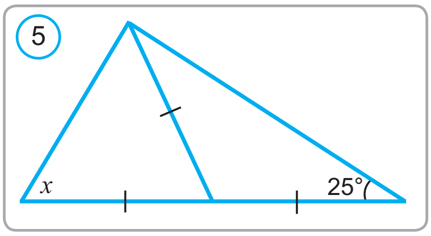
А) 1 ta; Ә) 2 ta; Б) 3 ta; В) 4 ta.

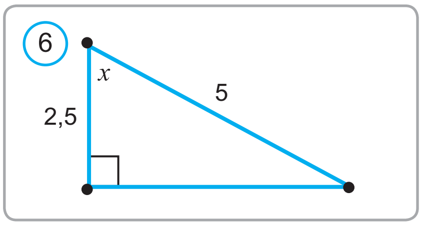












5. Есептер

1. Буындарының ұзындығы 1 $м$, 2 $м$, 4 $м$, 8 $м$ және 16 $м$ тұйық сынық сызық салу мүмкін бе?

2. Егер үшбұрыштың қабырғалары бүтін сандар болып, периметрі 15-ке тең болса, оның қабырғаларын анықта.

3. Үшбұрыштың биіктігі оның қабырғаларынан әрқашан кіші бола ма?

4. Үлкен қабырғасы 36-ға тең үшбұрыштың бұрыштары 1:2:3 сияқты қатынаста болса, осы бұрыштардың кіші қабырғасын тап.

5. Үшбұрыштың табанына түсірілген биіктік оның қабырғаларымен 27° және 36°-тық бұрыштар құрайды. Үшбұрыштардың бұрыштарын тап.

6. Тік бұрышты ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда A және A_1 тік бұрыштар, BD және B_1D_1 биссектрисалар мен $\angle B=\angle B_1$, $BD=B_1D_1$ болса, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ екенін дәлелде.

7. 7-суреттегі x-ті тап

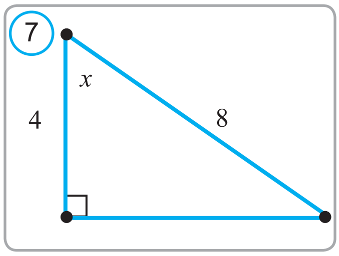
8. 8-суреттегі $\angle ABC$ -ні тап.

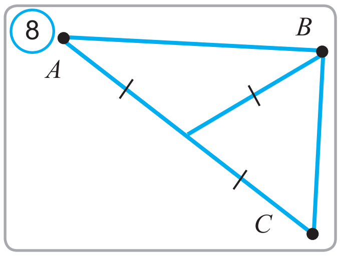
9. 9 суретте $AB||CD$ екенін дәлелде.

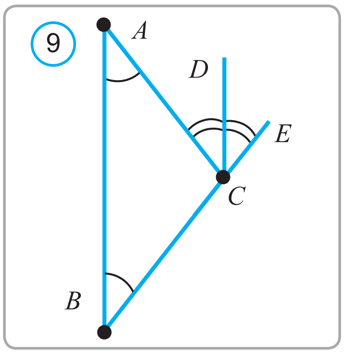
10. Теңбүйірлі үшбұрыштың бір бұрышы 100°-қа тең. Үшбұрыштың қалған ұабырғаларын тап.

11. Теңбүйірлі үшбұрыштың бұрыштарының бірі 60°-қа тең болса, осы үшбұрыш теңқабырғалы бола ма?

12. Табаны AC және B бұрышы 36°-қа тең теңбүйірлі ABC үшбұрыштың AD биссектрисасы жүргізілген. CDA және ADB үшбұрыштардың теңбүйірлі екенін дәлелде.







13. Бір үшбұрыш 60° және 38°-ты бұрыштарға, екінші үшбұрыш 38° және 82°-ты бұрыштарға ие. Бұл үшбұрыштар тең болуы мүмкін бе?

14. Үшбұрыштың периметрі қабырғаларынан 14 см, 16 см және 24 см үлкен болса, үшбұрыштың ең үлкен қабырғасын тап.

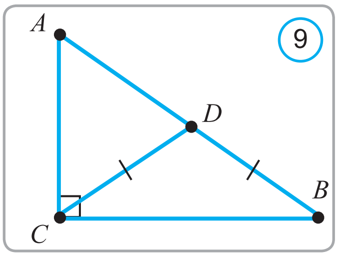
15. Тік бұрышты ABC үшбұрыштың тік бұрышының төбесінен CD биіктік жүргізілген. Егер 1) A = 24° ; 2) A = 70° болса, CDB бұрышты тап.

16. Теңбүйірлі үшбұрыштың бір сыртқы бұрышы 70°-қа тең. Оның ішкі бұрыштарын тап.

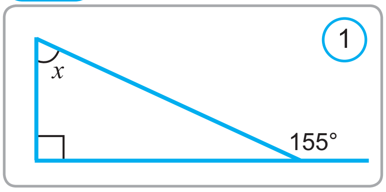
17. ABC үшбұрыштың A және C төбесінен жүргізілген биіктіктер N нүктеде қиылысады. Егер $\angle A$ = 50° және $\angle C$ = 84° болса, ANC бұрышты тап.

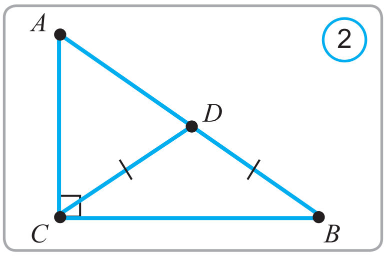
18. ABC үшбұрышта BD медиана AC қабырғаның жартысына тең. Үшбұрыштың B бұрышын тап.

19. 9-суретте BD = CD = 10 болса, AB-ны тап.



47 5-бақылау жұмысы





Үлгі бақылау жұмысы екі бөлімнен құралады:

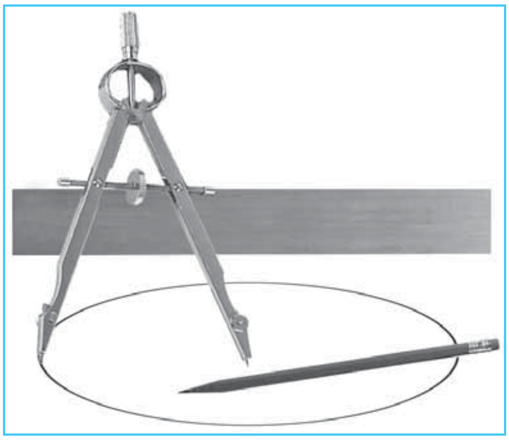
I. 125-беттегі тесттерге ұқсас 5 тест;

II. Төмендегі есептерге ұқсас 3 есеп (4-есеп қабілетті оқушыларға арналған).

1. Белгісіз бұрышты тап *(1-сурет)*.
2. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы 120° болып, оған еншілес емес ішкі бұрышы 1:2 қатынаста болса, үшбұрыштың бұрыштарын тап.
3. Егер 2-суретте $\angle ACB$=90°, CD=BD және AB= = 24 *см* болса, CD кесіндіні тап.
4. ABC үшбұрыш BD биссектрисасы AC қабырғаны 100° бұрышпен қияды. Егер BD=BC болса, үшбұрыштың қабырғаларын тап.

Қызыққан оқушыларға арналады.

«Геометрия–7» электронды оқулығының тиісті тарауымен танысып шық. Осы тарауға енгізілген тақырыптарға қатысты анимациялық қосымшаларда берілген тапсырмаларды орында және тест тапсырмаларын шешіп, өз біліміңді сынап көр.



V ТАРАУ

САЛУ ЕСЕПТЕРІ

Бұл тарауды оқығанда тқмендегі білім және дағдыларды біліп аласың:

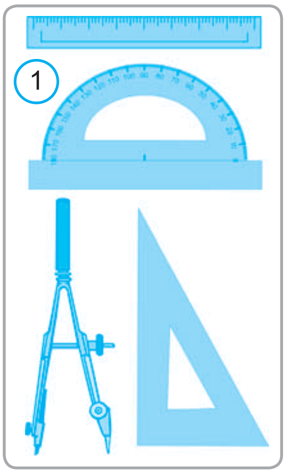
Білім:

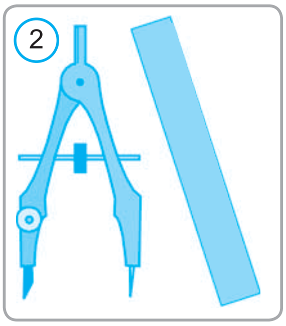
— Циркуль және жай сызғыштың көмегімен салу есептерін шығаруда ескерілетін арнайы ережелерді;
— салу есептерін шығару басқышын;

Дағдылар:

— Сызғыш және циркульдің көмегімен салу істерін жүзеге асыру;
— берілген бұрышқа тең бұрыш жасай білу;
— бұрыш биссектрисасын сала білу;
— перпендикуляр түзулерді сала білу;
— кесінді қақ бөлу;
— берілген элементтері бойынша үшбұрыштар салу.

48 Циркуль және сызғышпен көмегімен арналған есептер





Салуға қатысты есептерді тек жай сызғыш және циркульмен салу Ежелгі Грецияда өнер дәрежесіне жеткен. Өмірде геометриялық салу кез келген аспаппен орындалуы мүмкін және қолайлы. Бірақ жай сызғышпен салу логикалық ойлау қабілетті арттырады.

Осы күнге дейін әр түрлі аспаптармен әр түрлі геометриялық фигураларды салып келдік. Мысалы, сызғыштың көмегімен түзу, сәуле, кесінді, үшбұрыш, тағы басқа фигураларды сыздық. Сызғыш пен транспортирдің көмегімен түрлі бұрыштарды салдық. Циркульдің көмегімен шеңбер және доғаларды бейнеледік (1-сурет).

Көптеген геометриялық фигураларды тек масштабты бөлімдері жоқ, бір жағы түзу және циркульдің (2-сурет) көмегімен салу мүмкін емес екен. (Ондай сызғышты жай сызғыш дейміз).

Сондықтан геометрияда осы екі аспаптың көмегімен салуға қатысты есептер арнайы бөліп қарастырылады.

Бұл екі аспапты пайдаланудың арнайы ережелері бар – олармен тек төмендегі жұмыстарды орындауға рұқсат беріледі:

Жай сызғышпен тек:

1. Кез келген түзу салу;
2. Берілген нүктеден өтетін түзу сызу;
3. Екі нүктеден өтетін түзу сызу.

Циркульдің көмегімен тек:

1. Кез келген шеңбер салу;
2. Центрі берілген нүктеде болатын кез келген радиусты шеңбер салу;
3. Берілген радиусты, центрі болса кез келген шеңбер салу;
4. Центрі берілген нүктеде радиусы берілген кесіндіден құралған шеңбер салу;
5. Берілген кесіндіге тең кесіндіні берілген түзуге оның берілген нүктесінен бастап әр екі бағытқа қою.

Басқа кез келген салу осы амалдарға келтірілуі қажет. Тіпті сызғышта миллиметрлік бөлімдер болсада кесінділердің ұзындығын өлшеу және белгілі ұзындықтағы кесіндіні бір түзуге қоюға рұқсат берілмейді.

Салу есептерінде тек бір геометриялық фигураны салу жолын, әдісін табу ғана емес, тіпті пайда болған геометриялық фигураның шындығында берілген шарттарды қанағаттандыратынын негіздеп, яғни дәлелдеп беру де шарт.

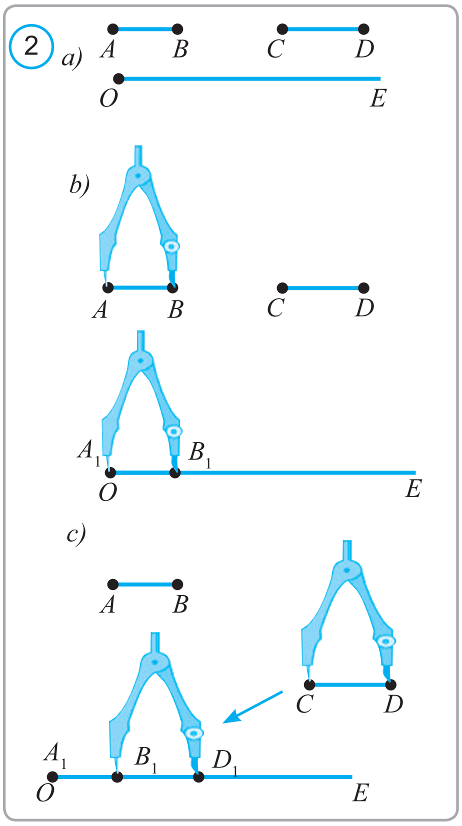
1-есеп. AB, CD кесінділер және OE сәуле берілген *(2.а-сурет)*. Жай сызғыш және циркульдің көмегімен OE сәулеге ұзындығы $AB + CD$-ға тең кесіндіні қой.

