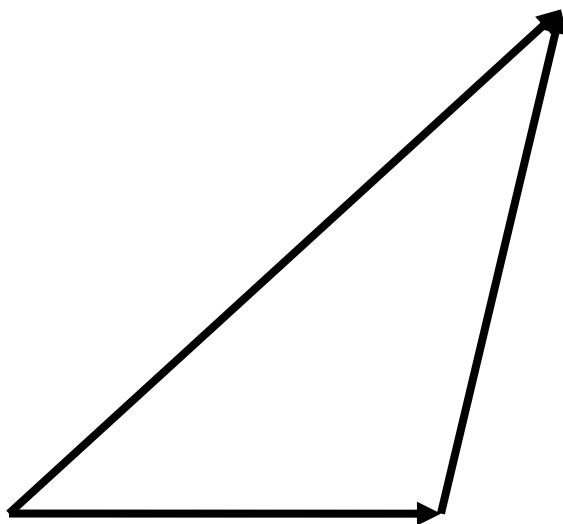


O'zbekiston Respublikasi
oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi
Andijon davlat universiteti
Fizika kafedrası

Vektor va tenzor tahlil
fanidan
ma'ruzalar matni



Tuzuvchi:

f-m.f.n. V.Nosirov

Andijon 2017

Kirish

Nazariy fizikaning birinchi galdagi vazifasi hodisalarning o'zaro bog'lanishlari va ularning qonuniyatlarni ochib berish yoki aniqlash bo'lsa, uning navbatdagi o'ziga xos tomoni-ana shunday bog'lanish va qonuniyatlarni matematika tilida bayon qilishdir. Matematika nazariyotchi uchun tayyor ish qurollari to'plami vazifasini bajaradi. Jumladan, vektorlar hisobi ham shunday qurollardan biri sanalib, u asosan fiziklar tomonidan tatbiq etilgan va rivojlantirilgan. Vektor hisobi bevosita ko'rgazmali mazmunga ega bo'lib, fizikaning bir qator qonunlari faqat vektorlar tilida o'zining aniq ifodasini topa olgan.

Ushbu ma'ruzalar matni 5440100 fizika-bakalavr ta'lim yo'nalishi bo'yicha tahsil olayotgan talabalarga mo'ljallangan bo'lib, unda vektorlar nazariyasining fizikaga bevosita yoki bilvosita aloqador bo'limlarini imkoniyat darajasida bayon qilishga harakat qilingan.

Maruzalar matnida vektor tushunchasi, vektorlarni qo'shish va ayirish, turli xildagi ko'paytirishlar, ularni differensiallash va integrallash, skalyar argumentli vektor, vektor argumentli skalyar va vektor argumentli vektor funksiyalar kabi mavzular ko'rib o'tilgan. Qo'llanma so'ngida shuningdek mustaqil yechish uchun test savollari keltitirgan.

Maruzalar matnidan nafaqat talabalar, balki fizika faniga qiziquvchi barcha kitobxonlar ham foydalanishlari mumkin. Ma'ruzalar matni va uning kamchiliklari haqida o'z fikr-mulohazalarini bildiruvchilarga mualliflar avvaldan minnatdorchilik izhor qiladilar.

1. Vektorlar va ular ustida amallar

Reja:

1. Vektor haqida tushincha.
2. Vektorlarni qo'shish va ayrish.
3. Vektorni skalyarga ko'paytirish.

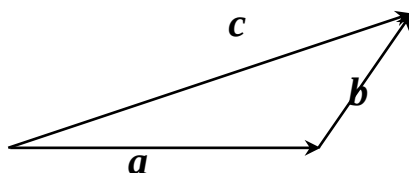
Ko'p hollarda, biz faqat son qiymati bilan aniqlanuvchi kattaliklar-skalyar miqdorlar bilan ish ko'ramiz. Skalyar musbat yoki manfiy qiymatlarga ega bo'la oladi. Skalyar kattaliklarga temperatura, massa, elektr zaryadi kabilarni misol qilib ko'rsatish mumkin.

Fizikada skalyarlar bilan bir qatorda shunday kattaliklar ham uchraydiki, ularni birgina son qiymati orqali to'la aniqlash mumkin emas. Ular ichida eng muhimi uzunligi va yo'nalishi bilan aniqlanadigan kattaliklardir. Masalan, jismning biror nuqtaga nisbatan ko'chishi (uning tezligi, tezlanishi va shunga o'xshash bir qancha kattaliklar) uzunligi va yo'nalishi bilan aniqlanadi.

Jismning ko'chishi tushunchasi to'g'risida batafsilroq to'xtalamiz. Jismning boshlang'ich vaziyati bilan keyingi vaziyatini tutashtiruvchi yo'nalgan to'g'ri chiziq kesmasi uning ko'chishi deyiladi. Jismning ko'chishi ta'rifiga muvofiq, birin-ketin bo'layotgan ikkita ko'chishlar qo'shilib natijaviy uchinchi ko'chishni hosil qilishi va bu uchinchi ko'chish qo'shiluvchi ko'chishlarning yig'indisi sifatida qaralishi mumkin.

Faraz qilaylik, jism biror trayektoriya bo'yicha harakatlangan bo'lsin. Shu trayektoriyada yotuvchi va bir-biridan ma'lum masofada joylashgan uchta nuqtani belgilab olamiz. Birinchi nuqtadan ikkinchi nuqtagacha bo'lgan ko'chishni $\vec{a}$ bilan, ikkinchidan uchinchi nuqtagacha bo'lgan ko'chishni $\vec{b}$ bilan, birinchidan uchinchi nuqtagacha bo'lgan ko'chishni $\vec{c}$ bilan belgilaymiz. Ko'chishning ta'rifiga muvofiq, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ko'chishlarning

yig'indisi $\vec{c}$ ko'chishga teng ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Yuqorida aytilganlarni chizmada (1-rasm) tasvirlasak, $\vec{a}$ ko'chishni oxiriga $\vec{b}$ ko'chishning boshi qo'yilgan bo'lib, hosil bo'lgan siniq chiziqning yopuvchisi $\vec{c}$ ko'chish bo'lib qoladi. Ko'chishlarni qo'shishning bunday usuli uchburchak qoidasi deyiladi.



1-rasm

Agar $\vec{b}$ ko'chishni o'ziga parallel ravishda ko'chirib, uning boshini $\vec{a}$ ko'chishning boshi qo'yilgan nuqtaga ko'ysak, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ko'chishlardan yasalgan parallellogramning shu nuqtasidan chiqqan diagonal $\vec{c}$ ko'chish ekanligi yaqqol ko'zga tashlanadi. Ko'chishlarni qo'shishning bunday usuli parallellogram qoidasi deyiladi. Endi trayektoriyadagi uchinchi nuqtadan keyin joylashgan, undan ma'lum uzoqlikdagi to'rtinchi nuqtani ham belgilab olamiz. Uchinchi nuqtadan to'rtinchigacha bo'lgan ko'chishni $\vec{e}$ bilan, birinchi nuqtadan to'rtinchigacha bo'lgan ko'chishni $\vec{d}$ bilan belgilaymiz. Rasmdan ko'rinib turganidek, ketma-ket joylashgan $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{e}$ ko'chishlarning yopuvchisi, boshqacha qilib aytganda ularning yig'indisi $\vec{d}$ ko'chishga teng. Ko'chishlarni qo'shishning bunday usuli ko'pburchak qoidasi deyiladi. Shu narsa muhimki, ko'chishlarni qo'shishning qaysi usulidan foydalansak ham bir xil natijaga ega bo'lamiz. Shuningdek, bu natija qo'shiluvchi ko'chishlarning tartibiga ham bog'liq emas. Ma'lum o'lchov birligida olingan son qiymati va yo'nalishi bilan aniqlanib, parallellogram qoidasiga muvofiq qo'shiluvchi miqdorlar vektorlar deyiladi. Chizmada vektorlarni yo'naltirilgan to'g'ri chiziq kesmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin, bunda kesmaning uzunligi vektorning son qiymatiga teng qilib olinadi. Vektorning moduli deb uning uzunligiga aytiladi. Odatda,

vektor kattalikni belgilovchi harf ustiga strelka qo'yiladi yoki tim qora harf yoziladi.

Uzunliklari (modullari) teng va yo'nalishlari bir xil bo'lgan ikki vektor bir-biriga teng deyiladi, ya'ni $\vec{a} = \vec{b}$ ko'rinishda yoziladi. Uzunliklari teng va yo'nalishlari qarama-qarshi bo'lgan ikki vektor qarama-qarshi vektorlar deyiladi, ya'ni $\vec{a} = -\vec{b}$ ko'rinishda yoziladi. Boshi bilan oxiri bir nuqtada bo'lgan vektor nol - vektor deyiladi.

Uzunligi va yo'nalishini o'zgartirmasdan bir nuqtadan boshqa nuqtaga ko'chirish mumkin bo'lgan vektorlar erkin vektorlar deyiladi. Bundan keyin faqat erkin vektorlar to'g'risida gap yuritiladi.

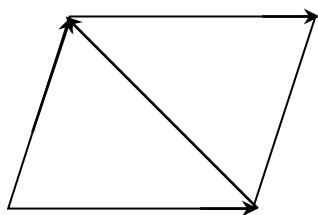
Parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar kollinear vektorlar deyiladi. Biror tekislikka paralel bo'lgan vektorlar komplanar vektorlar deyiladi. Har qanday vektor o'zi o'ziga kollinear va komplanar bo'ladi.

Bizga $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin, ularni o'z-o'ziga parallel holda ko'chirib har ikkala vektorlarning boshlarini bir nuqtaga keltiramiz va parallelogram quramiz (2-rasm). Hosil bo'lgan parallelogramning shu nuqtadan chiqqan diagonal $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisiga teng, uni $\vec{c}$ orqali belgilab, quyidagi munosabatni yozish mumkin:

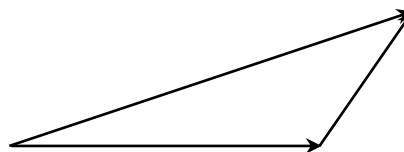
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}. \quad (1.1)$$

Odatda, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni $\vec{c}$ vektorning tashkil etuvchilari deyiladi. Yuqoridagi rasmdan yana shu narsa yaqqol ko'rinib turibdiki, unga muvofiq vektorlarni qo'shishning quyidagi xossasini yoza olamiz:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$



2-rasm



3-rasm

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi shunday $\vec{d}$ vektorga tengki, u $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi bo'lgan $-\vec{b}$ vektorning qo'shilganiga teng (3-rasm), ya'ni:

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}. \quad (1.2)$$

Yuqoridagi vektorlarning yig'indisi va ayirmasi tasvirlangan rasmlarni solishtirib, parallelogramning $\vec{b}$ vektor boshidan chiqqan diagonali $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisiga, $\vec{b}$ vektor oxiridan chiqqan diagonali ularning ayirmasiga teng ekanligini ko'ramiz. Umumiy yig'indisi $\vec{b}$ vektorni hosil qilgan $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \dots, \vec{b}_n$ vektorlar $\vec{b}$ vektorning tashkil etuvchilari deb ataladi. Umumiy yig'indi quyidagi ko'rinishda yozilishi mumkin:

$$\vec{b} = \sum \vec{b}_i$$

Ma'lumki, $\vec{a}$ vektorning α skalyarga ko'paytmasi deb shunday $\vec{b}$ vektorga aytiladiki, uning uzunligi $|\alpha||\vec{a}|$ ga teng bo'lib, yo'nalishi α musbat bo'lsa $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bilan bir xil, α manfiy bo'lsa $\vec{a}$ vektor yo'nalishiga qarama-qarshi bo'ladi va $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ ko'rinishida yoziladi. Agar α natural son bo'lsa, bu ko'paytma α -ta bir xil $\vec{a}$ vektorlarning yig'indisiga teng.

Vektorlarni qo'shish va skalyarga ko'paytirish amallarining xossalarini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c});$$

$$\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}, \quad (\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}, \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b};$$

$$1 \vec{a} = \vec{a}, \quad -1 \vec{a} = -\vec{a}, \quad 0 \vec{a} = 0, \quad \vec{a} - \vec{a} = 0, \quad \vec{a} + 0 = \vec{a}.$$

Uzunligi birga teng vektor birlik vektor yoki ort deyiladi. Odatda, birlik vektor biror vektorning yo'nalishini ko'rsatish uchun ishlatiladi. Masalan, har qanday $\vec{a}$ vektorni $\vec{a} = a\vec{a}_0$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $\vec{a}_0$ birlik vektor $\vec{a}$ vektorning yo'nalishini, a esa uning modulini ko'rsatadi.

Komplanar bo'lgan uchta vektorning har birini qolgan ikki vektor bo'yicha ajratish mumkin. Bu ikki vektor kollinear bo'lmasligi kerak. Shuningdek, har qanday $\vec{d}$ vektorni komplanar bo'lmagan uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar bo'yicha yagona usul bilan ajratish mumkin, ya'ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + \ell\vec{c}.$$

Bu yerda m , n , ℓ sonlar $\vec{d}$ vektorning $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar bo'yicha komponentalari deyiladi.

Agar ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni dekart koordinata o'qlarining yo'nalishini ko'rsatuvchi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlar bo'yicha ajratsak, quyidagi ifodani yozishimiz mumkin:

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z, \quad (1.3)$$

bu yerda a_x , a_y , a_z -lar $\vec{a}$ vektorning dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari. Shuningdek, koordinatalar boshidan fazoning ixtiyoriy biror nuqtasigacha bo'lgan ko'chish shu nuqtaning $\vec{r}$ -radius-vektori deb ataladi. Biror nuqtaning radius-vektori uning koordinatalari orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \quad (1.4)$$

bu yerda x , y va z berilgan nuqtaning dekart koordinatlari.

Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorning biror ℓ -o'qdagi proyeksiyasi vektor uzunligi bilan vektor va shu o'q orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasiga teng, ya'ni quyidagi ko'rinishda yozilishi mumkin:

$$a_\ell = a \cos \alpha,$$

bu yerda α - $\vec{a}$ vektor bilan ℓ -o'qning musbat yo'nalishlari orasidagi burchak ($\pi > \alpha$).

Nazorat uchun savol va misollar

1. Vektor deb nimaga aytiladi?

2. Vektorlarni qo'shishning qanday usullari mavjud?

3. Agar $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{k}-\mathbf{j}+2\mathbf{i}$ bo'lsa,

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=?$; $\mathbf{a}-\mathbf{b}=?$; $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}=?$; $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}=?$; $a=?$; $b=?$

4. Agar $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{k}+\mathbf{j}-2\mathbf{i}$ bo'lsa,

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=?$; $\mathbf{a}-\mathbf{b}=?$; $2\mathbf{a}+\mathbf{b}=?$; $\mathbf{a}-3\mathbf{b}=?$; $a=?$; $b=?$

2. Vektorlarning skalyar va vektor ko'paytmasi

Reja:

1. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi.
2. Dekart ortlari.
3. Vektorlarning vektor ko'paytmasi.

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb ularning modullari bilan shu vektorlar yo'nalishlari orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasiga aytiladi. Skalyar ko'paytmani S bilan belgilab, uni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$S=(\vec{a} \cdot \vec{b})=a b \cos \alpha, \quad (2.1)$$

bu yerda α - $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yo'nalishlari orasidagi burchak. Odatda, ikki vektor yo'nalishlari orasidagi burchak uchun $\pi \geq \alpha$ shart bajarilishi kerak. Skalyar ko'paytmada ko'paytuvchilarning o'rinlarini almashtirilsa, natija o'zgarmaydi.