Салу:

1-басқыш. Циркульдің көмегімен AB кесіндіге тең A_1B_1 кесіндіні OE сәулеге қоямыз *(2ә-сурет)*.

2-басқыш. Циркульдің көмегімен CD кесіндіге тең C_1D_1 кесіндіні B_1E сәулеге қоямыз *(2.б-сурет)*.

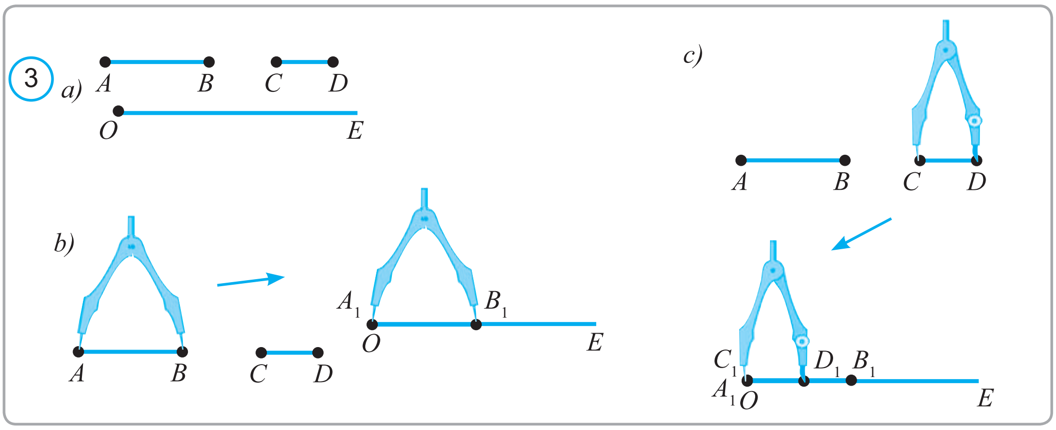
Пайда болған A_1D_1 кесінді – ұзындығы $AB + CD$-ға тең кесіндіден құралады.



2-есеп. AB және CD кесінділер және OE сәуле берілген *(3.а-сурет)*. Егер $AB > CD$ екені белгілі болса, жай сызғыш және циркульдің көмегімен OE сәулеге $AB - CD$-ға тең кесіндіні қой.

Салу.

OE сәулеге алдымен AB кесіндіге тең A_1B_1кесіндіні *(3ә-сурет)*, сосын CD кесіндіге тең D_1D_1 кесіндіні қоямыз *(3б-сурет)*. Пайда болған D_1B_1 кесінді – ұзындығы $AB - CD$ –ға тең кесіндіден құралады.



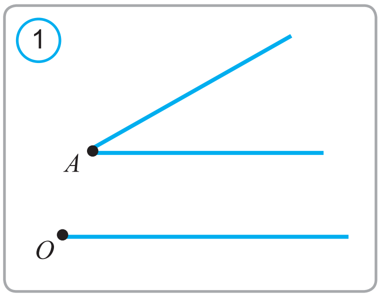
Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

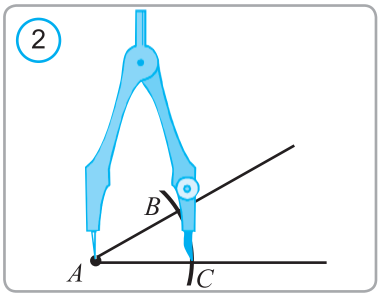
1. Жай сызғышпен қандай фигураларды салуға болады?
2. Циркульмен салуға қатысты қандай жұмыстарды жүзеге асыруға болады?
3. Түзуде A және B нүктелер берілген. BA сәуле B нүктеден бастап BC кесіндіні қойғанда, $BC = 2AB$ болсын.
4. Егер шеңберден тыстағы нүктеден шеңбердің ең жақын және алыс нүктелеріне дейінгі қашықтық сәйкесінше 2 *см* және 10 *см* болса, шеңбердің радиусын тап.
5. A және B нүктелер берілген. Тек циркульді пайдаланып сондай бір C нүкте жаса, $AC = 3AB$ болсын.
6. a және b ұзындықтағы кесінділер берілген. а) $a + b$; ә) $a - b$; б) $2a + 3b$; в) $2a - b$ ұзындықтағы кесінділерді сал.
7. Ұзындығы 12 *см* және 5 *см* кесінділер берілген. Ұзындығы а) 17 *см*; ә) 7 *см*; б) 12 *см*; в) 22 *см*; г) 29 *см* кесінділер сал.

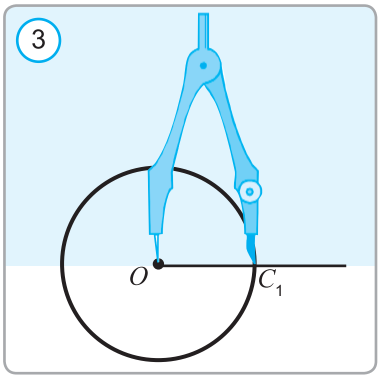
Геометриялық басқатырғыш

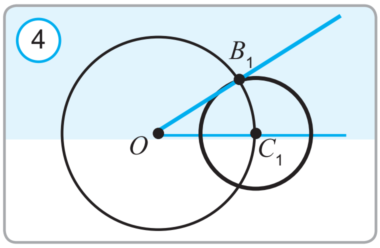
Санжар шеңбер салып болып, оның центрін қаламмен белгілеуді ұмытып кеткенін байқап қалды. Қырсыққанда ізі қалмады. Бірақ шеңбердің радиусы 12 *см* екені есінде қалған еді. Осы мәліметті пайдаланып, тек циркульдің көмегімен салынған шеңбердің центрін табуға бола ма?

49 Берілген бұрышқа тең бұрыш салу









1-есеп. A бұрыш берілген. O сәулеге *(1-сурет)* A бұрышқа тең бұрыш сал.

Салу:

1-қадам. Центрі A нүктеде болған кез келген шеңбер саламыз *(2-сурет)*. Бұл берілген A бұрыш қабырғаларын B және C нүктелерде кесіп өтсін.

2-қадам. Радиусы салынған шеңбер радиусына тең және центрі O нүктеде болған шеңбер саламыз *(3-сурет)*. Бұл шеңбердің O сәулемен қиылысу нүктесін C_1-мен белгілейміз.

3-қадам. Центрі C_1 нүктеде, радиусы болса BC –ға тең үшінші шеңбер саламыз *(4-сурет)*. Оның екінші шеңбермен қиылысу нүктелерінің бірін, айталық жоғары жарты жазықтықта жатқанын B_1 -мен белгілейміз.

4-қадам. OB_1 сәуле өткіземіз *(4-сурет)*. Пайда болған B_1OC_1 бұрыш O сәулеге қойылған, берілген A бұрышқа тең бұрыш болады.

Негіздеу: 2 және 4-суретте бейнеленген ABC және OB_1C_1 үшбұрыштардағы салуға қарай: $AB = OB_1$, $AC = OC_1$ және $BC = B_1C_1$.

Демек, үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісінен $\Delta ABC = \Delta OB_1C_1$. Одан, $\angle B_1OC_1 = \angle A$.

Ескерту: Бұл есептің екі шешімі бар болып, шешімдер 3-қадамда O сәуле жатқан түзу бөлген қайсы жарты жазықтық алынуына байланысты болады.

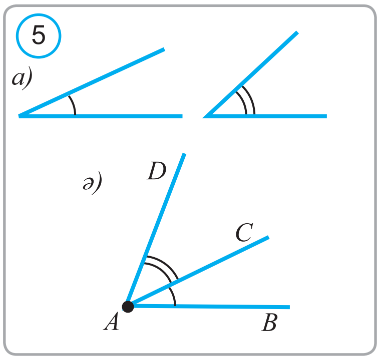
2-есеп. Берілген екі бұрыш қосындысына тең болған бұрыш сал *(5. а-сурет)*.

Салу: 1-қадам . Алдымен бірінші бұрышқа тең болған BAC бұрышты саламыз *(5. ә-сурет)*.

2-қадам. AC сәулеге екінші бұрышқа тең болған CAD бұрышты қоямыз. Пайда болған BAD бұрыш берілген бұрыштар қосындысына тең бұрыш болады.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. а) 30°; ә) 60°; б) 15°; в)120°; г) 45° -тық бұрыштар берілген. Жай сызғыш және циркульді пайдаланып, оларға тең бұрыштарды сал.
2. $\angle A = \alpha$ және $\angle B = \beta$ бұрыштар берілген ($\alpha > \beta$). Өлшемі: а) 2α; ә) $\alpha - \beta$; б) $2\alpha + \beta$ болған бұрыштарды сал.
3. 45° және 30° бұрыштар берілген. Өлшемі а) 15°; ә) 75°; б) 105°; в) 120° болған бұрыштарды сал.



50 Бұрыш биссектрисасын салу

1-суретте бейнеленген A бұрыш берілген болсын. Бұл бұрышты тең екіге бөлу төмендегідей болады:

Салу:

1-қадам. Центрі A нүктеде болған кез келген радиусты шеңбер салынады және оның бұрыш қабырғаларымен қиылысу нүктелері B және C белгіленеді.

2-қадам. Радиусты өзгертпестен, центрі B және C нүктелерде болған екі шеңбер салынады (*2-сурет*). Бұл екі шеңбердің қиылысуынан пайда болған D нүкте белгіленеді (*3-сурет*).

3-қадам. A және D нүктеден өтетін AD сәуле жүргізіледі (*4-сурет*).

AD сәуле — берілген бұрыш биссектрисасы болады.

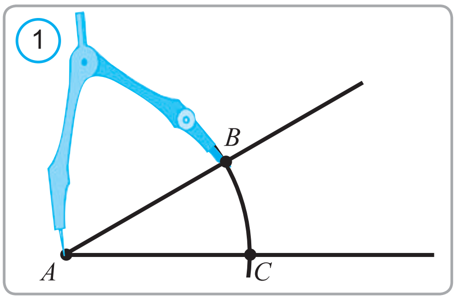
Негіздеу. ABD және ACD үшбұрыштарда

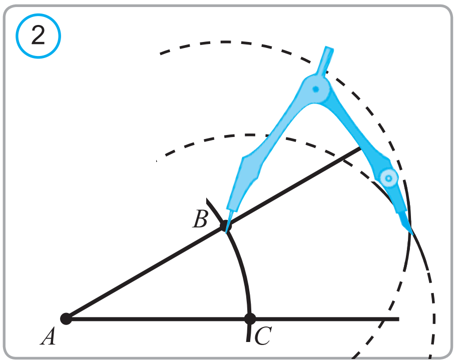
1) салуға қарай $AB = AC$;

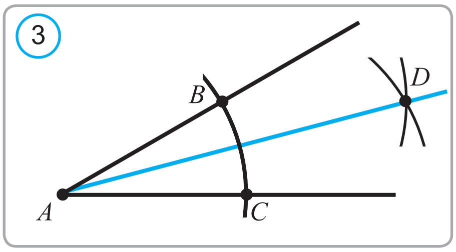
2) салуға қарай $BD = CD$;

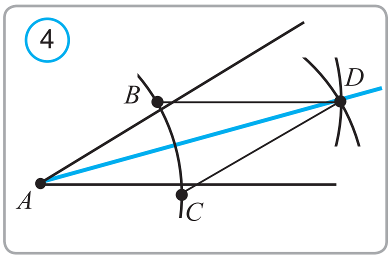
3) AD — ортақ қабырға.

Үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісі бойынша, $\Delta ABD = \Delta ACD$. Одан, $\angle BAD = \angle CAD$.