Shuningdek, skalyar ko'paytma quyidagi ko'rinishda ham yozilishi mumkin:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})=a_b b=a a_b,$$

ya'ni vektorlardan birining moduli bilan ikkinchisining birinchi vektor yo'nalishidagi proyeksiyasi ko'paytmasiga teng.

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ta'rifiga muvofiq dekart koordinatalar sistemasining ortlari uchun quyidagi munosabatlarni yozishimiz mumkin:

$$\begin{aligned}(\vec{i} \cdot \vec{i}) &= 1 & (\vec{i} \cdot \vec{j}) &= 0 & (\vec{i} \cdot \vec{k}) &= 0 \\(\vec{j} \cdot \vec{i}) &= 0 & (\vec{j} \cdot \vec{j}) &= 1 & (\vec{j} \cdot \vec{k}) &= 0 \\(\vec{k} \cdot \vec{i}) &= 0 & (\vec{k} \cdot \vec{j}) &= 0 & (\vec{k} \cdot \vec{k}) &= 1\end{aligned} \quad (2.2)$$

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar komponentalari orqali berilgan bo'lsin, ya'ni:

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z, \quad \vec{b} = \vec{i}b_x + \vec{j}b_y + \vec{k}b_z. \quad (2.3)$$

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini (2.2) va (2.3) lardan foydalanib, quyidagi ko'rinishda yozishimiz mumkin:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (2.4)$$

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro teng bo'lsa, u xolda (2.4) dan foydalanib, $\vec{a}$ -vektorning moduli uchun quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

(2.1) va (2.4) ifodalarning o'ng tomonlarini tenglashtirib, quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$a b \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (2.5)$$

bu ifodadan foydalanib, ikki vektor orasidagi burchak kosinusining son qiymatini hisoblashimiz mumkin.

Vektorlar ustida bajariladigan amallar ichida skalyar ko'paytmadan ahamiyati kam bo'lmagan, ya'ni ikki vektordan yana vektor kattalik hosil qiluvchi amal ularning vektor ko'paytmasidir. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi shunday $\vec{v}$ vektorga tengki, uning moduli ko'paytuvchi vektorlardan yasalgan parallelogram yuzining son qiymatiga teng, yo'nalishi parallelogram yuziga tik yo'nalgan bo'lib, uning uchidan qaralganda $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ vektorga tomon α -burchakka burilish yo'nalishi soat strelkasining

aylanish yo'nalishiga teskari bo'ladi ($\pi > \alpha$). Vektor ko'paytma quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\vec{V} = [\vec{a} \times \vec{b}] = \bar{n} a b \sin \alpha, \quad (2.6)$$

bu yerda α ko'paytuvchi vektorlar yo'nalishlari orasidagi burchak, $\bar{n}$ -birlik vektor orqali vektor ko'paytmaning yo'nalishi ko'rsatilgan. Ko'paytuvchilarining o'rinlari almashtirilsa vektor ko'paytma o'z yo'nalishini qarama-qarshisiga o'zgartiradi, ya'ni quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}].$$

Agar ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{V}$ berilgan bo'lsa, u vektorlardan yasalgan parallelogramning quyidagi parametrlari bizga ma'lum bo'ladi: 1) parallelogramning yuzi $\vec{V}$ ning moduliga teng; 2) parallelogram tekisligiga $\vec{V}$ perpendikulyar yo'nalgan; 3) parallelogram yuzi konturining yo'nalishi $\vec{V}$ ning uchidan qaralganda soat strelkasining aylanishi yo'nalishiga teskari bo'ladi. Parallelogramning shakli esa noma'lumligicha qoladi, ya'ni uning yasovchilari yoki burchaklarini $\vec{V}$ dan aniqlab bo'lmaydi. Shuning uchun ma'lum yo'nalishidagi kontur bilan chegaralangan har qanday tekis yuz vektor sifatida qaralishi mumkin. Odatda, parallelogram yuzi konturining yo'nalishi uchun birinchi ko'paytuvchi $\vec{a}$ vektorning yo'nalishi qabul qilinadi.

O'zida yotgan konturni aylanib chiqish yo'nalishi tayin bo'lgan tekislik orientatsiyali tekislik deyiladi. Orientatsiyali yuzni tasvirlovchi yo'naltirilgan kesmaning uzunligi yuzning son qiymatiga teng, yo'nalishi esa yuz normalining yo'nalishi bilan bir xil qilib olinadi. Yo'naltirilgan bu kesma vektordir.

Faraz qilaylik, biror yopiq ko'p yoqli tomonlarining tashqi yuzalariga mos keluvchi $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \dots, \vec{S}_n$ vektorlar berilgan bo'lsin. Quyida shu vektorlarning yig'indisi nolga teng ekanligini ko'rsatamiz. Komplanar

bo'lmagan uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektor olaylik. Ularning boshi bir nuqtaga keltirilgan bo'lsin. Shu vektorlar bilan aniqlangan to'rt yoqli yopiq sirt - tetraedr yoqlarining orientatsiyali yuzlarini tasvirlovchi vektorlar yig'indisini hisoblaylik. Faraz qilaylik, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning boshi 0 nuqtaga, oxirlari esa mos ravishda A, B va C nuqtalarga qo'yilgan bo'lsin. Tetraedr yoqlari bo'lgan OAB, OBC, OCA, BCA uchburchaklarning yuzlarini mos ravishda $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$, $\vec{S}_4$ vektorlar bilan belgilaymiz. Bu vektorlarning har biri tetraedrning mos yoqlariga o'tkazilgan tashqi normal bilan bir xil yo'nalgan. Ularning har birini $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar orqali quyidagi ko'rinishda yozilishi mumkin:

$$\vec{S}_1 = \frac{1}{2} [\vec{a} \times \vec{b}], \quad \vec{S}_2 = \frac{1}{2} [\vec{b} \times \vec{c}], \quad \vec{S}_3 = \frac{1}{2} [\vec{c} \times \vec{a}],$$

$$\vec{S}_4 = \frac{1}{2} [(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{b})]$$

Ohirgi tenglikning o'ng tomonidagi qavslarni ochib, quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$\vec{S}_4 = -\frac{1}{2} [\vec{c} \times \vec{a}] - \frac{1}{2} [\vec{b} \times \vec{c}] - \frac{1}{2} [\vec{a} \times \vec{b}], \quad \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{S}_4 = 0.$$

Tetraedr yoqlarining orientatsiyali yuzlarini tasvirlovchi vektorlar yig'indisi nolga teng. Har qanday ko'p yoqli jismni cheksiz ko'p va cheksiz kichik tetraedrlardan tashkil topgan deb qarashimiz mumkin. U xolda tetraedrlarning bir-biriga tegib turgan tomonlari yuzlari qarama-qarshi vektorlar hosil qilganligi uchun ularning yig'indisi nolga teng bo'ladi. Bundan jismni chegaralab turgan tetraedrlarning tashqariga qaragan tomonlari yuzalari vektorlarining yig'indisi nolga tengligi kelib chiqadi. Boshqacha qilib aytganda ixtiyoriy yopiq ko'p yoqli tomonlarining yuzlariga mos keluvchi va tashqarisiga yo'nalgan $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$, ..., $\vec{S}_n$ vektorlar yig'indisi nolga teng, ya'ni:

$$\sum \vec{S}_n = 0. \quad (2.7)$$

Ikki vektorning vektor ko'paytmasi ta'rifiga muvofiq dekart koordinatalar sistemasining ortlari uchun quyidagi munosabatlarni yozishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} [\vec{i} \times \vec{i}] &= 0 & [\vec{i} \times \vec{j}] &= \vec{k} & [\vec{i} \times \vec{k}] &= -\vec{j} \\ [\vec{j} \times \vec{i}] &= -\vec{k} & [\vec{j} \times \vec{j}] &= 0 & [\vec{j} \times \vec{k}] &= \vec{i} \\ [\vec{k} \times \vec{i}] &= \vec{j} & [\vec{k} \times \vec{j}] &= -\vec{i} & [\vec{k} \times \vec{k}] &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Yana $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar komponentalari orqali berilgan bo'lsa, u xolda ularning vektor ko'paytmasini (2.8) munosabatlardan foydalanib, quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x).$$

Bu ifoda determinant ko'rinishda quyidagicha yozilishi mumkin:

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

Nazorat uchun savol va misollar

1. Ikki vektorni necha hil usulda ko'paytirish mumkin?
2. Skalyar va vektor ko'paytmalarda qanday farqlar bor?
3. Agar $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{k}-3\mathbf{j}+2\mathbf{i}$ bo'lsa,
 $a=?$; $b=?$ $(\mathbf{a},\mathbf{b})=?$; $[\mathbf{a},\mathbf{b}]=?$; $\cos\varphi=?$;
4. Agar $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{k}+\mathbf{j}-2\mathbf{i}$ bo'lsa,
 $a=?$; $b=?$ $(\mathbf{a},\mathbf{b})=?$; $[\mathbf{a},\mathbf{b}]=?$; $\cos\varphi=?$;

3. Vektorlarning murakkab ko'paytmalari

Reja:

1. Vektorni ikki vektor skalyar ko'paytmasiga ko'paytirish.
2. Vektorni ikki vektor vektor ko'paytmasiga skalyar ko'paytirish.
3. Vektorni ikki vektor vektor ko'paytmasiga vektor ko'paytirish.

Vektorlarning murakkab ko'paytmalari deb uchta vektorlarning turli ko'paytmalariga aytiladi. Bunda uchta hol bo'lishi mumkin: vektorni ikkita vektor skalyar ko'paytmasiga ko'paytirish, vektorni ikkita vektor vektor ko'paytmasiga skalyar ko'paytirish, vektorni ikkita vektor vektor ko'paytmasiga vektor ko'paytirish.

Vektorni ikkita vektor skalyar ko'paytmasiga ko'paytirish vektorni skalyarga ko'paytirishga keladi:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = k\mathbf{c},$$

bu yerda $k = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytirib, quyidagi ifodani yozishimiz mumkin:

$$(\vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]) = c_x(a_y b_z - a_z b_y) + c_y(a_z b_x - a_x b_z) + c_z(a_x b_y - a_y b_x) \quad (3.1)$$

Bu aralash ko'paytmaning son qiymati yasovchilari $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar bo'lgan paralelloiped hajmiga teng. Shuningdek, (3.1) ifodaning o'ng tomonini determinant ko'rinishda yozishimiz mumkin:

$$(\vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Agar determinant xossalaridan foydalansak,

$$(\vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = (\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]),$$

$$\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

ya'ni, determinantning bir-biriga qo'shni qatorlari o'rnini almashtirsak, uning ishorasi teskarisiga o'zgaradi, agar ikkinchi marta almashtirsak, uning ishorasi avvalgi xolatiga qaytadi.

Xuddi shunga o'xshash, determinant xossalaridan foydalanib, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmalari uchun quyidagi munosabatlarni yozishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]) &= (\vec{b} \cdot [\vec{c} \times \vec{a}]) = (\vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]) = \\ &= -(\vec{a} \cdot [\vec{c} \times \vec{b}]) = -(\vec{b} \cdot [\vec{a} \times \vec{c}]) = -(\vec{c} \cdot [\vec{b} \times \vec{a}]). \end{aligned}$$

Ikki vektorning vektor ko'paytmasi uchinchi vektorga vektor ko'paytirilsa, natijada yana vektor hosil bo'ladi. Bunday ko'paytma ikki karrali vektor ko'paytma deyiladi. Uning x-o'qidagi proyeksiyasi ko'paytuvchi vektorlarning proyeksiyasi orqali quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{aligned} [\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]]_x &= a_y [\vec{b} \times \vec{c}]_z - a_z [\vec{b} \times \vec{c}]_y = \\ &= a_y (b_x c_y - b_y c_x) - a_z (b_z c_x - b_x c_z). \end{aligned}$$

Tenglikning o'ng tomonidagi qavslarni ochgandan keyin, unga $a_x b_x c_x$ hadni qo'shib ham ayirib, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]]_x = b_x (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z).$$

Qavslar ichidagi ifodalarni skalyar ko'paytma ekanligini hisobga olib, ikki karrali vektor ko'paytmaning x-o'qidagi proyeksiyasi uchun quyidagi munosabatni yozishimiz mumkin:

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]]_x = b_x (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_x (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Huddi shunday ifodalarni ikki karrali vektor ko'paytmaning y- va z-o'qlaridagi proyeksiyalari uchun ham yozishimiz mumkin:

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]]_y = b_y (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_y (\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]]_z = b_z (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_z (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Oxirgi uchta tengliklarning har birini mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ orlarga ko'paytirib va hosil bo'lgan tengliklarning mos tomonlarini qo'shib, ikki karrali vektor ko'paytma uchun quyidagi ayniyatni hosil qilamiz:

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (3.2)$$

Demak, yuqoridagi $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlardan tuzilgan ikki karrali vektor ko'paytma $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga komplanar bo'lar ekan. Muhim bir xol ustida to'xtab o'taylik. (3.2) formulada $\vec{c} = \vec{a}$ hisoblab, undan $\vec{b}$ vektorni aniqlaylik:

$$\vec{b} = \vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b})a^{-2} - [\vec{a} \times [\vec{a} \times \vec{b}]]a^{-2}. \quad (3.3)$$

Tenglikning o'ng tomonidagi vektorning birinchisi $\vec{a}$ vektorga paralel, ikkinchisi $\vec{a}$ vektorga perpendikulyardir. Demak, har qanday $\vec{b}$ vektorni berilgan $\vec{a}$ vektorga parallel va perpendikulyar bo'lgan ikki vektorga ajratish mumkin. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini S va vektor ko'paytmasini $\vec{V}$ orqali belgilanishini hisobga olib, (3.3) o'rniga quyidagi munosabatni yozishimiz mumkin:

$$\vec{b} = \vec{a} S a^{-2} - [\vec{a} \times \vec{V}] a^{-2}. \quad (3.4)$$

Nazorat uchun savol va misollar

1. Agar $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{k}-2\mathbf{j}+\mathbf{i}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+3\mathbf{k}-2\mathbf{j}$ bo'lsa,
 $a=?$; $b=?$ $c=?$; $\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})=?$; $\mathbf{a}(\mathbf{c},\mathbf{b})=?$; $(\mathbf{c},[\mathbf{a},\mathbf{b}])=?$; $(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}])=?$; $[\mathbf{c},[\mathbf{a},\mathbf{b}]]=?$;
 $[\mathbf{b},[\mathbf{a},\mathbf{c}]]=?$;
2. Agar $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{k}+\mathbf{j}-2\mathbf{i}$, $\mathbf{c}=2\mathbf{i}+3\mathbf{k}-2\mathbf{j}$ bo'lsa,
 $a=?$; $b=?$ $c=?$; $\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})=?$; $\mathbf{a}(\mathbf{c},\mathbf{b})=?$; $(\mathbf{c},[\mathbf{a},\mathbf{b}])=?$; $(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}])=?$; $[\mathbf{c},[\mathbf{a},\mathbf{b}]]=?$;
 $[\mathbf{b},[\mathbf{a},\mathbf{c}]]=?$;

4. Gradient tushunchasi

Reja:

1. Vektor funksiya
2. Fazoviy hosilalar
3. Gradient

Skalyar argumentning skalyar funksiyasini matematik analiz kursida batafsil o'rganiladi. Skalyar argumentning vektor funksiyasini, vektor argumentning skalyar va vektor funksiyalarini tekshirish masalalari bilan vektorlar analizi shug'ullanadi. Yuqorida eslatib o'tilgan funksiyalarning ta'riflarini aytib o'tirmasdan, ishni birdaniga ular ustida bajariladigan matematik amallarni o'rganishdan boshlaymiz.