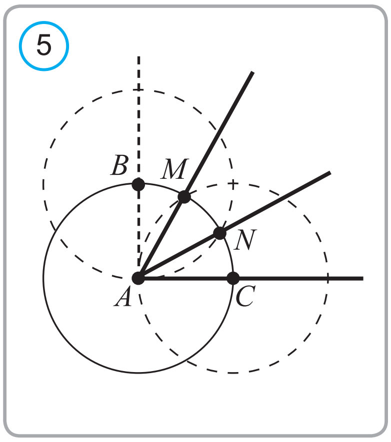






Есеп. Берілген тік бұрышты тең үшке бөл.

Шешуі: $\angle A$ тік бұрыш берілген болсын. Оның төбесін центр етіп, кез келген радиусты шеңбер саламыз. Шеңбер тік бұрыш қабырғаларын B және C нүктелерде қиып өтсін. Радиусты өзгертпестен центрі B және C нүктелерде болған тағы екі шеңбер саламыз. Бұл шеңберлердің бірінші шеңбермен қиылысқан нүктелерден тік бұрыш ішінде жатқандарын M және N-мен белгілейміз. AM және AN сәулелерін саламыз. Бұл сәулелер берілген тік бұрышты үш тең бұрышқа бөледі. Бұл тұжырымның дұрыстығын өз бетіңше негізде.



Ескерту. *Берілген кез келген бұрышты үшке бөлу есебі өте ертедегі және белгілі есеп болып, бұл туралы көп ғалымдар бас қатырған Тек XIX ғасырда кейбір бұрыштар ескерілмей, әдетте бұрышты тең үшке бөлуге болмайтыны дәлелденді. Мысалы, 60°–тық бұрышты тең үшке бөлуге болмайды. Сөз әрине, жай сызғыш және циркульмен анық салу жайлы болып жатыр. Бұл аспаптармен өте үлкен анықтықпен салу немесе басқа аспаптарды пайдаланып анық салуды орындау мүмкін.*

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Жай сызғыш және циркульдің көмегімен: а) 90°; ә) 60°; б) 30° бұрыштарды тең екіге бөл.

2. Бұрыш сал және оны төрт тең бұрышқа бөл.

3. 45°–тық бұрышты үш тең бұрышқа бөл.

4. Берілген гипотенузасы мен сүйір бұрышы бойынша тік бұрышты үшбұрыш сал.

5. 36°-тық бұрыш берілген. Циркуль және жай сызғыштың көмегімен 99°-тық бұрыш сал.

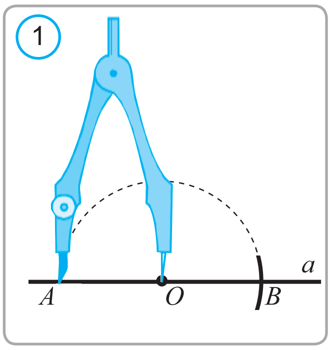
6*. 54°-тық бұрыш берілген. Циркуль және жай сызғыштың көмегімен бұл бұрышты тең үшке бөл.

51 Берілген түзуге перпендикуляр түзу салу. Кесіндіні қақ екіге бөлу

1-есеп. Берілген a түзуге оның O нүктесінен өтетін перпендикуляр түзу сал.

Салу:

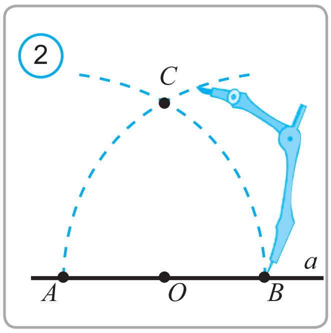
1-қадам. O нүктені центр етіп кез келген шеңбер саламыз. Ол берілген түзуді A және B нүктелерде қиып өтсін *(1-сурет)*.



2-қадам. A және B нүктелерді центр етіп, радиусы AB-ға тең шеңберлер саламыз *(2-сурет)*. Бұл шеңберлердің қиылысу нүктелерінің бірін C деп белгілейміз.

3-қадам. C және O нүктелерден өтетін OC түзуді саламыз *(3-сурет)*.

OC түзуі берілген a түзуге оның O нүктесінен өтетін перпендикуляр болады.



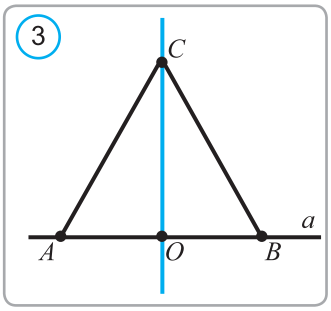
Негіздеу. AOC және BOC үшбұрыштарын қарастырамыз. Оларда, жасауға байланысты:

1. $AO = BO$;
2. $AC = BC$;
3. CO ортақ қабырға.

Демек, үшбұрыштар теңдігінің ҚҚҚ белгісіне орай, $\Delta AOC = \Delta BOC$. Олай болса, $\angle AOC = \angle BOC$. Бірақ $\angle AOC + \angle BOC = 180°$. Бұдан $\angle AOC = \angle BOC = 90°$ екені шығады.

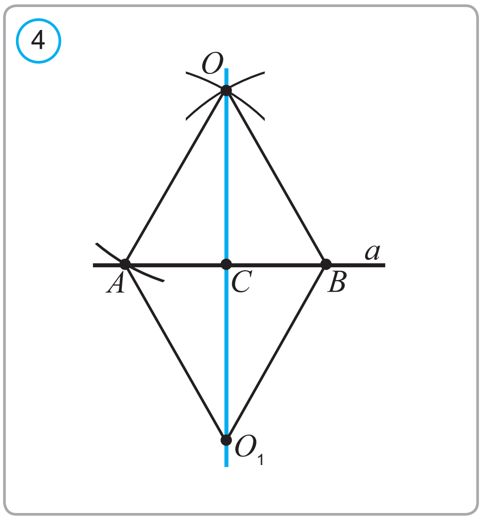
Демек, шындығында да $OC \perp a$.

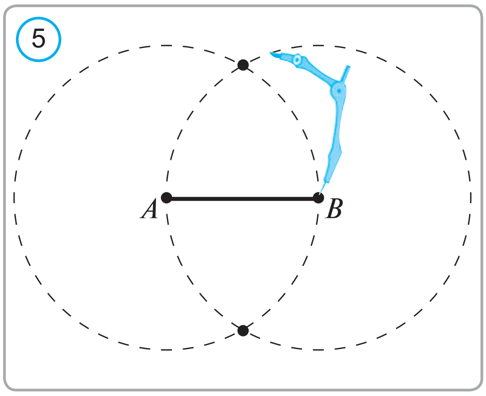
2-есеп. Берілген a түзуге онда жатпайтын O нүктеден өтетін перпендикуляр түзу сал.

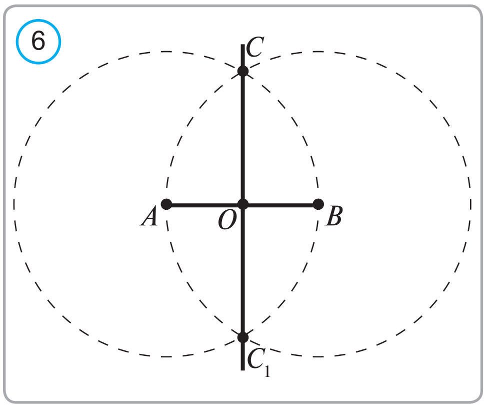


Салу:

1-қадам. Центрі O нүктеде болған кез келген шеңбер саламыз. Ол берілген түзуді A және B нүктеден қиып өтсін *(4-сурет)*.







2-қадам. Центрлері A және B нүктеде болған, радиусы бірінші салынған шеңбердің радиусына тең шеңберлер саламыз. Бұл шеңберлердің қиылысу нүктелерінің бірі O нүктеде болады. Екіншісін O_1 –мен белгілейміз *(4-сурет)*.

3-қадам. O және O_1 нүктелерден өтетін түзу саламыз. OO_1 — берілген a түзуге перпендикуляр және онда жатпайтын O нүктеден өтетін түзу болады.

Негіздеуді өз бетіңше орында.

Бұл есепті шешіп, a түзуден тыс нүкте арқылы a түзуге перпендикуляр түзу өткізуге болады деген қорытындыға келеміз. Бұдан және 14-сабақта келтірілген теореманың нәтижесінен төмендегі теореманың орынды екені келіп шығады.

Теорема. **Түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге перпендикуляр болған жалғыз түзу өткізу мүмкін.**

3-есеп. Берілген кесіндіні тең екіге бөл.

Салу:

Айталық, AB кесінді берілген болсын. Бұл кесіндіні тең екіге нүктені табу үшін төмендегідей жасаймыз:

1-қадам. Радиусы AB кесіндіге тең болған, центрлері A және B нүктелерде болған екі шеңбер салынады *(5-сурет)*;

2-қадам. Шеңберлер қиылысқан C және C_1 нүктелерді қосамыз *(6-сурет)*.

CC_1 түзу және AB кесіндінің қиылысу нүктесі берілген кесіндінің ортасы болады.

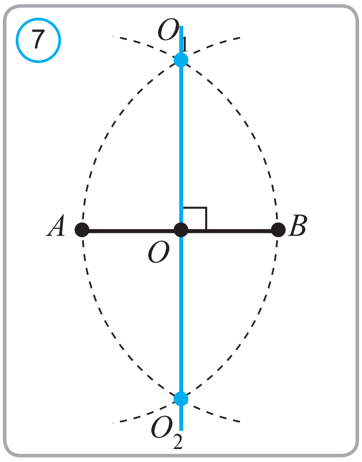
Жаттығу. Қиылысу нүктесі O шындығында да AB кесіндінің ортасы болатынын негізде.

4-есеп. Берілген кесіндінің ортасынан өтетін перпендикуляр сал.

Шешуі: AB кесінді берілген болсын. Центрлері A және B нүктелер болған AB радиусты шеңберлер саламыз *(7-сурет)*. Бұл шеңберлер O_1 және O_2 нүктелерде қиылысады:

$$AO_1 = AO_2 = BO_1 = BO_2.$$

O_1O_2 түзу өткіземіз. Бұл түзу AB кесіндінің орта перпендикуляры. Өйткені O_1 және O_2 нүктелер AB кесіндінің ұшынан теңдей ұзақтағандықтан осы кесіндінің ортасынан өтетін перпендикулярда жатады.



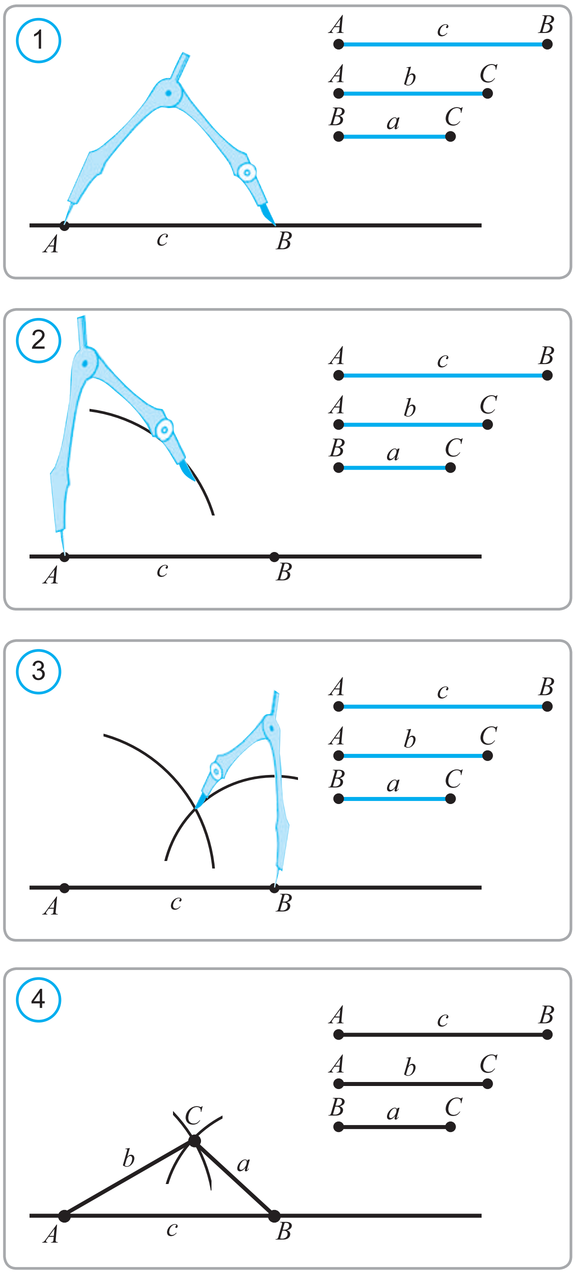
Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Кесіндіні тең екіге бөлудің қандай әдістерін білесің? Кесінді сал және оны тең екіге бөл.
2. Тік бұрышты қалай салуға болады?
3. Тек бір жарты жазықтықта салу істерін орындап берілген кесіндіні тең екіге бөл.
4. Тек үшбұрышты сызғышты пайдаланып берілген кесіндіні тең екіге бөл.
5. Берілген гипотенуза бойынша тең қабырғалы тік үшбұрыш сал.
6. Табаны және оған түсірілген биіктігі бойынша тең бүйірлі үшбұрыш сал.
7. AB кесіндінің ортасын тікелей анықтаудың лажы болмаса, оның ортасынан өтетін перпендикулярды салуға бола ма?
8. Берілген кесіндіні төрт тең бөлікке бөл.
9. Үшбұрыш сал. Оның биіктіктерін де сал.
10. Берілген үшбұрыштардың медианаларын сал.