Agar t skalyar argumentning har bir qiymatiga aniq bir $\vec{r}$ vektor miqdor mos kelsa, bu vektor miqdor t skalyar argumentning vektor funksiyasi deyiladi va $\vec{r} = \vec{r}(t)$ shaklida yoziladi. Moduli cheksiz kichik bo'lgan vektor cheksiz kichik vektor deyiladi. Agar t argument ixtiyoriy ravishda t_0 qiymatga intilganda $\vec{r}$ o'zgaruvchi vektor bilan $\vec{a}$ o'zgarmas vektorning $\vec{r} - \vec{a}$ ayirmasi cheksiz kichik vektor bo'lsa, $\vec{a}$ o'zgarmas vektor $\vec{r}$ o'zgaruvchi vektorning $t \rightarrow t_0$ dagi limiti deyiladi va $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ ko'rinishda yoziladi. Agar $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ shart bajarilsa, $\vec{r}(t)$ vektor funksiya t_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Quyida biz skalyar argumentli vektor funksiyani differensiallash amali bilan tanishamiz. Xolbuki, bu narsalar bizga elementar fizika kursidan ham ma'lum edi. Masalan, moddiy nuqta o'rnini aniqlovchi $\vec{r}$ -radius vektorning vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilasi $\vec{v}$ -tezlik vektoriga, ikkinchi hosilasi $\vec{a}$ -tezlanish vektoriga teng ekanligini bilamiz. Ko'rinib turibdiki, vektor funksiyadan skalyar argument bo'yicha olingan hosilalar yana vektor kattalikligicha qoladi. Skalyar argumentli vektor funksiyalarni

differentiallashtirish va integrallashtirish amallari xuddi skalyar funksiyalardagidek ko'rinadi ham, ularning vektor kattalik ekanligini doim esda tutishimiz kerak. Chunki vektorlarni qo'shish va ayirish amallari skalyarni qo'shish va ayirish amallaridan tubdan farq qiladi. Maslan, vektorning moduli va yo'nalishining o'zgarishlari orasidagi bog'lanishni ko'rib chiqaylik. Ma'lumki, vektor modulining kvadrati uning o'z-o'ziga skalyar ko'paytmasi orqali aniqlanadi: $a^2 = (\vec{a} \cdot \vec{a})$. Tenglikning har ikkala tomonini differentsiallashtirib $2a da = (\vec{a} \cdot d\vec{a})$ ni hosil qilamiz. Bu yerda $da \neq |d\vec{a}|$ ekanligini hisobga olsak, yuqoridagi fikrimizning to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Faraz qilaylik, moddiy nuqtaning $\vec{r}$ -radius-vektori t -vaqtning uzliksiz funksiyasi bo'lsin:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (4.1)$$

Vaqtning Δt -ortdirmasiga radius-vektorning $\Delta \vec{r}$ -ortdirmasi mos kelsin, ya'ni:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t).$$

Skalyar funksiyalardagi singari radius-vektorning vaqt bo'yicha hosilasi deb $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ nisbatning Δt nolga intilgandagi limitiga aytiladi, ya'ni:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (4.2)$$

Ma'lumki, fizikada moddiy nuqta radius-vektoridan vaqt bo'yicha olingan hosila $\vec{v}$ -tezlik vektoriga teng bo'ladi:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (4.3)$$

Shuningdek, tezlik vektorining vaqt bo'yicha hosilasi $\vec{a}$ -tezlanish vektoriga teng bo'lib, u radius-vektordan olingan ikkinchi hosilaga teng bo'ladi:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (4.4)$$

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalayar ko'paytmalaridan hosila olish qoidalarini ham skalyar funksiyalarnikiga o'xshash bo'ladi, ya'ni:

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}\right). \quad (4.5)$$

Faqat vektor ko'paytmadan hosila olinganda ko'paytuvchilar tartibi saqlanishi lozim, aks holda vektor ko'paytmaning ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi:

$$\frac{d[\vec{a} \times \vec{b}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b}\right] + \left[\vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}\right] = \left[\frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b}\right] - \left[\frac{d\vec{b}}{dt} \times \vec{a}\right]. \quad (4.6)$$

Agar vektor kattalik moduli o'zgarmas bo'lsa, ya'ni quyidagi:

$$(\vec{r} \cdot \vec{r}) = r^2 = \text{const} \quad (4.7)$$

tenglik bajarilsa, uning har ikki tomonidan vaqt bo'yicha hosila olib quyidagi natijaga kelamiz:

$$\left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = 0 \rightarrow \vec{r} \perp \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (4.8)$$

Moduli o'zgarmas vektorning hosilasi uning o'ziga perpendikulyar yo'nalishga ega bo'lar ekan.

Vektorning o'z-o'ziga skalyar ko'paytmasi vektor modulining kvadratiga teng:

$$(\vec{r} \cdot \vec{r}) = r^2.$$

Bu ifodaning har ikki tomonini differensiallab quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$(\vec{r} \cdot d\vec{r}) = r dr. \quad (4.9)$$

Skalyar ko'paytmaning ta'rifiga muvofiq (4.9) ifodadan:

$$dr = |d\vec{r}| \cdot \cos(\vec{r} \wedge d\vec{r}), \quad (4.10)$$

ya'ni vektor modulining differensialini vektor differensialining shu vektor yo'nalishidagi proyeksiyasiga teng.

Ixtiyoriy nuqtaning $\vec{r}$ radius-vektorni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\vec{r} = r\vec{r}_o,$$

bu yerda $\vec{r}_o$ -birlik vektor $\vec{r}$ radius-vektorning yo'nalishini ko'rsatadi. Tenglikning har ikki tomonidan vaqt bo'yicha hosila olsak, quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_o + r\frac{d\vec{r}_o}{dt}. \quad (4.11)$$

Tenglikning o'ng tomonidagi $\vec{r}_o$ birlik vektorning hosilasini hisoblash uchun quyidagicha mulohaza yuritamiz. Cheksiz kichik vaqt o'tishi bilan birlik vektor faqat yo'nalishini o'zgartirishi, ya'ni cheksiz kichik $d\varphi$ burchakka burilishi mumkin. Cheksiz kichik burchakka burilish yo'nalishi parma dastasining aylanishiga mos kelsa, parmaning ilgarilama harakat yo'nalishi cheksiz kichik burilish burchagi vektori- $d\vec{\varphi}$ yo'nalishiga mos keladi. Ya'ni, $d\vec{\varphi}$ -vektorining moduli $d\varphi$ ga teng, yo'nalishi esa burilish burchagi tekkisligiga tik yo'nalgan bo'ladi.

Yaqqol bo'lishi uchun $d\vec{\varphi}$ -vektor va $\vec{r}_o$ birlik vektorlarni qog'oz betiga parallel, $d\vec{r}_o$ -vektorni ularga tik yo'nalgan qilib olamiz. Rasmdan foydalanib, quyidagilarni yozishimiz mumkin:

$$|d\vec{r}_o| = NM \cdot d\varphi, \quad NM = |\vec{r}_o| \sin(d\vec{\varphi} \wedge \vec{r}_o).$$

Yuqoridagilarga va vektor ko'paytma ta'rifi asosan:

$$|d\vec{r}_o| = d\varphi |\vec{r}_o| \sin(d\vec{\varphi} \wedge \vec{r}_o) \rightarrow d\vec{r}_o = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}_o]. \quad (4.12)$$

Tenglikning har ikki tomonini dt ga bo'lib, $\vec{r}_o$ birlik vektorning vaqt bo'yicha hosilasi uchun quyidagi ifodalarni yozamiz:

$$\frac{d\vec{r}_o}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}_o \right], \quad \frac{d\vec{r}_o}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{r}_o], \quad (4.13)$$

bu yerda $\vec{\omega}$ -burchak tezlik vektori bo'lib, u quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (4.14)$$

Yuqoridagi $\vec{r}_o$ birlik vektorning vaqt bo'yicha hosilasi uchun olingan (4.14) ifoda universal harakterga ega bo'lib, ixtiyoriy birlik vektorning vaqt bo'yicha hosilasi uchun ham o'rinlidir. Agar $\vec{r} = r\vec{r}_o$ ekanligini hisobga olsak (4.12) tenglikning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchini

$$r \frac{d\vec{r}_o}{dt} = r[\vec{\omega} \times \vec{r}_o] = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

ko'rinishga keltiramiz. Nihoyat, $\vec{r}$ -radius vektorning vaqt bo'yicha olingan birinchi hosilasi uchun quyidagi ifodani yozamiz:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{r}_o + [\vec{\omega} \times \vec{r}] \quad (4.13)$$

(4.11) ifoda singari (4.13) ifoda ham ixtiyoriy vektorning vaqt bo'yicha olingan hosilasi uchun o'rinlidir. Agar $\vec{r}$ -radius-vektorning moduli vaqt o'tishi bilan o'zgarmasa, (4.13) ifodadan quyidagi natijalarni olamiz:

$$\frac{dr}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

Radius –vektordan vaqt bo'yicha hosilasini tezlik vektoriga tengligini hisobga olib, (masalan, tekkis aylanma harakat uchun) quyidagini yozishimiz mumkin:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \quad (4.14)$$

Bu ifoda kinematikada Eyler formulasi deb ataladi.

Vektor funksiya uchun noaniq va aniq integrallar tushunchasini kiritish mumkin. Biror $\vec{a}(t)$ vektorning skalyar argument bo'yicha hosilasi $\vec{b}(t)$ bo'lsin. Hosilalari $\vec{b}(t)$ vektorga teng bo'lgan barcha $\vec{a}(t)$ vektorlar to'plami $\vec{b}(t)$ vektorning noaniq integrali deyiladi, ya'ni:

$$\vec{a}(t) = \int dt \vec{b}(t) + \vec{c}, \quad (4.15)$$

bu yerda $\vec{c}$ -ixtiyoriy o'zgarmas vektor. Argumentning 0 dan t gacha o'zgarish intervalida olingan $\vec{b}(t)$ vektorning aniq integralini noaniq integral ortdirmasi sifatida ta'riflash mumkin:

$$\int_0^t dt \vec{b}(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}(0). \quad (4.16)$$

Ta'rifga muvofiq, vektorlar yig'indisining integrali vektorlar integrallarining yig'indisiga teng:

$$\int dt (\vec{a}(t) + \vec{b}(t)) = \int dt \vec{a}(t) + \int dt \vec{b}(t) \quad (4.17)$$

Bo'laklab integrallash formulasi va skalyar funksiyaning integrali uchun o'rinli bo'lgan boshqa qoidalar skalyar argumentli vektor funksiyaning integraliga ham deyarli o'zgarishsiz tatbiq etiladi.

Berilgan nuqtani qurshab olgan yopiq sirt bo'yicha φ -skalyar funksiya olingan integralning shu sirt bilan chegaralangan V -hajmga nisbatining shu hajm nolga intilgandagi limiti skalyar funksiyaning shu nuqtadagi gradiyenti deb ataladi va $grad\varphi$ orqali blgilanadi:

$$grad\varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds \vec{n} \varphi, \quad (d\vec{s} = \vec{n} ds). \quad (5.1)$$

Bu yerda elementar yuza vektori- $d\vec{s} = \vec{n} ds$. Xuddi shunga o'xshash $\vec{a}$ vektor funksiya uchun ham ikki xil fazoviy hosila tushunchalarini kiritish mumkin. Ularning birinchisi $\text{div} \vec{a}$ bilan, ikkinchisi $\text{rot} \vec{a}$ bilan belgilanadi:

$$\text{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds (\vec{n} \cdot \vec{a}), \quad (5.2)$$

$$\text{rot} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds [\vec{n} \times \vec{a}]. \quad (5.3)$$

Faraz qilaylik, vektor argumentli skalyar funksiya $\varphi(\vec{r})$ berilgan bo'lsin. Argument orttirmasini $\Delta\vec{r} = \Delta\ell \cdot \vec{\ell}_o$ ko'rinishda yozamiz, u holda $\vec{\ell}_o$ -birlik vektor uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\vec{\ell}_o = \frac{d\vec{r}}{d\ell} = \vec{i} \frac{dx}{d\ell} + \vec{j} \frac{dy}{d\ell} + \vec{k} \frac{dz}{d\ell}. \quad (5.4)$$

Argument ortdirmasi $\Delta\vec{r}$ ga mos keluvchi skalyar funksiyaning $\Delta\varphi$ -ortdirmasi quyidagiga teng:

$$\Delta\varphi = \varphi(\vec{r} + \Delta\ell \cdot \vec{\ell}_o) - \varphi(\vec{r}).$$

Skalyar funksiyaning $\vec{\ell}_o$ birlik vektor yo'nalishi bo'yicha hosilasi deb $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\ell}$ nisbatining $\Delta\ell$ nolga intilgandagi limitiga aytiladi:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\ell} = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\ell} \quad (5.5)$$

Ikkichi tomondan murakkab funksiyaning hosilasi ta'rifiga muvofiq:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\ell} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{d\ell} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{d\ell} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dz}{d\ell}. \quad (5.6)$$

Tenglikning o'ng tomonidagi ifoda $\vec{\ell}_o$ birlik vektor bilan (hozircha bizga mohiyati nom'alum bo'lgan) quyidagi vektor kattalikning

$$\vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

skalyar ko'paytmasidan iborat, ya'ni:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\ell} = ((\vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}) \cdot \vec{\ell}_o). \quad (5.7)$$

Berilgan nuqtadan cheksiz ko'p yo'nalishlar o'tadi, demak funksiyaning yo'nlish bo'yicha hosilalari ham bu nuqtada turlicha bo'lishi mumkin. Ammo funksiyaning biror nuqtada ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha olingan hosilasi funksiyaning shu nuqtadagi gradiyenti bilan bog'langan. Skalyar funksiyaning gradiyenti ta'rifiga muvofiq:

$$\text{grad}\varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds \vec{n} \varphi, \quad (d\vec{s} = \vec{n} ds). \quad (5.8)$$

Skalyar funksiya gradiyentining $\vec{\ell}_o$ birlik vektor yo'nalishidagi proyeksiyasini hisoblaymiz. Buning uchun (5.8) tenglikning har ikki tomonini $\vec{\ell}_o$ birlik vektorga skalyar ko'paytiramiz:

$$\text{grad}_\ell\varphi = (\text{grad}\varphi \cdot \vec{\ell}_o) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds (\vec{n} \cdot \vec{\ell}_o) \varphi. \quad (5.9)$$

Skalyar funksiya gradiyentini aniqlashda berilgan nuqtani qurshab olgan yopiq sirt shaklining qandayligi ahamiyatsiz bo'lganligidan uni silindr shaklida olamiz. Silindr asosining yuzi Δs , balandligi $\Delta\ell$, hajmi $V = \Delta s \Delta\ell$, ostki va ustki asoslari markazlarining radius-vektorlari mos ravishda $\vec{r}$ va

$\vec{r} + \Delta\ell \cdot \vec{\ell}_o$ bo'lsin. Silindr yon sirti bo'yicha olingan integral nolga teng, chunki $\vec{n} \perp \vec{\ell}_o$. Yopiq sirt bo'yicha olingan integral silindrning ostki va ustki asoslari bo'yicha olingan integralga teng bo'ladi:

$$\oint ds (\vec{n} \cdot \vec{\ell}_o) \varphi = ((\varphi(\vec{r} + \Delta\ell \cdot \vec{\ell}_o) \Delta s \cdot \vec{\ell}_o - \varphi(\vec{r}) \Delta s \cdot \vec{\ell}_o) \cdot \vec{\ell}_o) = \Delta\varphi \cdot \Delta s.$$

Bu ifodani (5.9) ga qo'ysak:

$$(\text{grad} \varphi \cdot \vec{\ell}_o) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds (\vec{n} \cdot \vec{\ell}_o) \varphi = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\ell} = \frac{\partial\varphi}{\partial\ell},$$

yoki

$$\text{grad}_\ell \varphi = (\text{grad} \varphi \cdot \vec{\ell}_o) = \frac{\partial\varphi}{\partial\ell}. \quad (5.10)$$

Bu ifodani (5.9) bilan solishtirsak skalyar funksiya gradiyenti uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$\text{grad} \varphi = \vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (5.11)$$

Bu ifodadagi skalyar funksiya radius-vektor moduligagina bog'liq bo'lsa, uning xususiy hosilalarini quyidagicha almashtirib:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z},$$

so'ngra bularni o'z joyiga qo'ysak:

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \left(\vec{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial r}{\partial z} \right) \rightarrow \text{grad} \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \text{grad} r$$

hosil bo'ladi.