11*. A және B нүктелерден бірдей ұзақтаған және a түзуден өтетін нүктені тап.

12. Тек сызғыштың көмегімен a түзуде жатпайтын M нүкте арқылы a түзуге параллель болған b түзу өткіз.

52 Үшбұрыштарды берілген үш қабырғасы бойынша салу



Айталық, 1-суретте бейнеленгеніндей, ұзындықтары сәйкесінше a, b және c -ға тең кесінділер берілген болсын, c ең үлкені болсын. Қабырғалары сәйкесінше $AB = c$, $BC = a$ және $AC = b$ болған ABC үшбұрыш салу үшін төмендегідей жол ұстанамыз:

1-қадам. Кез келген түзу салынады. Түзуде ұзындығы c -ға тең болған AB кесінді циркульдің көмегімен ажыратылады.

2-қадам. $AC = b$ болуы керек. Сондықтан центрі A нүктеде радиусы b -ға тең шеңбер салынады;

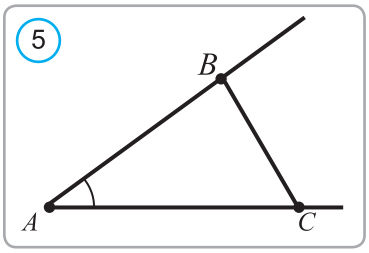
3-қадам. $BC = a$ болуы керек. Сондықтан центрі B нүктеде радиусы a -ға тең шеңбер;

4-қадам. Шеңберлердің қиылысу нүктесі — C нүкте A және B нүктелермен қосылады. Пайда болған ABC үшбұрышының қабырғалары a, b және c-ға тең болады.

Талдау. Салудан көрініп тұрғандай, егер 2-және 3-қадамда салынған шеңберлер қиылысқанда ғана шешімі болады. Ол үшін $a+b>c$ болуы шарт.

Пайда болған ABC үшбұрыштың шындығында да a, b және c -ға тең болатынын өз бетіңше негізде.

1-есеп. Берілген бұрышқа тең бұрыш сал (5-сурет).



Шешуі: Бұл есепті берілген үшбұрышқа тең болған үшбұрышты салу арқылы да шешсе болады. Ол үшін берілген үшбұрыштың төбесін A-мен белгілейміз, бұрыштың қабырғаларында да кез келген B және C нүктелерді белгілейміз. Сосын ABC үшбұрышқа тең болған үшбұрыш салсақ, A бұрышқа тең болған бұрышты да салған боламыз.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Кез келген кесінділерден үшбұрыш салуға бола ма?

2. Қабырғалары a = 3 $см$, b = 8 $см$ және c = 9 $см$ болған үшбұрыш сал.

3. а) Қабырғалары a = 3 $см$, b = 4 $см$ және c = 7 $см$ болған үшбұрыш салу мүмкін бе?

ә) Үшбұрыш салу үшін, оның a, b және c қабырғалары қандай шартты қанағаттандыруы керек?

4. Екі катеті бойынша тік бұрышты үшбұрыш сал.

5. Гипотенуза және катеті бойынша тік бұрышты үшбұрыш сал.

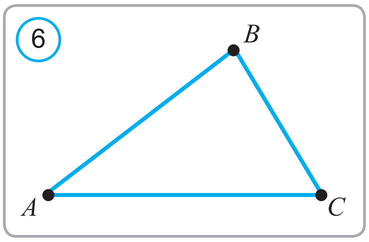
6. a түзуі берілген. Бір қабырғасы a-да жататын, 6-суретте көрсетілген ABC үшбұрышқа тең болған үшбұрыш сал.

7*. Ұзындығы $a + b$, $b + c$ және $a + c$ кесінділер берілген. Қабырғалары a, b, c болған үшбұрыш сал.

8. Екі қабырғасы мен олар арасындағы бұрышы бойынша үшбұрыш сал.

9. Берілген қабырғалары бойынша квадрат сал.

10. Бір қабырғасы және оған еншілес бұрыштар бойынша үшбұрыш сал.



Қабілетті оқушыларға арналған қосымша тапсырма.

1. «Геометрия–7» электронды оқулығының тиісті тарауымен танысып шық. Осы тарауға енгізілген тақырыптарға қатысты интерактивті анимация қосымшаларына берілген тапсырмаларды орындап, тест тапсырмаларын шешіп өз біліміңді сынап көр.

2. Сонымен қатар 10-бетте келтірілген интернет ресурстарынан осы тарауға тиісті материалдарды тап және үйрен.

53 Біліміңді сынап көр

1. Тесттер.

1. Кесінділердің ұзындықтары a, b және c -лардың берілген қайсы мәндерінде осы кесінділерден үшбұрыш жасауға болмайды?
   А) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$; Ә) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$; Б) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$; В) $a = 6$, $b = 4$, $c = 3$.
2. Геометриялық салуларды орындау үшін қайсы оқу құралдарын пайдалануға рұқсат беріледі? А) Транспортир; Ә) Транспортир, сызғыш;
   Б) Циркуль, сызғыш; В) Циркуль, транспортир.
3. Геометриялық салуларды орындауда сызғышты қандай міндеттерді орындауда рұқсат беріледі. А) Кесіндіні өлшеуде; Ә) Кесінді, түзу салуда;
   Б) Нүктеден өтетін және берілген түзуге перпендикуляр түзуді шамалап салуда; В) Кесіндіні өлшеп, оның ортасын табуда.

2. Есептер.

1. Бір бұрыш сал. Осы бұрышқа тең басқа бұрыш сал.
2. Бір бұрыш сал. Оның биссектрисасын сал.
3. Түзу сал және онда жатпайтын нүктені белгіле. Осы нүктеден өтетін және осы түзуге перпендикуляр түзу сал.
4. Түзу сал және онда жатпайтын нүкте белгіле. Осы нүктеден өтетін және осы түзуге параллель түзу сал.
5. Бір кесінді сал және оны тең екіге бөл.
6. Үш кесінді сал. Қабырғалары осы кесінділерге тең болған үшбұрыш сал.
7. Бір үшбұрыш сал. Оның бір а) медианасын; ә) биссектрисасын; б) биіктігін жүргіз.

54 6-бақылау жұмысы

Үлгі бақылау жұмысы екі бөлімнен құралады:

I. Теориялық 5 тест.

II. Төмендегі есептерге ұқсас 3 есеп (4-есеп озат оқушылар үшін қосымша беріледі)

1. $120°$ –тық бұрыш берілген. Циркуль және сызғыштың көмегімен оған тең бұрыш сал.
2. Қабырғалары $a = 5$ *см*, $b = 6$ *см* және $c = 7$ *см* болған үшбұрыш сал.
3. 2-есепте салынған үшбұрыштың a қабырғасына медиана өткіз.
4. Үшбұрышты оның табаны, бір қабырғасы және негізіне жүргізілген биіктігі бойынша сал.

VI ТАРАУ

ҚАЙТАЛАУ

Бұл тарауды оқып төмендегі білім және дағдыларды үйренесің:

Білім:
— Геометриялық есептерді шешу басқыштарын білу;
– геометриялық есептердің түрлерін ажырата білу;
– есеп шығарғанда кездесетін кейбір қателіктерді білу.

Дағдылар:
— Геометриялық есептерді түрлерге бөлу мен шешу басқыштарына орай жұмысты ұйымдастыру;
— есеп шешуде кездесетін қателердің алдын алу;
— планиметрия бойынша жылдық қорытынды бақылау жұмысына дайын болу.

55 Геометриялық есептерді шешу басқышы

Геометриялық есептерді шешуде төмендегілерге көңіл бөлу керек:

1. Геометрияның негізгі түсініктері, олардың қасиеттерін жақсы білу және есте сақтау;
2. Түрлі геомтериялық фигуралардың қасиеттері туралы теоремаларды дәлелдеу әдістерін игеру;
3. Берілген геометриялық есептерді шешу үдерісі төмендегі басқыштардан құралады;

Әдетте геометриялық есептерді шешу кезеңі төмендегі басқыштардан құралады:

1-басқыш. *Есепті түсіндіру.* Бұл басқышта есептің шарты мен қасиеті жеке бөліп алынады. Нелер берілген, нені табу керек, дәлелдеу немесе салу қажеттілігі анықталады. Берілген барлық мәліметтер сызбада орындалады.

2-басқыш. *Жоспарлау.* Бұл басқышқа есепті шешу әдісі таңдалады. Оны қолдану үшін қандай қосымша мәліметтер қажет екені анықталады. Көмекші фигуралар салынады.

3-басқыш. *Шешуі.* Бұл басқышта есеп тікелей, берілген жоспар бойынша шешіледі.

4-басқыш. *Тексеру.* Бұл басқышта есептің табылған шешімі тікелей тексеріледі. Шешу үдерісіне сын көзбен қаралады. Егер қателік анықталса, оны түзетеді. Түзетуге мүмкіндік болмаса, есепті шешудің бастапқы басқышына қайтады және барлық жұмыс қайтадан басталады.

Есеп шешуді үйрену үшін көбірек есеп шешу керек!

Есепке қатысты сызбаны дұрыс салу – есепті жартылай шешу дегені.

Геометриялық есептер қойылуы мен мәніне қарай үш түрлі болуы мүмкін:

1. Есептеуге қатысты есептер
2. Дәлелдеуге қатысты есептер
3. Салуға қатысты есептер

Геометриялық есептерді шешу тек қандай да бір геометриялық фигураның қасиетін үйрену ғана емес. Ол дұрыс пікірлеу, логикалық тұжырым жасау және олар негізінде тура және дұрыс шешім қабылдау, қорытынды шығаруды қалыптастырады. Ондай дағды мен біліктілік тек математикада ғана емес өмірде де кездесетін проблемаларды шешуде де қажет.

Есепті шешу тек дұрыс жауапты табу ғана емес, есеп шешу барысында белгілі қасиеттерді, теоремаларды және олардың нәтижелерін қолдана білу, түрлі әдістерді пайдалана білу.

Төмендегі есептерді шешу үдерісін бақылайық.

Есеп. **Төбелері тең қабырғалы үшбұрыш қабырғаларының ортасы болған үшбұрыштың тең бүйірлі екенін дәлелде.**

1. *Есепті түсіндіру басқышы.*

ΔABC — тең бүйірлі, M — AB қабырға ортасы, N — BC қабырға ортасы, L — AC қабырға ортасы ⇒ ΔMNL — тең қабырғалы

Есеп шарты негізінде сызба сызып аламыз *(1-сурет)*.

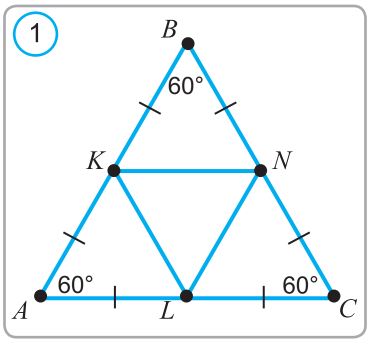
2. *Жоспарлау басқышы.* Тең қабырғалы үшбұрыштардың қасиеттерін және үшбұрыштың ҚБҚ белгісін пайдаланамыз.

3. *Шешу басқышы.* Шарт бойынша,

$LA = AK = KB = BN = NC = CL$ *және* $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$. Онда ΔLAK ның AL, AK қабырғалары мен A бұрышы ΔKBN ның BK, BN қабырғалары мен B бұрышына және ΔNCL ның CN, CL қабырғалары мен C бұрышына сәйкесінше тең.

Демек, $\Delta LAK = \Delta KBN = \Delta NCL$. Олай болса бұл үшбұрыштардың үшінші қабырғалары да өзара тең болады: $KL = KN = NL$.

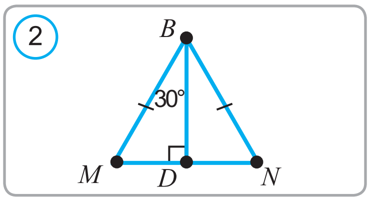
Демек, ΔKNL — тең бүйірлі.



4. *Тексеру басқышы.*

Есептің шешу үдерісін тағы бір рет қарастырамыз, онда бір тұжырым логикалық дұрыс болғанын тексереміз.

Бұл есепті басқа әдіспен де шешу мүмкін. Онда ішіндегі бұрышы 60° болған тең бүйірлі үшбұрыштың қасиеттерін пайдаланамыз. ΔKBN тең бүйірлі үшбұрыштың BD биіктігін жүргіземіз *(2-сурет)*. BD биссектрисасы да болғандықтан $\angle KBD = 60°/2 = 30°$ және $\angle BKD = \angle BND = 90° – 30° = 60°$ болады.



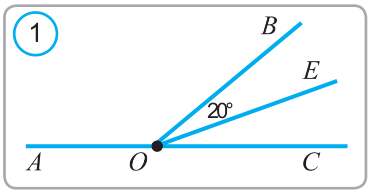
Демек, ΔKBN тең бүйірлі үшбұрыш екен. Сөйтіп ΔKAL және ΔNCL де тең қабырғалы үшбұрыштар екені анықталады және $BK = KN = NL = LN$ екені белгілі болады. Бұдан болса ΔKNL ның тек тең бүйірлі үшбұрыш ғана емес, $\Delta KNL = \Delta KBN = \Delta NCL = \Delta KAL$ екені де белгілі болады.

56 Есептеуге байланысты есептер

Есептеуге қатысты есептер арифметикалық және алгебралық есептерге ұқсас. Түрлі геометриялық формулалардың көмегімен, берілген санды шамалар негізінде бірінен соң бірі есептеу істері орындалады және ізделінген шама табылады.

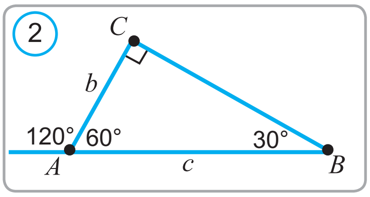
Бұл есептерде көбінше сызбаны тура салу мен қажетті белгілеулерді енгізу жұмысын жеңілдетеді.

1-есеп. Еншілес бұрыштардың бірінің биссектрисасы екінші бұрыштың қабырғаларының бірімен 20°-тық бұрыш жасайды.Осы бұрыштарды тап.



Шешуі. Есеп шартын сызбада өрнектейміз *(1-сурет)*. Бұдан OE биссектрисасы сүйір бұрыштың биссектрисасы екені белгілі болады. Демек, $\angle BOC = 2 \cdot 20° = 40°$, $\angle AOB = 180° – 40° = 140°$ болады.

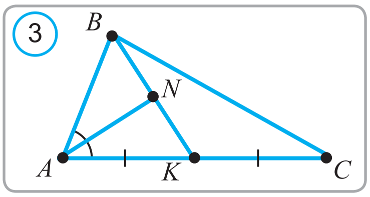
2-есеп. ABC тік бұрышты үшбұрышта $\angle C$ – тік бұрыш, A төбесіндегі сыртқы бұрышы 120°-қа тең. Егер $AC + AB = 18$ см болса, үшбұрыштың гипотенузасын тап.



Шешілуі. Есеп шарты бойынша сызбаны бейнелейміз (*2-сурет*). Үшбұрыштың сыртқы бұрыштарының сипатамасынан, $\angle A = 180° - 120° = 60°$, $\angle B = 90° - \angle A = 30°$ екенін анықтаймыз. $AC = b,\ AB = c$ болсын. Олай болса $b + c = 18$. Сүйір бұрышы 30°-қа тең болған тік бұрышты үшбұрыштың қасиеттері бойынша, $c = 2b$ болады. Бұдан $b + c = b + 2b = 18$, яғни $b = 6$. Онда $c = 12$ екені белгілі болады. ***Жауап:*** 12.

3-есеп. ABC үшбұрышта $AB = 1$, A бұрыштың биссектрисасы B төбеден түсірілген медианаға перпендикуляр. Егер BC қабырғаның ұзындығы бүтін санмен өрнектелсе, үшбұрыштың периметрін тап.

Шешуі. Есеп шартын сызбада өрнектейміз *(3-сурет)*: $AK=KC$. $AN\perp BK$. $\Delta ANB=\Delta ANK$ екенін анықтаймыз, өйткені AN катет ортақ және біреуден бұрыштары тең (катет және оған жанасқан сүйір бұрыш бойынша) . Бұдан яғни $AB=AK=KC=1$, яғни $AC=1+1=2$ екені белгілі болады.

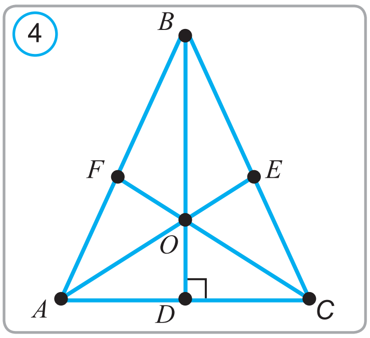


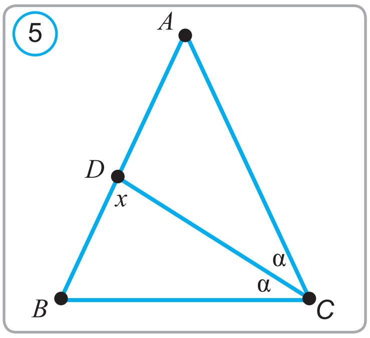
$BC=x$ – бүтін сан, үшбұрыш теңсіздігіне орай $2+1>x$ va $x+1>2$, яғни $x<3$ және $x>1$, яғни $1<x<3$ болуы керек. 1 мен 3 -тің арасында бір бүтін сан бар: 2. Демек, $BC=2$ va $P_{ABC}=1+2+2=5$.

Жауап: 5

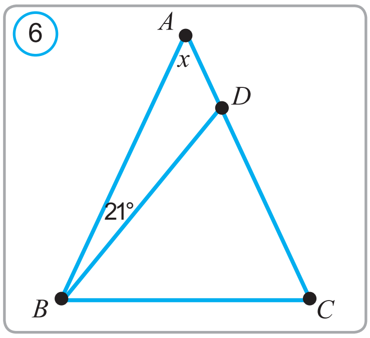
Сұрақтар, есептер және тапсырмалар.

1. AB кесінді ұзындығы $1:2:3:4$ сияқты қатынастағы кесінділерде (осы ретпен) бөлінген. Егер шеткі кесінділердің орталары арасындағы қашықтық 15 *см* -ге тең болса, AB кесіндінің ұзындығын тап.
2. $\angle ABC=160°$ болған үшбұрыштың төбесінен осы бұрыш қабырғалары арасында жататын BO және BE сәуле түсірілген. Егер BO сәуле берілген бұрышты тең екіге, BE сәуле болса $3:5$ сияқты қатынаста болса, OBE бұрышты тап.
3. AOB бұрыш OC сәуле арқылы бірі екіншісінен 30° үлкен екі бұрышқа бөлінген. Берілген бұрыш биссектрисасы мен OC сәуле арасындағы бұрышты тап.
4. Тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы барлық бұрыштары 30°-қа тең.Осы бұрыштардың бүйір қабырғасы мен екінші бүйір қабырғасына жүргізілген биіктігі арасындағы бұрышты тап.
5. Үшбұрыштың бір сыртқы бұрышы 100°, оған еншілес емес бұрыштар қатынасы 2:3 секілді. Үшбұрыштардың бұрышын тап.
6. A, B, C, D нүктелер көрсетілген ретпен бір түзуде жатады және $AB=BC=1$, $CD=2$. K нүкте BC кесіндіде сондай орналасқан, BC және AD кесінділердің ұзындығы бірдей қатынаста болады: $BK:KC=AK:KD$. Бұл қатынастарды тап.





7. Үшбұрыштың екі бұрышының қиылысуынан пайда болған бұрыш 128°-қа тең. Үшбұрыштың үшінші бұрышын тап.
8. Тең бүйірлі үшбұрыштың ішіндегі бұрышы 96°-қа тең. Табанындағы бұрыштарының биссектрисаларының қиылысуынан пайда болған сүйір бұрышты тап.
9. Тік бұрышты үшбұрыштардың тік бұрышынан биссектриса мен биіктік түсірілген болып, олардың арасындағы бұрыш 24°-қа тең. Үшбұрыштың қалған бұрыштарын тап.



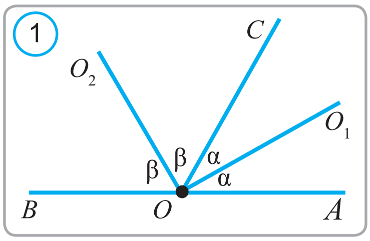
10. Егер 4-суретте $AB = BC$, $\angle ABC = 50°$, AE және FC — биссектрисалар болса, $\angle AOB = ?$, $\angle EOC = ?$
11. Егер 5-суретте $AB=AC$, $AD=DC$ болса, x=?
12. Егер 6-суретте $AB=AC$, $BD=BC$ болса, x=?

57 Дәлелдеуге байланысты есептер

Дәлелдеуге қатысты есептер өзіне тән екінші теорема. Оларды шешуде келтірілген тұжырымды дәлелдеуден құралады. Мысал ретінде төмендегі есептерді қарастырайық.

1-есеп. Сыбайлас бұрыштардың биссектрисалары өзара перпендикуляр екенін дәлелде.

$\angle AOC$ және $\angle BOC$ — сыбайлас бұрыштар, OO_1 және OO_2 – биссектрисалар (1-сурет). ⇒ $OO_1 \perp OO_2$.



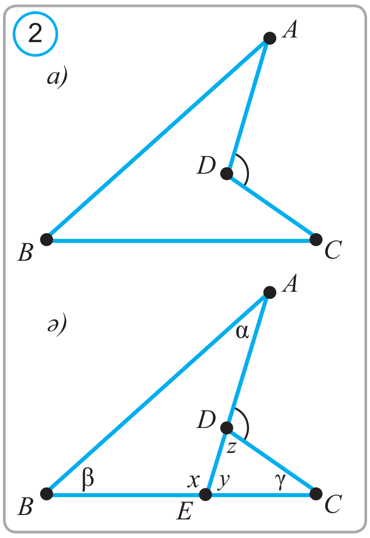
Дәлелдеу. OO_1 және OO_2 биссектрисалар бөлген бұрыштарды сәйкесінше (1-суретте бейнеленгеніндей) α және β деп белгілейміз. Онда, $2\alpha + 2\beta = 180°$, немесе $\alpha + \beta = 90°$, яғни $\angle O_1OO_2 = \alpha + \beta = 90°$. Демек $OO_1 \perp OO_2$. Осыны дәлелдеу керек еді.

2-есеп. 2.а-суретте бейнеленгеніндей $ABCD$ төртбұрышта $\angle D = \angle A + \angle B + \angle C$ екенін дәлелде.

Дәлелдеу. AD түзудің BC қабырғамен қиылысқан нүктесін E -мен белгілейміз *(AD қабырғаны жалғастырамыз)* және бұрыштар үшін қажетті белгілерді енгіземіз *(2.ә-сурет)*. $\alpha+\beta+x=180°$ va $y+z+\gamma=180°$. Бұл теңдіктерді қосып, $\alpha+\beta+\gamma+x+y+z=360°$ теңдікті аламыз. Сыбайлас бұрыштардың қасиетіне орай, $x+y=180°$ болғандықтан $\alpha+\beta+\gamma+180°+z=360°$, немесе $\alpha+\beta+\gamma=180°-z=\angle D$, яғни

$\angle D=\alpha+\beta+\gamma=\angle A+\angle B+\angle C$ болады.