Radius-vektor modulining gradiyenti birlik vektorga teng bo'ladi:

$$\text{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}$$

5. Oqim tushunchasi. Vektor maydon divergensiya

Reja:

1. Oqim tushunchasi
2. Divergeniya
3. Ostrogradskiy-Gauss teoremasi

Vektor funksiya divergensiya ta'rifiga muvofiq:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds (\vec{n} \cdot \vec{a}), \quad (d\vec{s} = \vec{n} ds). \quad (5.12)$$

Vektor funksiyaning biror nuqtadagi divergensiya hisoblashda shu nuqtani qurshab olgan yopiq sirt shaklining qandayligi ahamiyatsiz bo'lganligidan uni qirralari kordinata o'qlariga parallel bo'lgan parallelepiped shaklida olamiz. Parallelepiped yasovchilari dx, dy, dz va hajmi- $V = dx dy dz$ bo'lsin.

Yopiq sirt bo'yicha olingan integralni parallelogramning har bir tomoni yuzalari bo'yicha olingan integrallarga ajratib quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\oint ds (\vec{n} \cdot \vec{a}) = \left[\int_{x+dx} ds - \int_x ds \right] (\vec{i} \cdot \vec{a}) + \left[\int_{y+dy} ds - \int_y ds \right] (\vec{j} \cdot \vec{a}) + \left[\int_{z+dz} ds - \int_z ds \right] (\vec{k} \cdot \vec{a}).$$

Qarama-qarshi yotgan va x-o'qiga perpendikulyar tomonlar yuzalari bo'yicha olingan integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\left[\int_{x+dx} ds - \int_x ds \right] (\vec{i} \cdot \vec{a}) = (a_x + \frac{\partial a_x}{\partial x} dx - a_x) dy dz = \frac{\partial a_x}{\partial x} dx dy dz. \quad (5.13)$$

Xuddi shu usul bilan y va z-o'qlariga perpendikulyar tomonlar yuzalari bo'yicha olingan integrallarni hisoblab, yopiq sirt bo'yicha olingan integral uchun quyidagi natijani olamiz:

$$\oint ds (\vec{n} \cdot \vec{a}) = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (5.14)$$

Bu ifodani (d) ga qo'yib va $V = dx dy dz$ ekanligini hisobga olib vektor divergensiya uchun quyidagi ifodani yozishimiz mumkin:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (5.15)$$

Shuning uchun radius-vektorning divergensiya 3 ga teng bo'ladi:

$$\operatorname{div} \vec{r} = 3$$

6. Stoks teoremasi. Vektor maydon uyurmasi

Reja:

1. Stoks teoremasi
2. Vektor maydon uyurmasi
3. Nabla simvolik vektori

Vektor uyurmasining ta'rifiga muvofiq:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds [\vec{n} \times \vec{a}], \quad (d\vec{s} = \vec{n} ds). \quad (5.16)$$

Vektor funksiya uyurmasining biror yo'nalishidagi proyeksiyasini hisoblaymiz. Buning uchun vektor uyurmasini $\vec{k}$ -birlik vektorga skalyar ko'paytiramiz:

$$(\operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{k}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds ([\vec{n} \times \vec{a}] \cdot \vec{k}) \quad (5.17)$$

Vektorlar aralash ko'paytmasining xossalriga muvofiq quyidagi ifodani yozamiz:

$$([\vec{n} \times \vec{a}] \cdot \vec{k}) = ([\vec{k} \times \vec{n}] \cdot \vec{a}).$$

Buni (5.17) ifodaning o'ng tomoniga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$(\operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{k}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds ([\vec{k} \times \vec{n}] \cdot \vec{a}). \quad (5.18)$$

Vektor funksiya uyurmasini aniqlashda berilgan nuqtani qurshab olgan yopiq sirt shaklining qandayligi ahamiyatsiz bo'lganligidan uni silindr shaklida

olamiz(-rasm). Silindr asosining yuzi S , balandligi h , hajmi $V=Sh$ bo'lsin. Yopiq sirt bo'yicha olingan integralni ikkiga ajratib yozamiz:

$$\oint ds ([\vec{k} \times \vec{n}] \cdot \vec{a}) = \int_{ac} ds ([\vec{k} \times \vec{n}] \cdot \vec{a}) + \int_{\vec{e}_H} ds ([\vec{k} \times \vec{n}] \cdot \vec{a})$$

Bulardan birinchisi silindrning ostki va ustki asoslari bo'yicha olingan integral bo'lib, u nolga teng, ya'ni $\vec{k}$ va $\vec{n}$ birlik vektorlar silindr asoslariga tik yo'nalgan:

$$[\vec{k} \times \vec{n}] = 0 \rightarrow \int_{ac} ds ([\vec{k} \times \vec{n}] \cdot \vec{a}) = 0.$$

Shuning uchun yopiq sirt bo'yicha olingan integral silindr yon sirti bo'yicha olingan integralga teng bo'ladi. Rasmda ko'rinib turganidek, silindr yon sirtidagi elementar yuza vektori $d\vec{s} = \vec{n} ds = \vec{n} h d\ell$. Yana quyidagi

$$[\vec{k} \times \vec{n}] = \vec{\tau}, V = hS, d\vec{\ell} = \vec{\tau} d\ell$$

munosabatlarni hisobga olib, silindr yon sirt bo'yicha olingan integralni uning asosini o'rab turgan yopiq kontur bo'yicha olingan integralga keltiramiz:

$$\int_{\vec{e}_H} ds ([\vec{k} \times \vec{n}] \cdot \vec{a}) = \int_{\vec{e}_H} ds (\vec{\tau} \cdot \vec{a}) = h \oint d\ell (\vec{\tau} \cdot \vec{a}) = h \oint (d\vec{\ell} \cdot \vec{a}).$$

Bu ifodani (5.18) tenglikning o'ng tomoniga qo'yib, uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\text{rot}_k \vec{a} = (\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{k}) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint (d\vec{\ell} \cdot \vec{a}). \quad (5.19)$$

Bu yerda shu narsa muhimki, ℓ yopiq kontur bilan chegaralangan S yuzaga $\vec{k}$ birlik vektor tik yo'nalgan. Vektor uyurmasining Dekart komponentlarini aniqlashga o'taylik. Masalan, vektor uyurmasining z -komponentini hisoblash uchun (5.19) ifodadagi $\vec{k}$ birlik vektor S yuzaga tik yo'nalgan bo'lib, z -o'qiga parallel bo'lishi kerak. U xolda (5.19) ifoda quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\text{rot}_z \vec{a} = (\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{k}) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint (d\vec{\ell} \cdot \vec{a}). \quad (5.20)$$

O'ng tomondagi ifodani hisoblashda S yuzani chegaralovchi kontur shaklining qandayligi ahamiyatsiz bo'lganligidan uni to'g'ri to'rt burchak shaklida olamiz. Uning tomonlari Δx va Δy uzunlikka ega bo'lib, ular mos ravishda x va y o'qlariga koleniear bo'lsin (-rasm). Yopiq kontur bo'yicha olingan integral to'g'ri to'rt burchak tomonlari bo'yicha olingan integrallar yg'indisiga teng:

$$\oint (d\vec{\ell} \cdot \vec{a}) = \int_{MA} (d\vec{\ell} \cdot \vec{a}) + \int_{AB} (d\vec{\ell} \cdot \vec{a}) + \int_{BC} (d\vec{\ell} \cdot \vec{a}) + \int_{CM} (d\vec{\ell} \cdot \vec{a}). \quad (5.21)$$

Yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorlarni hisobga olmasak, o'ng tomondagi integrallar har biri quyidagilarga teng bo'ladi:

$$\begin{aligned} \int_{MA} (d\vec{\ell} \cdot \vec{a}) &= a_x(x, y, z) \Delta x, \\ \int_{AB} (d\vec{\ell} \cdot \vec{a}) &= a_y(x + \Delta x, y, z) \Delta y, \\ \int_{BC} (d\vec{\ell} \cdot \vec{a}) &= -a_x(x, y + \Delta y, z) \Delta x, \\ \int_{CM} (d\vec{\ell} \cdot \vec{a}) &= -a_y(x, y, z) \Delta y. \end{aligned}$$

Bularni (5.21) ifodaning o'ng tomoniga qo'yib, uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned} \oint (d\vec{\ell} \cdot \vec{a}) &= (a_y(x + \Delta x, y, z) - a_y(x, y, z)) \Delta y \\ &\quad - (a_x(x, y + \Delta y, z) - a_x(x, y, z)) \Delta x. \end{aligned} \quad (5.22)$$

To'g'ri to'rtburchak shaklidagi kontur bilan chegaralangan yuza $S = \Delta x \Delta y$ bo'lganligi sababli, (z) ifodaga (s) ni qo'yib, xususiy hosilalar ta'rifi ko'ra:

$$\begin{aligned} \text{rot}_z \vec{a} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta x} (a_y(x + \Delta x, y, z) - a_y(x, y, z)) \right) - \\ &\quad - \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta y} (a_x(x, y + \Delta y, z) - a_x(x, y, z)) \right) = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Vektor funksiya uyurmasining qolgan komponentalarini aniqlashda yuqoridagidek mulohazalardan foydalanib, quyidagi natijani olamiz:

$$\text{rot}_x \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial y}, \text{rot}_y \vec{a} = \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}, \text{rot}_z \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x}. \quad (5.23)$$

Demak, vektor funksiya uyurmasi uchun (5.23) dagi tengliklarni har ikki tomonlarini mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortlarga ko'paytirib va hosil bo'lgan tengliklarni qo'shib, quyidagi ifodani olamiz:

$$\text{rot} \vec{a} = \vec{i} \left(\frac{\partial a_y}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial y} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} \right). \quad (5.24)$$

Shuning uchun radius-vektorning uyurmasi nolga teng bo'ladi.

Nabla-simvolik vektor

Skalyar funksiya gradiyenti, vektor divergensiya va vektor uyurmasi ta'riflariga binoan quyidagi:

$$\text{grad} \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds \vec{n} \varphi \quad (5.25)$$

$$\text{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds (\vec{n} \cdot \vec{a}) \quad (5.26)$$

$$\text{rot} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds [\vec{n} \times \vec{a}] \quad (5.26)$$

tengliklardan ko'rinib turibdiki, ularning har uchalarini bir simvolik vektor yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$\text{grad} \varphi = \vec{\nabla} \varphi, \text{div} \vec{a} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}), \text{rot} \vec{a} = [\vec{\nabla} \times \vec{a}]. \quad (5.27)$$

Bu yerda $\vec{\nabla} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint ds \vec{n}$ va $d\vec{s} = \vec{n} ds$; $\vec{\nabla}$ -simvolik vektorning dekart koordinatalaridagi ko'rinishi

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (5.28)$$

bo'lishini hisobga olsak yuqoridagi har uchchala matematik amal qanchalik soddalashganiga ishonch hosil qilamiz.

Diiferensial operatorlarni Nabla simvolik vektori orqali yozamiz:

$$\text{grad}U = \nabla U,$$

$$\text{div}\mathbf{A} = (\nabla, \mathbf{A})$$

$$\text{rot}\mathbf{A} = [\nabla, \mathbf{A}]$$

7. Ikkinchi tartibli differensial operatorlar

Reja:

1. Ikkinchi tartibli gradientlar.
2. Ikkinchi tartibli divergensiya.
3. Ikkinchi tartibli uyurmalar.

Ikkinchi tartibli gradientlar quyidagi ko'rinishlarda bo'lishi mumkin:

$$\text{gradgrad}U$$

$$\text{graddiv}\mathbf{A}$$

$$\text{gradrot}\mathbf{A}$$

Ma'lumki, gradient ostida doim skalyar funksiya turadi, natija esa doim vektor bo'ladi. Shuning uchun yuqoridagi uchta ikkinchi tartibli differensial operatorlardan birinchi va uchinchi ma'noga ega emas, chunki, birinchi operatoridagi gradient va uchinchi operatoridagi rotordan vektor hosil bo'ladi. Shunday qilib, faqat bitta ikkinchi tartibli gradient bo'lishi mumkin:

$$\text{graddiv}\mathbf{A} = \nabla(\nabla, \mathbf{A})$$

Ikkinchi tartibli divergensiya quyidagi ko'rinishlarda bo'lishi mumkin:

$$\text{divgrad}U$$

$$\text{divdiv}\mathbf{A}$$

$$\text{divrot}\mathbf{A}$$

Ma'lumki, divergensiya ostida doim vektor funksiya turadi, natija esa doim skalyar bo'ladi. Shuning uchun yuqoridagi uchta ikkinchi tartibli

differentensial operatorlardan birinchi va uchinchi ma'noga ega, ikkinchisi ma'noga ega emas. Chunki, birinchi operatoridagi gradient va uchinchi operatoridagi rotordan vector, ikkinchi operatoridagi divergensiya skalyar hosil bo'ladi. Shunday qilib, faqat ikkita ikkinchi tartibli divergensiya bo'lishi mumkin:

$$\text{divgrad}U$$

$$\text{divrot}\mathbf{A}$$

Ularni hisoblaymiz:

$$\text{divgrad}U=(\nabla,\nabla U)=(\nabla,\nabla)U=\Delta U=\partial^2 U/\partial x^2+\partial^2 U/\partial y^2+\partial^2 U/\partial z^2$$

$$\text{divrot}\mathbf{A}=(\nabla,[\nabla,\mathbf{A}]=(\mathbf{A},[\nabla,\nabla])=0$$

Demak ikkita ikkinchi tartibli divergensiya mavjud bo'lib, ulardan biri nolga, ikkinchisi Laplas operatoriga teng.