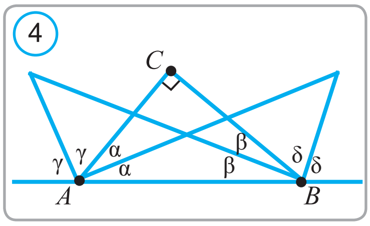
Теңдік дәлелденді.

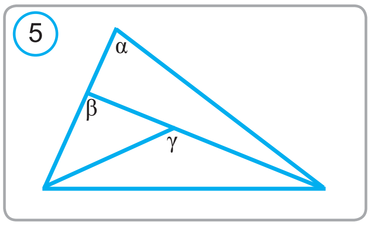


Жоғарыдағы екі есепті дайын сызбаға сүйеніп шештік, 2-есепте қосымша салу мен қажетті белгілеуді жүзеге асырдық, бұл есептің шешуін жеңілдетуімізге көмектесті.

Сұрақтар, есептер және тапсырмалар

1. Үшбұрыштың бір бұрышы өзіне сыбайлас емес сыртқы бұрыштарының айырмасына тең. Бұл үшбұрыштардың тік бұрышты үшбұрыш екенін дәлелде.
2. Бір бұрышы 150° болған тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы төбесінен түсірілген биіктіктері тең болатынын дәлелде.
3. Тең бүйірлі үшбұрыштың медианалары қиылысқан нүктеде 2 : 1 секілді қатынаста болатынын дәлелде.
4. Тең бүйірлі үшбұрыштың төбесіндегі сыртқы бұрышы биссектрисасы үшбұрыштың табанына параллель болатынын дәлелде.
5. 4-есепке кері теореманы өрнекте және оны дәлелде.
6. Тең қабырғалы үшбұрыштың кез келген екі медианасы 600-тық бұрышпен қиылысатынын дәлелде.
7. Үшбұрыштардың теңдігін олардың кез келген қабырғасы мен үшінші қабырғасына түсірілген медианасы бойынша дәлелде.
8. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда BM және B_1M_1 медианалар жүргізілген. Егер $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ және $BM=B_1M_1$ болса, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ екенін дәлелде.
9. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда AD , A_1D_1 – биссектрисалар. Егер $AB=A_1B_1$, $BD=B_1D_1$ және $AD=A_1D_1$ болса, $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ екенін дәлелде.





10. ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштарда BH және B_1H_1 биіктіктер өткізілген. Егер $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ және $BH = B_1H_1$ болса, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ болатынын дәлелде.

11. Үшбұрыштардың екі биіктігі тең болса, оның тең бүйірлі үшбұрыш екенін дәлелде.

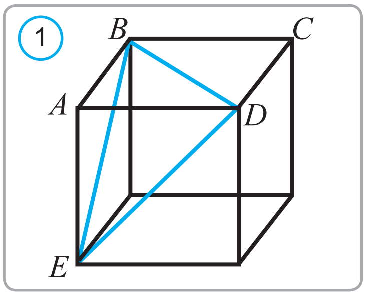
12. 4-суретте $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 90°$ екенін есепте.

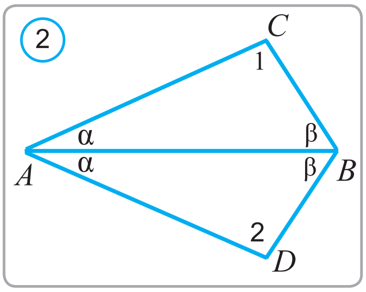
13. 5-суретте $\alpha < \beta < \gamma$ екендігін дәлелде.

58-59 Қайталауға байланысты есептер

1. Екі параллель түзуді қиюшымен қиғанда пайда болатын айқыш бұрыштардың биссектрисалары параллель болатынын дәлелде.
2. Үшбұрыштың кез келген қабырғасы оның қалған екі қабырғасының айырмасынан үлкен болатынын дәлелде.
3. Үшбұрыштың α, β және γ бұрыштары үшін $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$, $\gamma < \alpha + \beta$ қатынастар орынды болса, бұл қандай үшбұрыш болады?
4. Берілген екі нүктеден өтетін шеңбер сал. Есептің неше шешімі бар?
5. ABC үшбұрыштың AA_1 және BB_1 биссектрисалары O нүктеде қиылысады. Егер а) $\angle AOB = 136°$; ә) $\angle AOB = 111°$ болса, ACB бұрышты тап.
6. 1-суретте бейнеленген кубта $BD = 6$ болса, $BE = ?$, $DE = ?$, $AC = ?$, $\angle BED = ?$
7. Периметрі 42 *см* болған ABC үшбұрыштың медианасы оны периметрі 33 *см* және 35 *см* болған екі үшбұрышқа бөледі. Медиананың ұзындығын тап.
8. Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір бұрыштарының биссектрисалары қандай бұрышпен қиылысады?
9. 2-суретте $\angle 1 = \angle 2$ екенін дәлелде.
10. MN және NM сәулелерінің ортақ бөлігі қандай фигура болады?
11. A, B және C нүктелер бір түзуде жатады. Егер $AB = 2$ *см*, $BC = 3$ *см* және $AC = 5$ *см* болса, B нүкте AC кесіндіге тиісті бола ма? Жауабыңды негіздеп бер.
12. A нүкте BC түзудің B және C нүктелері арасында жатады. Егер $BC = 15$ *см*, AC кесінді AB кесіндіден 3 *см* қысқа болса, AB кесіндінің ұзындығын тап.
13. 60° және 30°-тық бұрыштар сал.

14. Шеңбердің өзара перпендикуляр диаметрлерін сал.
15. Сыбайлас бұрыштардың бірі екіншісінен 4 есе кіші болса, осы бұрыштардың үлкенін тап.
16. Екі түзудің қиылысуынан пайда болған бұрыштардың қатынасы 7:3-ке тең. Осы бұрыштардың кішісін тап.
17. A, B және C нүктелері бір түзуде жатады. BC кесіндінің ұзындығы AC кесіндінің ұзындығынан 3 есе үлкен, AB кесіндінің ұзындығы болса BC ұзындығынан 3,6 $см$-ға қысқа. AC кесіндінің ұзындығын тап.
18. Екі түзуді үшінші түзу қиғанда сыртқы тұстас бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең болса, бұл түзудің өзара параллель екенін дәлелде.
19. Екі параллель түзу үшінші түзумен қиылысқанда пайда болған бұрыштардың бірі 55°-қа тең. Қалған бұрыштарды тап.





60-61 Біліміңді сынап көр

1. Сөйлемдерді дұрыстап толықтыр:

1. Жазықтықта .... арқылы бір түзу өткізуге болады.
2. Бұрыш .... бұрышты екі өзара тең бұрышқа бөледі.
3. Кесіндінің ортасы оны екі .... бөледі.
4. Жазықтықта түзу түзуге тиісті болған .... да, болмаған .... да бар.
5. Егер үшбұрыш тең бүйірлі болса, ... бұрыштары тең болады.
6. Екі тең үшбұрыштың сәйкес .... және сәйкес емес .... тең болады.
7. Тең қабырғалы үшбұрыштың әрбір бұрышы .... градусқа тең.
8. Тік бұрышты үшбұрыштың сүйір .... 90°-қа тең.
9. Жазық бұрыштың биссектрисасы оны екі .... бұрышқа бөледі.
10. Үшінші түзуге параллель болған екі түзу .... болады.
12. Бір түзуге параллель перпендикуляр болған екі түзу .... болады.

13. Параллель түзулерді қиюшымен қиғанда пайда болатын екі тұстас бұрыштар .... болады.
14. Кесінді олардан тең .... кесіндінің орта перпендикулярында жатады.
15. Шеңбердегі нүктелер шеңбер центрінен тең ....

2. Мына сөйлемдерде қате болса, оны тап және түзет:

1. Жазықтықта екі нүкте арқылы екі түзу өткізуге болады.
2. Тік бұрыш 180°-қа тең болады.
3. Еншілес бұрыштар тең болады.
4. Вертикаль бұрыштар тең болады.
5. Үшбұрыштың төбесі мен осы төбесінің қарсысындағы қабырғаның ортасын тұтастыратын кесінді, үшбұрыштың биссектрисасы дейіледі.
6. Үшбұрыштың периметрі деп оның бұрыштарының қосындысын айтады.
7. Үшбұрыштың қабырғаларының қосындысы 180° -қа тең.
8. 90°-қа тең бұрышпен қиылысатын түзулер параллель дейіледі.
9. Параллель түзулер бір нүктеде қиылысады.
10. Шеңбердің диаметрі радиусына тең.
11. Тік бұрышты үшбұрыштың катеттері тең болса, оның кіші бұрышы 300 -қа тең болады.
12. Тең бүйірлі үшбұрыштың әрбір бұрышы 60°-қа тең.
13. Бұрыш биссектрисасында жататын нүктелер бұрыш төбесінен теңдей қашықтықта жатады.

3. Берілген қасиеті бар геометриялық фигураны оң жақтағы бағанның сәйкес қатарына жаз:

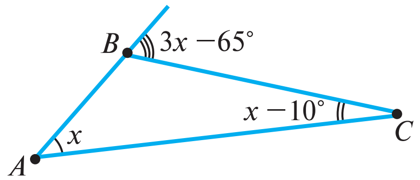
1.	Ұзындығы 5 см.	
2.	Нүкте және төбелері осы нүктелерде болған екі сәуледен құралған.	
3.	Қиылыспайтын түзулер.	
4.	Төбесінен шыққан биіктігі де, медианасы да биссектрисасы болады.	
5.	Барлық қабырғалары тең үшбұрыш.	
6.	Екі қабырғасы тең үшбұрыш.	
7.	Бұрышты екі тең бұрышқа бөледі.	
8.	Екі катеті бар.	
9.	Екі бұрыштың қосындысы 90°-тан үлкен бұрыш.	

4. Бірінші бағанда берілген геометриялық түсінікке екінші бағаннан тиісті қасиет немесе тұжырымды сәйкес қой:

Геометриялық түсінік	*Тұжырым, қасиет*
1. Перпендикуляр түзулер 2. Тең қабырғалы үшбұрыш 3. Шеңбер 4. Бұрыш биссектрисасындағы нүкте 5. Үшбұрыштың биіктігі 6. 30°-тық бұрыш қарсысындағы катет 7. Медиана 8. Үшбұрыштың сыртқы бұрышы 9. Тең бүйірлі үшбұрыш 10. Кесінді 11. Параллель түзулер	А. Белгілі ұзындыққа ие Ә. Екі бұрышы тең Б. Гипотенузаның жартысына тең В. Төбесі мен қарсысындағы қабырға ортасын тұтастырады Г. Бір ішкі бұрышына еншілес және қалған екі бұрышының қосындысына тең Ғ. Қиылыспайды Д. 90°-тық бұрышпен қиылысады Е. Қабырғалары тең Ё. Нүктелері центрінен теңдей қашықтаған Ж. Оның қабырғаларынан тең қашықтықта жатады З. Бір төбесінен өтеді және бір қабырғасына перпендикуляр

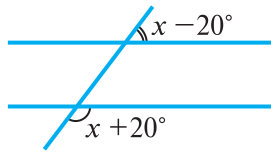
5. Тесттер

1. Берілген нүктеден берілген түзуге параллель неше түзу өткізуге болады?
   А) 1 Ә) 2 Б) 3 В) 4
2. Жазық бұрыш неше градусқа тең?
   А) 90°; Ә) 90°-тан үлкен; Б) 90°-тан кіші; В) 180°.
3. Фигураға қарап $\angle BCA$ бұрышты тап.



А) 25° Ә) 35°
Б) 45° В) 55°

4. Фигура бойынша x-ты тап.



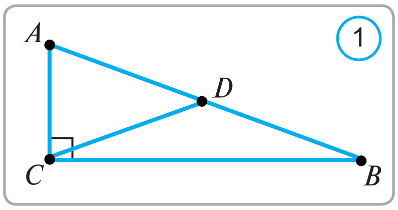
А) 80° Ә) 90°
Б) 100° В) 70°

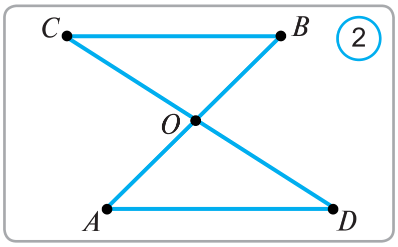
5. Егер ABC үшбұрышта $\angle B$ = 30°, $\angle C$ = 90° және AC = 10 *см* болса, AB гипотенузаны тап.
   А) 10 *см* Ә) 12 *см* Б) 15 *см* В) 20 *см*

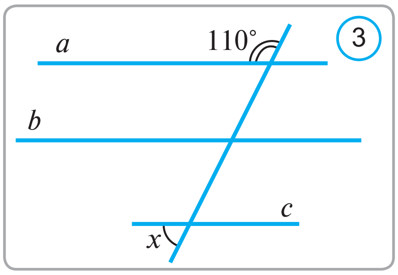
6. ABC үшбұрышта $AB = BC$, $AB = AC + 7$ ($см$). Егер ABC үшбұрыш периметрі 23 $см$ болса, үшбұрыштың кіші қабырғасын тап.
А) 3 $см$ Ә) 5 $см$ Б) 7 $см$ В) 9 $см$

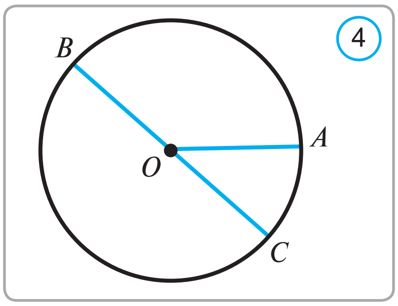
7. Сыбайлас бұрыштардың біреуі екіншісінен үш есе үлкен. Осы бұрыштардың айырмасын тап.
А) 45° Ә) 60° Б) 75° В) 90°

8. Шеңбердің радиусы 3,2 $см$. Оның диаметрін тап.
А) 3,2 Ә) 5,2 Б) 6,4 В) 1,6









9. ABC — тік бұрышты үшбұрыш (*1-сурет*), $\angle C = 90°$, CD — медиана. $\angle BDC = 130°$ болса, $\angle A$ -ны тап.
А) 45° Ә) 65° Б) 75° В) 85°

10. ABC — тең бүйірлі үшбұрыштың төбесіндегі B бұрышы 80°-қа тең. Оның A төбесіндегі сыртқы бұрышын тап.
А) 130° Ә) 120° Б) 110° В) 100°

11. Егер $a \perp b$, $b \perp c$, $c \perp d$ болса, төмендегі жауаптардың қайсысы дұрыс емес.
А) $a \| c$ Ә) $b \perp d$ Б) $a \| d$ В) $b \| c$

12. Егер 2-суретте $AO = OB$, $OC = OD$, $BC = 5$ $см$ және $AO + OC = 7$ $см$ болса, AOD үшбұрыштың периметрін тап.
А) 5 $см$ Ә) 7 $см$
Б) 12 $см$ В) 17 $см$

13. Егер 3-суретте $a \| b$ және $b \| c$ болса, $x = ?$
А) 60° Ә) 70° Б) 80° В) 90°

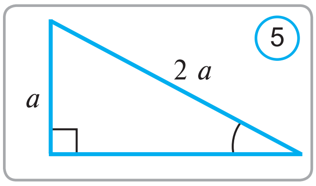
14. ABC үшбұрышта $\angle A = 50°$ және $\angle B = 70°$ болса, оның үлкен қабырғаларын анықта.
А) AB Ә) BC Б) AC
В) анықтап болмайды.

15. Егер 4-суретте O — шеңбер центрі, $AO = 4$ $см$ болса, BC кесіндінің ұзындығын тап.
А) 4 $см$ Ә) 5 $см$
Б) 2 $см$ В) 8 $см$

16. 5-суретте бейнеленген үшбұрыштың кіші бұрышын тап.
А) 30° Ә) 45° Б) 60° В) 90°

17. Үшбұрыштың бір биіктігі оны периметрлері 25 *см* және 29 *см* болған бұрыштарға бөледі. Егер берілген үшбұрыштың периметрі 40 *см* болса, оның биіктігін тап.

А) 10 *см* Ә) 7 *см* Б) 5 *см* В) 9 *см*



18. 120°-қа тең бұрышқа еншілес бұрыштардың қосындысын тап.

А) 30° Ә) 45° Б) 180° В) 120°

19. ABC үшбұрышының C бұрышы 70°-қа тең болса, A және B бұрыштардың биссектрисалары арасындағы бұрышты тап.

А) 55° Ә) 60° Б) 65° В) 75°

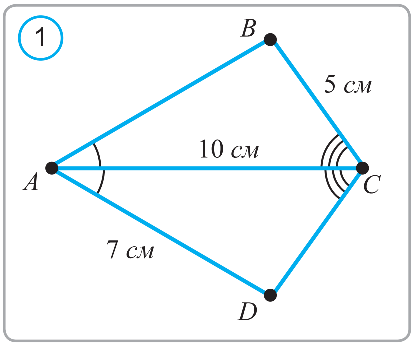
20. $ABCD$ тік төртбұрышының A және D төбесінен шыққан биссектрисалары BC қабырғаны 3 тең бөлікке бөледі. Егер тік төртбұрыштың қабырғалары бүтін сан болып, AB = 5 болса, оның периметрін тап.

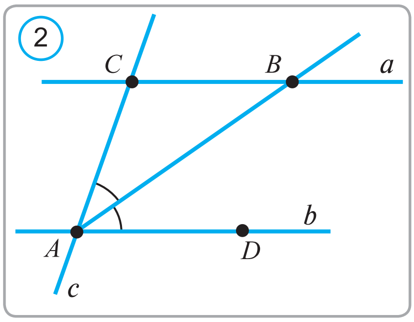
А) 20 Ә) 30 Б) 40 В) 80

6. Есептер

1. Тең бүйірлі ABC үшбұрышының төбесінен AB табанына жүргізілген биссектрисасы оны екі үшбұрышқа бөледі. Бұл үшбұрыштардың тең екенін дәлелде.
2. Периметрі 30 *см* болған үшбұрыштың бір қабырғасы екіншісінен 2 *см* үлкен, үшінші қабырғасынан 2 *см* кіші. Үшбұрыштың үлкен қабырғасын тап.
3. Үшбұрыштың табанына жүргізілген медианасы оны периметрі 18 *см* және 24 *см* -ге тең екі үшбұрышқа бөледі. Берілген үшбұрыштың кіші бүйір қабырғасы 6 *см* -ге тең. Үшбұрыштың үлкен бүйір қабырғасын тап.
4. Үшбұрыштың 5-ке тең биіктігі оны периметрі 18 және 26 болған екі үшбұрышқа бөледі. Берілген үшбұрыштың периметрін тап.
5. Тең бүйірлі үшбұрыштың периметрі 7,6 *см* табаны 2 *см* -ге тең. Бүйір қабырғасын тап.
6. AB және CD түзулер O нүктеде қиылысады. BOC және AOD бұрыштардың қосындысы 194°-қа тең. AOC бұрышты тап.
7. ABC үшбұрышта A бұрыш C бұрышқа тең, AD биіктік болса BC қабырғаны тең екіге бөледі. Егер BD = 7,8 *см* болса, AC -ны тап.
8. Тең бүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасына жүргізілген биіктігі мен екінші бүйір қабырғасы арасындағы бұрыш 20°-қа тең. Үшбұрыштың табанындағы бұрышты тап.
9. B бұрыштың биссектрисасында жатқан D нүктеден бұрыштың қабырғаларына DA және DC перпендикуляр жүргізілген. DA = DC екенін дәлелде.
10. Егер A, B және C нүктелер бір түзуде жатып, AC = 7 *м* және BC = 9 *м* болса, AB кесіндінің ұзындығын тап.

62-63 Қорытынды бақылау жұмысы





Қорытынды бақылау жұмысы екі бөлімнен құралады. Бірінші бөлімге 58-61-сабақтарда қарастырылған жазба және тест сұрақтарына ұқсас 5 диктант және 10 тестті шешу ұсынылған. Бақылау жұмысының екінші бөлімінде төмендігі вариантта берілген есептерге ұқсас 5 есеп берілуі мүмкін.

Қорытынды жазба бақылау жұмысының үлгісі.

1. Еншілес бұрыштар бірі екіншісінен 17° кіші. Осы бұрыштарды тап.
2. 1-суретте берілген мәліметтер негізінде
   а) $\Delta ABC = \Delta ADC$ екенін дәлелде;
   ә) ACD үшбұрыштың периметрін тап.
3. 2-суретте $a \| b$ және AB — CAD бұрыш биссектрисасы, $AC = 7$ $см$. BC кесіндінің ұзындығын тап.
4. Тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан түсірілген биіктігі оның биссектрисасы да болады. Осы үшбұрыштың бұрыштарын сал.
5. Берілген бұрышқа тең бұрыш және оның биссектрисасын сал.

Жауаптар мен көрсеткіштер

2. **7.** 1-еу. **9.** а) қалағанша; ә) 1-еу; б) 1-еу немесе мүлдем өткізуге болмайды. **10.** 5-еу; 10. **11.** а) 3-еу; ә) 6-ау. **12.** 6-ау; 10.

3. **1.** A және C; A және D; A және B. **3.** Иә; жоқ. **5.** а) 2-еу; ә) 3-еу; б) 11; в) $(n+1)$. **6.** 6. **7.** 6. **8.** 4-еу, 6-ау. **9.** 4-еу. **10.** Иә.

4. **4.** a және d. **5.** 2 мен 5; 6 мен 9. **7.** 3 пен 14; 4 пен 10; 6 мен 9; 5 пен 12. **11.** 6-ау: AB, BC, CD; AC; AD; BD.

5. **3.** 4 *см*; 5 *см*; 6,5 *см*; 1 *см*; 2,5 *см*; 1,5 *см*. **4.** 6,6. **5.** 1. **6.** 9. **7.** 12,8 *см*. **8.** 0,8. **10.** 2 жағдай болуы мүмкін. B нүкте AC кесіндіде болса, $AC = 800$ *м*. C нүкте AB кесіндіде болса, $AC = 400$ *м*. **11.** 5. **15.** B нүкте A және C нүктелердің арасында жатады.

6. **8.** а) 36 *мм*; ә) 90 *см*; б) 4м 22 *см*. **10.** а) 5 *см*; ә) 3,5 *см*; б) 57 *см*. **13.** 130 *см*; **14.** 16 *м*

8. **4.** $\angle AOD$, $\angle COB$, $\angle DOB$, $\angle AOC$. **5.** 10, бұлар: $\angle AOE$, $\angle EOD$, $\angle DOC$, $\angle COB$, $\angle BOA$, $\angle EOB$, $\angle EOC$, $\angle AOC$, $\angle AOD$, $\angle BOD$. **10.** Иә; жоқ, жоқ.

9. **4.** Иә. **7.** а) 72°; ә) 60°; б) 50°. **12.** а) Иә; ә) жоқ; б) жоқ. **14.** а) 90°; ә) 180°. **15.** $\angle AOB = 60°$, $\angle AOC = 90°$, $\angle AOD = 130°$, $\angle BOC = 30°$, $\angle BOD = 70°$; $\angle COD = 40°$.

10. **1-бақылау жұмысы:** **1.** $BC = 3$ *см*. **2.** $BC = 12$ *см*. **3.** $\angle BOC = 35°$. **4.** 150°.

11. **5.** 45°. **6.** а) 8; ә) 8; б) 8; в) 8. **7.** 5 сүйір бұрыш; 1 доғал бұрыш. **10.** а) 30°; ә) 180°; б) 1°. **11.** а) 0,5°; ә) 2,5°; б) 15°. **12.** а) 105°; ә) 75°. **13.** OC сәуле $\angle AOD$-ның; OD сәуле $\angle COE$-нің; OE сәуле $\angle DOB$-ның; OD сәуле $\angle AOB$-ның биссектрисасы болады.