Ikkinci tartibli uyurmalar quyidagi ko'rinishlarda bo'lishi mumkin:

$$\text{rotgrad}U$$

$$\text{rotdiv}\mathbf{A}$$

$$\text{rotrot}\mathbf{A}$$

Ma'lumki, uyurma ostida doim vektor funksiya turadi, natija esa doim vektor bo'ladi. Shuning uchun yuqoridagi uchta ikkinchi tartibli differentensial operatorlardan birinchi va uchinchi ma'noga ega, ikkinchisi ma'noga ega emas. Chunki, birinchi operatoridagi gradient va uchinchi operatoridagi rotordan vector, ikkinchi operatoridagi divergensiya skalyar hosil bo'ladi. Shunday qilib, faqat ikkita ikkinchi tartibli uyurma bo'lishi mumkin:

$$\text{rotgrad}U$$

$$\text{rotrot}\mathbf{A}$$

Ularni hisoblaymiz:

$$\text{rotgrad}U=[\nabla,\nabla U]=[\nabla,\nabla]U=0$$

$$\text{rotrot}\mathbf{A}=[\nabla,[\nabla,\mathbf{A}]]=\nabla(\nabla,\mathbf{A})-\Delta\mathbf{A}$$

Demak ikkita ikkinchi tartibli rotor mavjud bo'lib, ulardan biri nolga teng.

Shunday qilib, beshta ikkinchi tartibli differensial operatortlar mavjud bo'lib, ulardan ikkitasi nolga teng ($\text{divrot}\mathbf{A}=0$, $\text{rotgrad}U=0$), uchtasining ifodasi yuqorida keltirildi.

8. Egri chiziqli ortogonal koordinatalar

Reja:

1. Egri chiziqli koordinatalar

2. Lamé koeffitsientlari

3. Silindrik koordinatalar

4. Sferik koordinatalar

Ma'lumki, fizikada asosan to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi (x, y, z) bilan ish ko'riladi. Lekin ba'zi masalarni yechishda Dekart koordinatalari sistemasi o'rniga boshqa egri chiziqli koordinatalardan foydalanish qulayroq bo'ladi. Masalan, sharsimon sirtlarda harakatlanayotgan moddiy nuqta harakatini Dekart koordinatalari o'rniga sferik koordinatalarda o'rganish, trubasimon sirtlarda harakatlanayotgan moddiy nuqta harakatini silindrik koordinatalar sistemasida o'rganish ancha qulay bo'ladi.

Egri chiziqli koordinatalar umumiy holda q_1, q_2, q_3 bilan, bu koordinatalardagi birlik vektorlar (ortlar) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bilan belgilanadi va ortogonal koordinatalar deyiladi. Bu koordinatalarning har biri Dekart koordinatalariga bog'liq:

$$q_1 = q_1(x, y, z),$$

$$q_2 = q_2(x, y, z),$$

$$q_3 = q_3(x, y, z).$$

Ortogonal koordinatalardan Dekart koordinatalariga va aksincha o'tish uchun
Lame koeffitsiyentlaridan foydalaniladi:

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}$$

Ortogonal egri chiziqli koordinatalarda uzunlik elementlari

$$dl_1 = H_1 dq_1, \quad dl_2 = H_2 dq_2, \quad dl_3 = H_3 dq_3,$$

yuza elementlari

$$dS_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3, \quad dS_2 = H_1 H_3 dq_1 dq_3, \quad dS_3 = H_1 H_2 dq_1 dq_2,$$

xajm elementi

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3,$$

radius vektor elementi

$$d\mathbf{r} = H_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + H_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + H_3 dq_3 \mathbf{e}_3$$

lar orqali ifodalanadi.

Masalan, silindrik koordinatalar Dekart koordinatalari bilan

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi,$$

$$z = z$$

ifodalar orqali bog'langan. Demak $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$.

Silindrik koordinatalar uchun Lame koeffitsiyentlarini aniqlaymiz:

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi} = \rho$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

U xolda silindrik koordinatalarda uzunlik, yuza, xajm hamda radius vektor elementlari quyidagi ko'rinishlarga ega bo'ladi:

$$dl_1 = d\rho, dl_2 = \rho d\varphi, dl_3 = dz;$$

$$dS_1 = \rho d\varphi dz, dS_2 = \rho dz, dS_3 = \rho d\rho d\varphi;$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz;$$

$$\mathbf{dr} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi + dz \mathbf{e}_z.$$

Sferik koordinatalar Dekart koordinatalari bilan

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta$$

ifodalar orqali bog'langan. Demak $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$.

Sferik koordinatalar uchun Lamé koeffitsiyentlarini aniqlaymiz:

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} = r$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r \sin \theta.$$

U xolda sferik koordinatalarda uzunlik, yuza, xajm hamda radius vektor elementlari quyidagi ko'rinishlarga ega bo'ladi:

$$dl_1 = dr, dl_2 = r d\theta, dl_3 = r \sin \theta d\varphi;$$

$$dS_1 = r^2 d\varphi d\theta, dS_2 = r \sin \theta dr d\varphi, dS_3 = r dr d\theta;$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta;$$

$$\mathbf{dr} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

9. Differensial operatorlarning egri chiziqli koordinatalardagi ifodasi

Reja:

1. Differensial operatorlarning silindrik koordinatalarda yozilishi

2. Differensial operatorlarning sferik koordinatalarda yozilishi

Ortogonal egri chiziqli koordinatalarda asosiy differensial operatorlar quyidagi ko'rinishlarga ega bo'ladi:

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{H_1 \partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial U}{H_2 \partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial U}{H_3 \partial q_3} \vec{e}_3,$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_{q_1}}{H_2 H_3 \partial q_1} + \frac{\partial A_{q_2}}{H_1 H_3 \partial q_2} + \frac{\partial A_{q_3}}{H_1 H_2 \partial q_3},$$

$$\text{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \left(\frac{\partial A_{q_3}}{H_2 \partial q_2} - \frac{\partial A_{q_2}}{H_3 \partial q_3} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial A_{q_1}}{H_3 \partial q_3} - \frac{\partial A_{q_3}}{H_1 \partial q_1} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial A_{q_2}}{H_1 \partial q_1} - \frac{\partial A_{q_1}}{H_2 \partial q_2} \right) \vec{e}_3 \right\}$$

$$\Delta U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial A_{q_1}}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial A_{q_2}}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial A_{q_3}}{\partial q_3} \right) \right\}$$

Bu operatorlarning silindrik koordinatalardagi ko'rinishlari:

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{\partial U}{\rho \partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z,$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_\rho}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\rho \partial z},$$

$$\text{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\rho \partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\rho \partial \varphi} \right) \vec{e}_z \right\}$$

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right\}$$

Sferik koordinatalarda esa bu operatorlar

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial U}{r \partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{r \sin \theta \partial \varphi} \vec{e}_\varphi,$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{r^2 \sin \theta \partial r} + \frac{\partial A_\theta}{r \sin \theta \partial \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{r \partial \varphi},$$

$$\text{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \left(\frac{\partial A_\varphi}{r \partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{r \sin \theta \partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{r \sin \theta \partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{r \partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \right\}$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}) \right\}$$

ko'rinishlarga ega bo'ladi.

10. VEKTORNING ANALITIK TA'RIFI

Reja:

- 1. Birlik ortlar almashinishi**
- 2. Koordinatalarning almashinishi**
- 3. Vektorning ta'rifi**

Boshlari bir nuqtada joylashgan ikki Dekart sistemasi S, S' berilgan bo'lib, ularning ortlari $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ va $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ bo'lsin.

Fazodagi biror nuqtaning koordinatalar boshiga nisbatan radius-vektori $\mathbf{r}$ ni o'sha nuqtaning S sistemadagi x_1, x_2, x_3 koordinatalari orqali va S' sistemadagi x'_1, x'_2, x'_3 koordinatalari orqali ifodalaymiz:

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{r} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3$$

yoki qisqartirilgan shaklda bunday bo'ladi:

$$\mathbf{r} = \sum x_i \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{r} = \sum x'_i \mathbf{e}'_i$$

So'nggi tenglikning ikki tomonini $\mathbf{y}_k$ ortga skalyar ko'paytiraylik:

$$(\mathbf{r} \mathbf{y}_k) = \sum x'_i (\mathbf{e}'_i \mathbf{y}_k) = x'_k$$

Endi (1) ning ikki tomonini yana o'sha $\mathbf{y}_k$ ortga skalyar ko'paytiraylik:

$$(\mathbf{r} \mathbf{y}_k) = \sum x'_i (\mathbf{e}'_i \mathbf{y}_k) = \sum \alpha_{ki} x_i$$

$$x'_k = \sum \alpha_{ki} x_i$$

bo'ladi.

Bu formula dastlabki koordinatalardan yangi koordinatalarga o'tishni ifodalaydi.

Yangi koordinatalardan dastlabki koordinatalarga o'tish formulasini topish qiyin emas. Buning uchun (1) bilan (2) formulalarning chap va o'ng tomonlarini y_k ortga skalyar ko'paytiramiz:

$$x_k = \sum \alpha_{ik} x'_j$$

Bu formula esa yangi koordinatalardan dastlabki koordinatalarga o'tishni ifodalaydi. Yuqoridagi (3) va (4) formulalar koordinatalarning ortogonal almashtirilishlarini ko'rsatadi. Bu formulalarni bazis vektorlarni almashtirish formulalari (2) va (16) bilan solishtirsak, almashtirishlarning umumiy qonunga buysunishini ko'ramiz: bazis vektorlar qanday almashtirilsa, koordinatalar ham xuddi shunday almashtiriladi. Har qanday **a** vektor uchun:

$$\mathbf{a} = \sum a_i \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{a} = \sum a'_j \mathbf{e}'_j$$

bu yerda a_i , a'_j sonlar **a** vektorning eski va yangi Dekart sistemasida olingan mos komponentlaridir. Bu komponentlarning almashtirish qonunini aniqlamoqchimiz. So'nggi ikki formuladan foydalanib bunday yozamiz:

$$(\mathbf{a} \mathbf{e}'_k) = \sum a_i (\mathbf{e}_i \mathbf{e}'_k) = \sum \alpha_{ki} a_i$$

demak:

$$a'_k = \sum \alpha_{ki} a_i$$

Shuning kabi usul bilan tubandagi formulani ham chiqarish mumkin:

$$a_k = \sum \alpha_{jk} a'_j$$

So'nggi ikki formuladan ko'ramizki, bazis vektorlar qanday almashtirilsa, vektorning komponentlari xam xuddi shunday almashtiriladi. Ularni almashtirish konuni bir xildir. Ana shu almashtirish konuniga asoslanib, vektorga yangi ta'rif berish mumkin.

Vektorlar algebrasida vektorga berilgan geometrik ta'rifni eslaylik: son qiymatlari bilan yo'nalishlari anik va parallelogramm qoidasiga muvofiq qo'shiluvchi miqdorlar vektorlar deb ataladi. Vektorni komplanar bo'lmagan vektorlar bo'yicha ajratish formulasi shu parallelogramm qoidasiga asoslangan edi. Vektor komponentlarini almashtirish formulalari (7) va (8) esa vektor bilan ortlarni ajratish formulalaridan kelib chiqqan natijadir. Demak, vektorga yaqqollik nuqtai nazaridan berilgan geometrik ta'rif o'rniga o'nga ekvivalent analitik ta'rif berish mumkin.

Dekart sistemasi S da uchta skalyar miqdor a_1, a_2, a_3 va boshqa Dekart sistemasi S' da uchta skalyar miqdor a_1, a_2, a_3 berilgan bo'lsin. Bazis vektorlarni yoki koordinatalarni almashtirish qonuniga bo'ysungan yuqoridagi uchta skalyar miqdor to'plami $\mathbf{a}$ vektorni aniqlaydi. Vektorni bunday anglashni vektorning analitik ta'rifini deyishimiz mumkin. SHunday qilib, (7) yoki (8) formulalar vektorning analitik ta'rifini ifodalaydi.

Tenzorlar tushunchasini kiritishda shu muloxazalar asosiy rol uynaydi.

$\mathbf{a}$ vektorning a_1, a_2, a_3 komponentlari skalyar miqdorlardir. Vektorning komponentlari, nuqtaning koordinatalari kabi, turli sistemalarda turlicha bo'ladi.

Jismning massasi, temperaturasi, energiyasi yoki vektorning moduli skalyar miqdorlardir, ammo ular koordinata sistemalariga bog'liq emas, hamma sistemada bir xildir. Umuman, son qiymati koordinata sistemalarining tanlanishiga bog'liq bo'lmagan, ya'ni koordinatalarning har qanday sistemasida son qiymati bir xil bo'lgan miqdor invariant deyiladi. Demak,

ta'rifga muvofik invariant— bu koordinatalarni almashtirishda, ya'ni koordinatalar sistemalarining biridan ikkinchisiga o'tilganda son qiymati o'zgarmasdan qoluvchi miqdordir. Jismning massasi, energiyasi, temperaturasi, vektor moduli — bularning hammasi invariantga misollardir. Koordinata sistemalarining biridan ikkinchisiga o'tganda yozilish shakli o'zgarmasdan qoluvchi matematik ifodalar invariant ifodalar (yoki kovariant ifodalar) deyiladi.

Masalan, koordinatalar kvadratlarining yig'indisini tekshirib kuraylik. (3) ga muvofiq bunday yozamiz:

$$\sum x'_i{}^2 = \sum x'_i x'_i = \sum (\sum \alpha_{ij} x_j) (\sum \alpha_{ik} x_k) = \sum \sum (\sum \alpha_{ij} \alpha_{kj}) x_j x_k = \sum x_j{}^2$$

ya'ni:

$$\sum x'_i{}^2 = \sum x_j{}^2$$

SHunday qilib, koordinatalar kvadratlarining yig'indisi ortogonal almashtirishga nisbatan invariant ifodadir.

Ikki **a**, **b** vektorning skalyar ko'paytmasi hamma sistemada bir xildir, chunki ta'rifga muvofiq, ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ko'paytiriluvchi vektorlar modullarining shu vektorlar orasidagi burchak kosinusiga bo'lgan ko'paytmasiga tengdir.

Ikki **a**, **b** vektorni olaylik:

$$\mathbf{a} = \sum a_i \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{b} = \sum b_j \mathbf{e}_j$$

Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi bunday bo'ladi:

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\sum a_i \mathbf{e}_i \sum b_j \mathbf{e}_j) = \sum a_i b_i$$

Demak, ikki vektorning skalyar ko'paytmasi shu vektorlarning moye komponentlari ko'paytmalarining yig'indisidir. Vektor komponentlarini almashtirish formulasi (8) ga' binoan:

$$a_i = \sum \alpha_{ij} b'_j$$

bo'ladi. U vaktda:

$$\sum a_i b_i = \sum a'_j b'_j$$

kelib chiqadi.

Demak, ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ortogonal almashtirishlarga nisbatan invariantlik xususiyatiga egadir, ya'ni hamma Dekart sistemalarida bar xil matematik shaklda ifodalanadi.

$a =$ bo'lsa, $a_i = \sum_{j=1}^3 a'_{ij} b'_j$ bo'ladi, (10) formulaga binoan:

$$a^2 = \sum_{i=1}^3 a_i a_i = \sum_{j=1}^3 a'_j a'_j \quad (11)$$

yoki, baribir:

$$a^2 = \sum_{i=1}^3 a_i^2 = \sum_{j=1}^3 a_j'^2, \quad (12)$$

ya'ni vektor komponentlari kvadratlarining yig'indisi invariantdir. Masalan, biror nuqtaning ikkinchi nuqtaga nisbatan radius-vektori:

$$\Delta \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i \mathbf{e}_i$$

bo'lsa, nuqtalar orasidagi s masofa kvadrati uchun bunday yozishimiz mumkin:

$$s^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i \Delta x_i = \sum_{j=1}^3 \Delta x'_j \Delta x'_j \quad (13)$$

yoki, baribir:

$$s^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2 = \sum_{j=1}^3 \Delta x_j'^2. \quad (14)$$

SHunday qilib, ikka nuqta orasidagi masofa kvadrati ifodasi ortogonal almashtirishlarga nisbatan invariantlik xususiyatiga ega. Aksincha, masofa kvadrati ifodasining invariantligidan ortogonallik shartini keltirib chitsarish mumkin. Xaqiqatan, (7) ga muvofiq, vektor komponentlarini almashtirish

formulasi:

$$\Delta x'_j = \sum_{k=1}^3 a_{jk} \Delta x_k$$

dan foydalanib, masofa kvadrati uchun bunday yozamiz:

$$s^2 = \sum_{j=1}^3 \Delta x_j' \Delta x_j' = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 a_{jk} \Delta x_k \right) \left(\sum_{i=1}^3 a_{ji} \Delta x_i \right) = \\ = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 a_{jk} a_{ji} \right) \Delta x_k \Delta x_i.$$

Ammo, shu bilan birga, masofa kvadratining invariant bo'lganligidan:

$$s^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i \Delta x_i$$

bo'ladi. Demak:

$$\sum_{i=1}^3 \Delta x_i \Delta x_i = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 a_{jk} a_{ji} \right) \Delta x_k \Delta x_i.$$

Bu yerdan:

$$\sum_{j=1}^3 a_{jk} a_{ji} = \delta_{ki}, *$$

ya'ni ilgari ma'lum bo'lgan ortogonallik sharti (15) kelib chiqadi.

11. TENZOR TUSHUNCHASI

Reja:

1. Tenzor tushunchasi
2. Tenzorni ifodalovchi asosiy tushunchalar
3. Kroneker belgisi
4. Tenzorga misollar

Avvalgi paragraflarda yig'indi olish amali bilan bog'langan (2), (3), (4) formulalar yoki (9) ni keltirib chiqarishlagi formulalarga diqqat qiladigan bo'lsak, shunday narsa ko'zga tashlanadi: yig'indi olinayotgan indeks ikki marta uchraydi va uni xohlagan harf bilan ishoralash mumkin. Tenzorlar nazariyasida yig'indi olish amalini yozishda mana bunday usul qabul qilingan: biror indeks bo'yicha yig'indi olinganda bu indeks ikki marta yozilib, yig'indi belgisi yozilmaydi. SHu aytilganlar nazarda tutilsa, (2), (16), (3), (4), (7), (8), (14), (15) formulalar xipcha shaklda yozilishi mumkin:

$$\begin{aligned}
e'_i &= \alpha_{ik} e_k \\
e'_m &= \alpha_{nm} e'_n \\
x'_i &= \alpha_{ik} x_k \\
x'_m &= \alpha_{nm} x'_n \\
a'_i &= \alpha_{ik} a_k \\
a'_m &= \alpha_{nm} a'_n \\
\alpha_{ik} \alpha_{jk} &= \delta_{ij} \\
\alpha_{li} \alpha_{ij} &= \delta_{lj} \quad (8)
\end{aligned}$$

Yig'ish indeksi (1) da k bilan, (2) da n bilan yoki (8) da i bilan ko'rsatilgan. Yig'ish indeksi qaysi harf bilan ko'rsatilmasin, tekshirilayotgan matematik ifodaning ma'nosi o'zgarmasdan qolaveradi. Masalan, (5) ni yozishda yig'ish indeksi k o'rniga m,n,l,s,p yoki yana boshqa xil harflarni ishlatishimiz mumkin:

$$\begin{aligned}
a'_i &= \alpha_{il} a_l, \quad b'_j = \alpha_{jm} b_m, \quad c'_k = \alpha_{kn} c_n. \\
a'_i b'_j c'_k &= \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} a_l b_m c_n. \\
a'_i b'_j &= \alpha_{il} \alpha_{jm} a_l b_m. \\
a'_i &= \alpha_{ik} a_k = \alpha_{ij} a_j = \alpha_{im} a_m = \alpha_{is} a_s = \alpha_{ip} a_p.
\end{aligned}$$

YUqoridagi misollarimizdan shunisi ham ravshanki, yig'indi olish amaliga daxlsiz bo'lgan indeks yoki indekslar tenglikning ikkala tomonida o'zgarmasdan saqlanadi. Formulalarda ishtirok qiluvchi indekslarning qar biri yo 1 ga yo 2 ga yoki 3 ga teng bo'lishi mumkin.

Vektorning analitik ta'rifini ifodalovchi (5) formulada yoki (6) formulada yig'indi hadlarining har birida uchraydigan vektor komponenti birinchi darajadagina ishtirok tsiladi. Demak, vektor komponentlarini almashtirish formulasi vektor komponentlariga nisbatan bir jinsli va chiziqlidir. SHuning uchun, biror Dekart sistemasida nolga teng bo'lgan vektor boshqa Dekart sistemasida ham nolga teng bo'ladi.

Tenzorlarni ta'riflashda vektor komponentlarini almashtirish formulasi asos qilib olinadi.

Quyidagi uchta vektor berilgan bo'lsin:

Birinchi va ikkinchi vektor komponentlarining ikkitalab olingan ko'paytmasini yozaylik:

CHap tomondagi ab ko'paytmalarning umumiy soni $Z^2 = 9$ dir. O'ng tomondagi a'b' ko'paytmalarning umumiy soni ham $Z^2 = 9$. Endi uchta vektor komponentlarining uchta olingan ko'paytmasini yozaylik:

CHap tomondagi abc ko'paytmalarning umumiy soni $3^3 = 27$, o'ng tomondagi a'b'c' ko'paytmalarning umumiy soni ham $3^3 = 27$ dir.

So'nggi formulalarning muhim tomoni shundan iboratki, vektor komponentlarining ko'paytmalari aniq almashtirish qonunlariga bo'ysunadi. Bu almashtirish formulalari komponentlarning ko'paytmalariga nisbatan chiziqli va bir jinsli dir.

Tenzor deb ataluvchi miqdor ham o'ziga xos almashtirish qonunlariga ega.

Ikki Dekart sistemasining birida $Z^2 = 9$ ta T'_{ij} miqdor to'plami, ikkinchisida esa $Z^2 = 9$ ta boshqa T'_{ij} miqdor to'plami berilib, bu ikki to'plam miqdorlari ushbu almashtirish qonuniga bo'ysunsin deb faraz qilaylik.

$$T'_{ij} = \alpha_{il} \alpha_{jm} T_{lm}. \quad (9)$$

SHu almashtirish qonuniga buyso'ngan $Z^2 = 9$ ta miqdor to'plami ikkinchi rangli (ikkinchi tartibli) tenzor deyiladi.

Endi ikki Dekart sistemasining biridagi $Z^3 = 27$ ta T_{ijk} miqdor to'plami bilan ikkinchisidagi $Z^3 = 27$ ta boshqa T_{lmn} miqdor to'plami quyidagi almashtirish qonuniga bo'ysunsin:

$$T'_{ijk} = \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} T_{lmn}. \quad (10)$$

Almashtirish qonuni shu formulada ifodalangan $Z^3 = 27$ ta miqdor to'plami uchinchi rangli (uchinchi tartibli) tenzor deyiladi. SHuning singari davom ettirib, yuqori rangli (yuqori tartibli) tenzorlar tushunchasini kiritish mumkin. Masalan, beshinchi rangli (beshinchi tartibli) tenzor uchun bunday yozamiz:

$$T'_{ijklm} = a_{ip} a_{jq} a_{kr} a_{ls} a_{mt} T_{pqrst}. \quad (11)$$

Koordinatalarning ma'lum sistemasida tenzorni tashkil qiluvchi to'plam miqdorlari tenzorning shu sistema dagi komponentlari deyiladi. Tensor indekslarining soni tenzorning rangini (tenzorning tartibini) ko'rsatadi. Tensor komponentlarining soni N albatta Z^1 ga tengdir:

$$N = 3^5. \quad (12)$$

Ba'zi avtorlar tenzorning rangini tenzorning valentligi va tenzorning komponentlarini tenzorning koordinatalari deb atashadi.

Tensor komponentlarini almashtirish, formulalari, tensor komponentlariga nisbatan chiziqli va bir jinslidir. Demak, tensor komponentlari biror sistemada nolga teng ekan, har qanday sistemada ham bu komponentlar nolga teng bo'ladi.

Tensor komponentlarini almashtirish formulalarida almashtirish koeffitsiyentlari a_{tp} ning qanday ishtirok kilishi diqqatga sazovordir: tensor komponentlarini almashtirish formulalaridagi har bir hadda ko'paytma hosil qiluvchi almashtirish koeffitsiyentlarining umumiy soni tensor rangiga teng, masalan, (11) da 5 ga, (10) da 3 ga, (9) da 2 ga tengdir. Vektor komponentlarini almashtirish formulasida esa almashtirish koeffitsiyentlari faqat birinchi darajadagina ishtirok qiladi. Demak, vektor tenzorning xususiy xolidir: vektor—birinchi rangli tenzordir.

Invariantni xam tenzorning xususiy holi deb qarash mumkin. Xaqiqatan ham har qanday sistemada birday bo'lib qoladigan, ya'ni oordinatalar almashtirilganda o'zgarmasdan saqanadigan miqdorning invariant deyilishini bilamiz. Demak, ta'rifga muvofik:

$$I' = I \quad (13)$$

bo'ladi. Invariantni almashtirish formulasida almashtirish koeffitsiyentlari hech ishtirok qilmaydi. SHunday kilib, invariant—indekssiz tensor, ya'ni nol

rangli tenzor bo'lib, birgina komponentga ega, chunki bu yerda $x=0$ ekanligi sababli, (12) ga muvofiq:

$$\alpha_{im} \alpha_{jn} \delta_{mn} = \delta'_{ij}$$

$$\delta'_{ij} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \delta_{mn},$$

$$N = 3^0 = 1$$

bo'ladi.

Bizga ma'lum Kroneker simvoli δ_{tp} (6) hamma sistemada bir xil sonlarni, ya'ni koordinatalarni almashtirishda o'zgarmasdan saqlanib qoluvchi sonlarni ifodalashiga qaramasdan, aslida u ikkinchi rangli tenzordir. Haqiqatan ham ikkinchi rangli tenzorni ifodalovchi formula (9) ning o'ng tomoni (6) ga muvofiq:

$$\text{bo'ladi. } \alpha_{im} \alpha_{jn} \delta_{mn} = \alpha_{im} \alpha_{jm}$$

Bu yerda almashtirish koeffitsiyentlarining birinchi indeksleri shtrixlangan (yangi) sistemaga daxlli ekanligini eslasak, u vaqtda ortogonallik sharti (14) ga ko'ra, so'nggi tenglamaning o'ng tomoni δ_{iu} bo'ladi, demak:

ya'ni Kroneker simvoli ikkinchi rangli tenzordir. Turli indeksli komponentlari nolga teng va bir xil indeksli komponentlari birga teng bo'lgan tenzor birlik tenzor deyiladi. Birlik tenzorni matritsa shaklida yozish mumkin:

$$\|\delta_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

SHunday qilib, Kronekerning δ_{ik} simvoli birlik tenzordir.

Matritsa shaklida, masalan, ikkinchi rangli tenzorni tubandagicha yozamiz:

$$\|T_{ik}\| = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Ikkinchi rangli tenzorlarga misol qilib, qattiq jism inertsia momentlarining tenzori I_{ik} elastik jism kuchlanishlar tenzori P_{ik} , elastik jism deformatsiya

tenzori U_{jk} , jismlarning elektromagnit xususiyatlarini ifodalovchi dielektrik koeffitsiyentlar (dielektrik konstantalar) tenzori, magnit koeffitsiyentlari tenzori elektr o'tkazuvchanlik koeffitsiyentlari tenzori kabilarni ko'rsatib o'tish mumkin.

12. TENZORLAR BILAN BAJARILADIGAN ASOSIY ALGEBRAIK AMALLAR

Reja:

1. Tenzorlarni qo'shish
2. Tenzorlarni ayirish
3. Tenzorlarni kopaytirish

Tenzorlarni qo'shish masalasidan boshlaylik. Uchinchi rangli ikkita tenzor berilgan bo'lsin:

(1)

$$\begin{aligned} A'_{ijk} &= \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} A_{lmn}, \\ B'_{ijk} &= \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} B_{lmn}. \end{aligned} \quad (2)$$

Bu tenzorlarning mos komponentlarini qo'shaylik:

$$\begin{aligned} A'_{ijk} + B'_{ijk} &= \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} A_{lmn} + \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} B_{lmn} = \\ &= \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} (A_{lmn} + B_{lmn}). \end{aligned} \quad (3)$$

A_{ijk} ni B_{ijk} S_{ijk} orqali belgilasak:

$$A_{lmn} + B_{lmn} = C_{lmn} \quad (4)$$

bo'ladi, u vaqtda:

$$C'_{ijk} = \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} C_{lmn}. \quad (5)$$

Bu formula uchinchi rangli tenzor komponentlarini almashtirish qonunini ifodalaydi.

(4) ga muvofiq hosil qilingan C_{lmn} tenzor A_{lmn} , B_{lmn} tenzorlarning yig'indisi deyiladi. Albatta, bir xil rangli tenzorlarnigina qo'shish mumkin, natijada o'sha rangli tenzor hosil bo'ladi.

SHuningdek, bir xil rangli ikki tenzor ayirmasi ham o'sha rangli tenzor bo'ladi. Masalan, yuqoridagi uchinchi rangli tenzorlar uchun:

$$A_{lmn} - B_{lmn} = D_{lmn} \quad (6)$$

bo'ladi. Tenzorlarni ko'paytirish masalasiga o'tamiz. (1) da ifodalangan uchinchi rangli tenzorni biror I invariantga ko'paytiraylik:

$$IA'_{ijk} = I\alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn} A_{lmn} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn} IA_{lmn}. \quad (7)$$

IA_{lmn} ni T_{lmn} orqali belgilasak:

$$IA_{lmn} = T_{lmn} \quad (8)$$

bo'ladi, nihoyat:

$$T'_{ijk} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn} T_{lmn}. \quad (9)$$

Natijada yana o'sha rangli, tenzor hosil bo'ldi. T_{lmn} tenzor I invariant bilan A_{lmn} tenzorning ko'paytmasi deyiladi. Invariantni tenzorga ko'paytirish tenzorning rangini o'zgartirmaydi.