12. **2.** 180°. **6.** а) 160°; ә) 150°; б) 135°; в) 90°. **7.** 45°; 135°. **8.** а) жоқ; ә) иә; в) жоқ. **9.** иә. **10.** а) 140°; ә) 45°; б) 45°. **11.** а) 45°; ә) 60°; б) 30°. **12.** а) 40°; 140°; ә) 55°; 125°; б) 18°; 162°. **14.** 140°, 40°, 140°. **15.** жоқ.

13. **6.** 1), 2), 3), 6). **7.** Жоқ, кесінділердің ортасы бетпе-бет түспей қалуы мүмкін.

14. **2.** 1-еу. **5.** Қалағанша. **8.** 90°. **9.** Жоқ. **10.** Иә.

15. **3.** 90°. **5.** OC . **6.** 60°; 60°.

17. **5-тесттер:** **1.** В; **2.** Б; **3.** Б; **4.** А; **5.** В; **6.** Ә; **7.** В; **8.** В; **9.** Ә; **10.** Ә; **11.** А; **12.** Б; **13.** В; **14.** Ә; **15.** А; **16.** А; **17.** Ә; **18.** В. **6-есептер:** **2.** 90°. **3.** 60°. **4.** Жоқ. **5.** Есептің 2 шешімі бар: 1) 15°; 2) 65°. **6.** 15°. **9.** Жоқ. **10.** Есептің екі шешімі бар: 1) 0,5 *м*; 2) 5,9 *м*. **11.** а) $AC = 9$ *м*, $BC = 6$ *м*; ә) $AC = 7{,}5$ *м*, $BC = 7{,}5$ *м*; б) $AC = 6$ *м*, $BC = 9$ *м*. **13.** а) 15; ә) 21;

б) 45. **15.** 1,3. **16.** 6-ау. **17.** 4.30 немесе 7.30. **18.** 6. **19.** $\angle AOB$ =110°, $\angle BOC$ =70°; ә) $\angle AOB$ =36°, $\angle BOC$ =144°; б) $\angle AOB$ =112°, $\angle BOC$ =68°; б) $\angle AOB$ = 150°, $\angle BOC$ =30°. **20.** 50°, 130°, 50°, 130°. **21.** а) $C \in AB$; ә) $A \in BC$.

18. **2-бақылау жұмысы:** **1.** 106°. **2.** 60°. **3.** 48°.

19. **7.** а) a, b, d, e, g; ә) c, f, h; б) c, f.

20. **2.** а) QR; ә) $\angle RPQ$ және $\angle RQP$; б) $\angle Q$ немесе $\angle PQR$; в) $\angle PQR$. **4.** а) тік; ә) сүйір; б) тең бүйірлі; в) тең қабырғалы; г) доғал бұрышты. **7.** а) 3-еу; ә) 3-еу; б) 3-еу.

21. **7.** Тік бұрышты үшбұрышта. **8.** Иә. **9.** 3. **10.** 9 **11.** 16.

22. **11.** 85°. **12.** в) $\angle D = 35°$, $\angle C = 62°$. **13.** Жоқ.

23. **2.** Табанындағы. **3.** 10. **4.** $a = 12$, $b = 8$. **10.** 8,8; 11.

24. **4.** 4. **11.** $AC = BD = 7$.

25. **6.** $\Delta BAC = \Delta KAN$, $\Delta BAN = \Delta KAC$. **9.** 3-еу.

26. **4.** Тең қабырғалы үшбұрышта. **5.** 10,4 *см*. **7.** 8 *см*.

27. **4.** $\angle C_1 = 90°$, $\angle A_1 = 30°$, $\angle B_1 = 60°$. **5.** 10 *см*, 10 *см*.

28. **5-тесттер:** **1.** Ә; **2.** б; **3.** Ә; **4.** В; **5.** Б. **6.** А. **7.** Б; **8.** А; **9.** Ә; **10.** Б; **11.** Ә; **12.** Ә; **13.** А; **14.** Ә; **15.** Б; **16.** А. **6-есептер:** **7.** Иә. **11.** 85°. **12.** 48°. **13.** 120°.

29. **3-бақылау жұмысы:** **1.** 10. **3.** $3\frac{11}{15}$, $7\frac{1}{3}$, $7\frac{1}{3}$.

30. **7.** Жоқ, жоқ. **10.** Иә.

31. **3.** $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 117°$, $\angle 4 = \angle 8 = 63°$. **4.** 98°, 82°, 98°; 70°, 110°, 70°.

32. **5.** а) иә; ә) иә; б) иә; в) жоқ. **7.** 1-еуі қиылыспауы мүмкін немесе барлығы қиылысады.

33. **4.** $\angle 3 = \angle 7 = 105°$; $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 75°$. **6.** Жоқ.

34. **7.** 1) тік; 2) тік; 3) тік.

35. **5.** 45°. **8.** $\angle 2 = \angle 3 = 53°$. **9.** 70°, 110°. **12.** 70°, 110°.

36. **5-тесттер:** **1.** А; **2.** Ә; **3.** А; **4.** В; **5.** Б; **6.** Б; **7.** Б; **8.** В; **9.** Е; **10.** Ә; **11.** Б; **12.** В; **13.** А; **14.** Ә; **15.** В; **16.** А. **6-есептер:** **1.** 55°. **2.** Иә. **3.** Иә **4.** $\angle 3 = \angle 7 = 118°$; $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 62°$. **6.** 128°. **11.** 59°

37. **4-бақылау жұмысы:** **1.** 34°, 146°, 146°. **3.** 48°, 132°.

38. **2.** 1-еу. **3.** 1-еу. **4.** а) бар; ә) жоқ; с) жоқ. **5.** а) 80°; ә) 25°; б) 45°; в) 45°. **6.** а) 63°; ә) 90°; б) 15°. **7.** а) 80°, 50°; ә) 30°; 60°; 90°; б) 50°, 60°, 70°. **8.** а) 65°; ә) 45°; 90°; 45°. **9.** а) 79°; ә) 100°. **10.** x =20°, y =50°. **12.** 60°. **13.** 60°, 60°, 60°. **14.** 45°, 90°, 45°. **15.** а) 50°, 80° немесе 65°, 65°; ә) 60° және 60°; б) 37,5°; 37,5°.

39. **3.** 60°, 45°, 75°. **4.** 30°, 120°. **5.** 75°. **6.** 270°. **7.** 90°. **8.** 90°. **9.** 110°. **10.** 60°. **11.** Біреуі мүмкін. **12.** 360°.

40. **1.** 50°; 90°; 40°. **2.** 60°; 48°. **5.** Мүмкін. **6.** 540°. **7.** 24°, 36°, 60°. **9.** а) 30°, 30°; ә) 70°, 40° немесе 55°, 55°. **10.** а) 15°, 150°; ә) 75°, 30°. **12.** 15°; 65°. **13.** 30°. **14.** 67,5°.

41. **5.** Гипотенуза 30° қарсысындағы катеттен 2 есе үлкен болады. **7.** а) 4; ә) 6; б) 60°. **8.** а) 5; ә) 13,5; б) 9. **10.** 8 және 16.

42. **3.** а) жоқ; ә) жоқ; б) болады; в) жоқ. **4.** а) болады; ә) болады; б) болады; в) жоқ; г) жоқ. **6.** а) болады; ә) болады; б) болады; в) жоқ; г) болады.

43. **2.** 7 *см*. **3.** 7 *см,* 7 *см*.

44. **2.** Ең үлкені $\angle ACB$, ең кішісі $\angle ABC$. **3.** а) $\angle ABC > \angle BAC > \angle ACB$ мүмкін емес; ә) $\angle ACB = \angle ABC < \angle BAC$ мүмкін. **4.** Табаны, бүйір қабырғасы. **5.** Жоқ. **6.** а) $BC > AC > AB$; ә) $BC < AC < AB$. **7.** Жоқ, жоқ. **8.** 60°; 60°; 120°; 120°. **9.** $0 < \angle B < 60°$. **10.** Сүйір бұрышты. **12.** Гипотенузасы.

45. **3.** Жоқ. **4.** а) бар; ә) жоқ; б) бар; в) бар. **5.** а) 7; ә) 10; б) 8 немесе 5. **8**. 7; 7; 11. **9.** 6-ау. **10.** Үшбұрыш немесе кесінді.

46. **4-тесттер: 1.** Ә; **2.** Б; **3.** Ә; **4.** Ә; **5.** Б; **6.** Ә; **7.** Ә; **8.** Ә; **9.** В; **10.** А; **11.** Б; **12.** А; **13.** Б; **14.** А; **15.** Б; **16.** Б; **17.** Б; **18.** Б.

47. **5-бақылау жұмысы: 1.** 65°. **2.** 40°,60°,80°. **3.** 12 *см* **4.** 40°,60°,80°.

53. **1-тесттер: 1.** А; 2. Б; 3. Ә.

56. **1.** 20 см. **2.** 20°. **3.** 15°. **4.** 30°. **5.** 40°; 60°; 80°. **6.** 1 : 2. **7.** 76°. **8.** 42°. **9.** 21°, 69°. **10.** $\angle AOB$ =122,5°. **11.** 72°. **12.** 46°.

58-59. **3.** Сүйір бұрышты. **5.** а) 92°; ә) 42°. **6.** 6; 6; 6; 60°. **8.** 45°. **10.** Кесінді. **11.** Иә. **12.** 9 *см*. **15.** 144°. **16.** 54°. **17.** 3,6 *см*. **19.** 4-еу 55°-ты және 4-еу 125°.

60-61. **5-тесттер: 1.** А; **2.** В; **3.** Б; **4.** Ә; **5.** В; **6.** А; **7.** В; **8.** Б. **9.** Ә. **10.** А. **11.** А; **12.** Б; **13.** Ә; **14.** Б; **15.** В; **16.** А; **17.** Ә; **18.** В; **19.** А; **20.** Б. **6-есептер: 2.** 12 *см*. **3.** 12 *см*. **4.** 34. **5.** 2,8 *см*. **6.** 83°. **7.** 15,6 *см*. **8.** 55°. **10.** 2 *м* немесе 16 *м*.

60-61. **Қорытынды бақылау жұмысы: 1.** 81°, 99°. **2.** ә) 22 *см*. 3. 7 *см*.

**ABDULLA AZAMOV, BAHODIR HAYDAROV, ERGASHVOY SARIQOV
ATAMURAT QO‘CHQOROV, ULUG‘BEK SAG‘DIYEV**

“GEOMETRIYA”

(Qozoq tilida)

Umumta’lim maktablarining 7-sinfi uchun darslik

Toshkent — “Yangiyul poligraph service” — 2013

Редакторы — *Қ. Нұрбаева*
Техникалық редакторы — *А. Нурматов*
Корректоры — *Қ. Нұрбаева*
Беттеуші — *К. Костецкий*

Оригинал-макеттен басуға рұқсат етілді __.__.2013. Пішімі 70х90 1/16. «Arial» гарнитурасы. Офсеттік әдіспен басылды. Шартты баспа табағы 14,0. Есептік баспа табағы 13,0. Таралымы __________. Тапсырыс N______.

Келісім N___.

**“Yangiyul poligraph service” ЖШҚ баспаханасында басылды.
Жаңажол қаласы, Самарқант көшесі, 44.**

Жалға берілген оқулықтың күйін көрсететін кесте

№	Оқушының аты-жөні	Оқу жылы	Оқулықтың алғандағы жағдайы	Сынып жетек-шісінің қолы	Оқулықтың тапсы-рылғандағы жағдайы	Сынып жетек-шісінің қолы
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Оқулық жалға беріліп, оқу жылының соңында қайтарып алынғанда жоғарыдағы кестені сынып жетекшісі төмендегі бағалаумен толтырады:

Жаңа	Оқулықтың бірінші рет пайдалануға берілгендегі жағдайы
Жақсы	Мұқабасы бүтін, оқулықтың негізгі бөлігінен ажырамаған. Барлық парақтары бар, жыртылмаған, көшпеген, беттерінде жазулар мен сызулар жоқ.
Орташа	Мұқабасы мыжылған, едәуір сызылып, шеттері жейілген, оқулықтың негізгі бөлігінен ажырауы мүмкін, пайдаланушы қанағаттанарлық қаптаған, түсіп қалған беттері қайта тігілмеген, кейбір беттеріне сызылған.
Нашар	Мұқабасына сызылған, жыртылған, негізгі бөлігінен ажыраған яки түгелдей жоқ, қанағаттанарлықсыз қапталған. Беттері жыртылған, оқулықты тіктеуге болмайды.