Ikkinchi rangli biror tenzor berilgan bo'lsin:

$$D'_{pq} = \alpha_{pr}\alpha_{qs} D_{rs}. \quad (10)$$

Uchinchi rangli tenzor va ikkinchi rangli tenzor komponentlarining ko'paytmalarini yozaylik:

$$\begin{aligned} B'_{ijk} D'_{pq} &= \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn} B_{lmn} \alpha_{pr}\alpha_{qs} D_{rs} = \\ &= \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}\alpha_{pr}\alpha_{qs} B_{lmn} D_{rs}. \end{aligned} \quad (11)$$

$B_{lmn}D_{rs}$ ni E_{lmnrs} orqali belgilasak:

$$B_{lmn} D_{rs} = E_{lmnrs} \quad (12)$$

bo'ladi, demak:

$$E'_{ijkpq} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}\alpha_{pr}\alpha_{qs} E_{lmnrs}, \quad (13)$$

ya'ni beshinchi rangli tenzor hosil bo'ldi. (12) ga muvofiq: hosil qilingan E_{lmnrs} tenzor berilgan V_{lmn} , D_{rs} tenzorlarning ko'paytmasi deyiladi. Bizning misolimizda uchinchi rangli tenzor bilan ikkinchi rangli tenzor ko'paytmasi beshinchi rangli tenzor bo'ladi. SHuning singari, birinchi rangli ikki tenzor ko'paytmasi, ya'ni ikki vektor ko'paytmasi ikkinchi rangli tenzor bo'ladi,

ikkinchi rangli tenzor bilan birinchi rangli tenzor ko'paytmasi uchinchi rangli tenzor bo'ladi va hokazo. Ikki tenzor ko'paytmasi tenzor bo'lib, uning rangi ko'paytiriluvsh tenzorlar ranglarining yig'indisiga teng. Demak, tenzorlarni bir-biriga ko'paytirish natijasida yuqori rangli tenzor vujudga keladi.

Vektorlar komponentlarining ko'paytmalari tegishli rangli tenzorlarni hosil qiladi. Masalan:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= a_i b_j, \\ T_{ijk} &= a_i c_k b_j. \end{aligned} \quad (14)$$

Komponentlari tegishli vektorlar komponentlarining ko'paytmalaridan tashkil topgan tenzor multiplikativ tenzor deyiladi. Ikkinchi rangli multiplikativ tenzor, ya'ni ikki vektor komponentlarining ikkitalab olingan ko'paytmalari (14) diada deb ataladi.

Tenzorlarni ko'paytirish tartibi o'zgarsa, natija umuman o'zgaradi. Masalan:

(15)

$$\begin{aligned} A_{ijk} B_{lm} &= C_{ijklm}, \\ B_{ij} A_{klm} &= D_{ijklm}. \end{aligned} \quad (16)$$

Bu ikki tenzor komponentlari to'plami bir xil bo'lsa-da, bir xil joylarda bir xil indekslar bilan yozib ko'rsatilgan komponentlar farq qiladi. Demak, tenzorlar ko'paytmasi, umuman aytganda, kommutativlik xususiyatiga ega emas. Endi sodda bir misol kurib utaylik.

Kroneker tenzori δ_{ik} ni I invariantga ko'paytirsak, ikkinchi. rangli tenzor hosil bo'ladi:

$$A_{ik} = I \delta_{ik}. \quad (17)$$

Bu tenzorni ikkinchi rangli boshqa tenzorga qo'shsak yoki undan ayirsak, ikkinchi rangli yangi S va D tenzorlar hosil qilamiz:

(18)

$$\begin{aligned} C_{ik} &= B_{ik} + I \delta_{ik}, \\ D_{ik} &= B_{ik} - I \delta_{ik}. \end{aligned} \quad (19)$$

Bu formulalar tez-tez uchrab turadi.

13. TENZORLAR SIMMETRIYASI VA ANTISIMMETRIYASI

Reja:

1. Tenzorlar simmetriyasi
2. Tenzorlar antisimmetriyasi
3. Tenzorlarni yig'ishtirish
4. Tenzordan invariant tuzish.

Tenzor indekslarining o'rinlarini almashtirish natijasida yana tenzor hosil bo'ladi. Masalan, A_{ijk} tenzordan uning j indeksi bilan k indeksi o'rinlarini almashtirish natijasida vujudga kelgan miqdorlarni V_{ikj} orqali belgilaylik:

$$B_{ikj} = A_{ijk}.$$

SHu V_{ikj} miqdorlar tenzor komponentlaridir. Haqiqatan:

$$\begin{aligned} B'_{ikj} &= A'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} A_{lmn} = a_{il} a_{jm} a_{kn} B_{lnm} = \\ &= a_{il} a_{kn} a_{jm} B_{lnm} \end{aligned} \quad \text{bo'ladi.}$$

Tenzor indekslaridan ikkitasining o'rnini almashtirish amali tenzorni transpozitsiyalash deyiladi. Transpozitsiyalash yo'li bilan hosil qilingan tenzor transpozitsiyalangan tenzor deyiladi.

Masalan, ikkinchi rangli tenzor: $\|A_{ik}\| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$ bo'lsa, bunga

nisbatan transpozitsiyalangan tenzor: bo'ladi. $\|B_{ik}\| = \|A_{ki}\| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$

Indeksalaridan. ikkitasining o'rnini almashtirish natijasida mos komponentlarining son qiymatlari va ishoralari o'zgarmaydigan tenzor shu ikki indeksga nisbatan simmetrik tenzor deyiladi. Masalan, uchinchi rangli tenzor j, k indekslarga nisbatan simmetrik ekan:

bo'ladi. $T_{ijk} = T_{ikj}$

Ikkinchi rangli simmetrik S_{ij} - tenzor uchun:

$$S_{ij} = S_{ji}. \quad (1)$$

Tenzorning simmetrikligi invariantlik xususiyatiga ega: biror koordinatalar sistemasida simmetrik bo'lgan tenzor, har qanday boshqa sistemada ham simmetrik tenzor bo'ladi. Haqiqatan, tenzor ta'rifiga va (1) ga binoan:

$$F_{ijk} = -F_{jik}$$

$$S'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} S_{kl} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} S_{lk} = \alpha_{jl} \alpha_{ik} S_{lk} = S'_{ji}$$

bo'ladi.

Ikkinchi rangli simmetrik tenzorning hammasi bo'lib to'qqizta komponenti bor. Ammo bulardan uchtasi (1) ga asosan mos olingan boshqa uchtasiga teng bo'lishi kerak. SHunday qilib, ikkinchi rangli simmetrik tenzorning o'zaro bog'lanmagan komponentlari faqat oltitadir.

Indeksalaridan ikkitasining o'rni almashtirilganda komponentlarining son qiymatlari saqlanib, faqat ishoralarigina teskariga o'zgaradigan tenzor shu ikki indeksga nisbatan antisimmetrik tenzor deyiladi. Masalan, uchinchi rangli A tenzor birinchi va ikkinchi indekslariga nisbatan antisimmetrik ekan: bo'ladi. Ikkinchi rangli antisimmetrik tenzor A_{ij} uchun:

$$A_{ij} = -A_{ji} \quad (2)$$

bo'ladi.

Tenzor antisimetriyasi ham yuqoridagi ma'noda invariantlik xususiyatiga ega. Biror koordinatalar sistemasi da antisimmetrik bo'lgan tenzor har qanday boshqa koordinatalar sistemasida ham antisimmetrik tenzor bo'lib qoladi. Haqiqatan:

$$A'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} A_{kl} = -\alpha_{ik} \alpha_{jl} A_{lk} = -\alpha_{jl} \alpha_{ik} A_{lk} = -A'_{ji}.$$

Antisimmetrik tenzorning bir xil indeksli komponentlari nolga teng.

Haqiqatan:

$$A_{11} = -A_{11}, A_{22} = -A_{22}, A_{33} = -A_{33},$$

demak:

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0.$$

Qolgan oltita komponentning uchasi boshqa uchtasidan o'zi ning ishorasi bilan farq qiladi, xolos. SHunday kilib, ikkinchi rangli antisimmetrik tenzorning o'zaro bog'lanmagan komponentlari faqat uchtaginadir.

YAqqollik uchun bu antisimmetrik tenzorni matritsa shaklida ifodalaylik:

$$\|A_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{vmatrix} \quad (3)$$

Bir misolni ko'rib chiqaylik. Ikkinchi rangli multiplikativ tenzor berilgan bo'lsin:

$$T_{ij} = a_i b_j. \quad (4)$$

Endi bunday tenzor tashkil qilaylik:

$$S_{ij} = a_i b_j + a_j b_i. \quad (5)$$

Bundan: $S_{ij} = S_{ji}$

bo'ladi, ya'ni yangi S_{ij} tenzor simmetrik tenzordir.

Endi berilgan tenzordan quyidagicha ifodalangan tenzor tashkil qilaylik:

$$A_{ij} = a_i b_j - a_j b_i. \quad (6)$$

Bundan: $A_{ij} = -A_{ji}$

bo'ladi, ya'ni yangi A_{ij} tenzor antisimmetrikdir. Uning o'zaro bog'lanmagan uchta komponenti quyidagilardir:

$$\left. \begin{aligned} A_{12} &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ A_{23} &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ A_{31} &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Bu komponentlar esa ikki vektorning vektor ko'paytmasi komponentlaridir. SHunday qilib, ikkinchi rangli antisimmetrik A_{ij} tenzorni uch o'lchovli fazoda ikki vektorning vektor ko'paytnasi deb qarash mumkin.

Simmetrik yoki antisimmetrik bo'lmagan tenzor odatda asimmetrik tenzor deyiladi. Lekin ikkinchi rangli har qanday tenzordan simmetrik tenzor hosil qilish mumkin. Haqiqatan, berilgan ikkinchi rangli ixtiyoriy T_{ij} tenzordan ikkinchi rangli yangi S_{ij} tenzor tuzaylik:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}). \quad (8)$$

Indekslarning o'rinlarini almashtirib yozaylik:

$$S_{ji} = \frac{1}{2} (T_{ji} + T_{ij}).$$

So'nggi ikki formuladan: $S_{ij} = S_{ji}$

bo'ladi. Endi o'sha tenzor T_{ij} dan yana ikkinchi rangli boshqa A_{ij} tenzor tuzaylik:

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}). \quad (9)$$

Indekslarning o'rinlari almashtirilsa:

$$A_{ji} = \frac{1}{2} (T_{ji} - T_{ij})$$

bo'ladi. Avvalgi va so'nggi formulalardan quyidagini topamiz: $A_{ij} = -A_{ji}$.

Demak, ikkinchi rangli har qanday tenzordan antisimmetrik tenzor ham hosil qilish mumkin. (8) va (9) ga muvofiq, simmetrik S_{ij} tenzor bilan antisimmetrik A_{ij} tenzorning yig'indisi berilgan T_{ij} tenzorning o'ziga teng:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}. \quad (10)$$

SHunday qilib, ikkinchi rangli har qanday tenzorni simmetrik va antisimmetrik qismlarga ajratish mumkin.

Ikkitadan ko'proq indeksarga nisbatan tenzorning simmetriyasi yoki antisimmetriyasi haqida gapirish mumkin.

Tayin indeksleri to'plamining har qanday ikkitasiga nisbatan simmetrik bo'lgan tenzor shu indekslar to'plamiga nisbatan simmetrik tenzor deyiladi.

Masalan, to'rtinchi rangli T_{pqrs} tenzor birinchi uchta indeksiga nisbatan simmetrik tenzor bo'lsin, u vaqtda:

$$T_{pqrs} = T_{qrp s} = T_{rpq s} = T_{qpr s} = T_{prq s} = T_{rqp s}$$

bo'ladi.

Tenzor simmetriyasi uning hamma indeksleri to'plamiga nisbatan ham mavjud bo'lishi mumkin, bunday hususiyatga ega tenzor butunlay simmetrik tenzor deb yuritiladi.

Tayin indeksleri to'plamining har qanday ikkitasiga nisbatan antisimmetrik bo'lgan tenzor shu indekslar to'plamiga nisbatan antisimmetrik tenzor deyiladi.

Misol uchun beshinchi rangli D_{pqrst} tenzor oxirgi uchta indeksiga nisbatan antisimmetrik bo'lsa, bunday yozishimiz mumkin:

$$T_{pqrst} = -T_{pqsr t} = T_{pqstr} = -T_{pqtsr} = T_{pqtrs} = -T_{pqrts}.$$

Hamma indeksleri to'plamiga nisbatan antisimmetrik bo'lgan tenzor butunlay antisimmetrik tenzor deyiladi. Indeksleri $i_1, i_2, \dots, i_p$ bo'lgan butunlay antisimmetrik tenzor ba'zan r -vektor yoki polivektor deyiladi. $r = 0$, $r = 1$ nollarning birinchisida polivektor skalyar, ikkinchisida esa vektor bo'ladi. $r = 2$ da polivektor bivektor deyilib, ikkinchi rangli antisimmetrik tenzorni beradi.

Uch o'lchovli fazoda butunlay antisimmetrik tenzor indekslarining soni uchtdan oshiq bo'lmaydi. Haqiqatan, uch o'lchovli fazoda indekslarning har biri yo 1 ga, yoki 2 ga, yoxud 3 ga tengdir. Indeksar soni uchtdan oshiq bo'lsa, u vaqtda tenzor komponentlarining har birida 1, 2, 3 ning har biri kamida ikki martadan uchrar edi. Lekin antisimmetrik tenzorning bir xil indeksli komponentlari nolga teng. SHunday qilib, uch o'lchovli fazoda butunlay antisimmetrik tenzor faqat uchinchi rangli bo'ladi. Uchinchi rangli polivektor, odatda, trivektor deb ataladi.

n o'lchovli fazoda har bir indeksning 1 ga, 2 ga, 3 ga va hokazo n ga tengligini nazarda tutib, yukoridagi mulohazalar mos ravishda takrorlansa, n o'lchovli fazoda butunlay antisimmetrik tenzor indeksleri sonining n dan kam bo'lishi yoki ko'pi bilan n ga teng bo'lishi o'z-o'zidan ayondir.

Yukori rangli tenzordan tayin indeksleri to'plamiga nisbatan simmetrik tenzor va antisimmetrik tenzor tuzish mumkin.

Berilgan $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$ tenzor indekslarining soni N bo'lsin. Indeksning t tasiga nisbatan ($t < N$) simmetrik bo'lgan tenzor tuzaylik, uning uchun shu indekslardan $t = 1, 2, 3, \dots, t$ o'rin almashtirishlar hosil qilib, ularga mos tenzor komponentlaridan o'rtacha arifmetik qiymat olamiz, ya'ni mos tenzor komponentlari yig'indisini t ga bo'lamiz. Berilgan tenzordan mana shunday usul bilan uning tayin indeksleri to'plamiga nisbatan simmetrik tenzor hosil qilish amali berilgan tenzorni o'sha indekslar to'plamiga nisbatan simmetriyalash deyiladi. Masalan, T_{ijklq} tenzordan uning birinchi va uchinchi indekslariga nisbatan (demak, $t=2$) simmetrik tenzor tuzaylik:

$$S_{ijklq} = \frac{1}{2} (T_{ijklq} + T_{kjlq}).$$

SHu T_{ijklq} tenzordan so'nggi uchta indeksiga nisbatan (demak, $t = 3$) tuzilgan simmetrik tenzor esa:

$$S_{ijklq} = \frac{1}{6} (T_{ijklq} + T_{ijlqk} + T_{ijqkl} + T_{ijlkq} + T_{ijkql} + T_{ijqk})$$

bo'ladi.

Simmetriyalash natijasini belgilash uchun simmetriyalashda ishtirok qiluvchi indekslar kichik qavslarga olib yoziladi. Masalan, so'nggi formulamizda:

$$S_{ijklq} = T_{ij(klq)}.$$

Simmetriyalash haqida yuqorida aytilganlardan ravshanki, tayin indekslariga nisbatan simmetrik bo'lgan tenzorni bu indekslarga nisbatan simmetriyalash natijasi berilgan shu simmetrik tenzorning o'ziga aynan tengdir.

Endi berilgan $T_{i_1 \dots i_n}$ tenzordan uning m ta indeksiga nisbatan antisimmetrik bo'lgan tenzor tuzaylik. Buning uchun shu indekslardan $1.2.3 \dots m$ o'rin almashtirishlar hosil qilamiz. Berilgan tenzorning juft o'rin almashtirishlarga mos kelgan komponentlarini o'z ishoralari bilan qoldirib, toq o'rin almashtirishlarga mos komponentlarining ishoralarini qarama-qarshisiga o'zgartiramiz-da, so'ngra ulardan o'rtacha arifmetik qiymat olamiz. SHu usul vositasida, berilgan tenzordan uning tayin indeksleri to'plamiga nisbatan antisimmetrik tenzor hosil qilish amali berilgan tenzorni o'sha indekslar to'plamiga nisbatan alternatsiyalash deyiladi.

Masalan, berilgan T tenzordan uning ikkinchi va uchinchi indekslariga nisbatan (demak, $m=2$) antisimmetrik tenzor tuzaylik: $A_{ijklq} = \frac{1}{2} (T_{ijklq} - T_{ikjlq})$.

Endi o'sha tenzordan birinchi uchta indeksga nisbatan (demak, $t. = 6$) antisimmetrik tenzor tuzaylik:

$$A_{ijklq} = \frac{1}{6} (T_{ijklq} + T_{jkilq} + T_{kijlq} - T_{jiklq} - T_{ikjlq} - T_{kjlq}).$$

Alternatsiyalash natijasini shu alternatsiyalashda ishtirok qiluvchi indekslarni kvadrat qavslarga olib ko'rsatiladi. Oldingi uchta indeks bo'yicha alternatsiyalash misolini mana bunday yozib ko'rsatishimiz mumkin:

$$A_{ijklq} = T_{[ijkl]q}.$$

Tayin indekslariga nisbatan antisimmetrik bo'lgan tenzorni bu indekslarga nisbatan alternatsiyalash natijasida shu antisimmetrik tenzorning o'zi hosil bo'ladi.

Tenzorlarni bir-biriga ko'paytirib, yana yuqori rangli tenzor hosil qilishni yuqorida ko'rgan edik. Endi tenzorning rangini kamaytirish mumkinligini tekshirib ko'raylik. Masalan, uchinchi rangli tenzor berilgan bo'lsin:

$$T'_{ijk} = \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} T_{lmn}. \quad (1)$$

Ikkinchi va uchinchi indekslarni bir xil deb hisoblab, shu bir xil indekslar bo'yicha tenzor komponentlarining yig'indisini olaylik:

$$T'_{ijj} = \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{jn} T_{lmn}.$$

Ortogonallik sharti (8) ga muvofik:

bo'ladi, demak: $\alpha_{jm} \alpha_{jn} = \delta_{mn}$

$$T'_{ijj} = \alpha_{il} \delta_{mn} T_{lmn} = \alpha_{il} T_{lmm}$$

yoki

$$T'_{ijj} = \alpha_{il} T_{lmm}. \quad (2)$$

Natijada uchinchi rangli tenzordan birinchi rangli yangi tenzor hosil bo'ldi, ya'ni tenzorning rangi ikkitaga kamaydi.

Yana bir misol sifatida, to'rtinchi rangli tenzor olib tekshiraylik:

$$T'_{ijkl} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq} T_{mnpq}. \quad (3)$$

Birinchi va to'rtinchi indeksnlarni bir xil deb hisoblab tenzorning mos komponentlari yig'indisini topaylik:

$$T'_{ijki} = \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{iq} T_{mnpq} = \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{im} \alpha_{iq} T_{mnpq}.$$

YUkorida eslatib o'tilgan ortogonallik shartidan foydalansak:

$$\text{yoki } T'_{ijki} = \alpha_{jn} \alpha_{kp} \delta_{mq} T_{mnpq} = \alpha_{jn} \alpha_{kp} T_{mnpn}$$

$$T'_{ijki} = \alpha_{jn} \alpha_{kp} T_{mnpn} \quad (4)$$

bo'ladi.

To'rtinchi rangli tenzordan ikkinchi rangli tenzor hosil qilindi, ya'ni tenzor rangi ikkitaga kamaydi. Endi ikkinchi va uchinchi indeksni bir xil deb hisoblab, bu yangi tenzorning mos komponentlarini yig'ib chiqaylik:

$$T'_{ijji} = \alpha_{jn} \alpha_{jp} T_{mnpn}$$

Yana o'sha ortogonallik shartiga muvofiq:

$$T'_{ijji} = \delta_{np} T_{mnpn} = T_{mppn}$$

yoki

$$T'_{ijji} = T_{mppn} \quad (5)$$

bo'ladi.

Yangi tenzorning rangi ham ikkitaga kamayib, nihoyat nol rangli tenzor, ya'ni invariant vujudga keldi.

Bir xil bo'lgan ikkita indeks bo'yicha yig'indi olish bilan tenzorning rangini kamaytirish amali tenzorni yig'ishtirish (yoki, soddalashtirish) deyiladi. Ikkita indeks bo'yicha yig'ishtirishda tenzor rangi ikkitaga kamayadi. Demak, juft rangli tenzorni yig'ishtira borib, nihoyat invariant topamiz, toq rangli tenzorni yig'ishtira borib, nihoyat birinchi rangli tenzor, ya'ni vektor topamiz. Yig'ishtirish indeksini har qanday harf bilan yozib ko'rsatishimiz mumkin.

Ko'paytirish amali bilan yig'ishtirish amalini ma'lum ravishda bog'lay ishlatish mumkin. Ikki tenzor ko'paytmasi bo'lgan yuqori rangli tenzorga yig'ishtirish amali ishlatilsa, tenzor rangi kamayadi.

Masalan, birinchi rangli ikki tenzor berilgan bo'lsin:

$$a'_i = \alpha_{ij} a_j, \quad b'_m = \alpha_{mn} b_n$$

Bularning ko'paytmasi bo'lgan ikkinchi rangli tenzorni yig'ishtirsak, invariant hosil bo'ladi:

$$I = a'_i b'_i = a_i b_i. (6)$$

Bu esa ikki vektorning skalyar ko'paytmasidir. SHuning uchun (6) da ifodalangan I invariant birinchi rangli a_j va b_j tenzorlarning skalyar ko'paytmasi deyiladi.

Endi ikkinchi rangli T_{ij} tenzor bilan birinchi rangli A_k tenzor ko'paytmasi bo'lgan uchinchi rangli S_{ijk} tenzorni olaylik:

$$C_{ijk} = T_{ij} A_k.$$

Bu tenzorni j, k indekslar bo'yicha yig'ishtirsak, i indeksli vektor hosil bo'ladi:

$$C_{ijj} = T_{ij} A_j.$$

Hosil qilingan vektorni V_i bilan belgilaylik:

$$V_i = T_{ij} A_j. (7)$$

Bu yerdagi B_i vektor ikkinchi rangli T_{ij} tenzor bilan birinchi rangli A_j tenzorning skalyar ko'paytmasi deyiladi. , V_i vektorni A_j vektorning chiziqli vektor funktsiyasi deb ham aytiladi. Bir vektor komponentlarini ikkinchi vektor komponentlari orqali bir jinsli chiziqli funktsiya qilib ko'rsatuvchi ikkinchi rangli tenzor geometriyada, odatda, affinnor deyiladi. Demak, affinnor xususiy holda olingan ikkinchi rangli tenzordir.

Ikkinchi rangli $V_{ij}C_{kl}$ tenzorlarning ko'paytmasi bo'lgan to'rtinchi rangli D_{ijkl} tenzorni j va k indekslar bo'yicha yig'ishtirsak, ikkinchi rangli T_{il} tenzor hosil bo'ladi

$$\begin{aligned} D_{ijkl} &= B_{ij} C_{kl}, \\ T_{il} &= B_{ij} C_{jl}. \end{aligned} (8)$$

Bu formuladagi T_{il} tenzor berilgan B_{ij} tenzor bilan S_{kl} tenzorning skalyar ko'paytmasi deyiladi. Umuman, ikki tenzorning ko'paytmasini yig'ishtirish amali shu ikki tenzorning skalyar ko'paytmasi deyiladi.

YAngi tenzorlar tuzishda yoki tenzorni yig'ishtirishda Kronekerning birlik tenzoridan keng foydalaniladi.

Masalan, tubanda yozilganlar o'z-o'zidan ayon:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ij} A_j &= A_i, \\ \delta_{ij} A_{kj} &= A_{ki}, \\ \delta_{ij} A_{jk} &= A_{ik}, \\ \delta_{ij} A_{kjl} &= A_{kil}. \end{aligned} \right\} (9)$$

Tekshirilayotgan tenzor indeksini birlik tenzor yordami bilan ixtiyoriy tanlangan boshqa indeksga almashtirish mumkinligini ko'rmoqdamiz. Ana shundan foydalanib, ba'zi formulalarni kerakli ravishda yozib olish uchun tegishli vektor qavs tashqarisiga chiqarilsa bo'ladi:

$$A_{ij} B_j \pm B_i = A_{ij} B_j \pm \delta_{ij} B_j = (A_{ij} \pm \delta_{ij}) B_j.$$

Endi Kroneker tenzori yordami bilan teskari tenzor tushunchasini kiritaylik. Ikkinchi rangli shunday ikki A_{ij} , V_{jl} tenzor olamizki, ularning skalyar ko'paytmasi birlik tenzor hosil qilsin: $A_{ij} B_{jl} = \delta_{il}$.

Biror B_{ji} tenzorga skalyar ko'paytirganda birlik tenzor hosil qilgan A_{ij} tenzor shy V_{ji} tenzorga teskari tenzor deyiladi va B_{ji}^{-1} simvoli bilan belgilanadi:

$$B_{ij}^{-1} B_{jl} = \delta_{il}. (10)$$

Bu yerda tenzor o'zining teskarisiga chap tomondan ko'paytirilgan. Tenzor o'zining teskarisiga o'ng tomondan ko'paytirilsa ham birlik tenzor hosil bo'ladi:

$$B_{ij} B_{jl}^{-1} = \delta_{il}. (11)$$

Haqiqatan, (10) ni o'ng tomondan teskari V^{-1} tenzorga ko'paytiraylik:

$$B_{ij}^{-1} B_{jl} B_{lk}^{-1} = \delta_{il} B_{lk}^{-1} = B_{lk}^{-1}.$$

Endi buni teskari tenzorning teskari tenzori bo'lgan $(V^{-1})^{-1}$ ga chap tomondan ko'paytiraylik:

$$(B_{mi}^{-1})^{-1} B_{ij}^{-1} B_{jl} B_{lk}^{-1} = (B_{mi}^{-1})^{-1} B_{lk}^{-1}.$$

Bu yerdan, (10) ga muvofiq: $\delta_{mj} B_{jl} B_{lk}^{-1} = \delta_{mk}$ yoki

$$B_{ml} B_{lk}^{-1} = \delta_{mk}$$

bo'ladi.

B_{ij} tenzorning teskarisi bo'lgan B_{ij}^{-1} ga teskari $(B_{ij}^{-1})^{-1}$ tenzor avvalgi tenzorning o'zidir. Haqiqatan, teskari tenzor ta'rifiga muvofiq: $(B_{ij}^{-1})^{-1} B_{jl}^{-1} = \delta_{il}$, so'ngra (11) dan foydalansak:

$$(B_{ij}^{-1})^{-1} = B_{ij} \quad (12)$$

bo'ladi.

Tenzorga teskari tenzor komponentlarini shu tenzor komponentlari orqali aniqlash mumkin. Bu maqsadda tenzor bilan vektorning skalyar ko'paytmasini hosil qilaylik:

$$b_i = T_{ij} a_j. \quad (13)$$

Bu yerdan: yoki $T_{ki}^{-1} b_i = T_{ki}^{-1} T_{ij} a_j = \delta_{kj} a_j = a_k$

$$a_k = T_{ki}^{-1} b_i. \quad (14)$$

Tenzor komponentlaridan tuzilgan determinant:

$$|T_{ij}| = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \quad (15)$$

odatda, shu tenzorning diskriminanti deb yuritiladi. Teskari tenzorning T_{ik}^{-1} komponenta uchun oliy algebradan ma'lum bo'lgan Kramer formulasiga binoan tubandagini yozish mumkin:

$$T_{ki}^{-1} = \frac{A_{ik}}{|T_{ij}|}, \quad (16)$$

bu yerda: $A_{ik} = (-1)^{i+k} \Delta_{ik}$,

Δ_{ik} yuqoridagi determinant (15) elementi T ning minori, Δ_{ik} o'sha elementning algebraik to'ldiruvchisi.

(16) dagi tenzorning T_{ij} diskriminanti nolga teng emas, aks holda teskari tenzor haqida gapirishga asos kolmaydi.

Ikkinchi rangli tenzorni tegishli indeksleri bo'yicha yig'ishtirish natijasida hosil qilingan invariantlar tatbiqlarda muxim ahamiyatga ega. Ikkinchi rangli tenzorni matritsa shaklida va analitik shaklda ifodalaylik:

(1)

$$\|T_{kl}\| = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

$$T'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} T_{kl}. \quad (2)$$

Bu tenzorning ikki indeksini o'zaro tenglashtirib, so'ngra yig'ishtirsak, tubandagi invariant hosil bo'ladi:

$$I_1 = T_{kk} \quad (3)$$

yoki mufassalrok yozilsa:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} \quad (4)$$

bo'ladi.

Adabiyot

1. Mallin R.H. Maydon nazariyasi, T., O'qituvchi, 1965
2. Борисенко А.И., Тарасов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления, М., 1963
3. Кочин Н.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления, М., 1961
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, М., 1982
5. O'razboyev M. Nazariy mexanika asosiy kursi, T., 1987

1.	Kirish. Vektorlar va ular ustida amallar	
2.	Vektorlarning skalyar va vektor ko'paytmasi	
3.	Vektorlarning murakkab ko'paytmalari	
4.	Gradient tushunchasi	
5.	Oqim tushunchasi. Vektor maydon divergentsiyasi	
6.	Stoks teoremasi. Vektor maydon uyurmasi	
7.	Ikkincnchi tartibli differensial operatorlar	
8.	Egri chiziqli ortogonal koordinatalar	
9.	Differensial operatorlarning egri chiziqli koordinatalardagi ifodasi	
10.	Vektorning analitik ta'rifi	
11.	Tenzor tushunchasi	
12.	Tenzorlar bilan bajariladigan asosiy algebraik amallar	
13.	Tenzorlar simmetriyasi va antisimmetriyasi	